

ESPACES VECTORIELS
&
APPLICATIONS LINEAIRES
L1, MATHS-INFO.

Adolphe CODJIA

2024-2025

Table des matières

1	ESPACES VECTORIELS	2
1.1	Introduction	4
1.2	Définition d'un espace vectoriel	5
1.3	Définition générale d'un espace vectoriel sur un corps commutatif $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$	6
1.3.1	Tableau de simularité	7
1.3.2	Exemples	7
1.4	Suite liée de vecteurs. Suite libre de vecteurs	8
1.5	Espaces vectoriels de dimension finie	10
1.5.1	Espace vectoriel ayant un nombre fini de générateurs	10
1.5.2	Base d'un espace vectoriel	10
1.5.3	Déterminant d'une suite de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie	12
1.6	Sous-espaces vectoriels	13
1.6.1	Exemples de sous-espaces vectoriels	14
1.6.2	Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie	14
1.6.3	Rang d'une suite finie de vecteurs	14
1.6.4	Sous-espaces supplémentaires	17
1.6.5	Détermination d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel(+)	18
1.6.6	Somme de n sous-espaces vectoriels	18
1.7	Produit de deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif \mathbb{K}	19
2	APPLICATIONS LINÉAIRES	21
2.1	Image et Noyau	22
2.1.1	Le théorème noyau-image	25
2.1.2	Rang d'une application linéaire	25
2.1.3	Projections et symétries linéaires	26
2.2	Opérations sur les applications linéaires	26
2.2.1	L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$	26
2.2.2	Composition des applications linéaires	27
2.3	Espace vectoriel quotient(+)	27
2.3.1	Construction de l'espace vectoriel quotient de E par F	27
2.3.2	Problème(+)	28
2.4	Matrice d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$	28
2.4.1	Utilisation du rang d'une matrice associée à une application linéaire pour trouver son noyau et son ensemble image.(+)	30
2.4.2	Utilisation de l'échelonnage d'une matrice associée à une application linéaire pour trouver l'équation caractéristique de son ensemble image(+)	31

2.4.3	Changement de bases	32
2.4.4	Déterminant et trace d'un endomorphisme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie	34

PREAMBULE

Ici, on traite avec une structure algébrique incontournable en algèbre linéaire. Partant d'un groupe abélien E , auquel on adjoint une loi de composition externe moyennant un corps commutatif \mathbb{K} , comme ensemble d'action sur E avec quatre lois mêlant lois de compositions interne et externe coexistantes sur E pour disposer d'une structure d'espace vectorielle sur E . En dimension finie, on peut disposer de la boîte à outils qu'est le calcul matriciel en choisissant une base sur l'espace vectoriel en question, aussi les bases existent en nombre infini sur une telle structure algébrique. Ensuite, on va se pencher sur les homomorphismes d'espaces vectoriels qui porteront le nom d'applications linéaires. Toutefois d'une base à une autre il y a la matrice de passage d'une base à une autre qui permet d'avoir le correspondant de tout ce qu'on a avec une base pour l'autre base choisie. Ici il y a un bonheur jouissif à maîtriser les arcades du calcul matriciel. Alors souhaitons nous féconde aventure intellectuelle.
(+=aller loin).

Chapitre 1

ESPACES VECTORIELS

1.0 Quelques rappels sur les structures algébriques

1. Une loi de composition interne sur un ensemble $E \neq \emptyset$, est une loi "*" qui permettrait de composer deux éléments a, b de E pour avoir comme résultat $a * b \in E$; un élément de E , dans la composition $a * b$; a et b sont les opérands et le résultat est : $a * b$.

2. Une loi de composition externe sur un ensemble $E \neq \emptyset$ au moyen d'un autre ensemble \mathbb{K} est une loi "T" qui permettrait de composer un élément $\alpha \in \mathbb{K}, b \in E$ pour avoir comme résultat $\alpha T b \in E$; un élément de E , dans la composition $\alpha T b$; α et b sont les opérands et le résultat est : $\alpha T b$.

Ainsi avec une loi ou des lois de compositions internes ou externes vérifiant certaines propriétés, on a des structures algébriques.

3. En ce qui nous concerne, nous avons vu, les unes après les autres les structures suivantes :

Magmas \implies Semi-groupes \implies Monoïdes \implies Groupes \implies Anneaux \implies Corps
 \implies Espaces Vectoriels.

NB : \implies signifie : de ce qui précède découle ce qui suit

4. Toutes structures algébriques s'accompagnent d'une sous-structure et de morphisme de même structures. Ici une sous-structure algébrique d'une structure algébrique donnée E est un sous ensemble non vide $A \subset E$ tel que vis-à-vis de lui-même ce sous ensemble A a la structure de E (exemple un sous-groupe F d'un groupe E , qui serait vis-à-vis de lui-même un groupe)

Structures	Sous-structures	Morphismes de mêmes structures
Magmas	Parties stables	$f : (E, *) \rightarrow (F, T),$ $\forall x, y \in E, f(x * y) = f(x) T f(y)$
Semi-groupes	Parties stables	$f : (E, *) \rightarrow (F, T),$ $\forall x, y \in E, f(x * y) = f(x) T f(y)$
Monoïdes avec un élément neutre e	Parties stables auquel e appartient	$f : (E, *) \rightarrow (F, T),$ $\forall x, y \in E, f(x * y) = f(x) T f(y),$ $f(e_*) = e_T$ avec e_* élément neutre de $(E, *)$ et e_T elt neutre de (F, T)
Groupes symt $_*(x)$ =symétrie par rapport à "*" de x	Sous-groupes	$f : (E, *) \rightarrow (F, T), \forall x, y \in E,$ $f(x * y) = f(x) T f(y),$ avec $f(e_*) = e_T$ $f(\text{symt}_*(x)) = \text{symt}_T f(x)$
Anneaux	Sous-anneaux	$f : (E, *, \perp) \rightarrow (F, T, +), \forall x, y \in E,$ $f(x * y) = f(x) T f(y),$ avec $f(e_*) = e_T$ $f(\text{symt}_*(x)) = \text{symt}_T f(x)$ $f(x \perp y) = f(x) + f(y)$
Corps	Sous-corps	$f : (E, *, \perp) \rightarrow (F, T, +), \forall x, y \in E,$ $f(x * y) = f(x) T f(y),$ avec $f(e_*) = e_T$ $f(\text{symt}_*(x)) = \text{symt}_T f(x)$ $f(x \perp y) = f(x) + f(y),$ avec $f(e_\perp) = e_+$ $f(\text{symt}_\perp(x)) = \text{symt}_+ f(x), x \in E \setminus \{e_*\}$
\mathbb{K} -Espaces Vectoriels ; où \mathbb{K} un corps commutatif	Sous-espaces vectoriels	$f : (E, *, \cdot)_{\mathbb{K}} \rightarrow (F, T, +)_{\mathbb{K}'}, \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$ $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},$ $f(x * y) = f(x) T f(y),$ avec $f(e_*) = e_T ; f(\text{symt}_*(x)) = \text{symt}_T f(x)$ $f(\alpha \cdot y) = \alpha + f(y)$ f s'appelle application linéaire de E dans F

5. Soit f un morphisme de mêmes structures algébriques : $f : E \rightarrow F$;

on a :

(i). A sous-structure de $E \Rightarrow f(A)$ est une sous-structure de F

(ii). B sous-structure de $F \Rightarrow f^{-1}(B)$ est une sous-structure de E

(iii). Il est lié à tout morphisme de mêmes structures algébriques : $f : E \rightarrow F$

deux sous-structures ; l'une de E , et l'autre de F à partir des monoïdes.

Celle de E , s'appelle *noyau* de f et notée $\ker f = \{x \in E ; f(x) = e_F\}$

où e_F élément neutre de la première loi de composition interne de F

et l'autre de F , s'appelle *image* de f et notée $\text{Im } f = f(E) = \{f(x) ; x \in E\}$

c'est l'ensemble image de f avec les propriétés suivantes :

1. $\ker f = \{e_E\} \Leftrightarrow f$ est injective, avec e_E élément neutre de la première loi de composition interne de E .
2. $\text{Im } f = f(E) = F \Leftrightarrow f$ est surjective

Objectifs

- * Connaître les définitions d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, d'un vecteur nul, d'une combinaison linéaire de vecteurs, de famille de vecteurs libre, liée, génératrice, d'un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, d'une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, de la dimension d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, des coordonnées d'un vecteur dans une base donnée sur un \mathbb{K} -espace vectoriel, avoir un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , comme un sous-ensemble de E engendré par des vecteurs de E .
Aussi bien que savoir les déterminer comme tels.
- * Savoir déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- * Savoir déterminer une base des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes

1.1 Introduction

Dans $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan, on a :

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{u} + \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$ on dit que "+" est une loi de composition interne sur $\vec{\mathcal{P}}$ avec les propriétés suivantes :

$$(1) \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}.$$

On dit que la loi "+" est associative dans $\vec{\mathcal{P}}$

$$(2) \text{ Le vecteur } \vec{0} \in \vec{\mathcal{P}} \text{ vérifie : } \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$$

On dit que la loi "+" admet un élément neutre dans $\vec{\mathcal{P}}$ qui est ici $\vec{0} \in \vec{\mathcal{P}}$ dit vecteur nul de $\vec{\mathcal{P}}$.

$$(3) \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \text{ on a : } (-\vec{u}) \in \vec{\mathcal{P}} \text{ et } \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$$

On dit que tout élément $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ admet un symétrique unique qui est $(-\vec{u}) \in \vec{\mathcal{P}}$.

$$(4) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}.$$

On dit que la loi "+" est commutative dans $\vec{\mathcal{P}}$

Dès lors, on dit que $(\vec{\mathcal{P}}, +)$ est un groupe commutatif ou abélien

(ii) $\forall \alpha \in (\mathbb{R}, +, \times), \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \alpha \cdot \vec{u} = \alpha \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ on dit que "." est une loi de composition externe sur $\vec{\mathcal{P}}$ au moyen du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ avec les propriétés suivantes :

$$(5) 1 \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}. (1 \text{ est l'élément neutre de } (\mathbb{R}, \times))$$

$$(6) \alpha (\beta \vec{u}) = (\alpha \times \beta) \vec{u}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(7) \alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}.$$

$$(8) (\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}.$$

On a ainsi une structure d'espace vectoriel sur $\vec{\mathcal{P}}$ et

on dit que $(\vec{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Dans la suite on va généraliser la situation ci-dessus dans le sens :

1. Remplacer $\vec{\mathcal{P}}$ par un ensemble non vide E , qui muni de "+" loi de composition interne sur E et "." loi de composition externe sur E au moyen d'un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ (notée aussi ".") quelconque. Ici $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.
Tel que conformément aux éléments de E on a les propriétés (1) à (8).
et ainsi avoir encore une structure d'espace vectoriel sur E et dire

alors $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2. On pourrait aussi changer diversement les symboles des lois qui sont en jeu dans **1.** par exemple : $(E, +, \cdot)$ qui devient (E, \oplus, \otimes) et $(\mathbb{K}, +, \times)$ (notée aussi ".") devant $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$ avec les propriétés (1) à (8) assurées, et ainsi avoir encore une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel sur E .

1.2 Définition d'un espace vectoriel

Définition(courante)

Un groupe commutatif $(E, +)$ est un ensemble $E \neq \emptyset$ muni d'une loi de composition interne $(x + y) \in E$, définie pour tous éléments x et y de E ,

ayant les propriétés suivantes :

- (1) Associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in E$
- (2) Il existe un élément neutre $0 \in E$ qui vérifie : $\forall x \in E, x + 0 = 0 + x = x$.
- (3) Tout élément x de E possède un symétrique, noté $-x \in E$ tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- (4) Commutativité : $x + y = y + x, \forall x, y \in E$.

Soit $(E, +)$ un groupe commutatif et $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}, +, \times)$ un corps commutatif. Nous dirons que $(E, +)$ est un **espace vectoriel sur \mathbb{K}**

(qui est appelé le corps de base de l'espace vectoriel)

s'il existe une loi de composition **externe** "." associant à tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout élément $x \in E$, un élément de E , noté $\alpha \cdot x = \alpha x$, avec les propriétés suivantes :

- (5) $1x = x$, tout élément $x \in E$. (1 est l'élément neutre (\mathbb{K}, \times))
- (6) $\alpha(\beta x) = (\alpha \times \beta)x$, tout élément $x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- (7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$.
- (8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tout élément $x \in E$.

Aussi on dit que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définitions

1. Un élément x de $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel (qu'on pourrait écrire \vec{x}) est dit **vecteur** et ceux de \mathbb{K} **scalaires**.

2. Deux vecteurs x et y de E sont dit **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$y = \lambda x.$$

Remarque

Nous laissons au lecteur le soin de distinguer l'élément neutre de $(E, +)$.

(qu'on pourrait écrire $\vec{0}$ ou 0_E ou simplement 0 s'il n'y pas de confusion possible), qui est un vecteur, appelé **vecteur nul** de E , de l'élément nul 0 de \mathbb{K}

(qu'on pourrait écrire $0_{\mathbb{K}}$), qui est un scalaire.

Ces éléments vérifient les règles de calcul suivantes :

Tout élément $x \in E$ $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$, d'après (8) si $\beta = -\alpha$.

Tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot x = 0_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

On a en outre : $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$, tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Et, en particulier $(-1)x = -(1 \cdot x) = -x$.

Remarque

Tout ensemble non vide (E, \top, \perp) muni de deux lois de composition : " \top " la première, une loi de composition interne tel que (E, \top) soit un groupe commutatif car vérifiant les propriétés (1) jusqu'à (4) et " \perp " la deuxième loi étant une loi de composition externe sur E moyennant un ensemble de

scalaires $\alpha \in \mathbb{K}$ un corps commutatif et vérifiant relativement les propriétés (5) jusqu'à (8) est dit un \mathbb{K} -espace vectoriel. En effet :

1.3 Définition générale d'un espace vectoriel sur un corps commutatif $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$

Ici $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$ est un corps commutatif dont l'élément neutre de la deuxième loi est noté e_{\clubsuit} et l'élément neutre de la première loi est e_{\heartsuit} .

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition **interne** notée " \oplus ", de sorte que (E, \oplus) soit un **groupe commutatif** d'élément neutre e_{\oplus} .

Aussi, on munit E d'une loi de composition **externe** " \otimes " sur \mathbb{K} , c'est-à-dire $\otimes : E \times \mathbb{K} \longrightarrow E, (x, \lambda) \longmapsto \lambda \otimes x,$

Si on a :

(1) $e_{\clubsuit} \otimes x = x$, tout élément $x \in E$.

(2) $\alpha \otimes (\beta \otimes x) = (\alpha \clubsuit \beta) \otimes x$, tout élément $x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

*(Ceci **semble** être l'associativité de la loi " \otimes ", mais comme $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \otimes \beta$ n'a pas de sens dans \mathbb{K} , au vu du calcul vectoriel dans le plan, il conviendrait de poser $(\alpha \clubsuit \beta)$ au lieu de $\alpha \otimes \beta$).*

(3) $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$.

(la loi de composition externe sur E est distributive à gauche

(car la loi de composition externe " \otimes " sur E a le scalaire à gauche : $(x, \lambda) \longmapsto \lambda \otimes x$ par rapport à la loi de composition interne sur E)

(4) $(\alpha \heartsuit \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tout élément $x \in E$.

*(la loi de composition externe sur E **semble** distributive de " \otimes " par rapport à la loi " \heartsuit " 1^{ère} loi de composition interne sur \mathbb{K} , où dans le développé pour une question de définition " \heartsuit " est remplacée par " \oplus " la loi de composition interne sur E , car $(\alpha \otimes x); (\beta \otimes x) \in E$ et $(\alpha \otimes x) \heartsuit (\beta \otimes x)$ n'a pas de sens dans E , d'où le remplacement).*

En plus d'avoir (E, \oplus) comme un **groupe commutatif**, nous dirons que

(E, \oplus, \otimes) a une **structure d'espace vectoriel sur le corps commutatif** $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$.

