CALCUL INTEGRAL et EQUATION DIFFERENTIELLE

L1

2022-2023

Dr BAHI

Table des matières

Chapitre 1

Intégrale indéfinie

1.1 Primitive et intégrale indéfinie

1.1.1 Notion de primitive

L'un des principaux problèmes du calcul différentiel est la recherche de la dérivée d'une fonction donnée. De nombreux problèmes d'analyse mathématique et les innombrables applications de cette dernière à la géométrie, la mécanique, la physique et la technique conduisent au problème inverse, c'est à dire à la détermination d'une fonction $F(x)$ dont la dérivée $F'(x)$ est égale à une fonction $f(x)$ donnée.

La détermination d'une fonction dont on connaît la dérivée est un problème fondamental du calcul intégral.

Définition 1.1. *On dit qu'une fonction $F(x)$ est une primitive d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle I si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Exemple 1.1.
1. *La fonction $F(x) = \sin x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \cos x$ sur la droite numérique tout entière, car $(\sin' x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
2. *La fonction $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ est une primitive de la fonction $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $]-1,1[$,car $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ en tout point x de cet intervalle.*

La primitive d'une fonction $f(x)$ donnée n'est pas unique. En effet, si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, il en est de même de toute fonction $F(x)+c$, où c est une constante arbitraire, puisque $(F(x)+c)' = f(x)$. Par exemple, la fonction $f(x) = \cos x$ admet pour primitive aussi bien $\sin x$, que $\sin x + c$, puisque $(\sin x + c)' = \cos x$.

Montrons maintenant que toutes les primitives de $f(x)$ sont de la forme $F(x)+c$; où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Lemme 1.1. *Toute fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle I est constante sur I.*

Démonstration. Supposons $f'(x) = 0$ sur un intervalle I. D'après le Théorème des accroissements finis, pour deux points quelconques $x_1,\ x_2 \in I$ $(x_1 < x_2)$, on a

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Puisque $f'(\xi) = 0$ car $\xi \in I$; on a $f(x_2) = f(x_1)$: Ce qui prouve que $f(x)$ prend la même valeur sur I, autrement dit $f(x) = C$, où C est une constante. □

Théorème 1.1. *Si $F(x)$ est une primitive d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle I, toute autre primitive de $f(x)$ peut être mise sous la forme $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire.*

Démonstration. Soit $\Phi(x)$ une autre primitive de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle I, c'est-à-dire que $\Phi'(x) = f(x)$.

Alors pour tout $x \in I$, $[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi(x)' - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Il en résulte du Lemme 1.1 que la fonction $\Phi(x) - F(x) = C$, où C est une constante arbitraire. Donc $\Phi(x) = F(x) + C$.

Ainsi, toutes les primitives de $f(x)$ sont de la forme $F(x) + C$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et C une constante arbitraire. □

1.1.2 Intégrale indéfinie

Définition 1.2. *Si une fonction $F(x)$ est une primitive d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle I, l'ensemble des fonctions $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire, s'appelle intégrale indéfinie de $f(x)$ sur I et se note*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

La fonction $f(x)$ s'appelle l'intégrant, la variable x est la variable d'intégration.

Le symbole $\int f(x)dx$ désigne donc l'ensemble de toutes les primitives de la fonction $f(x)$. On comprendra parfois par ce symbole un élèment quelconque de cet ensemble, c'est - à - dire une primitive.

La détermination d'une fonction par sa dérivée s'appelle intégration de cette fonction. L'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Pour vérifier qu'une intégration est correcte, il suffit de dériver le résultat obtenu pour obtenir l'intégrant.

Dans ce Chapitre, nous glissons volontiers sur le problème de l'existence des primitives (donc des intégrales indéfinies) pour de vastes classes de fonctions. Signalons qu'à la section suivante, on prouvera que toute fonction continue sur un segment possède une primitive (donc une intégrale indéfinie) sur ce segment.

Exemple 1.2. *1.* $\int 3x^2dx = x^3 + C$, *car* $(x^3 + C)' = 3x^2$.

