

1- Les \mathbb{k} -espaces vectoriels

1-1- Généralités :

Un \mathbb{k} -espace vectoriel est un ensemble des vecteurs dans lequel les opérations élémentaires des vecteurs (la somme et le produit par un scalaire) restent valides.

► Pour montrer que F est un \mathbb{k} -espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il est un sous espace vectoriel inclus dans un \mathbb{k} -espace vectoriel connu.

► Pour montrer que F est un sous espace vectoriel il suffit de montrer :

1. $F \neq \emptyset$.
2. $(\forall a \in \mathbb{k}) (\forall x \in F) a.x \in F$ (stabilité par la loi externe).
3. $(\forall (x, y) \in F^2) x + y \in F$ (stabilité par la loi interne).

Ou bien seulement, $(\forall a \in \mathbb{k}) (\forall (x, y) \in F^2) x + ay \in F$ et $0 \in F$.

1-2- Une base d'un \mathbb{k} -espace vectoriel :

Chaque \mathbb{k} -espace vectoriel admet une base, c'est un ensemble des vecteurs qui déterminent le nombre de ses dimensions. C'est une partie génératrice et libre en même temps.

► Pour montrer que $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E , on peut suivre l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1 : Une base = génératrice + libre :

1. Montrer que B est génératrice.

Soit $x \in E$, il faut écrire x sous forme d'une combinaison linéaire des e_i , c'est à dire sous forme $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n$.

On dira alors que B est une famille génératrice de E et on écrit $E = \text{vect}(B)$.

2. Montrer que B est libre.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n$ tel que $a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_n e_n = 0_E$. Il faut montrer que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

On dira alors que B est une famille libre.

Méthode 2 : Une famille génératrice minimale est une base.

Si on connaît déjà que n est la dimension de l'espace, il suffit de montrer que B est une famille génératrice pour dire que c'est une base (sans montrer qu'elle est libre).

Méthode 3 : Une famille libre maximale est une base.

Si on connaît déjà que n est la dimension de l'espace, il suffit de montrer que B est une famille libre pour dire que c'est une base (sans montrer qu'elle est génératrice).

Méthode 4 : Matricielle.

Si on connaît déjà que n est la dimension de l'espace, on écrit les coordonnées des e_i par lignes (ou par colonnes, peu importe) pour obtenir une matrice M . Il suffit alors que le déterminant de M soit non nul pour dire que B est une base.

Ces méthodes ne sont pas les seules, mais ce sont les plus fréquentes.

- ▶ Le nombre des éléments d'une base = la dimension.
- ▶ La dimension de l'espace $\{0\}$ est 0 et sa base est $B = \emptyset$.
- ▶ Le nombre des éléments d'une famille génératrice \geq la dimension.
- ▶ Le nombre des éléments d'une famille libre \leq la dimension.
- ▶ **Théorème de la base incomplète :**
 1. Si S est une famille génératrice qui a un nombre des éléments supérieur strictement à la dimension, on peut toujours éliminer quelques vecteurs dedans jusqu'à obtenir une base.
 2. Si S est une famille libre qui a un nombre des éléments inférieur strictement à la dimension, on peut toujours ajouter quelques vecteurs dedans jusqu'à obtenir une base.

1-3- La somme directe des sous espaces :

Lorsqu'on a F un sous espace de E de dimension $m < n$, alors il y a des dimensions qui manquent. Si on considère G le sous espace qui rassemble ces dimensions manquantes, on dira alors que E est la somme directe de F et G (ou bien F et G sont supplémentaires) et on écrit $E = F \oplus G$.

▶ Pour montrer que $E = F \oplus G$, On peut suivre l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1 : Par définition :

1. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
2. Soit $x \in E$, trouver $x_F \in F$ et $x_G \in G$, tel que $x = x_F + x_G$.

Méthode 2 : Par la dimension :

1. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
2. Vérifier que $\dim F + \dim G = \dim E$.

Méthode 3 : Par les bases. Soient B_F et B_G des bases de F et G resp. :

1. Vérifier que $B_G \cap B_F = \emptyset$
2. Montrer que $B_G \cup B_F$ est une base de E .

Ces méthodes ne sont pas les seules, mais ce sont les plus fréquentes.

- ▶ Si $E = F \oplus G$ alors $\dim E = \dim F + \dim G$.
- ▶ Si $E = F \oplus G$ alors $B_F \cup B_G$ est une base de E .
- ▶ Si F est un sous espace vectoriel de E , on peut toujours le compléter pour obtenir E en faisant une somme directe avec un certain sous espace vectoriel G (i.e. il existe un sous espace G , tel que $E = F \oplus G$).

1-4- L'espace quotient :

Si la somme directe permet d'ajouter des dimension à un sous espace, le quotient permet d'annuler des dimensions déjà existantes. Si E un \mathbf{k} -espace vectoriel, on veut annuler les dimensions déterminé par les vecteurs $\{v_1, \dots, v_d\}$,

alors on pose $F = \text{vect}(v_1, \dots, v_d)$ et on fait le quotient E/F qui donne l'espace privé des dimensions de F .