1.3.1 Tableau de similarité

$(\vec{\mathcal{P}}, +, \cdot); \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{u} + \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}},$ $\forall \alpha \in (\mathbb{R}, +, \times), \alpha \cdot \vec{u} = \alpha \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$	$(E, \oplus, \otimes); \forall x, y \in E, x \oplus y \in E,$ $\forall \alpha \in (\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit), \alpha \otimes \vec{u} \in E$
(1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w},$ $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$	(1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$ $\forall x, y, z \in E$
(2) $\vec{0} \in \vec{\mathcal{P}}; \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$	(2) $e_{\oplus} \in E; \forall x \in E,$ $x \oplus e_{\oplus} = e_{\oplus} \oplus x = x.$
(3) $\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, (-\vec{u}) \in \vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$	(3) $\forall x \in E, \text{symét}_{\oplus}(x) \in E,$ $x \oplus \text{symét}_{\oplus}(x) = \text{symét}_{\oplus}(x) \oplus x = e_{\oplus}.$
(4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}.$	(4) $x \oplus y = y \oplus x, \forall x, y \in E.$
(5) $1 \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}.$ (1 est l'élémt neutre de (\mathbb{R}, \times))	(5) $e_{\clubsuit} \otimes x = x, \forall x \in E.$
(6) $\alpha(\beta \vec{u}) = (\alpha \times \beta) \vec{u}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$	(6) $\alpha \otimes (\beta \otimes x) = (\alpha \clubsuit \beta) \otimes x, \forall x \in E,$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$
(7) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}, \forall \alpha \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}.$	(7) $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y),$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E.$
(8) $(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}.$	(8) $(\alpha \heartsuit \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x),$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E.$

Définitions

1. Un élément x de (E, \oplus, \otimes) un \mathbb{K} -espace vectoriel (qu'on pourrait écrire \vec{x}) est dit **vecteur** et ceux de \mathbb{K} **scalaires**.

2. Deux vecteurs x et y de E sont dit colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$y = \lambda \otimes x.$$

Remarques

Le vecteur nul de (E, \oplus, \otimes) est l'élément neutre e_{\oplus} .

Ici e_{\heartsuit} et e_{\clubsuit} sont des scalaires éléments neutres respectifs de \heartsuit, \clubsuit .

Ces éléments vérifient les règles de calcul suivantes :

□ Tout élément $x \in E$ $e_{\heartsuit} \otimes x = e_{\oplus}$, d'après (4) si $\beta = \text{symét}_{\heartsuit}(\alpha)$.

(Soulignons que $\text{symét}_{\heartsuit}(\alpha)$ est le symétrique de α par rapport à la loi \heartsuit .

Et que $\text{symét}_{\heartsuit}(\alpha) \heartsuit \alpha = \alpha \heartsuit \text{symét}_{\heartsuit}(\alpha) = e_{\heartsuit}$.)

□ Tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \otimes x = e_{\oplus} \iff \alpha = e_{\heartsuit}$ ou $x = e_{\oplus}$.

□ On a en outre : $\alpha \otimes \text{symét}_{\oplus}(x) = (\text{symét}_{\heartsuit}(\alpha)) \otimes x = \text{symét}_{\oplus}(\alpha \otimes x),$
tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

□ Et, en particulier $(\text{symét}_{\heartsuit}(e_{\clubsuit})) \otimes x = \text{symét}_{\oplus}(e_{\clubsuit} \otimes x) = \text{symét}_{\oplus}(x).$

1.3.2 Exemples

a) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et n un entier naturel non nul.

On munit l'ensemble \mathbb{K}^n des lois définies par les formules ci-dessous :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n,$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n).$$

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

$$\alpha (u_1, u_2, \dots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n).$$

Ces lois font de \mathbb{K}^n un \mathbb{K} -espace vectoriel.

b) L'ensemble $\mathbb{C}[x]$ des polynômes à une variable x et à coefficients dans \mathbb{C}

est un espace vectoriel sur le corps des nombre complexes, l'addition étant celle des polynômes et la multiplication par un nombre complexe c le produit

de c par un polynôme .

Ce même ensemble est aussi un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} des nombres réels avec une loi externe de multiplication par un nombre réel. On dit que $\mathbb{C}[x]$ est un espace vectoriel complexe si son corps de base est \mathbb{C} Si le corps de base est \mathbb{R} , on dit qu'on a un espace vectoriel réel.

c) L'ensemble $M_{pq}(\mathbb{K})$ des matrices de type (p, q) muni de l'addition est un groupe commutatif en association avec la loi de composition externe (qui est la multiplication par un scalaire complexe ou réel, d'une matrice) fait de $M_{pq}(\mathbb{K})$ un \mathbb{K} -espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} .

Définition

Soit une suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de n vecteurs d'un $(\mathbb{K}, +, \times)$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$; une **combinaison linéaire** de cette suite est un élément de E de la forme :

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires de \mathbb{K} ce sont les coefficients de la combinaison linéaire; aussi dit-on que y est combinaison linéaire des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n .

Aussi une suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de n vecteurs d'un $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$ -espace vectoriel (E, \oplus, \otimes) ; une **combinaison linéaire** de cette suite est un élément de E de la forme :

$$y = (\alpha_1 \otimes x_1) \oplus (\alpha_2 \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (\alpha_n \otimes x_n)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires de \mathbb{K} ce sont les coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple

Dans \mathbb{R}^2 , $x = -2(1, 4) + 7(-4, 5) - 3(6, 9)$ est une combinaison de la suite de vecteurs $((1, 4); (-4, 5), (6, 9))$.

1.4 Suite liée de vecteurs. Suite libre de vecteurs

Définition 3. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, on dit que la suite de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) de E est **liée** si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, **non tous nuls**, tels que :

$$(9) : \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E$$

On dit également, par abus de langage, que les vecteurs de la suite sont **liés**, ou encore **linéairement dépendants**.

Si la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre**, ou encore que x_1, x_2, \dots, x_n sont libres ou **linéairement indépendants**; ceci signifie que l'égalité (9) entraîne $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Si la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre, il en est de même de toute suite partielle et, en particulier, tous les éléments x_i de la suite sont distincts.

Exemples

1. Soit $x(1, 4) + y(-4, 5) + z(6, 9) = (x - 4y + 6z, 4x + 5y + 9z) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 6z = 0 \\ 4x + 5y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{22}{7}z; y = \frac{5}{7}z$$

avec z réel quelconque, ainsi $((1, 4); (-4, 5), (6, 9)) \subset \mathbb{R}^2$ est une suite liée.

2. Soit $x(1, 4) + y(-4, 5) = (x - 4y, 4x + 5y) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$$

Ainsi $((1, 4); (-4, 5))$ est une suite libre.

EXERCICE 1

Montrer que les vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :

1. $u = (1, 2, -1); v = (1, 0, 1); w = (-1, 2, -3)$

2. $u = (1; 2; 3), v = (4; 5; 6), w = (-1; 2; 3)$

3. $u = (-1, 2, 5); v = (2, 3, 4); w = (7, 0, -7);$

Proposition de correction

1. $u = (1, 2, -1); v = (1, 0, 1); w = (-1, 2, -3)$

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v - u \\ w + u \end{matrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v - u \\ w + u + 2(v - u) \end{matrix} \Rightarrow w + u + 2(v - u) = \vec{0}$$

$$w + u + 2(v - u) = \vec{0} \Leftrightarrow w + u + 2(v - u) = 2v - u + w = \vec{0}; \text{ donc}$$

la famille $\{u, v, w\}$ est une famille liée et la relation de dépendance

liant les vecteurs : u, v, w est : $2v - u + w = \vec{0}$.

2. $u = (1; 2; 3), v = (4; 5; 6), w = (-1; 2; 3)$

$$\text{Soit } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v - 4u \\ w + u \end{matrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v - 4u \\ 3(w + u) + 4(v - 4u) \end{matrix}$$

$\Rightarrow \text{rang}(B) = 3 = \text{card}(u, v, w)$ donc la famille est libre, ici on

n'a pas de dépendance linéaire.

3. $u = (-1, 2, 5); v = (2, 3, 4); w = (7, 0, -7)$.

$$\text{Soit } C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 14 & 28 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v + 2u \\ w + 7u \end{matrix}$$

$$C \approx \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v + 2u \\ w + 7u - 2(v + 2u) \end{matrix} \Rightarrow w + 7u - 2(v + 2u) = \vec{0}$$

$$w + 7u - 2(v + 2u) = \vec{0} \Leftrightarrow w + 7u - 2(v + 2u) = 3u - 2v + w = \vec{0}; \text{ donc}$$

la famille $\{u, v, w\}$ est une famille liée et la relation de dépendance

liant les vecteurs : u, v, w est :

$$3u - 2v + w = \vec{0} \Leftrightarrow u = \frac{1}{3}(2v - w) \Leftrightarrow v = \frac{1}{2}(3u + w) \Leftrightarrow w = 2v - 3u.$$

Propriété 1

Pour qu'une suite de vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n soit liée, il faut et il suffit que l'un d'eux soit une combinaison linéaire des autres.

1.5 Espaces vectoriels de dimension finie

1.5.1 Espace vectoriel ayant un nombre fini de générateurs

Définition 4. On dit qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel E possède n **générateurs** x_1, x_2, \dots, x_n , si x_1, x_2, \dots, x_n sont des vecteurs de E et si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de (x_1, x_2, \dots, x_n) . Il en résulte que E coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires de (x_1, x_2, \dots, x_n) et est donc l'espace engendré par cette suite.

Exemple

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$
 donc $\mathbb{R}^3 = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1); x, y, z \in \mathbb{R}\}$
 ainsi la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est génératrice de \mathbb{R}^3 .

Propriété 2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ayant n générateurs. Alors toute suite de $(n + 1)$ vecteurs de E est liée.

1.5.2 Base d'un espace vectoriel

Définition 5. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) est une **base** de E , si cette suite est prise **ordonnée** avec les deux propriétés suivantes :

- 1°) x_1, x_2, \dots, x_n sont des générateurs de E .
- 2°) La suite (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre.

Propriété 3

Soit x_1, x_2, \dots, x_n des vecteurs de E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Pour que la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) soit une base de E , il faut et il suffit que tout vecteur $y \in E$ s'exprime de façon **unique** sous la forme :

$$y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \quad \alpha_i \in \mathbb{K}; \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

α_i s'appelle la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur y par rapport à la base (x_1, x_2, \dots, x_n) .

et alors la matrice colonne $Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnées du

vecteur y dans la base (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Exemples

Dans \mathbb{R}^3 , soit $v = ae_1 + be_2 + ce_3$, avec $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de \mathbb{R}^3 , alors

v a pour coordonnées dans β , la matrice colonne $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et le même vecteur v

aura pour coordonnées dans $\beta' = (e_3, e_2, e_1)$, la matrice colonne $\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}$.

Remarques très importantes

1. Une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel est toujours une suite ordonnée de vecteurs.
2. Dans un espace vectoriel, aucun vecteur n'admet des coordonnées si ledit espace n'est pas muni d'une base. Ainsi toutes coordonnées d'un vecteur sont fonction d'une base donnée.

3. Le choix d'une base β d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E permet d'identifier cet espace vectoriel à \mathbb{K}^n où $n = \text{card}\beta$.
4. Si un \mathbb{K} -espace vectoriel $E \neq \{0_E\}$; alors il admet une infinité de bases.

Théorème

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ayant une base (x_1, x_2, \dots, x_n) .
 Toute autre base de E est formée de n éléments. Toute suite libre (y_1, y_2, \dots, y_n) est une base de E . Aussi toute suite génératrice (z_1, z_2, \dots, z_n) est une base de E .

Définition 6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$.

La dimension de E est le cardinal d'une de ses bases qui sont en nombre infini.

Ainsi, s'il existe un entier naturel n et une base de E composée de n éléments.

Alors, d'après le théorème ci-dessus, toute base de E est formée de n éléments; cet entier naturel n s'appelle la **dimension** de E et se note **dim** $E = n$ ou

$$(\dim_{\mathbb{K}} E = n).$$

Remarques et Exemples

- a) Si $E = \{0_E\}$, il n'y a pas de base; on dit encore que E est de dimension nulle et on pose $\dim E = 0$.
- b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $((\lambda, 0); (0, \lambda))$ est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2 .
- c) Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , toute famille de vecteurs de E , de cardinal strictement inférieur à n , ne peut être génératrice, avec possibilité d'indépendance linéaire.
- d) Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , toute famille de vecteurs de E , de cardinal strictement supérieur à n , ne peut être libre, avec possibilité d'être génératrice.
- e) Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , seule une famille de vecteurs de E , de cardinal égal à n , peut être une base de E . C'est dire qu'une famille de vecteurs libres de E a pour cardinal maximal n et une famille de vecteurs générateurs de E a pour cardinal minimal n .

Exemples de bases de quelques espaces vectoriels

a°) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et n un entier naturel non nul. Le \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^n a une base dite **base canonique** (e_1, e_2, \dots, e_n) où le vecteur e_k est le vecteur $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, le 1 étant la $k^{\text{ième}}$ coordonnée, toutes les autres coordonnées sont nulles.

b°) Soit $\mathbb{C}_n[X]$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des polynômes à une variable complexes de degré inférieur ou égal à n , avec le polynôme nul. La suite de polynômes $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ forme une base de E .
 Donc $\dim E = n + 1$.

Plus généralement $\forall a \in \mathbb{C}$, on vérifie que $(1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n)$ est aussi une base de E .
 Ainsi il y a bien une infinité de bases de $\mathbb{C}_n[X]$.

c°) Il ne faut pas croire que tout espace vectoriel soit de dimension finie. Le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ de tous les polynômes complexes n'est pas de dimension finie; s'il était de dimension n , $n + 1$ polynômes quelconques seraient liés; or la suite $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une suite libre de $n + 1$ vecteurs.

Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de **dimension infinie**.

Proposition

L'ensemble $(M_{pq}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ des matrices $p \times q$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} ,

une de ses bases est constituée par les matrices E_{ij} tels que $a_{ij} = 1$ et $a_{rs} = 0$, si $r \neq i$ ou $s \neq j$. Ceux sont les matrices élémentaires de $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$, alors $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{ij}$ ce qui entrainera que

la dimension de $M_{pq}(\mathbb{K})$ sur \mathbb{K} est pq .

Exemples

a°) Une base de l'espace vectoriel $M_{23}(\mathbb{R})$ est constitué par les matrices :

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc la dimension de $M_{23}(\mathbb{R})$ est 6.

Ainsi la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_{23}(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$A = 2E_{11} + 5E_{12} - 7E_{13} + 9E_{21} + 8E_{22} + 4E_{23}.$$

b°) Une matrice $1 \times q$ a la forme $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1q})$.

on l'appelle **matrice ligne ou uniligne** appartenant à l'espace $M_{1q}(\mathbb{K})$ qui est isomorphe à \mathbb{K}^q , donc de dimension q .

c°) Une matrice $p \times 1$ a la forme $B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$.

On l'appelle **matrice colonne ou unicolonne** appartenant à l'espace $M_{p1}(\mathbb{K})$ qui est isomorphe à \mathbb{K}^p , donc de dimension p .

d°) Une matrice $n \times n$ est dite **matrice carrée d'ordre n** appartenant à l'espace vectoriel des matrices notée $M_n(\mathbb{K})$. Il est de dimension n^2 sur \mathbb{K} .

Remarques(sous forme d'un petit résumé)

1. La combinaison linéaire permet de montrer une : $\begin{cases} \text{famille liée} \\ \text{famille libre} \\ \text{famille génératrice} \end{cases}$;
2. Famille libre et génératrice donne base ;
3. Base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, permet d'identifier E à $\mathbb{K}^{\dim E}$ qui produit alors les coordonnées de vecteur dans la base considérée ;
4. Ceux sont les coordonnées de vecteurs qui rend possible le calcul matriciel dans les \mathbb{K} -espaces vectoriels (voir l'exercice 1 supra).

1.5.3 Déterminant d'une suite de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie

Définition

Soit $S = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une suite de n vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n . Soit une base β , de E , le déterminant de la suite S dans la base β , est noté

$\det_{\beta}(S) = | V_1^{\beta} \ V_2^{\beta} \ \dots \ V_n^{\beta} |$, où V_j^{β} constituent la $j^{\text{ième}}$ colonne avec les coordonnées de V_j dans la base β . $\forall 1 \leq j \leq n$.

