Mi : 1ère année ; Résumé d'Algèbre.

Chap 0 : Un peu de logique

I – Proposition (pp) logique :

- Une pp est un énoncé dont on peut dire s'il est vrai ou faux.

ex : $2^3 = 18$ pp (V.V = 0) / $x \in \mathbb{N}$ pp.

– Calcul propositionnel : Soient p, q 2 pp données.

– La Négation : $\bar{p}$ ex p : $\sqrt{2} \geq 15$, $\bar{p}$: $\sqrt{2} < 15$.

– Les connecteurs logiques :

1 – Conjonction : – p et q, on note $p \wedge q$.

– $p \wedge q$ est vraie ssi p, q sont vraies simultanément.

2 – Disjonction : – p ou q, on note $p \vee q$.

– $p \vee q$ est fausse ssi p, q sont fausses simultanément.

3 – L'implication : si p ... alors ... q .., on note $p \Rightarrow q$ p:ḷ...

– $p \Rightarrow q = \bar{p} \vee q$

– $p \Rightarrow q$ est fausse ssi p est vrai et q est fausse.

4 – L'équivalence : – $p \Leftrightarrow q$ ($p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$).

– Tableau de vérité : (vraie = 1, fausse = 0).

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

II - Prédicat (fct propositionnelle) :

- C'est un énnoncé qui contient une ou plus variables, tel que si on donne aux variables des valeurs, on obtient des pptions.

- Quantificateurs :

- $\forall$: quel que soit. / - $\exists$: s'il existe au moins un élément.
universel existentiel ($\exists!$: un seul élément)

- Les quantificateurs transforment le prédicat à une pption.

*** Regles de Négation :** p, q deux pption :

- $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$
- $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$
- $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \bar{q}$
- $\overline{p \Leftrightarrow q} \equiv (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q})$
- $\overline{\forall x \in E : p(x)} \equiv \exists x \in E : \overline{p(x)}$
- $\overline{\exists x \in E : p(x)} \equiv \forall x \in E : \overline{p(x)}$

*** Methodes de raisonnement :**

Un exercice : hypothèses (p) $\Rightarrow$ Resultats à démontrer (q).

- La démonstration directe : démontré de "p" et arrivé à "q".
- La contraposée : au lieu de démontrer $p \Rightarrow q$ on démontre que $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.
- L'absurde : On suppose que A = 0 ($\bar{A} = 1$) et on arrive à une contradiction. $\bar{A}$ vraie $\xrightarrow{\text{but}}$ contradiction. $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q}$
- Contre exemple : pour justifier qu'un enoncé "A" est faux, On présente un ex qui le met a défaut.
- Par récurrence : - elle est réservé pour les prop dans $\mathbb{N}$.
  - étape 1 : vérifier les propriétés (pour n_0, n_1).
  - étape 2 : Supposer que la prop est vraie à l'ordre $\mathbb{N}(n)$, et Montrer qu'elle reste vrai à l'ordre $\mathbb{N}(n+1)$.

Chap I : Ensembles-Relations-Applications :

1- Ensembles

* Relations entre ensembles :

1- Inclusion : E est inclus dans F si tous les éléments de E sont dans F.

mathématiquement : $E \subset F \equiv (\forall x : x \in E \Rightarrow x \in F)$

- propriétés : $\emptyset \subset E$ / $E \subset E$ / $E \subset F \wedge F \subset G \Rightarrow E \subset G$.

2- Egalité : E est égal à F si $E \subset F \wedge F \subset E$.

math : $(E = F) \equiv (E \subset F \wedge F \subset E) \equiv (\forall x : x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

* Opération sur les ensembles :

① Intersection "$\cap$" : $A \cap B$ est l'ensemble des éléments communs.

math : $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$.

Rem : si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

② Réunion "$\cup$" : A union B est l'ens $= \{x / x \in A \vee x \in B\}$.

propriétés de $\cap$ et $\cup$:

- $A \cup A = A$ / $A \cap A = A$
- $A \cup \emptyset = A$.
- $A \cup B = B \cup A$ / $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

③ Différence : $A - B \, (A \setminus B) = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

pptés : $A - \emptyset = A$ / $\emptyset - A = \emptyset$ / $A - A = \emptyset \neq 0$ / $(A - B \neq B - A)$.