2. $\int \cos x dx = \sin x + C$, *car* $(\sin x + C)' = \cos x$.

3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, *car* $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$.

4. $\int \exp(-2x)dx = -\frac{1}{2}\exp(-2x) + C$, *car* $(-\frac{1}{2}\exp(-2x) + C)' = \exp(-2x)$, *ainsi de suite*

1.2 Propriétés fondamentales de l'intégrale indéfinie

Les propriétés suivantes de l'intégrale indéfinie sont une conséquence immédiate de sa définition.

P1 La dérivée d'une intégrale indéfinie est égale à l'intégrante ; la différentielle d'une intégrale indéfinie, est égale à l'expression sous le signe somme , c'est-à-dire

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{et} \quad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

En effet, $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ et $d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$.

P2 L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une fonction est égale à la somme de cette fonction et d'une constante arbitraire, c'est-à-dire

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

En effet, puisque $dF(x) = F'(x)dx$, il vient $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

P3 Tout facteur constant peut être sorti du signe somme, c'est - à - dire si k est une constante, alors

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

En effet, soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Alors $kF(x)$ est une primitive de $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

D'où $k\int f(x)dx = k[F(x) + C] = kF(x) + C_1$, où $C_1 = kC$.

P4 L'intégrale indéfinie de la somme algébrique de deux fonctions est égale à la somme algébrique des intégrales indéfinies de ces fonctions, c 'est - à - dire

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

En effet, soient $F(x)$ et $G(x)$ des primitives de $f(x)$ et $g(x)$:
$F'(x) = f(x),\ G'(x) = g(x)$. Les fonctions $F(x) \pm G(x)$ sont alors des primitives des fonctions $f(x) \pm g(x)$.
donc $\displaystyle\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] = [F(x) \pm G(x)] + [C_1 + C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C = \int [f(x) \pm g(x)]dx$
Cette propriété reste valable pour tout nombre fini de fonction .

1.3 Table des principales intégrales

Les principales intégrales sont regroupées dans la table suivante. Certaines formules résultent directement de la défnition de l'intégration comme l'opération inverse de la dérivation et de la table des dérivées. La véracité des autres formules se vérifie aisément par dérivation.

I) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$; II) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

III) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$; IV) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

V) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(0 < a \neq 1)$; VI) $\displaystyle\int \exp(x)dx = \exp(x) + C$;

VII) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$; VIII) $\displaystyle\int \cos x = \sin x + C$;

IX) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$; XI) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a} + C(a \neq 0)$;

XII) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x + \sqrt{x^2+k}| + C.$

1.4 Principales méthodes d'intégration

1.4.1 Intégration directe

Le calcul des intégrales par une utilisation directe de la table des intégrales élémentaires et des propriétés fondamentales des intégrales indéfinies s'appelle intégration directe.

Exemple 1.3. *1)*

$$\int (5\cos x + 3x^2 + \frac{1}{x})dx = 5\int \cos x dx - 3\int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} = 5\sin x - x^3 + \ln|x| + C$$

2)

$$\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx = \int (1+\sin x)dx = x - \cos x + C$$

1.4.2 Intégration par substitution (changement de variable).

Dans de nombreux cas, l'introduction d'une nouvelle variable d'intégration permet de ramener l'intégration à la recherche d'une intégrale de table, c'est -à- dire de se ramener à une intégration directe. Cette méthode qui s'appelle méthode d'intégration par substitution, ou encore méthode de changement de variable, est basée sur le Théorème suivant :

Théorème 1.2. *Soit $x = \varphi(t)$une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit X son ensemble des valeurs. Soit enfin $f(x)$ une fonction définie sur X. Si la fonction $f(x)$ admet une primitive sur X, alors*

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \ \ sur\ I$$

Preuve. Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$ sur X. Considérons la fonction composée $F[\varphi(t)]$ sur I. La règle de dérivation d'une fonction composée nous donne
$(F[\varphi(t)])' = F'_x[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ sur I, donc

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C.$$

En remarquant que $F[\varphi(t)] + C = (F(x)+C)\mid_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx \mid_{x=\varphi(t)}$, on obtient la formule (1), c'est la formule de changement de la variable d'intégration.