Exemple

Soient $V_1 = (1, -6, 8)$, $V_2 = (0, -3, 11)$, $V_3 = (0, 0, -5)$ trois vecteurs du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 , et $S = (V_1, V_2, V_3) \subset \mathbb{R}^3$.

Comme cardinal de (S) noté $Card(S) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ alors on peut évaluer le déterminant de S :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{vmatrix} = 15. \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{bmatrix},$$

on a $\det(S) = \det A = \det({}^t A)$.

On peut donc saisir les coordonnées des V_j en **colonne** ou en **ligne**.

Proposition

Soit $S = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une suite de n vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n . Soit une base β , de E ,

a) Si $\det_\beta(S) \neq 0$, alors la suite S est libre ou linéairement indépendante et comme $Card(S) = \dim E$, donc S est **une base** de E .

b) Si $\det_\beta(S) = 0$, alors la suite S est liée ou linéairement dépendante.

Remarques

Soit β une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n .

1. β est une famille libre de E , alors $Card(\beta) \leq n$;
2. si $Card(\beta) > n$, alors β ne peut être une famille libre de E
3. β est une famille génératrice de E , alors $Card(\beta) \geq n$.
4. Si $Card(\beta) < n$, alors β ne peut être une famille génératrice de E
5. β est une base de E , alors $card(\beta) = n$.

1.6 Sous-espaces vectoriels

Définition 2 : Une partie non vide F d'un $(\mathbb{K}, +, \times)$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1°) $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$

2°) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F$.

(i.e. la loi de composition externe sur E est stable dans F .)

Les opérations définies dans E sont donc également définies dans F et lui confère une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Aussi un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un sous-ensemble F de E **caractérisé** par les deux propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F \quad : x + y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F. \end{array} \right\} \iff \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha x + \beta y \in F.$$

De même :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F \quad : x + y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F. \end{array} \right\} \iff \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha x + y \in F.$$

Remarque

Tout sous-ensemble non vide F d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E qui est tel que toute combinaison linéaire de ses éléments lui appartiennent est un sous-espace vectoriel de E .

1.6.1 Exemples de sous-espaces vectoriels

a) L'ensemble F des combinaisons linéaires de la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) est un sous-espace vectoriel de E .

Nous appellerons ce sous-espace vectoriel F le **sous-espace engendré** par la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) .

b) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, l'ensemble réduit au singleton vecteur nul $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E , ainsi que E lui-même.

Le sous-espace vectoriel nul $\{0_E\}$ et E sont dit **sous-espaces vectoriels triviaux** de E .

Tout autre sous-espace vectoriel F de E est dit **sous-espace vectoriel propre** de E , et vérifie : $\{0_E\} \subset F \subset E$.

c) L'ensemble $\mathbb{C}_n[x]$ des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}^*$, forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x]$.

1.6.2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition

Tout sous ensemble non vide d'un espace vectoriel E engendré par une famille de vecteurs de E , est un sous-espace vectoriel de E , aussi tout sous-espace vectoriel de E , est un sous ensemble de E engendré par une famille de vecteurs de E .

La propriété suivante nous sera utile dans cette étude.

Propriété 4

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $n \geq 0$ un entier naturel. Supposons que toutes les suites de $(n + 1)$ vecteurs de E soient liées. Alors E est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim E \leq n$.

Corollaire 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Une autre conséquence de la propriété 4 est la suivante :

Corollaire 2

Soit E un espace vectoriel ayant n générateurs x_1, x_2, \dots, x_n , alors E est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim E \leq n$.

Corollaire 3

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une suite de n vecteurs d'un espace vectoriel E .

Soit $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ une suite de $(n + 1)$ combinaisons linéaires des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n . Alors la $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ est liée.

1.6.3 Rang d'une suite finie de vecteurs

Considérons une suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de n vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , de dimension finie ou non. Le sous-espace F engendré par cette suite admet n générateurs x_1, x_2, \dots, x_n ; c'est donc, d'après le corollaire 2, un espace vectoriel de dimension finie $r \leq n$.

Définition 6.

1. On appelle **rang** r d'une suite(famille) finie de n **vecteurs** d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, la **dimension** r de l'espace vectoriel F **engendré** par

ces vecteurs. Ou l'on dira que F est de codimension $(n - r)$. On note $r \leq n$.

2. Aussi le **rang** r d'une suite (famille) finie de n **vecteurs** d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, est le nombre maximum de vecteurs de la suite (famille) finie de n vecteurs, qui soient libres dans la suite en question.

Remarques

Sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E , de dimension finie, muni d'une base. Considérons une famille finie S de vecteurs de E . Le rang de S est le rang de la A matrice constituée en lignes ou en colonnes des coordonnées des vecteurs de S .

A est dite une matrice associée à la suite S . Ainsi $\text{rang}(S) = \text{rang}(A)$

1. S est génératrice de E ssi le rang de $S = \dim E = \text{rang}(A)$
2. S est libre ssi le rang de $S = \text{Cardinal de } S (\text{Card}S) = \text{rang}(A)$
3. S est liée ssi le rang de S est **strictement inférieur** au Cardinal de $S (\text{Card}S)$
4. S est une base de E ssi $\dim E = \text{rang de } S = \text{Cardinal de } S (\text{Card}S)$
5. Soit $F = \langle S \rangle$, alors $\dim F = \text{rang}(S) = \text{rang}(A)$

Proposition

- 1) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- 2) $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E . Comme quoi l'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- 3) Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.

Remarque

La réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E .

Définition

Soit un sous-ensemble non vide A inclus dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E , $\text{vect}(A) = \langle A \rangle$ est appelé le sous-espace vectoriel engendré par A et c'est le **plus petit** sous-espace vectoriel de E contenant A .

Aussi $\text{vect}(A) = \langle A \rangle$ est l'intersection des tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A .

Remarque

Si $v_1, v_2, v_3 \in E$,

$$\text{vect}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}\} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3 .

Proposition

Soient A et B des parties d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E ;

1. $\text{vect}(\text{vect}(A)) = \text{vect}(A)$
2. Si $A \subset B \Rightarrow \text{vect}(A) \subset \text{vect}(B)$
3. $\text{vect}(A \cup B) = \text{vect}(A) + \text{vect}(B)$.
4. si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\text{vect}(A) = A$.

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, on a :

- 1) $F + G = \langle F \cup G \rangle =$ l'espace engendré par $F \cup G$.
- 2) $\dim(\langle F \cup G \rangle) = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Remarque

Si $\dim E = n$, n générateurs de E forment une base de E .

EXERCICE 1

\mathbb{R}^4 est muni de sa base canonique (t_1, t_2, t_3, t_4) . On considère les vecteurs :

$e_1 = (1, 2, 3, 4)$; $e_2 = (1, 1, 1, 3)$; $e_3 = (2, 1, 1, 1)$; $e_4 = (-1, 0, -1, 2)$; $e_5 = (2, 3, 0, 1)$.

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F par e_4 et e_5 .

Calculer les dimensions respectives de E , F , $E \cap F$ et $E + F$.

Proposition de correction de l'exo.1

Soit $S_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$; $S_2 = \{e_4, e_5\}$

$E = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \text{vect}(S_1)$ et $F = \langle e_4, e_5 \rangle = \text{vect}(S_2)$

Soit $M_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$;

M_E est une matrice associée à la suite ou à la famille S_1 .

Le rang de M_E est la dimension de E , vu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

le rang de M_E est 3, donc $\dim E = 3$.

Soit $M_F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

M_F est une matrice associée à la suite ou à la famille S_2 .

Le rang de M_F est la dimension de F , vu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

le rang de M_F est 2, donc $\dim F = 2$.

Soit $S_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$E + F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle = \text{vect}(S_3)$

Soit $M_{E+F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

M_{E+F} est une matrice associée à la suite ou à la famille S_3 .

Le rang de M_{E+F} est la dimension de $E + F$, vu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

le rang de M_{E+F} est 4, donc $\dim(E + F) = 4$.

Pour finir on sait que : $E + F = \text{vect}(E \cup F) = \langle E \cup F \rangle$

$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) \Leftrightarrow$

$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 3 + 2 - 4 = 1$.

EXERCICE 2

Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

1. $u = (7, 12)$; $v = (18, -13)$; $w = (-4, 17)$

2. $u = (-1, 0, 2)$; $v = (1, 3, 1)$; $w = (0, 1, -1)$

3. $u = (15, -27, -6, 12)$; $v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

Proposition de correction de l'exo.2

1. $u = (7, 12)$; $v = (18, -13)$; $w = (-4, 17)$

La famille $\mathcal{F} = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^2$ et le $\text{Card}\mathcal{F} = 3 > \dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc la famille \mathcal{F} est liée dans \mathbb{R}^2 .

2. $u = (-1, 0, 2)$; $v = (1, 3, 1)$; $w = (0, 1, -1)$

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v+u \\ w \end{matrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v+u \\ -3w+(v+u) \end{matrix} \quad \text{delà on a bien :}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{le rang de } A : \text{rg}(A) = 3$$

aussi la famille $\mathcal{G} = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ et le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{G} = \{u, v, w\}$ c'est-à-dire $\langle u, v, w \rangle$ est de dimension $\text{rg}(A) = 3 = \text{Card}\mathcal{G}$ donc la famille \mathcal{G} est libre dans \mathbb{R}^3 .

Remarque

En formant une matrice A constituée en ligne ou en colonne des coordonnées des vecteurs d'une famille donnée \mathcal{F} ; lorsque le rang de A est égal au cardinal de \mathcal{F} , la famille \mathcal{F} est libre sinon elle est liée.

3. $u = (15, -27, -6, 12)$; $v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

La famille $\mathcal{H} = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^4$

aussi soit

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -27 & -6 & 12 \\ -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 15 & -27 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ 6v+u \end{matrix} \Rightarrow 6v+u = \vec{0}$$

La famille $\mathcal{H} = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^4$ est donc liée car il y a une relation de dépendance entre les vecteurs : u, v qui est : $6v + u = \vec{0}$.

1.6.4 Sous-espaces supplémentaires

Définitions 8

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$. Ceci veut dire que toute somme de vecteur de F et G est uniquement déterminée.

2. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont appelés dits **supplémentaires** si tout élément $x \in E$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme : $x = y + z$, $y \in F$, $z \in G$.

On dit encore que E est la **somme directe** de F et G et on écrit :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}.$$

Théorème 3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives β et γ . Les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes :

- F et G sont supplémentaires
- $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

(c) $\text{rang}(\beta \cup \gamma) = \dim F + \dim G = \dim E$, alors $\beta \cup \gamma$ est une base de E .

Théorème 4. (De la base incomplète).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Pour toute suite libre (y_1, y_2, \dots, y_p) de E ($p \leq n$), on peut trouver $q = n - p$ vecteurs z_1, z_2, \dots, z_q de E tels que $(y_1, y_2, \dots, y_p, z_1, z_2, \dots, z_q)$ soit une base de E .

2. Tout sous-espace vectoriel $F = \langle y_1, y_2, \dots, y_p \rangle$ de E admet un supplémentaire $G = \langle z_1, z_2, \dots, z_q \rangle$.

Remarque : On peut utiliser le **rang** d'une suite de vecteurs pour la compléter en base.

1.6.5 Détermination d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel(+)

Soit $F = \langle (1, 2, -3, 3); (1, 4, -5, 7); (0, 2, -2, 4) \rangle \subset \mathbb{R}^4$, nous voulons un sous-espace vectoriel G de \mathbb{R}^4 qui soit un supplémentaire de F .

Nous allons chercher la dimension de F qui sera le rang de la famille

$\{(1, 2, -3, 3); (1, 4, -5, 7); (0, 2, -2, 4)\}$ dont une matrice associé est

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(N) = 2 = \dim F \Rightarrow$$

$F = \langle (1, 2, -3, 3); (1, 4, -5, 7); (0, 2, -2, 4) \rangle = \langle (1, 0, -1, -1); (0, 1, -1, 2) \rangle$

À partir de là on va compléter la famille $\{(1, 0, -1, -1); (0, 1, -1, 2)\}$ pour obtenir une base de \mathbb{R}^4 par la famille $\{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$ et alors on peut choisir

$G = \langle (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1) \rangle$. Pour le choix de la famille $\{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$

on a complété matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ en la matrice inversible :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.6.6 Somme de n sous-espaces vectoriels

Définition

On appelle somme de F_1, F_2, \dots, F_n , n sous-espaces vectoriels de E

et on note $\sum_{i=1}^n F_i$ l'ensemble $\{x_1 + x_2 + \dots + x_n; x_i \in F_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$.

C'est dire que $\sum_{i=1}^n F_i = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n; x_i \in F_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$.

Proposition

La somme de F_1, F_2, \dots, F_n , n sous-espaces vectoriels de E ,

$\sum_{i=1}^n F_i = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n; x_i \in F_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition

Si les F_i sont de dimension finie, alors

$\sum_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie et $\dim \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \dim (F_i)$.

Définition

On dit que la somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe si

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n; x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0_E.$$

Dans ce cas, on note $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$

Aussi tout élément de $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments des F_i .

Proposition

Si les F_i sont de dimension finie, alors

$\bigoplus_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie et $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim (F_i)$.

Aussi $(\dim \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim (F_i)) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

$\sum_{i=1}^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ veut dire que l'on a une somme directe des F_i .

1.7 Produit de deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif \mathbb{K}

Soit E_1 et E_2 deux \mathbb{K} - espaces vectoriels . On peut munir l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2$ d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel en définissant :

l'addition comme le produit de deux groupes additifs :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et la multiplication de (x_1, x_2) par $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\alpha (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Définition 9. L'espace vectoriel E ainsi construit s'appelle le **produit** des espaces vectoriels E_1 et E_2 et se note : $E = E_1 \times E_2$. Le vecteur nul de E est $0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2})$ où 0_{E_1} est le vecteur nul de E_1 et 0_{E_2} le vecteur nul de E_2 . Les deux sous-espaces vectoriels de E : $F_1 = \{(x_1, 0), x_1 \in E_1\}$; $F_2 = \{(0, x_2), x_2 \in E_2\}$ vérifient :

Propriété 5. F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E , et on a donc : $E = F_1 \oplus F_2$.

Propriété 6. Si E_1 et E_2 sont de dimension finie, alors E est de dimension finie et on a : $\dim E = \dim (E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

Dans la définition d'un produit, on peut avoir $E_1 = E_2$; on définit ainsi $E_1 \times E_1$ que l'on note aussi E_1^2 .

La définition du produit de deux espaces vectoriels se généralise au produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ d'un nombre fini de \mathbb{K} -espaces vectoriels E_1, E_2, \dots, E_n et, en particulier on peut avoir $\underbrace{E_1 \times E_1 \times \dots \times E_1}_{n \text{ fois}} = E_1^n$.

Résumons un peu

- 1) Moyennant un corps commutatif \mathbb{K} , on définira sur un groupe commutatif (abélien) E une loi de composition externe, dont l'ensemble d'action est le corps \mathbb{K} . À des égards la conjugaison des deux lois de compositions internes sur \mathbb{K} avec la loi de groupe de E et la loi de composition externe définie sur E vérifieraient quatre propriétés qui procureraient alors à E une structure algébrique du nom de \mathbb{K} -espace vectoriel.
- 2) Désormais sur E le \mathbb{K} -espace vectoriel, il y a la notion de combinaison linéaire de famille de vecteurs β de E qui nous permettra de savoir si ladite famille β est libre, liée ou génératrice de E .
- 3) Quand la famille β est à la fois libre et génératrice de E le \mathbb{K} -espace vectoriel ; β est appelée une base de E et quand $E \neq \{0_E\}$, E dispose d'une infinité de bases. On note $Card\beta$ le cardinal de β et c'est défini comme la dimension de E . Avec $Card\beta < \infty$ il existe une bijection entre E et $\mathbb{K}^{Card\beta}$ et alors le calcul matriciel est invité dans les espaces vectoriels.
- 4) Un sous-ensemble F non vide inclus dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E , est un sous-espace vectoriel de E si une famille de vecteurs de E lui est génératrice. Aussi tout sous-espace vectoriel de E est engendré par une famille de vecteurs de E . Pour des besoins de géométrie sur E , l'on va chercher à disposer de sous-espaces supplémentaires de E .

