Espaces Vectorielles Réels

Sous espace vectoriel :

Un sous ensemble F de E est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

- $0_E \in F$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in F \quad \alpha x \in F$
- $\forall x, y \in F, \; x + y \in F$

Somme de deux sous-espace vectoriel

soit E et F deux sous espace vectoriel d'un espace

La somme de E et F est l'ensemble :

$$E + F = \{x + y \in X, \; x \in E, \; y \in F\}$$

famille génératrice

une famille $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ d'élément de E est dit génératrice de E si

$$E = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots x_n)$$

C.à.d : si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments $x_1 \dots, x_n$

$\forall X \in E \; ; \exists \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \dots \alpha_n x_n$$

On dit que $x_1, \dots, x_n$ famille génératrice

Dépendance et l'indépendance Linéaire

famille

Libre

On dit que la famille $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ libre si $\forall \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots \lambda_n x_n = 0_E$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \underline{0}$

Liée

On dit que la famille $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ Liée si $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$

$\lambda x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots \lambda_n x_n = 0_E$

$\Rightarrow$ On dit que les vecteurs : $x_1, x_2 \dots x_n$ sont linéairement dépendants

Base d'un espace vectoriel

On dit qu'une famille de vecteurs est <u>base</u> de E si elle est <u>libre</u> <u>et génératrice</u>

Dimension d'un espace vectoriel

→ soit E un espace vectoriel de dimension fini on appelle dimension de E le nombre de terme d'une base quelconque B de E noté :

- $\dim_{\mathbb{R}}(E) = \text{card}(B)$

→ soit F un sous-espace vectoriel de E

- $\dim F \leqslant \dim E$

→ Si $\dim E = \dim F \Rightarrow E = F$

→ soit F et G sous-espace vectoriel de F_2

- $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Fractions Rationnelles

Def :

Une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si $Pgcd(P, Q) = 1$, et si P et Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.

Le degrée de F :

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$$

* Proposition :

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle il existe d'une manière unique un polynome E strictement négatif tel que.

$$F = E + G$$

E : la partie entiere de F

Décomposition en éléments simple sur $\mathbb{C}$

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec

$$Q = (X - \alpha_1)^{k_1} (X - \alpha_2)^{k_2} \cdots \times (X - \alpha_r)^{k_r}$$

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{a_{1,1}}{(X - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{a_{1,2}}{(X - \alpha_1)^{k_1 - 1}} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{X - \alpha_1}$$

$$+ \frac{a_{2,1}}{(X - \alpha_2)^{k_2}} + \frac{a_{2,2}}{(X - \alpha_2)^{k_2 - 1}} + \cdots + \frac{a_{2,k_2}}{X - \alpha_2}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{a_{r,1}}{(X - \alpha_r)^{k_r}} + \frac{a}{(X - \alpha_r)^{k_r - 1}} + \cdots + \frac{a_{r,k_r}}{(X - \alpha_r)}$$

Décomposition en éléments simple dans $\mathbb{R}$

$$F = \frac{P}{Q} = E + \frac{\lambda_{1,1}}{(X-\alpha_1)} + \cdots + \frac{\lambda_{1,r_1}}{(X-\alpha_1)^{r_1}}$$

$$+ \frac{\lambda_{2,1}}{(X-\alpha_2)} + \cdots + \frac{\lambda_{2,r_2}}{(X-\alpha_2)^{r_2}} + \frac{\lambda_{p,1}}{(X-\alpha_p)}$$

$$+ \cdots \frac{\lambda_{p,r_p}}{(X-\alpha_p)^{r_p}}$$

Polynome

Def :
un polynôme de coefficients dans K est une expression de la forme

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

Remarque :
$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots a_n X^n \in K[X]$
$Q(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_n X^n$
P et Q sont égaux si seulement si $i \geq 0$ $a_i = b_i$

Le degrée :
$Q(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 \dots + b_n X^n$
$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n \in K[X]$
avec $a_n \neq 0$

- $\deg(P) = n$
  "Lorsque $a_n = 1 \Rightarrow P$ (Unitaire)"
- $\deg(P + Q) < \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Division Euclidiene
Soit $A, B \in K[X]$ avec $B \neq 0$
la division Euclidiene de A par B :

$$A = B \times Q + R$$

tel que : $\deg(R) < \deg(B)$

* Division selon les puissance croissantes :
Soit A et B deux polynôme de coefficient dans $K[X]$ avec $B(0) \neq 0$ pour tout entier naturel il existe un unique couple de polynôme (Q_n, R_n) tel que

$$A = B \times Q_n + X^{n+1} R_n \quad , \deg(Q_n) \leq n$$

Le Plus Grand commun diviseur "PGCd"
Soit A et $B \in K[X]$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$
le pgcd(A, B), lorsque unitaire le plus grand degrée qui divise à la fois A et B

Remarque : les polynôme A et B sont premiers entre eux lorsque $pgcd(A, B) = 1$

Racine d'un polynome

➔ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

On dit que α ($\in \mathbb{K}$) est un racine de P

Si : $P(\alpha) = 0$

➔ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- Si $n = 1$ ⇒ racine simple
- Si $n = 2$ ⇒ racine double
- Si $n > 2$ ⇒ racine de Multuplicité

Polynome dérivé

Soit : $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots a_1 X + a_0$

Le polynome dérivé de P est

$$P'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1$$

Polynome conjugaie

Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$

Le conjugaie de P est $\overline{P} \in \mathbb{C}[X]$

$$\overline{P}(X) = \overline{a_0} + \overline{a_1} X + \overline{a_2} X^2 + \cdots + \overline{a_n} X^n$$

Fraction dans $\mathbb{C}$

Soit polynome à coefficient complexes de degrée $n \geq 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$

Alors P s'ecrit sou la forme suivante

$$P = \lambda (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \cdots \times (X - \alpha_p)^{m_p}$$