- ▶ Les éléments de E/F sont des classes \bar{x} des $x \in E$.
- ▶ Dans E/F , $\bar{x} = \bar{y}$ désigne que $x - y \in F$.
- ▶ Dans E/F , $\bar{x} = \bar{0}$ désigne que $x \in F$.
- ▶ $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$.
- ▶ $(F \oplus G)/F \sim G$ et $(F \oplus G)/G \sim F$.

2- Les applications linéaires et les matrices :

2-1- Généralités :

Une application linéaire est une application pour dont l'image d'une ligne reste une ligne (image d'une droite est une droite).

▶ Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire (avec E et F sont des \mathbb{k} -espaces vectoriels) on montre :

1. $(\forall a \in \mathbb{k})(\forall x \in E) f(a.x) = a.f(x)$.
2. $(\forall (x, y) \in E^2) f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Ou bien seulement $(\forall a \in \mathbb{k})(\forall (x, y) \in E^2) f(x + a.y) = f(x) + a.f(y)$.

- ▶ Une application linéaire est un **homomorphisme** de E dans F .
- ▶ Une application linéaire bijective est un **isomorphisme** de E dans F . (on dit dans ce cas que E est isomorphe à F , noté $E \sim F$).
- ▶ Si $E = F$, l'homomorphisme sera appelé **endomorphisme**. S'il est de plus bijectif, il sera appelé **automorphisme**.
- ▶ $\text{Ker}f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E .
- ▶ $\text{Im}f = \{f(x) \in F \mid x \in E\}$ est un sous espace vectoriel de F .
- ▶ le rang de f est la dimension de $\text{Im}f$. $\text{rang}(f) = \dim \text{Im}f$.
- ▶ Pour montrer que f est surjectif, il suffit de montrer que $\text{Im}f = F$ (ou encore, $\text{rang}(f) = \dim F$).
- ▶ Pour montrer que f est injectif, il suffit de montrer que $\text{Ker}f = \{0\}$ (ou encore, $\text{rang}(f) = \dim E$).
- ▶ Une application linéaire f est dite **nilpotente** s'il existe un entier $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $f^\alpha = 0$. Son **indice de nilpotence** est la première puissance qui l'annule, c'est à dire β tel que $f^\beta = 0$ et $f^{\beta-1} \neq 0$.
- ▶ Si f nilpotente d'indice β , et $x \in E$ tel que $f^{\beta-1}(x) \neq 0$, alors $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{\beta-1}(x)\}$ est un système libre.

2-2- Propriétés sur les isomorphismes :

- ▶ Si $\dim E = \dim F$, pour montrer que l'homomorphisme f est bijectif, il suffit de montrer qu'il est injectif (sans montrer la surjectivité), ou bien montrer la surjectivité (sans montrer l'injectivité).
- ▶ **Théorème d'isomorphisme** : $E/\text{Ker}f$ est isomorphe à $\text{Im}f$ (ils auront la même dimension).
- ▶ **Théorème du rang** : $\dim \text{Ker}f + \text{rang}(f) = \dim E$.

► Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et f un isomorphisme de E dans F , alors $B' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

2-3- Les présentation matricielles des applications linéaires :

Si $\dim E = n$ et $\dim F = m$, alors la présentation matricielle de f sera une matrice de n colonnes et m lignes.

► Soient $B_E = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $B_F = \{v_1, \dots, v_m\}$ des bases de E et F respec-

tivement. Si
$$\begin{cases} a_{1,1}v_1 + a_{2,1}v_2 + \dots + a_{m,1}v_m = f(u_1) \\ a_{1,2}v_1 + a_{2,2}v_2 + \dots + a_{m,2}v_m = f(u_2) \\ \vdots \\ a_{1,n}v_1 + a_{2,n}v_2 + \dots + a_{m,n}v_m = f(u_n) \end{cases}$$
 alors la pré-

sentation matricielle de f par rapport aux bases B_E et B_F est la matrice

$$\text{mat}(f, B_E, B_F) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

► Si M est la matrice de f dans la base canonique, alors les coordonnées de

$$f((x_1, \dots, x_n)) \text{ sont les coordonnées de } M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

► f est bijectif désigne que sa matrice est inversible.

► Le rang de f est le nombre des pivots de sa matrices après l'échelonnement.

► **La matrice de passage :** Si M est la matrice de l'endomorphisme f dans la base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ et M' sa matrice dans la base $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ alors il existe une matrice inversible P (appelée la matrice de passage de B à B') telle que $M' = P^{-1}MP$.

$$\text{Et si } \begin{cases} a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + \dots + a_{n,1}e_n = e'_1 \\ a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + \dots + a_{n,2}e_n = e'_2 \\ \vdots \\ a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \dots + a_{n,n}e_n = e'_n \end{cases}$$

$$\text{alors } P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

(on écrit les coordonnées de la nouvelle base par colonnes)

2-4- Propriétés sur les matrices :

► Pour montrer qu'une matrice est inversible, on peut suivre l'une des méthodes suivantes :

Le déterminant : vérifier que son déterminant est non nul.