Chapitre 2

APPLICATIONS LINÉAIRES

Objectifs

- * Connaître les définitions d'une application linéaire h d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E dans un \mathbb{L} -espace vectoriel F avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, (généralement on prend $\mathbb{K} = \mathbb{L}$) le noyau ($\ker h$) et l'ensemble-image de h ($\text{Im } h$), pour finir savoir les déterminer comme tels.
- * Connaître les caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire h à travers $\ker h$ et $\text{Im } h$.
- * Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire h d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E muni d'une base β dans un \mathbb{L} -espace vectoriel F muni d'une base γ avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ que je noterai $\text{Mat}(h, \gamma, \beta) = M_{\gamma\beta}(f)$.
- * Comprendre les liens entre matrices et applications linéaires.
- * Savoir déterminer la matrice de passage d'une base à une autre d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, puisse qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel non réduit au vecteur nul admet une infinité de bases. Dès lors le choix d'une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel est infini.
- * Savoir déterminer la matrice B d'une application linéaire dans de nouvelles bases en fonction de sa matrice A dans d'anciennes bases avec $B = QAP$: Q et P sont des matrices de passage d'une ancienne base à une nouvelle base. Aussi déterminer les coordonnées d'un vecteur au biais d'une nouvelle base en fonction des coordonnées du même vecteur au moyen d'une ancienne base. L'usage de la matrice de passage d'une ancienne base à une nouvelle base est de rigueur.

Définition 0 (d'une application linéaire)

Soient (E, \top, \perp) et $(F, *, \heartsuit)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .

On dit que f est une **application linéaire** si elle possède les deux propriétés suivantes :

- (i) $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x \top y) = f(x) * f(y)$.
- (ii) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha \perp x) = \alpha \heartsuit f(x)$.

Remarques

$$(i) \text{ et } (ii) \iff \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, f((\alpha \perp x) \top (\beta \perp y)) = f(\alpha \perp x) * f(\beta \perp y) \\ = (\alpha \heartsuit f(x)) * (\beta \heartsuit f(y))$$

$$(i) \text{ et } (ii) \iff \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f((\alpha \perp x) \top y) = f(\alpha \perp x) * f(y) = (\alpha \heartsuit f(x)) * f(y).$$

Définition 1 (d'une application linéaire)

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .

On dit que f est une **application linéaire** si elle possède les deux propriétés suivantes :

- (1) $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y).$
 (2) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x) = \alpha f(x).$

Propriétés

a°) On déduit de (1) en posant $y = x = 0_E \in E, f(0_E) = 0_F \in F.$

On a également $f(-x) = -f(x).$

b°) (1) et (2) $\iff \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

(1) et (2) $\iff \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$

c°) Soit E munit d'une base $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n),$

pour tout $y \in E, \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K; y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i ;$ où $Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

est la matrice colonne des coordonnées de $y \in E$ dans de la base

$\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n),$ d'où $f(y) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i);$ donc étant donnée

$\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $f(\beta) = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ qui est l'action de f sur une base de $E,$ on peut déterminer $f(y), \forall y \in E,$ dès qu'on connaît

$Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ qui est la matrice colonne des coordonnées de $y \in E$ dans

de la base $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n).$ On peut dire que f est complètement déterminée par son action sur une base de $E.$

Remarques

1) Une application linéaire f est une application d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E dans un \mathbb{K} -espace vectoriel $F,$ telle que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs de E est égale à une combinaison linéaire de l'image des vecteurs de $E,$ avec les mêmes coefficients de combinaison par rapport à un vecteur x de E et son image $f(x).$

2) Une application f entre deux \mathbb{K} -espaces vectoriels E et F est linéaire ssi les expressions images de $f(x),$ pour $x \in E,$ sont combinaison linéaire de vecteurs de F de coefficients les coordonnées de $x \in E,$ moyennant une base de $E.$

Exemple

Cette expression : $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ est linéaire en $x_1, x_2, \dots, x_n,$ car combinaison linéaire des $x_1; \dots; x_n;$ mais pas celle-ci : $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b.$

Exemples

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (2x + y, 0)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{R}^2,$ car $f(x, y) = x(2, 0) + y(1, 0).$

b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (4, x - 9y)$ n'est pas une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{R}^2,$ car $g(0, 0) = (4, 0) \neq (0, 0)$ vecteur nul de $\mathbb{R}^2.$

2.1 Image et Noyau

Définition 2 (du noyau d'une application linéaire)

Le **noyau** d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F.$ Il est noté $Ker f.$ D'où $Ker f = \{x \in E; f(x) = 0_F\}.$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + y, 0)$ une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

$$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = (0, 0)\}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y$$

$$\ker f = \{(x, -2x) ; x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2) \rangle \Rightarrow \dim \ker f = 1.$$

Lemme 1. *Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E .*

Proposition 1. *Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.*

Définition 3 (de l'image d'une application linéaire)

L'**image** d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est l'ensemble image de E par l'application f , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs appartenant à F tels qu'il existe au moins un vecteur $x \in E$ avec $f(x) = y$. On la note $f(E)$ ou encore $\text{Im } f$.

$$\text{Im } f = \{y \in F, \exists x \in E ; f(x) = y\} = \{f(x) ; x \in E\} = f(E).$$

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + y, 0)$ une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= f(\mathbb{R}^2) = \{f(x, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(2x + y, 0) ; x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(2, 0) + y(1, 0) ; x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 0) ; (1, 0) \rangle = \langle (1, 0) \rangle. \end{aligned}$$

2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $(x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$ une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 .

$$\text{Im } g = g(\mathbb{R}^2) = \{g(x, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x - y, x + y, x + 2y) ; x, y \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\text{Im } g = \{x(1, 1, 1) + y(-1, 1, 2) ; x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) ; (-1, 1, 2) \rangle.$$

Lemme 2 *L'image de f est un sous-espace vectoriel de F .*

Remarques

1) L'image par une application linéaire $f : E \rightarrow F$ d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F .

2) Aussi l'image réciproque de f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 2

Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

Définition 4 (d'un isomorphisme)

1) Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est un **isomorphisme** si elle est injective et surjective. On dit alors que E et F sont **isomorphes** par f .

2) Une application linéaire $f : E \rightarrow E$ est un **endomorphisme**. Un endomorphisme qui est bijectif est un **automorphisme**.

3) Deux espaces E et F sont **isomorphes** noté $(E \simeq F)$, s'il existe au moins un isomorphisme f de E sur F .

4) Si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, il existe une application inverse f^{-1} ; et f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

5) $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme $\iff \text{Ker } f = \{0_E\}$ et $f(E) = F$.

Théorème 1

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie

et une application linéaire $f : E \rightarrow F$. Alors :

(a) f est un isomorphisme entre E et F .

\iff

(b) $\dim E = \dim F$ et $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

\iff

(c) $\dim E = \dim F$ et $\text{Im } f = F$

Lemme 3 *Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une suite libre de vecteurs de E et une*

application linéaire $f : E \rightarrow F$ injective. Alors $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ est une suite libre dans F .

EXERCICE

Parmi les applications suivantes quelles sont celles qui sont linéaires ?

Si oui quelles sont celles qui sont injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2x + y; 3x - 2y)$

On a $f(x, y) = (2x + y; 3x - 2y)$ et les coordonnées de $f(x, y)$ que sont $2x + y; 3x - 2y$ sont des combinaisons linéaires de x et de y , donc f est linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 donc f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = (0, 0)\}$ aussi $f(x, y) = (0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \text{ la matrice associée au système } \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

est $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc inversible

$$\text{alors } \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\ker f = \{(0, 0)\} \Rightarrow f$ est un endomorphisme injectif

donc f est à la fois injectif, surjectif et bijectif.

2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y; xy)$

Ici $f(x, y) = (x + y; xy)$ on constate que la deuxième coordonnée de f , qui est xy n'est pas une combinaison linéaire de x, y donc f n'est pas une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 1; y)$

$f(x, y) = (x + 1; y)$ on constate que la première coordonnée de f , qui est $x + 1$ n'est pas une combinaison linéaire de x, y donc f n'est pas une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , on peut aussi juste constater que $f(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$ donc f n'est pas linéaire.

4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x + y; x; 0)$

$f(x, y) = (x, y) \mapsto (x + y; x; 0)$ aussi on sait que $0 = 0.x + 0.y$, donc les coordonnées de $f(x, y)$ dans une base de \mathbb{R}^3 , sont toutes des combinaisons linéaires des coordonnées de (x, y) couple variable de f , donc f est linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 .

$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y; x; 0) = (0, 0, 0)\}$,

aussi $f(x, y) = (x + y; x; 0) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y; x; 0) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0)\}$

$\Rightarrow f$ est injective. Aussi $\text{Im } f = \{(x + y, x, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$

$\text{Im } f = \{(x + y, x, 0) = x(1, 1, 0) + y(1, 0, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$

$\text{Im } f = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle$ alors $\text{Im } f$ est un plan vectoriel engendré par la famille $\gamma = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ qui ne peut engendrer l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , car $\dim \mathbb{R}^3 = 3 > \text{card } \gamma = 2$. Puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

toute famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 engendrant \mathbb{R}^3 doit avoir un cardinal supérieur ou égal à $3 = \dim \mathbb{R}^3$, on peut donc conclure que $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ n'est pas surjective, donc elle ne peut être bijective.

2.1.1 Le théorème noyau-image

Théorème 2

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et une application linéaire $f : E \rightarrow F$.

Si la dimension de E est finie, il en est de même des dimensions de $\text{Ker } f$ et de $f(E) = \text{Im } f$ et l'on a : $\dim E = \dim f(E) + \dim \text{Ker } f$.

Lemme 4

Soient E de dimension finie et une application linéaire $f : E \rightarrow F$.

Alors $f(E) = \text{Im } f$ est de dimension finie.

Corollaire. Avec les hypothèses du théorème 2 :

$$\text{Ker } f = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = \dim f(E) = \dim E.$$

2.1.2 Rang d'une application linéaire

Définition 5. Le **rang** d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$.

Avec E de dimension finie est par définition la dimension de l'image $f(E) = \text{Im } f$.

Exemples

a°) L'application $f : E \rightarrow F$ qui, à tout vecteur $x \in E$ associe le vecteur nul 0_F de F est linéaire. On a $\text{Im } f = \{0_F\}$ et le rang de f est nul. Le noyau $\text{ker } f = E$.

b°) L'application f de E dans E qui, à tout vecteur $x \in E$, associe le vecteur x est linéaire. $\text{Ker } f = \{0\}$, $f(E) = E$. On l'appelle l'**identité** Id_E .

C'est un isomorphisme de E sur E , ou **automorphisme** de E .

c°) Si E est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} et $a \neq 0$ un élément de \mathbb{K} ,

l'application $f : x \mapsto ax$ est une application linéaire de E sur E et

c'est un automorphisme (homothétie vectorielle).

d°) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E . A tout vecteur $x \in E$, on peut faire correspondre sa composante $y \in F$ définie par :

$$x = y + z, y \in F, z \in G.$$

L'application $f : x \mapsto y$ est une application linéaire de E dans F qu'on appelle

projection sur F parallèlement à G . Le noyau de f est G et l'image $f(E)$ est F .

Si E est de dimension finie, on vérifie directement le théorème noyau-image sur les dimensions.

e°) Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n , avec le polynôme nul. L'application $f : P \mapsto P + P'$, où P' est le polynôme dérivé de P , est une application linéaire de E dans E , on dit encore que c'est un \mathbb{C} -endomorphisme de E .

On vérifie directement que $\text{Ker } f = \{0\}$; il résulte alors du théorème 1 que f est un automorphisme de E donc est surjective.

f°) Une application linéaire de E un \mathbb{K} -espace vectoriel dans \mathbb{K} s'appelle une **forme linéaire** sur E (\mathbb{K} est un espace vectoriel sur lui-même). Soit f une forme linéaire non nulle sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n . On a $\text{Im } f \neq \{0\}$ et $\text{Im } f \subset \mathbb{K}$; donc l'image de f , espace de dimension 1 appelé **droite vectorielle**

(à cause de sa dimension qui est **1**) et le noyau de f est de dimension $n - 1$ et on dit que c'est un **hyperplan** de E .

Un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel**.

L'ensemble des formes linéaires de E se note E^* ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ c'est un -espace vectoriel appelé le **dual** de E .

2.1.3 Projections et symétries linéaires

Introduction

Soit E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tel que $E = F \oplus G$ alors

$\forall x \in E, x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ de façon unique.

La projection P_F sur F parallèlement à G est telle que

$\forall x \in E, P_F(x) = x_F$ et $P_F \circ P_F = P_F$ (on dit que P_F est un projecteur).

Aussi $\forall x \in E, P_F(x) = x_F = x_F + x_G - x_G = (Id_E - P_G)(x)$

La projection P_G sur G parallèlement à F est telle que

$\forall x \in E, P_G(x) = x_G$ et $P_G \circ P_G = P_G$.

Aussi $\forall x \in E, P_G(x) = x_G = x_G + x_F - x_F = (Id_E - P_F)(x)$

La symétrie S_F par rapport à F parallèlement à G est telle que

$\forall x \in E, S_F(x) = x_F - x_G = 2x_F - (x_F + x_G) = (2P_F - Id_E)(x)$

$\forall x \in E, S_F(x) = x_F - x_G = (x_F + x_G) - 2x_G = (Id_E - 2P_G)(x)$.

et $S_F \circ S_F = Id_E$ (on dit que S_F est une involution).

La symétrie S_G par rapport à G parallèlement à F est telle que

$\forall x \in E, S_G(x) = x_G - x_F = (2P_G - Id_E)(x) = (Id_E - 2P_F)(x)$.

et $S_G \circ S_G = Id_E$.

Aussi $S_G = -S_F = 2P_G - Id_E = Id_E - 2P_F$.

Définition

Les P_F et P_G définies supra, sont appelées projections vectorielles

Aussi les S_F et S_G définies supra, sont appelées symétries vectorielles

c'est clair que projection et symétrie vectorielles sont des applications linéaires.

2.2 Opérations sur les applications linéaires

2.2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Appelons $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Somme de deux applications linéaires

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F .

On définit $f + g : E \rightarrow F$ par : $\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

On vérifie que $f + g$ est bien une application linéaire de E dans F .

On l'appelle **somme** de f et g .

Produit de $\alpha \in \mathbb{K}$ par $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Il est défini par : $\forall x \in E, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

On vérifie que αf est bien une application linéaire de E dans F .

Proposition 3

Les deux opérations précédentes confèrent à l'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} .

2.2.2 Composition des applications linéaires

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels. Etant donné une application linéaire $f : E \rightarrow F$ et une application linéaire $g : F \rightarrow G$, on vérifie immédiatement que $g \circ f : E \rightarrow G$ est une application linéaire de E dans G . En particulier, si $E = F = G$, nous définissons une loi de composition interne dans

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) = \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$ avec la loi "o" des compositions des applications qu'on appelle la **multiplication**.

Proposition 4. *L'addition et la multiplication "o" définies dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ en font un anneau non commutatif.*

Remarque. Le composé de deux isomorphismes est un isomorphisme et donc, en particulier, le composé de deux automorphismes de E est un automorphisme. Si E est de dimension finie, l'ensemble des automorphismes de E constitue le groupe des unités (l'ensemble des éléments inversibles) de l'anneau $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

2.3 Espace vectoriel quotient(+)

2.3.1 Construction de l'espace vectoriel quotient de E par F

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E .

Soit \mathcal{R} une relation définie dans E par : $x, y \in E, x\mathcal{R}y \iff x - y \in F$;

on montre que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et compatible avec l'addition dans E , c'est-à-dire : $x\mathcal{R}y$ et $z\mathcal{R}t \Rightarrow (x + z)\mathcal{R}(y + t)$. Ce qui permet de définir une opération sur l'ensemble $E/F = E/\mathcal{R}$ par : $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$.

où \bar{x} est la classe de x modulo F . cette opération donne à E/F une structure de groupe abélien et l'application $\varphi : E \rightarrow E/F$, telle que $\varphi(x) = \bar{x}$ est un morphisme de groupe, qu'on appelle le morphisme canonique de E sur E/F . Outre leur structure de groupe, E et F ont maintenant une structure d'espace vectoriel et nous allons compléter ces résultats en définissant sur E/F une structure d'espace vectoriel.