④ Différence symétrique : Δ : delta

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

* Ensemble des Parties d'un ensemble :

$\{E \in P(E)$ ✓
$\{E \subset P(E)$ ✗

- A est une partie de E si $A \subset E$.
- L'ens des parties de E est : $P(E) = \{A / A \subset E\}$ (toutes les parties de E)

* Complémentaire d'une partie :

E un ens, A une partie de E, On appelle Compl de A dans E l'ens :

$$C_E A = \{x / x \in E \wedge x \notin A\} \equiv E - A \ (x \in C_E A \Leftrightarrow x \notin A)$$

Propriétés : E ens ; A, B : des parties de E :

- $C_E \phi = E$ / $C_E E = \phi$ / $C_E(C_E A) = A$.
- $A \cap C_E A = \phi$ / $A \cup C_E A = E$.
- Règles de Morgan :

$$\begin{cases} C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B \\ C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B \end{cases}$$

* Produit Cartésien :

$$E \times F = \{(a,b) / a \in E \wedge b \in F\}$$

Couple ordonné (a $1^{ère}$ composante du couple, b $2^{ème}$ comp)

- $E \times F \neq F \times E$ / On note $E \times E$ par E^2.
- $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k$ / $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$

- Cas général !!

2_ Relations

* Une relation entre E, F (ensembles) est une règle qui permet d'associer aux elts de E des elts de F.

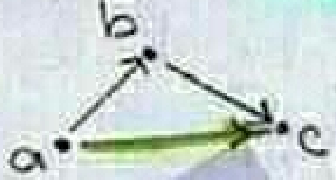
On la note : $a\mathcal{R}b$: a est en rel avec b.

* <u>Graphe d'une rel</u> :

$G_{\mathcal{R}} = \{(a,b) \in E \times F \,/\, a\mathcal{R}b\}$

* <u>Relations binaire.</u> (Propriétés) : $a\mathcal{R}b$

C'est une rel définie entre les elts de même ens.

reflixive	symetrique	transitive	antisymetrique
$\forall a \in E$: $a\mathcal{R}a$ 	$\forall a,b \in E$: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}a$ 	$\forall a,b,c \in E$: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$ 	$\forall a,b \in \mathbb{R}$: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a=b$

• <u>Relation d'équivalence</u> :

$\mathcal{R}$ est une rel d'équivalence si elle est : refl + sym + trans.

\- <u>Classe d'équivalence</u> :

C'est l'ens. $\bar{a} = \{x \in E \,/\, x\mathcal{R}a\}$.

• <u>Relation d'ordre</u> :

$\mathcal{R}$ est une rel d'ordre si elle est : refl + trans + antisym.

\- On dit que l'ordre est total si : $\forall a,b \in E : a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$

et il est partiel si : $\exists a,b \in E : a\not\mathcal{R}b \wedge b\not\mathcal{R}a$.

3- Applications :

* On appelle **application** de E vers F, toute **rel** qui permet d'associer à **chaque** elts de E **un seul** elts de F.

* **Egalité de deux app** : $f \equiv g$ si $E = E'$ ∧ $F = F'$; $\forall x : f(x) = g(x)$

* **Image directe d'une partie A** : $f(A)$

$f : E \to F$ (une appl) / $A \subset E$:

$f(A) = \{\underbrace{f(x)}_{\text{images}} / x \in A\}$; $f(A) \subset F$

* **Image réciproque de B** : $f^{-1}(B)$

$f : E \to F$ / $B \subset F$

$f^{-1}(B) = \{\underbrace{x \in E}_{\text{antécédents}} / f(x) \in B\}$; $f^{-1}(B) \subset E$

* **La Composition des applications** :

$f : E \to F$; $g : F \to G$

La composée de f et g est : $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$: (f compose g).

* **Propriétés d'une app** :

- **injective** : $\forall a, b \in E$: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

La négation : $\exists\, a, b \in E : f(a) = f(b) \wedge a \neq b$.

- **surjective** : $\forall y \in F$ $\exists ?\, x \in E$: $y = f(x)$

- Notion de Bijection : f **bij** $\Leftrightarrow$ f **inj** + f surj