Proposition 5. *La relation \mathcal{R} est compatible avec la multiplication par un scalaire, c'est-à-dire : $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x\mathcal{R}y \Rightarrow \alpha x \mathcal{R} \alpha y$.*

De là on définit pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\bar{x} \in E/F$, $\alpha \bar{x} = \overline{\alpha x}$, (*)
ce qui est une opération externe dans E/F .

Proposition 6. *Le groupe quotient E/F muni de l'opération externe (*) devient un espace vectoriel sur \mathbb{K} et l'application $\varphi : E \rightarrow E/F$ est linéaire et surjective.*

Remarque

Le noyau et l'image de φ en tant qu'application linéaire sont le noyau et l'image de φ en tant que morphisme de groupe abélien. En particulier, on a $\text{Ker } \varphi = F$.

Définition 6. L'espace vectoriel obtenu à partir de E et de son sous-espace F par la construction précédente s'appelle l'**espace vectoriel quotient** de E par F et se note E/F . L'application linéaire surjective $\varphi : E \rightarrow E/F$ s'appelle l'application linéaire **canonique** de E sur l'espace vectoriel quotient E/F .

En particulier si $F = \{0\}$, $E/F = E$ et si $F = E$, $E/F = \{\bar{0}\}$.

La construction de l'espace vectoriel quotient de E par F est valable en dimension finie ou non. Si E est de dimension finie, E/F est aussi de

dimension finie.

2.3.2 Problème(+)

La construction de l'espace vectoriel quotient de E par F donne une solution au problème suivant : étant donné un \mathbb{K} -espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F , trouver un espace vectoriel E' sur \mathbb{K} et une application linéaire surjective $f : E \rightarrow E'$ dont le noyau est F . Lorsque E est de dimension finie, on obtient aisément une solution du problème de la façon suivante : prenant un sous-espace supplémentaire G de F dans E ; la projection $p : E \rightarrow G$ de E sur G parallèlement à F est une application linéaire surjective de noyau F .

Théorème 3

Soit $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire surjective de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel E' et F son noyau. L'espace E' est isomorphe à l'espace quotient E/F par un isomorphisme σ tel que $f = \sigma \circ \varphi$; où φ est l'application linéaire canonique de E sur E/F . Suivant le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E/F \\ & \searrow f & \downarrow \sigma \\ & & E' \end{array}$$

Corollaire 1 du théorème 3

Toutes les solutions du problème sont des espaces vectoriels isomorphes entre eux.

Corollaire 2 du théorème 3

Si E est de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E , on a : $\dim E/F = \dim E - \dim F$, et $\dim E/F$ s'appelle la **codimension** de F dans E , et se note $\text{co dim } F$, ainsi $\text{co dim } F = \dim E/F$.

Définition

Soit f une application linéaire de $E \rightarrow F$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie chacun. On appelle conoyau de f , et on le note $\text{Co ker } f$ l'espace quotient $F/\text{Im } f$. De là si f est surjective alors $\text{Co ker } f = \{\bar{0}_F\}$.

2.4 Matrice d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$

Relativement à des bases données de E et de F .

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et q sur \mathbb{K} , $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$ une base de F et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F ; f est complètement déterminée par son action sur la base β , c'est-à-dire que f est entièrement définie par les

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^q a_{ij} t_i, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, 2, \dots, p. \text{ Ainsi les coordonnées de } f(e_j)$$

dans la base $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$ constitue la matrice colonne suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}.$$

Proposition

Etant donné $f : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F des \mathbb{K} -espaces vectoriels avec E de dimension finie, muni d'une base $\beta = (e_1, \dots, e_p)$,

alors $\text{Im } f = \langle f(e_i), 1 \leq i \leq p \rangle$.

Définition On appelle **matrice de l'application linéaire** $f : E \rightarrow F$, **relativement aux bases** β et β' , avec $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ et $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$ (on sait que f est entièrement définie par les $f(e_j) \in F$, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$), est la matrice de type (q, p) :

$$M_{\beta'\beta}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1); f(e_2); \dots; f(e_p) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_q \end{matrix}$$

dont la $j^{\text{ème}}$ colonne ($j = 1, 2, \dots, p$) est constituée par les coordonnées $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}$

du vecteur $f(e_j)$ par rapport à la base β' . C'est pourquoi nous avons écrit $f(e_1)$ au dessus de la première colonne, ..., $f(e_p)$ au-dessus de la $p^{\text{ème}}$ colonne.

Lorsque $E = F$, l'application linéaire f est un endomorphisme de E et nous pouvons choisir $\beta = \beta'$. La matrice $M_{\beta\beta}(f)$ s'appelle la matrice de l'endomorphisme relativement à la base β de E .

Remarque

De façon symbolique, on peut écrire :

$$(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)) = (t_1, \dots, t_q) M_{\beta'\beta}(f)$$

soit $f(\beta) = \beta' M_{\beta'\beta}(f)$, tout ceci est **symbolique**.

Exemple : Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$(x, y, z) \mapsto (2x - y - z; x - z; \lambda x - y - 2z), \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit $\beta = (e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Pour trouver la matrice de f relativement à la base β associé à l'ensemble de départ et à l'ensemble d'arrivé, il faut calculer :

$$f(e_1) = (2; 1; \lambda); f(e_2) = (-1; 0; -1); f(e_3) = (-1; -1; -2).$$

Et la matrice en question est $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Proposition

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie munis de bases respectives β, β', γ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$ $M_{\gamma\beta}(g \circ f) = M_{\gamma\beta'}(g) \times M_{\beta'\beta}(f)$.

Proposition

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives p et q ,

Munis respectivement des bases $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ et $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$

L'application de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ dans $M_{qp}(\mathbb{K})$ définie par $f \mapsto M_{\beta'\beta}(f)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F sur l'espace vectoriel des matrices de type (q, p) sur \mathbb{K} .

Dem :

Moyennant $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ et $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$ respectivement sur E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives p et q , il y a isomorphisme entre E et \mathbb{K}^p et isomorphisme entre F et \mathbb{K}^q .

Ainsi $\forall x \in E, \exists ! x^\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^p$ matrice colonne qui représente

les coordonnées du vecteur $x \in E$ dans la base β de sorte que

$$\text{symboliquement : } x = \beta \times x^\beta = \sum_{i=1}^p x_i e_i.$$

Il sera de même de F c'est-à-dire :

$\forall y \in F, \exists ! y^{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^q$ matrice colonne qui représente

les coordonnées du vecteur $y \in F$ dans la base β' de sorte que

$$\text{symboliquement : } y = \beta' \times y^{\beta'} = \sum_{i=1}^q y_i t_i.$$

De là l'application linéaire $f : (E, \beta) \longrightarrow (F, \beta')$ peut être définie comme suit :

a) $f(x) = y$ on n'a pas utilisé les bases en présence.

b) $f(x^\beta) = y^{\beta'}$ on a utilisé les bases en présence, ce qui permettra de déterminer

f à la donnée de $M_{\beta'\beta}(f)$ en posant : $f(x^\beta) = M_{\beta'\beta}(f) \times x^\beta = (f(x))^{\beta'} = y^{\beta'}$.

Avec les données de f , β et β' on a naturellement $M_{\beta'\beta}(f)$.

Corollaire *L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est de dimension finie $n = pq$.*

Remarques

1°) Les espaces vectoriels $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $M_{qp}(\mathbb{K})$ sont isomorphes mais

cet isomorphisme dépend des bases β et β' choisies dans E et F .

On devrait le noter : $M_{\beta'\beta} : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \rightarrow M_{qp}(\mathbb{K})$.

Il est déterminé par le choix de ces bases.

2°) Il résulte de la proposition 1 qu'une matrice $q \times p$ quelconque dont les coefficients appartiennent à un corps \mathbb{K} peut toujours être considérée comme la matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension p sur \mathbb{K} dans un espace vectoriel F de dimension q sur \mathbb{K} ,

par exemple de $E = \mathbb{K}^p$ dans $F = \mathbb{K}^q$.

2.4.1 Utilisation du rang d'une matrice associée à une application linéaire pour trouver son noyau et son ensemble image.(+)

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ la matrice associée à une application

linéaire f au moyen d'une base de l'espace de départ et une autre base de l'espace d'arrivée.

Dans ce qui suit, nous allons échelonner suivant les colonnes la matrice A .

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} -C_4 & C_2+3C_4 & C_3+2C_4 & C_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 23 & 13 & -2 \\ -2 & 3 & 8 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 & \approx \begin{matrix} C_1-3C_4 & -\frac{1}{2}C_4 & C_3+\frac{13}{2}C_4 & C_2+\frac{23}{2}C_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & \frac{29}{2} \\ \hline -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 & \approx \begin{matrix} C_4-C_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & 0 \\ \hline -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 \text{Evaluons :} & \\
 A \times & \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons conclure que $\text{rang}(A) = \text{rang}(f) = 3 = \dim \text{Im } f$
 Et $\text{Im } f = \langle (1, 0, -5); (0, 1, -\frac{1}{2}); (0, 0, \frac{29}{2}) \rangle$ et $\text{ker } f = \langle (5, 1, -1, 1) \rangle$.
 Ce qui est normal puisque la matrice A étant de type $(3, 4)$ alors
 $\dim E = 4$ et $\dim F = 3$ avec $f : E \rightarrow F$ application linéaire.
 Ici comme $\dim F = 3 = \dim \text{Im } f \Rightarrow \text{Im } f = F$.

2.4.2 Utilisation de l'échelonnage d'une matrice associée à une application linéaire pour trouver l'équation caractéristique de son ensemble image(+)

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ associée à f une application

linéaire f de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 au moyen de choix de bases respectivement sur \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 . Ainsi pour trouver une équation caractéristique de son

ensemble image $Im f$, on va constituer le système suivant :

$$AX = Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ qui ne devrait pas être incompatible.}$$

Délà nous allons échelonner la matrice augmentée du système : $AX = Y$; matrice augmentée qui est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & y_1 \\ 1 & 4 & -5 & 7 & y_2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & y_3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & y_1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & y_2 - y_1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & y_3 \end{bmatrix} \quad L_2 - L_1$$

$$M \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & y_1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \end{bmatrix} \quad L_3 - L_2$$

et alors le système $AX = Y$ est compatible si $y_3 - y_2 + y_1 = 0$

Ainsi $Im f = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 ; y_3 - y_2 + y_1 = 0\}$.

2.4.3 Changement de bases

Matrice de passage

Soient $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

On voudrait avoir la matrice de : $Id_E : (E, \beta') \longrightarrow (E, \beta)$ telle que $x \longmapsto x$.

(E, β) signifie que le \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E , est muni de la base β .

On sait que $\forall 1 \leq j \leq n, \exists ! (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj}) \in \mathbb{K}^n ; e'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$.

Ainsi d'après ce qui précède en matière de la matrice d'une application linéaire relativement à des bases sur les espaces de départ et d'arrivée, on a :

$$M_{\beta\beta'}(Id_E) = \begin{pmatrix} e'_1 & ; & e'_2 & ; & \dots & ; & e'_n \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

On appelle matrice de **passage** de la base β à la base β' ,

la matrice : $Mat_{\beta\beta'}(Id_E) = P = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = P_{\beta\beta'}$.

Comme l'application Id_E est bijective, alors $P = P_{\beta\beta'}$ est **inversible**.

En pratique donc,

la matrice $P = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = P_{\beta\beta'}$ est telle que la j -ième colonne est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$.

Et $P^{-1} = P_{\beta'\beta}$ est la matrice de passage de la base β' à la base β .

Formule de changement de bases

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et (E, β) , (F, γ)

Soit $(E, \beta') \xrightarrow{Id_E} (E, \beta) \xrightarrow{f} (F, \gamma) \xrightarrow{Id_F} (F, \gamma')$

On a bien $f = Id_F \circ f \circ Id_E \Rightarrow$

$Mat_{\gamma'\beta'}(f) = Mat_{\gamma'\beta'}(Id_F \circ f \circ Id_E) = Mat_{\gamma'\gamma}(Id_F) \times Mat_{\gamma\beta}(f) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$,

alors $Mat_{\gamma'\beta'}(f)$ et $Mat_{\gamma\beta}(f)$ sont **équivalentes**.

Soit maintenant $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E) \Leftrightarrow u \in End_{\mathbb{K}}(E)$, on a

$(E, \beta') \xrightarrow{Id_E} (E, \beta) \xrightarrow{u} (E, \beta) \xrightarrow{Id_E} (E, \beta')$, et $u = Id_E \circ u \circ Id_E \Rightarrow$
 $Mat_{\beta'\beta'}(u) = Mat_{\beta'\beta'}(Id_E \circ u \circ Id_E) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) \times Mat_{\beta\beta}(u) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.
 Comme $Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = (Mat_{\beta\beta'}(Id_E))^{-1}$, $Mat_{\beta'\beta'}(u)$ et $Mat_{\beta\beta}(u)$ sont semblables.

Proposition

Soient $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E , $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,

$$P = P_{\beta\beta'} = Mat_{\beta\beta'}(Id_E), \quad A = Mat(u, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u),$$

$$A' = Mat(u, \beta') = Mat_{\beta'\beta'}(u)$$

$$= Mat_{\beta'\beta'}(Id_E \circ u \circ Id_E) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) \times Mat_{\beta\beta}(u) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E),$$

or $Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = (Mat_{\beta\beta'}(Id_E))^{-1}$, donc :

$$A' = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PA'P^{-1}.$$

Proposition

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E ,

muni d'une base β et $A = Mat(u, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u)$.

u est un automorphisme de E ssi $\det A \neq 0$ et $A^{-1} = Mat(u^{-1}, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u^{-1})$.

Exercice

Montrer que les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont

semblables.

Proposition de solution

La solution revient à trouver quatre vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$Av_1 = 0, \quad Av_2 = 0, \quad Av_3 = v_2, \quad Av_4 = v_2 + v_3 \quad \text{et} \quad \det(v_1, v_2, v_3, v_4) \neq 0.$$

Dès lors ;

$$Av_1 = 0, \quad \text{je propose dans } \beta \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^4, \quad v_1 = (0, 0, 0, 1)$$

$$Av_2 = 0, \quad \text{je propose dans } \beta \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^4, \quad v_2 = (1, 0, 0, 0)$$

$$Av_3 = v_2, \quad \text{je propose dans } \beta \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^4, \quad v_3 = (0, 1, 0, 0)$$

$$Av_4 = v_2 + v_3, \quad \text{je propose dans } \beta \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^4, \quad v_4 = (0, 0, 1, 0).$$

$$\text{Soit } \gamma = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad \text{on a } \det \gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

$$\text{De là soit } P = P_{\text{pass}(\beta \text{ à } \gamma)} = P_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{alors on a :}$$

$$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont semblables.}$$

Remarque :

Soit $x \in E$, soient $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E ,

symboliquement on notera :

$x = \beta \times x^\beta$ et $\beta' = \beta P_{\beta\beta'}$ ici β est considérée comme une matrice uniligne :

$$\left(\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{array} \right) \quad \text{et } \beta' \text{ est considérée comme une matrice uniligne :}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{array} \right).$$

Aussi on a : $(e'_i)_\beta = P_{\beta\beta'}(e_i)_\beta, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $(e'_i)_\beta$ et $(e_i)_\beta$ sont les coordonnées de e'_i et e_i dans la base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$.

Proposition

Soient $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

Soit $x \in E$, et $x^\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = les coordonnées de x dans la base β .

et $x^{\beta'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ = les coordonnées de x dans la base β'

alors $x^\beta = (P_{\beta\beta'} = P) \times x^{\beta'} \Leftrightarrow x^{\beta'} = (P_{\beta'\beta} = P^{-1}) \times x^\beta$.

Remarque

Soient deux bases $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n .

$P_{\beta\beta'} = (t_1^\beta \ t_2^\beta \ \dots \ t_n^\beta)$ où t_j^β constituent la $j^{\text{ième}}$ colonne avec les coordonnées de t_j dans la base β . $\forall 1 \leq j \leq n$,

et $\det(P_{\beta\beta'}) = \det_\beta(\beta') = |t_1^\beta \ t_2^\beta \ \dots \ t_n^\beta|$. Je rappelle que $P_{\beta\beta'}$ est la matrice de passage de la base β à la base β' .

Proposition

Soit $S = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une suite de n vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n . Soit deux bases β, β' de E , alors :

$$\begin{aligned} \det_\beta(S) &= |V_1^\beta \ V_2^\beta \ \dots \ V_n^\beta| = \det_\beta(\beta') \times \det_{\beta'}(S) \\ &= |t_1^\beta \ t_2^\beta \ \dots \ t_n^\beta| \times |V_1^{\beta'} \ V_2^{\beta'} \ \dots \ V_n^{\beta'}| \end{aligned}$$

$$\det_\beta(S) = \det(P_{\beta\beta'}) \times \det_{\beta'}(S).$$

2.4.4 Déterminant et trace d'un endomorphisme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie

Proposition

Soit un endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie,

Moyennant une base β sur E qui existe en pareille situation, on peut définir :

$$\det(f) = \det(M_{\beta\beta}(f)) = \det(M_{\beta'\beta'}(f)) \text{ et}$$

$$\text{Trace}(f) = \text{Trace}(M_{\beta\beta}(f)) = \text{Trace}(M_{\beta'\beta'}(f)).$$

Pour Toute autre base β' de E .

Dem :

On sait que $M_{\beta'\beta'}(f) = P_{\beta\beta'}^{-1} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}$ et que :

$$\begin{aligned} \det(M_{\beta'\beta'}(f)) &= \det(P_{\beta\beta'}^{-1} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}) \\ &= \det(P_{\beta\beta'}^{-1}) \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \times \det(P_{\beta\beta'}) \\ &= (\det(P_{\beta\beta'}))^{-1} \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \times \det(P_{\beta\beta'}) \\ &= (\det(P_{\beta\beta'}))^{-1} \times \det(P_{\beta\beta'}) \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \text{ (car } \mathbb{K} \text{ est un corps commutatif)} \\ &= \det(M_{\beta\beta}(f)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aussi } \text{Trace}(M_{\beta'\beta'}(f)) &= \text{Trace}(P_{\beta\beta'}^{-1} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}) \\ &= \text{Trace}(P_{\beta\beta'}^{-1} \times P_{\beta\beta'} \times M_{\beta\beta}(f)) = \text{Trace}(M_{\beta\beta}(f)). \end{aligned}$$

Résumons un peu

1) Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels : $f : E \rightarrow F$ est linéaire si l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs de E est une combinaison linéaire de l'image des vecteurs antécédents avec les mêmes coefficients de combinaison.

2) Soit E munit d'une base $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\forall y \in E, \exists ! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$;

$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$; d'où $f(y) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)$; donc étant donnée

$\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $f(\beta) = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ qui est l'action de f sur une base de E , on peut déterminer $f(y), \forall y \in E$. On peut dire que f est complètement déterminée par son action sur une base de E .

Aussi si F est munit d'une base $\gamma = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ alors $\forall 1 \leq i \leq n$,

$f(e_i) = \sum_{j=1}^p a_{ji} t_j \in F$ delà on peut associer à f une matrice : $Mat_{\gamma\beta}(f) = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$.

3) Considérant

$Id_E : (E, \beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)) \rightarrow (E, \beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)), x \mapsto x$ on aura

alors $\forall 1 \leq i \leq n, Id_E(e'_i) = e'_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} e_j$, delà on peut associer à Id_E

une matrice : $Mat_{\beta\beta'}(Id_E) = P_{\beta\beta'} = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$ appelée la matrice de passage

de la base β à la base β' , matrice qui est inversible, dont l'inverse

$(P_{\beta\beta'})^{-1} = Mat_{\beta'\beta}((Id_E)^{-1}) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = P_{\beta'\beta} = (\delta_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$ est

la matrice de passage de la base β' à la base β et représentant l'automorphisme

$(Id_E)^{-1} = Id_E : (E, \beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)) \rightarrow (E, \beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n))$.

alors $\forall 1 \leq i \leq n, (Id_E)^{-1}(e_i) = Id_E(e_i) = e_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ji} e'_j$.

EXERCICE 1(bonus)

I. \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique $\beta_0 = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$.

Soit les systèmes $\mathcal{B}_1 = \{v_1; v_2; v_3\}$ et $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ où

on a : $v_1 = (1, 0, 1)$; $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$ puis

$e_1 = (1, 2, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$

1. 1) Montrer que \mathcal{B}_1 et \mathcal{B} sont des bases de \mathbb{R}^3 .

2) Écrire les vecteurs $(3, 4, 5)$ puis $(a; b; c)$ en fonction des

vecteurs la base \mathcal{B}_1 .

II. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par :

$$\begin{cases} f(v_1) = (0, 5, 1) = u_1 \\ f(v_2) = (3, 1, 2) = u_2 \\ f(v_3) = (1, 6, 0) = u_3 \end{cases}$$

1. 1) Exprimer en fonction de u_1 ; u_2 et u_3 les vecteurs $f(3, 4, 5)$ et $f(a, b, c)$.

2) En déduire l'expression de f sur \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique β_0 .

3) Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.

4) l'application est - elle bijective ? Justifier

III. On désire écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

1) Exprimer chacun des vecteurs u_1 ; u_2 ; u_3 dans la base \mathcal{B}_1 .

- 2) En déduire $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base \mathcal{B}_1 .
- 3) Réécrire $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$. dans la base \mathcal{B} .
- 4) Écrire les matrices

$$A_{\mathcal{B}_1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f,) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix};$$

$$A_{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f,) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \text{ et } P = P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

NB : $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B} .

Les matrices $A_{\mathcal{B}}$ et $A_{\mathcal{B}_1}$ sont les matrices de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 de f respectivement.

1. 5) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
- 6) Montrer que $A_{\mathcal{B}} = P^{-1}A_{\mathcal{B}_1}P$.

Proposition de correction

I.

1. $B_1 = \{v_1; v_2; v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ et $B = \{e_1; e_2; e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ et $\text{card}(B_1) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = \text{card}(B)$.

Ainsi on va évaluer les $\det(B)$ et $\det(B_1)$.

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (j'ai fait } C_1 - C_2)$$

$\Rightarrow B_1$ est une base de \mathbb{R}^3 .

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow B \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

2.

* $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;

$$(3, 4, 5) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(0, 1, 1) \\ = (\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma)$$

$$\text{Soit } (3, 4, 5) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(0, 1, 1) \\ = (\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma) \Rightarrow$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \beta + \gamma = 4 \\ \alpha + \beta + \gamma = 5 \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = 2$. Ainsi :

$$(3, 4, 5) = (1, 0, 1) + 2(1, 1, 1) + 2(0, 1, 1) = v_1 + 2v_2 + 2v_3.$$

$$** \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; (a, b, c) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(0, 1, 1) \\ = (\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma)$$

$$\text{Soit } (a, b, c) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(0, 1, 1) \\ = (\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma) \Rightarrow$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \beta + \gamma = b \\ \alpha + \beta + \gamma = c \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c-b \\ 0 & 1 & 0 & a+b-c \\ 0 & 0 & 1 & c-a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = c - b; \beta = a + b - c; \gamma = c - a.$$

Ainsi :

$$(a, b, c) = (c - b)(1, 0, 1) + (a + b - c)(1, 1, 1) + (c - a)(0, 1, 1) \\ = (c - b)v_1 + (a + b - c)v_2 + (c - a)v_3.$$

Mieux on peut résoudre concomitamment :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \beta + \gamma = 4 \\ \alpha + \beta + \gamma = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \beta + \gamma = b \\ \alpha + \beta + \gamma = c \end{cases}$$

car les deux systèmes ont la même matrice associée.

$$\text{soit la matrice } M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & 4 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 & c \end{bmatrix} \text{ combinant les matrices}$$

augmentées des deux systèmes M échelonnée réduite en ligne canonique au niveau de la matrice associée des deux systèmes

$$\text{qui est : } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ donnera l'ensemble solution des deux}$$

systèmes en même temps. On aura donc :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & 4 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 & c \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & c-b \\ 0 & 1 & 0 & 2 & a+b-c \\ 0 & 0 & 1 & 2 & c-a \end{bmatrix} = M',$$

on a les solutions du système (S_1) à l'avant dernière colonne de la matrice M' et les solutions du système (S_2) à la dernière colonne.

On a bien aussi

$$\begin{cases} (3, 4, 5) = v_1 + 2v_2 + 2v_3 \\ (a, b, c) = (c - b)v_1 + (a + b - c)v_2 + (c - a)v_3 \end{cases}.$$

II.

1) Expression en fonction de $u_1; u_2$ et u_3 des vecteurs $f(3, 4, 5)$ et $f(a, b, c)$.

$$* (3, 4, 5) = v_1 + 2v_2 + 2v_3 \Rightarrow$$

$$f(3, 4, 5) = f(v_1) + 2f(v_2) + 2f(v_3) = u_1 + 2u_2 + 2u_3.$$

$$** (a, b, c) = (c - b)v_1 + (a + b - c)v_2 + (c - a)v_3 \Rightarrow$$

$$f(a, b, c) = (c - b)f(v_1) + (a + b - c)f(v_2) + (c - a)f(v_3) \Leftrightarrow$$

$$f(a, b, c) = (c - b)u_1 + (a + b - c)u_2 + (c - a)u_3$$

2) Dédution de l'expression de f sur \mathbb{R}^3 muni de la base canonique

$$\beta_0 = ((1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)),$$

$$\text{Rappel : } (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

On a :

$$f(a, b, c) = (c - b)u_1 + (a + b - c)u_2 + (c - a)u_3 \Leftrightarrow$$

$$f(a, b, c) = (c - b)(0, 5, 1) + (a + b - c)(3, 1, 2) + (c - a)(1, 6, 0) \\ = (2a + 3b - 2c, 10c - 4b - 5a, 2a + b - c).$$

L'expression est donc :

$$f(a, b, c) = (2a + 3b - 2c, 10c - 4b - 5a, 2a + b - c), \\ \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

3) Je vais chercher la matrice de f dans la base β_0 la base canonique de \mathbb{R}^3 pour cela, je calcule à l'aide de :

$$f(a, b, c) = (2a + 3b - 2c, 10c - 4b - 5a, 2a + b - c), \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$\text{Pour } (1, 0, 0) \Rightarrow a = 1, b = c = 0$$

$$\text{Pour } (0, 1, 0) \Rightarrow a = 0, b = 1, c = 0$$

$$\text{Pour } (0, 0, 1) \Rightarrow a = b = 0, c = 1, \text{ ainsi on a :}$$

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) = (2, -5, 2) \\ f(0, 1, 0) = (3, -4, 1) \\ f(0, 0, 1) = (-2, 10, -1) \end{cases}$$

La matrice que je cherche est :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & 10 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et comme } \det(A) = 27 \neq 0 \Rightarrow$$

f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Ainsi $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0, 0, 0)\}$ et $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$.

4) D'après la question 3) f est une bijection.

III.

Rappel : $\mathcal{B}_1 = \{v_1; v_2; v_3\}$ et $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ et

$$\begin{cases} f(v_1) = (0, 5, 1) = u_1 \\ f(v_2) = (3, 1, 2) = u_2 \\ f(v_3) = (1, 6, 0) = u_3 \end{cases}$$

1) On sait que $(a, b, c) = (c - b)v_1 + (a + b - c)v_2 + (c - a)v_3$

$$\text{Alors } u_1 = (0, 5, 1) = (1 - 5)v_1 + (0 + 5 - 1)v_2 + (1 - 0)v_3 \\ = -4v_1 + 4v_2 + v_3,$$

$$u_2 = (3, 1, 2) = (2 - 1)v_1 + (3 + 1 - 2)v_2 + (2 - 3)v_3 \\ = v_1 + 2v_2 - v_3,$$

$$u_3 = (1, 6, 0) = (0 - 6)v_1 + (1 + 6 - 0)v_2 + (0 - 1)v_3 \\ = -6v_1 + 7v_2 - v_3,$$

$$2) \text{ On a } \begin{cases} f(v_1) = (0, 5, 1) = u_1 = -4v_1 + 4v_2 + v_3 \\ f(v_2) = (3, 1, 2) = u_2 = v_1 + 2v_2 - v_3 \\ f(v_3) = (1, 6, 0) = u_3 = -6v_1 + 7v_2 - v_3 \end{cases}$$

3) Avant de réécrire $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base β , nous allons exprimer un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction des vecteurs de β .

$$\text{Ainsi nous allons chercher à déterminer } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ tels que} \\ (x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \\ = (\alpha, 2\alpha + \beta, \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ 2\alpha + \beta = y \\ \gamma = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y - 2x \\ \gamma = z \end{cases} .$$

D'où $(x, y, z) = xe_1 + (y - 2x)e_2 + ze_3$, il faut noter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique. De là on a :

$$u_1 = (0, 5, 1) = 0 \times e_1 + (5 - 2 \times 0)e_2 + 1 \times e_3 = 5e_2 + e_3$$

$$u_2 = (3, 1, 2) = 3e_1 + (1 - 2 \times 3)e_2 + 2e_3 = 3e_1 - 5e_2 + 2e_3$$

$$u_3 = (1, 6, 0) = 1e_1 + (6 - 2 \times 1)e_2 + 0 \times e_3 = e_1 + 4e_2$$

On pourra alors noter que

$$\begin{cases} f(v_1) = (0, 5, 1) = u_1 = 5e_2 + e_3 \\ f(v_2) = (3, 1, 2) = u_2 = 3e_1 - 5e_2 + 2e_3 \\ f(v_3) = (1, 6, 0) = u_3 = e_1 + 4e_2 \end{cases}$$

est la réécriture de $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base B .

4) La matrice A_{β_1} est obtenue à l'aide de :

$$\begin{cases} f(v_1) = (0, 5, 1) = u_1 = -4v_1 + 4v_2 + v_3 \\ f(v_2) = (3, 1, 2) = u_2 = v_1 + 2v_2 - v_3 \\ f(v_3) = (1, 6, 0) = u_3 = -6v_1 + 7v_2 - v_3 \end{cases},$$

$$\text{de là } A_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pour écrire A_β , il faudra exprimer les vecteurs de la base β en fonction des vecteurs de la base β_1 , mais on n'oublie pas que

$$(a, b, c) = (c - b)v_1 + (a + b - c)v_2 + (c - a)v_3 \text{ de là :}$$

$$\heartsuit e_1 = (1, 2, 0) = (0 - 2)v_1 + (1 + 2 - 0)v_2 + (0 - 1)v_3$$

$$= -2v_1 + 3v_2 - v_3 \Rightarrow$$

$$f(e_1) = -2f(v_1) + 3f(v_2) - f(v_3) = -2u_1 + 3u_2 - u_3$$

$$= -2(5e_2 + e_3) + 3(3e_1 - 5e_2 + 2e_3) - (e_1 + 4e_2)$$

$$= 8e_1 - 29e_2 + 4e_3$$

$$\heartsuit e_2 = (0, 1, 0) = (0 - 1)v_1 + (0 + 1 - 0)v_2 + (0 - 0)v_3$$

$$= -v_1 + v_2 \Rightarrow$$

$$f(e_2) = -f(v_1) + f(v_2) = -(5e_2 + e_3) + 3e_1 - 5e_2 + 2e_3$$

$$= 3e_1 - 10e_2 + e_3$$

$$\heartsuit e_3 = (0, 0, 1) = (1 - 0)v_1 + (0 + 0 - 1)v_2 + (1 - 0)v_3$$

$$= v_1 - v_2 + v_3 \Rightarrow$$

$$f(e_3) = f(v_1) - f(v_2) + f(v_3)$$

$$= 5e_2 + e_3 - (3e_1 - 5e_2 + 2e_3) + e_1 + 4e_2$$

$$= -2e_1 + 14e_2 - e_3.$$

$$\text{En clair j'ai obtenu : } \begin{cases} f(e_1) = 8e_1 - 29e_2 + 4e_3 \\ f(e_2) = 3e_1 - 10e_2 + e_3 \\ f(e_3) = -2e_1 + 14e_2 - e_3. \end{cases},$$

$$\text{d'où } A_\beta = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -2 \\ -29 & -10 & 14 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pour déterminer $P_{\beta_1\beta}$ la matrice de passage de la base β_1 à la base β ,

il me faut rappeler que :

$$\begin{cases} e_1 = -2v_1 + 3v_2 - v_3 \\ e_2 = -v_1 + v_2 \\ e_3 = v_1 - v_2 + v_3. \end{cases} \text{ de là on a :}$$

$$P = P_{\beta_1\beta} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5) Calculons le

$$\det(P_{\beta_1\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (j'ai fait } C_2 + C_3) \Rightarrow$$

$P_{\beta_1\beta}$ est inversible.

Déterminons $P_{\beta_1\beta}^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{com}(P_{\beta_1\beta}) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \text{com}({}^t P_{\beta_1\beta}) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ P_{\beta_1\beta}^{-1} &= \text{com}({}^t P_{\beta_1\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_{\beta\beta_1}. \end{aligned}$$

6) Evaluons

$$\begin{aligned} P_{\beta_1\beta}^{-1} A_{\beta_1} &= P_{\beta\beta_1} A_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ P_{\beta\beta_1} A_{\beta_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Et } (P_{\beta_1\beta}^{-1} A_{\beta_1}) P_{\beta_1\beta} = P_{\beta\beta_1} A_{\beta_1} P_{\beta_1\beta}$$

$$\begin{aligned} P_{\beta\beta_1} A_{\beta_1} P_{\beta_1\beta} &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (P_{\beta_1\beta}^{-1} A_{\beta_1}) P_{\beta_1\beta} &= P_{\beta\beta_1} A_{\beta_1} P_{\beta_1\beta} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -2 \\ -29 & -10 & 14 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{On rappelle bien que } A_{\beta} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -2 \\ -29 & -10 & 14 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ainsi on a bien :

$$A_{\beta} = (P_{\beta_1\beta}^{-1} A_{\beta_1}) P_{\beta_1\beta} = P_{\beta_1\beta}^{-1} (A_{\beta_1} P) = P_{\beta_1\beta}^{-1} A_{\beta_1} P_{\beta_1\beta}$$

$$A_{\beta} = (P_{\beta\beta_1} A_{\beta_1}) P_{\beta_1\beta} = P_{\beta\beta_1} (A_{\beta_1} P_{\beta_1\beta}) = P_{\beta\beta_1} A_{\beta_1} P_{\beta_1\beta}.$$

Exercice 2(bonus)

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A dans la base canonique $\beta_0 = (e_1, e_2, e_3)$

$$\text{définie par : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Soit $X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur x_1 dans la base β_0 .

1. Calculer $f(x_1)$ dans la base β_0 .
2. Soient $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $u_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.
 - a) Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Déterminer la matrice de passage P de la base β_0 à la base β .
 - c) Déterminer la matrice de passage P' de la base β à la base β_0 .

- d) Donner les coordonnées X_β du vecteur x_1 dans la base β de deux façons.
 e) Déterminer la matrice D de f dans la base β de deux façons.
 f) Calculer $f(x_1)$ dans la base β , de deux façons.
 g) Donner l'expression de A à partir de celle de D ci-dessus.
 Donner A^2, A^3, A^4 en fonction de P, D et P^{-1} .
 Déterminer explicitement A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Proposé de solution

1. $(f(x_1))_{\beta_0} = \text{Mat}(f, \beta_0, \beta_0) X_{\beta_0} = A \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2.

a) Avec $\beta = (u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{R}^3$ et $\text{Card}(\beta) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$,

on va calculer $\det(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, donc β est une base de \mathbb{R}^3 .

b) La matrice de passage P de la base β_0 à la base β est :

$$P = P_{\beta_0\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) La matrice de passage P' de la base β à la base β_0 est :

$$P' = P_{\beta\beta_0} = (P_{\beta_0\beta})^{-1} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

d) On a $X_\beta = P_{\beta\beta_0} \times X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ d'une façon

l'autre façon serait par exemple de noter que

$$X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3$$

$$X_{\beta_0} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et en résolvant le}$$

système on trouve bien $a = 1, b = -6, c = 7$.

e) On a : $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d'une façon

l'autre façon est de calculer et résoudre successivement :

$$(S_1) \Leftrightarrow (f(u_1))_{\beta_0} = au_1 + bu_2 + cu_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(S_2) \Leftrightarrow (f(u_2))_{\beta_0} = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(S_3) \Leftrightarrow (f(u_3))_{\beta_0} = a''u_1 + b''u_2 + c''u_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

je rappelle que les (S_i) pour $i = 1, 2, 3$, sont des systèmes à résoudre.

Et alors $D = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

f) $(f(x_1))_{\beta} = \text{Mat}(f, \beta, \beta) X_{\beta} = DX_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 14 \end{bmatrix}$.

Pour la deuxième façon, on rappelle qu'à la question 1. on a calculé $f(x_1)$ dans la base β_0 , de là on fait la mise en équation suivante :

$$(f(x_1))_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en résolvant le système ci-dessus, on trouve bien $a = 0, b = -6, c = 14$.

g) On a $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = PD^2P^{-1} \\ A^3 = PD^3P^{-1} \\ A^4 = PD^4P^{-1} \\ A^n = PD^nP^{-1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Il faut savoir que

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ainsi : } n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 2^n & 1 - 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3 & 2^{n+1} & 3 - 2^{n+2} \\ 2^n - 2 & 2^n & 2 - 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Rappels

Sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E , de dimension n , muni d'une base considérons une famille S de vecteurs de E . Le rang de S est le rang de la A matrice constituée en lignes ou en colonnes des coordonnées des vecteurs de S .

On notera que A est une matrice associée à la suite S .

1. S est génératrice de E ssi le rang de $S = n = \text{rang}(A)$
2. S est libre ssi le rang de $S = \text{Cardinal de } S(\text{Card}S) = \text{rang}(A)$
3. S est liée ssi le rang de S est **strictement inférieur** au Cardinal de $S(\text{Card}S)$
4. S est une base de E ssi le rang de $S = n = \text{Cardinal de } S(\text{Card}S) = \text{rang}(A)$
5. Soit $F = \langle S \rangle$, alors $\dim F = \text{rang}(S) = \text{rang}(A)$

EXERCICE 1

Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

1. $u = (7, 12)$; $v = (18, -13)$; $w = (-4, 17)$
2. $u = (-1, 0, 2)$; $v = (1, 3, 1)$; $w = (0, 1, -1)$
3. $u = (15, -27, -6, 12)$; $v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

EXERCICE 2

On se place dans \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et on définit les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1)$; $w_2 = (1, 0, 0)$; $w_3 = (1, 1, 0)$; $w_4 = (0, 0, 1)$; $w_5 = (2, 2, 0)$.

Pour chacune des familles suivantes dire si elle est génératrice :

$$S_1 = \{w_1, w_2\}; S_2 = \{w_2, w_5\}; S_3 = \{w_3, w_5\}; S_4 = \{w_4, w_5\}; S_5 = \{w_1, w_2, w_3\};$$

$$S_6 = \{w_1, w_3, w_4\}; S_7 = \{w_5, w_3, w_1\}; S_8 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}.$$

EXERCICE 3

On se place dans \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et on définit les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1)$; $w_2 = (1, 0, 0)$; $w_3 = (1, 1, 0)$; $w_4 = (0, 0, 1)$; $w_5 = (2, 2, 0)$.

Les familles suivantes sont-elles des bases de \mathbb{R}^3 :

$$S_1 = \{w_1, w_2\}; S_2 = \{w_2, w_5\}; S_3 = \{w_3, w_5\}; S_4 = \{w_4, w_5\}; S_5 = \{w_1, w_2, w_3\};$$

$$S_6 = \{w_1, w_3, w_4\}; S_7 = \{w_5, w_3, w_1\}; S_8 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}.$$

EXERCICE 4

\mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) .

Soient les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$; $u_2 = (-1, 1, 0)$; $u_3 = (1, 0, -1)$.

1. Montrer que $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Donner les coordonnées respectives des vecteurs $(1, 0, 0)$; $(1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$ dans B_1 .
3. Soit $B_2 = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 0)\}$.
 - (a) Montrer que B_2 est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Trouver dans B_1 et B_2 les composantes du vecteur $(1, 2, 1)$.

EXERCICE 5

\mathbb{R}^4 est muni de sa base canonique (t_1, t_2, t_3, t_4) . On considère les vecteurs :

$$e_1 = (1, 2, 3, 4); e_2 = (1, 1, 1, 3); e_3 = (2, 1, 1, 1); e_4 = (-1, 0, -1, 2); e_5 = (2, 3, 0, 1).$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F par e_4 et e_5 .

Calculer les dimensions respectives de E , F , $E \cap F$ et $E + F$.

EXERCICE 6

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + 2t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$

- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
- b) Donner une base et la dimension de E .

EXERCICE 7

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0 \text{ et } z = 0\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^3 .

EXERCICE 8

Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$; $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$ et $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z$.

1. Montrer que f, g et h sont linéaires.
2. Déterminer noyau et image dans chaque cas.

EXERCICE 9

Vous répondrez par Vrai ou faux avec justification

- a) A un homomorphisme donné f correspond une infinité de matrices qui lui sont associées.
- b) L'application identique d'un espace vectoriel E de dimension finie se traduit par la même matrice dans toutes les bases de E .

EXERCICE 10

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 défini par :

$$f(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4; f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4; f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$$

$$f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

1. Donner la matrice de f relativement à la base β . f est-il un automorphisme?
2. Calculer $f(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ de deux façons.
3. Déterminer $\ker f$ et $\text{Im } f$.
4. Soit $F = \text{vect}(e_3, e_4)$. F et $\ker f$ sont-ils supplémentaires?

EXERCICE 11

On considère \mathbb{R}^3 muni de la base canonique $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Soient $\vec{u} = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\vec{v} = -2e_1 + e_2 - e_3$, $\vec{w}_m = me_2 - e_3$; $m \in \mathbb{R}$

- 1) Pour quelles valeurs de m , $S_m = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_m\}$ est-il une base de \mathbb{R}^3 ?

En déduire que S_1 est une base de \mathbb{R}^3 .

- 2) Déterminer la matrice de passage de la base β à la base S_1 .
- 3) Déterminer la matrice de passage de la base S_1 à la base β .
- 4) Soit $\vec{H} = (-5; 1; 2)$. Quelles sont les coordonnées de \vec{H} dans la base S_1 ?
- 5) On considère l'application linéaire

$$f_m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x; y; z) \mapsto (x + 2y + z; -2x + y - z; my - z).$$

- a) Quelle est la matrice de f_m dans la base β ?
 - b) Dans quels cas f_m est-elle un automorphisme de \mathbb{R}^3 ?
- En déduire que f_0 et f_1 sont des automorphismes de \mathbb{R}^3 .
- c) Trouver $(x; y; z)$ tel que $f_1(x; y; z) = (0; 1; 7)$ et calculer $(f_1)^{-1}(2; 5; 0)$.

EXERCICE 12

$$\text{On considère } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On appelle φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est A

- 1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Détermner $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2) Montrer que φ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

- 3) On note $B = \{u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (5, -2, 2); u_3 = (-1, 1, 2)\}$

- a) Montrer que B est une base de \mathbb{R}^3 .
- b) Trouver P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base B .
- c) Calculer P^{-1} .

4) Quelle est la matrice N de φ dans la base B .

5) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 13

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X , à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On donne :

$B_1 = X^2$, $B_2 = (X - 1)^2$, $B_3 = (X + 1)^2$, $C_1 = 1$, $C_2 = X$, $C_3 = X^2$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (B_1; B_2; B_3)$ et $\mathcal{C} = (C_1; C_2; C_3)$ sont des bases de E .

2. Donner les coordonnées des polynômes suivants dans la base \mathcal{B} .

$R = 2X - 1$, $S = 12$, $T = 3X^2 - 10X + 1$.

3. On considère l'application $P \mapsto f(P)$ définie dans E par :

$f(P)(X) = P(X - 1) + (X + 1)P'(X)$:

Montrer que f est un endomorphisme de E . Donner les matrices :

(i) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f en tant qu'endomorphisme de E muni de la base \mathcal{B} .

(ii) $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$ de f en tant qu'application linéaire de E muni de la base \mathcal{C} dans E muni de la base \mathcal{B} .

EXERCICE 1

Dans \mathbb{R}^2 , on pose : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$,
 $\alpha \in \mathbb{R}$. Ces deux lois de composition définissent-elles sur \mathbb{R}^2
 une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

EXERCICE 2

Soit \mathbb{R}_+^* muni de la loi de composition interne \oplus définie par $a \oplus b = ab$,
 $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi de composition externe \otimes telle que
 $\lambda \otimes a = a^\lambda$; $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

EXERCICE 3

Considérons les opérations suivantes : $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\otimes : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dans quels cas la structure $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ est-elle un espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

$\forall (x_1, y_1); (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = \left((\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})^3; (\sqrt[5]{y_1} + \sqrt[5]{y_2})^5 \right)$; $(x_1, y_1) \otimes \lambda = (x_1 \lambda^3, x_1 \lambda^3)$;
2. $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$; $(x_1, y_1) \otimes \lambda = (x_1 \lambda, 0)$;
3. $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$; $(x_1, y_1) \otimes \lambda = (y_1 \lambda, x_1 \lambda)$.

EXERCICE 4

Sur l'ensemble \mathcal{P}'_n des polynômes à une indéterminée X de coefficients réels,
 de degré égal à l'entier positif n , on définit l'addition de deux polynômes P et Q par :

$$(P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$(\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

- a) Examiner si l'ensemble \mathcal{P}'_n muni de ces deux lois est un espace vectoriel.
- b) Même question pour l'ensemble \mathcal{P}_n des polynômes à une indéterminée X ,
 de degré inférieur ou égal à l'entier n . Montrer que l'ensemble \mathcal{I}_n
 des polynômes P de \mathcal{P}_n tels que :

$$P(X) + P(-X) = 0$$

est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension et une base.

Exercice 1

I) Montrer que les vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :

a) $u = (1, 2, -1)$; $v = (1, 0, 1)$; $w = (-1, 2, -3)$

b) $u = (-1, 2, 5)$; $v = (2, 3, 4)$; $w = (7, 0, -7)$.

II) Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

a) $u = (7, 12)$; $v = (18, -13)$; $w = (-4, 17)$

b) $u = (-1, 0, 2)$; $v = (1, 3, 1)$; $w = (0, 1, -1)$

c) $u = (15, -27, -6, 12)$; $v = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2\right)$.

III) Déterminer tous les vecteurs (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tels que le système suivant soit libre :

$$\{(1, 0, 0); (0, 1, 1); (x, y, z)\}$$

Exercice 2

On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de \mathbb{R}^4 .

Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels et préciser alors leur dimension.

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}; E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0\}; E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3\};$$

$$E_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 x_4 = 0\}; E_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}; E_6 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1^2\}.$$

Exercice 3

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathfrak{B} = (1; x; x^2)$.

1. Montrer que $\mathfrak{B}_1 = (1; 1 + x; 1 + x + x^2)$ est une base de E .
2. Ecrire $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ dans la base \mathfrak{B}_1 .

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans la base \mathfrak{B}_1 ; quelles sont ses composantes dans la base \mathfrak{B} ?

4. Le système $S = (3 + 2x + 2x^2; 1 + 3x + 2x^2; 3 - 5x - 2x^2)$ est-il une base de E ? Si non, indiquer une relation qui lie les trois polynômes. Déterminer la dimension du sous espace vectoriel de E engendré par ce système

Exercice 4

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs :

$$u = (2, 1, 0); v = (-1, 0, 1); w = (4, 1, -2)$$

- a) Déterminer la dimension et une base de F et écrire la forme générale d'un élément de F .

- b) Montrer que $G = \{(0, \alpha + \beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 dont

on déterminera la dimension et une base.

- c) Déterminer la dimension et une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels F et G .

- d) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 dans la nouvelle base de $F + G$.

Exercice 5

Dans le \mathbb{R} - espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles

F et G définis comme suit :

$$F = \{(a - 3b, 2a + 3b, a) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\} ; G = \{(x, y, z) \in E ; x + 2y = 0\}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E pour lesquels on donnera une base et la dimension.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 6

Préciser si les applications $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies ci-après sont linéaires ou non :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y, y + z, z - 1) ; \\ g(x, y) &= (x, y, m) \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.} \end{aligned}$$

Exercice 7

Trouver un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont le noyau soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Est-il unique ?

Exercice 8

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$f(x, y, z, t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t).$$

1. Montrer que cette application n'est pas injective et déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles elle est surjective.
2. Donner une base du noyau de f .

Exercice 9

Soient \mathbb{R}^3 , l'espace vectoriel de base canonique $\mathfrak{B} = (e_1 ; e_2 ; e_3)$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + 3e_2 ; f(e_2) = -2e_1 + e_3 ; \\ f(e_3) &= -e_1 + 2e_2 + e_3 . \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice A associée à f .
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
3. Soit $u = e_1 + e_2 - e_3$, montrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer la matrice de f dans cette base.
4. Montrer que le système (u, e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 10

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A dans la base canonique $\beta_0 = (e_1, e_2, e_3)$

$$\text{définie par : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice définie par : $(A - \lambda I_3)$ où I_3 est la matrice d'ordre 3

et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Calculer le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. En déduire les solutions de l'équation $P(\lambda) = 0$.
3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id_{\mathbb{R}^3})$, où λ_i couvre les solutions de $P(\lambda) = 0$ et $Id_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identité de \mathbb{R}^3 .
4. Soient $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $u_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.
 - a) Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Déterminer la matrice de passage P de la base β_0 à la base β .
 - c) Déterminer la matrice D de f dans la base β par la formule $D = P^{-1}AP$.
 - d) Donner l'expression de A à partir de celle de D ci-dessus.
Donner A^2 , A^3 , A^4 en fonction de P , D et P^{-1} .
Déterminer explicitement A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 et déterminer une base de E .

Exercice 2

On considère \mathbb{R}^3 muni de la base canonique $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Soient $\vec{u} = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\vec{v} = -2e_1 + e_2 - e_3$, $\vec{w}_m = me_2 - e_3$; $m \in \mathbb{R}$

1) Pour quelles valeurs de m , $S_m = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_m\}$ est-il une base de \mathbb{R}^3 ?

En déduire que S_1 est une base de \mathbb{R}^3 .

2) Déterminer la matrice de passage de la base β à la base S_1 .

3) Déterminer la matrice de passage de la base S_1 à la base β .

4) Soit $\vec{H} = (-5; 1; 2)$. Quelles sont les coordonnées de \vec{H} dans la base S_1 ?

5) On considère l'application linéaire

$$f_m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x; y; z) \mapsto (x + 2y + z; -2x + y - z; my - z).$$

a) Quelle est la matrice de f_m dans la base β ?

b) Dans quels cas f_m est-elle un automorphisme de \mathbb{R}^3 ?

En déduire que f_0 et f_1 sont des automorphismes de \mathbb{R}^3 .

c) Trouver $(x; y; z)$ tel que $f_1(x; y; z) = (0; 1; 7)$ et calculer $(f_1)^{-1}(2; 5; 0)$.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A^2 = A - I_2$.

b) Calculer A^3

c) Montrer que, si p est un entier positif, on a :

$$A^{3p} = (-1)^p I_2, \quad A^{3p+1} = (-1)^p A, \quad A^{3p+2} = (-1)^p (A - I_2).$$

d) Les suites réelles (u_n) et (v_n) sont définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_{n+1} = -u_n \quad \text{et par la donnée de } u_1 \text{ et } v_1.$$

Calculer u_n et v_n en fonction de u_1, v_1 et n , en particulier

$$\text{pour } n = 3p; n = 3p + 1; n = 3p + 2, p \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4

Soit E un \mathbb{R} - espace vectoriel de dimension 3 et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

On considère l'application \mathbb{R} - linéaire $u : E \rightarrow E$ définie par :

$$u(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3, \quad u(e_2) = -u(e_1), \quad u(e_3) = e_1 - e_2.$$

Soit M la matrice de u dans la base β . On pose :

$$f_1 = e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2 \quad \text{et } \varsigma = (f_1, f_2, f_3).$$

1) Écrire la matrice M .

2) Calculer la dimension de $\text{Ker}(u)$, le rang de u et le rang de M .

3) Montrer que ς est une base de E .

4) Soit P la matrice de passage de la base β à la base ς et

N la matrice de u dans la base ς .

4-a) Déterminer les matrices P, P^{-1} et N .

4-b) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer N^k et en déduire M^k .

Exercice 1

Sur l'ensemble \mathcal{S} des suites numériques $u=(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on définit l'addition de deux suites u et v par $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$\lambda u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

1. Montrer que \mathcal{S} est un espace vectoriel.
2. Montrer que l'ensemble \mathcal{F} des suites de Fibonacci qui vérifient la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

Exercice 2

1. On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de \mathbb{R}^4 .
Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels et préciser alors leur dimension.

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}; E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0\};$$

$$E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3\}; E_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 x_4 = 0\};$$

$$E_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}; E_6 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1^2\}.$$

Exercice 3

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E des fonctions dérivables sur \mathbb{R} :

$$E_1 = \{f \in E \mid f^2 = f'\}; E_2 = \{f \in E \mid f(x) = x f'(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 4

- I) A partir du système libre $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'un espace vectoriel E , on construit les vecteurs :

$$\epsilon_j = e_1 + e_2 + \dots + e_j \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n. \text{ Montrer que } \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\} \text{ est aussi un système libre.}$$

- II) Si $b_1 = (1, 1, 1, 1)$; $b_2 = (1, 1, -1, -1)$; $b_3 = (1, -1, 1, -1)$; $b_4 = (1, -1, -1, 1)$ constituent une base de \mathbb{R}^4 ,

déterminer les coordonnées du vecteur $x = (1, 2, 1, 1)$ dans cette base.

- III) Montrer que le sous-ensemble E , ci-après est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 dont on déterminera la dimension et une base.

$$E = \{(\alpha - \beta, 2\alpha, \alpha + 2\beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$$

- IV) Montrer que les polynômes P_1, P_2, P_3 définis ci-après forment une base de l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X , de degré inférieur ou égal à deux :

$$P_1(X) = X^2; P_2(X) = (X - 1)^2; P_3(X) = (X + 1)^2.$$

Exprimer les polynômes Q et R suivants dans cette base :

$$Q(X) = 12; R(X) = 3X^2 - 10X + 1.$$

- V)** Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et dérivables sur \mathbb{R} et F l'ensemble des fonctions numériques f définies par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \gamma x + \delta & \text{si } 1 < x \end{cases} .$$

Exprimer les constantes réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction des trois réels a, b, c pour que F soit un sous-espace vectoriel de E . Déterminer alors la dimension et une base de F .

- VI)** Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs :

$$u = (2, 1, 0) ; v = (-1, 0, 1) ; w = (4, 1, -2)$$

- a)** Déterminer la dimension et une base de F et écrire la forme générale d'un élément de F .
- b)** Montrer que $G = \{(0, \alpha + \beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 dont on déterminera la dimension et une base.
- c)** Déterminer la dimension et une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels F et G .
- d)** Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 dans la nouvelle base de $F + G$.

- X)** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère les polynômes suivants de l'indéterminée X :

$$P_1(X) = 5 + X + X^2 + X^3 ; P_2(X) = -1 + 6X + 3X^2 + X^3 ; P_3(X) = -16 + 3X - 2X^3 ;$$

$$P_4(X) = 3 + 4X + 4X^2 + X^3 ; P_5(X) = 6 + 3X + X^2 ; P_6(X) = -3 + 6X + 10X^2 + 3X^3 ;$$

$$P_7(X) = 3 - X - 3X^2 - X^3 .$$

Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G engendré respectivement par les familles $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ et $\{P_5, P_6, P_7\}$, puis des espaces vectoriels $F \cap G$ et $F + G$.

- VII)** Soit F et G les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 engendrés par les familles respectives $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$, où :

$$u_1 = (1, 0, 4, 2) ; u_2 = (1, 2, 3, 1) ; u_3 = (1, -2, 5, 3) ; v_1 = (4, 2, 0, 1) ; v_2 = (1, 4, 2, 1) .$$

- a)** Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G .
- b)** Montrer que les sous-espaces F et G sont supplémentaires.

Exercice 5

Préciser si les applications $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies ci-après sont linéaires ou non :

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, z - 1); \quad g(x, y) = (x, y, m) \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

Exercice 6

Trouver un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont le noyau soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Est-il unique ?

Exercice 7

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$f(x, y, z, t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t).$$

Montrer que cette application n'est pas injective et déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles elle est surjective. Donner une base du noyau de f .

Exercice 8

On considère les matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et comparer avec $(A + B)^2$. Commenter.

Exercice 9

Si M et N sont deux matrices de types respectifs (m, n) et (n, m) telles que $MN = I$, montrer que la matrice $P = NM$ est idempotente, c'est-à-dire que $P^2 = P$.

En déduire que P est diviseur à droite et à gauche de zéro.

Exercice 10

Montrer que les vecteurs suivants forment une base de \mathbb{R}^3 :

$$\epsilon_1 = (1, 0, 1) ; \quad \epsilon_2 = (-1, 1, 0) ; \quad \epsilon_3 = (2, 1, 1).$$

On définit alors l'application f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 par les images, exprimées dans la base canonique de \mathbb{R}^4 :

$$f(\epsilon_1) = (1, 1, 1, 0) ; \quad f(\epsilon_2) = (-1, -1, -1, 0) ; \quad f(\epsilon_3) = (0, 1, -1, -1).$$

Déterminer la matrice A qui représente f lorsque \mathbb{R}^3 est muni de la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ et la matrice B lorsque \mathbb{R}^3 est muni de la base canonique.

A-t-on une relation matricielle entre A et B ?

Exercice 11

On considère l'homomorphisme f de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 défini par :

$$f(x, y, z, t) = (x + t, x + y + t, y + z + t).$$

Déterminer la matrice de cette application linéaire lorsque \mathbb{R}^4 est muni de la base formée des vecteurs :

$u_1 = (1, 1, 1, 1)$; $u_2 = (1, 1, 1, 0)$; $u_3 = (1, 1, 0, 0)$; $u_4 = (1, 0, 0, 0)$
et \mathbb{R}^3 de la base :

$$v_1 = (0, 0, 1) ; \quad v_2 = (0, 1, 1) ; \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

Déterminer le noyau et l'image ($Im f$) de f .

Espaces Vectoriels-Applications Linéaires

Exercice 1

1. On pose $E = \mathbb{R}^2$. Doté des lois suivantes, E est - il un espace vectoriel ?
 - (a) L'addition : $E \times E \longrightarrow E$; $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
et la multiplication $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$; $(\lambda, (x, y)) \longrightarrow (\lambda x, 0)$.
 - (b) L'addition : $E \times E \longrightarrow E$; $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow (x_1 - 3x_2, y_1 + x_1 y_2)$
et la multiplication $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$; $(\lambda, (x, y)) \longrightarrow (-2x, \lambda y)$.
2. Soit L l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0.
Montrer que $(L; +; \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
3. Est ce que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels ?
 - (a) A = ensemble des fonctions polynômes.
 - (b) B = ensemble des fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2.
 - (c) C = ensemble des fonctions polynômes degré strictement inférieur à 2.

Exercice 2

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sev de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 :

- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
 $E'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$
 $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y > 0\}$
 $E'_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 \leq 0\}$
 $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = 1\}$
 $E'_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 0\}$

EXERCICE 3

- 1) Dans \mathbb{R}^3 déterminer les sous espaces vectoriels engendrés par $A = \{(1, 1, 1) ; (1, 0, 1)\}$.
- 2) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$ Montrer qu'il existent deux vecteurs qui engendrent F .
- 3) Dans \mathbb{R}^3 , on considère, $F = \{(x, 0, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$
 - a. Montrer F et G sont des sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
 - b. Déterminer $F + G$.

EXERCICE 4

- 1- Dans \mathbb{R}^2 , montrer que $(1, 2) ; (2, 3) ; (2, 2)$ forme un système générateur.
- 2- Montrer que $\mathbb{R}^2 = Vect \{(1, 1) ; (2, 3)\}$
1. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? : $\mathcal{A}_1 = \{(1; 2; 3), (4; 5; 6), (-1; 2; 3)\}$;
 $\mathcal{A}_2 = \{1; \cos(x); \cos(2x)\}$; $\mathcal{A}_3 = \{1; 1 + x; x^2\}$; $\mathcal{A}_4 = \{(1; 0; 3), (2; 1; -1), (3; 1; 2)\}$.

EXERCICE 5

- I. Parmi les applications suivantes quelles sont celles qui sont linéaires ? Si oui quelles sont celles qui sont injectives, surjectives, bijectives ?
 - a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (2x + y; 3x - 2y)$
 - b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (x + y; xy)$

- c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 1; y)$
 d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x + y; x; 0)$

II. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , deux fois dérivables et φ l'application :

$$\begin{aligned} f & : E \longrightarrow E \\ y & \longmapsto y'' + y' - 2y. \end{aligned}$$

Montrer que φ est une application linéaire.

EXERCICE 6

I. Soit les systèmes $\mathcal{B}_1 = \{v_1; v_2; v_3\}$ et $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ où on a : $v_1 = (1, 0, 1)$; $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$ puis $e_1 = (1, 2, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$

- 1) Montrer que \mathcal{B}_1 et \mathcal{B} sont des bases de \mathbb{R}^3 .
- 2) Écrire les vecteurs $(3, 4, 5)$ puis $(a; b; c)$ en fonction des vecteurs la base \mathcal{B}_1 .

II. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f(v_1) & = (0, 5, 1) = u_1 \\ f(v_2) & = (3, 1, 2) = u_2 \\ f(v_3) & = (1, 6, 0) = u_3. \end{aligned}$$

- 1) Exprimer en fonction de u_1 ; u_2 et u_3 les vecteurs $f(3, 4, 5)$ et $f(a, b, c)$.
- 2) En déduire l'expression de f sur \mathbb{R}^3 .
- 3) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- 3) l'application est - elle bijective? Justifier

III. On désire écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

- 1) Exprimer chacun des vecteurs u_1 ; u_2 ; u_3 dans la base \mathcal{B}_1 .
- 2) En déduire $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base \mathcal{B}_1 .
- 3) Réécrire $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$. dans la base \mathcal{B} .

4) Écrire les matrices $A_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$;

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

NB : P est la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B} . Les matrices $A_{\mathcal{B}}$ et $A_{\mathcal{B}_1}$ sont les matrices de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 respectivement.

- 4) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
- 4) Montrer que $A_{\mathcal{B}} = P^{-1}A_{\mathcal{B}_1}P$.

EXERCICE 7

1. Soit k un réel.

- (a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les vecteurs u et v sont orthogonaux dans \mathbb{R}^4 , où $u = (k, 1, k, 3)^t$ et $v = (k, 3, 2, -6)^t$.

- (b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $\|w\| = \sqrt{39}$ où $w = (1, k, -2, 5)^t \in \mathbb{R}^4$.
- (c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $d(x, y) = 6$ où $x = (2, k, 1, -4)^t$ et $y = (3, -1, 6, -3)^t$.
2. Soit L la droite passant par le point $A = (2, 3, 1)$ et parallèle au vecteur $\vec{u} = (1; -4; 1)^t$. Déterminer l'équation du plan qui contient la droite L et le point $B = (1, 2, -1)$.

Bibliographie

- [1] Jean-Marie Monier, Algèbre MPSI, Cours et 700 Exercices Corrigés, 3^{ème} édition, DUNOD
- [2] J.-P.Lecoutre, P. Pilibossian, Travaux Dirigés, Algèbre, 2^{ème} édition, DUNOD
- [3] J.Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, Cours de Mathématiques, Tome 1, Algèbre, 3^{ème} édition, DUNOD.
- [4] Claude Boy, Alain Nizard, Prépas TD Algèbre, Exercices et corrigés, Armand Colin.
- [5] Algèbre linéaire de Prof. Eva Bayer Fluckiger ; Dr. Philippe Chabloz