Exemples :

1. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = I$

   Posons $x - 1 = t$; alors $x = t + 1$. D'où $dx = dt$. La formule ci-dessus nous donne

   $$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int (t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2}t^2+3t+3\ln|t|-\frac{1}{t}+C$$

   En revenant à la variable x, on obtient en définitive

   $$I = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

   Remarque. Quand on change la variable d'intégration dans une intégrale indéfinie, on a parfois intérêt à se donner non pas x en fonction de t mais t en fonction de x.

2. Calculer l'intégrale J $= \int \frac{x^4}{x^5+7} dx$

   Posons $x^5 + 7 = t$, $dt = 5x^4 dx$; alors J $= \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} ln|t| + C$, si bien que $\int \frac{x^4}{x^5+7} dx = \frac{1}{5} ln \mid x^5 + 7 \mid + C$.

   Signalons que le choix convenable de la substitution soulève de sérieuses difficultés. Pour les surmonter, il faut parfois être doué d'une bonne technique de dérivation et bien connaitre les intégrales tabulaires.

3. Calculer l'intégrale K $= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

   Posons $\sqrt{x^2+a} + x = t$, d'où $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} + 1\right) dx = dt$. Donc $dx = \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x} dt$, de sorte que $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \mid \sqrt{x^2+a} + x \mid + C$.

4. Calculer l'intégrale $\int \sin^n x \cos x dx$

   Posons $t = \sin x,\ dt = \cos x dx$. Alors

   $$\text{si } n \neq -1, \quad \int \sin^n x \cos x dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C,$$

   si $n = -1$, $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \mid \sin x \mid + C$

5. Calculer l'intégrale $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n}$

   Pour $n \neq 1$, posons $x^2 + 1 = t,\ \ 2xdx = dt$; alors

   $$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{t^{n-1}} + C = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C.$$

   Pour n $= 1$ on obtient $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$.

1.4.3 Méthode d'intégration par parties.

La méthode d'intégration par parties est basée sur la formule de dérivation du produit de deux fonctions.

Théorème 3.

Soient $u(x)$ et $v(x)$ des fonctions définies et dérivable sur un intervalle X. Si la fonction $u'(x)v(x)$ admet une primitive sur X, alors la fonction $u(x)v'(x)$ admet aussi une primitive sur X et $\displaystyle\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.(2)$

Preuve.

la relation $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \Rightarrow u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]'-u'(x)v(x)$. La fonction $u(x)v(x)$ est une primitive de la fonction $[u(x)v(x)]'$ sur X.La fonction $u(x)v'(x)$ admet une primitive sur X par hypothèse.Donc la fonction $u(x)v'(x)$ en admet une aussi sur X. une intégration de la dernière égalité nous donne la formule (2).

La formule (2) s'appelle formule d'intégration par parties.

Comme $v'(x)dx = dv, u'(x)dx = du$, on peut le mettre sous la forme

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

cette formule permet de ramener le calcul de $\displaystyle\int udv$ à celui de $\displaystyle\int vdu$ qui est parfois plus simple.

Exemple :

1. Calculer $L_1 = \displaystyle\int \arctan x dx$.

   Posons $\arctan x = u$, donc $du = \frac{dx}{x^2+1}$; $dv = dx, doncv = x.$

   Donc

$$\begin{aligned} L_1 &= x\arctan x - \int x\frac{dx}{1+x^2} \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

2. Calculer $L_2 = \displaystyle\int x\exp(x)dx$.

   Posons $u = x$; donc $du = dx$; $dv = \exp(x)dx, \int dv = \int \exp(x)dx, v = \exp(x)$.

   Donc $L_2 = x\exp(x) - \int \exp(x)dx = x\exp(x) - \exp(x) + C$.

3. Calculer $L_3 = \int x\ln x dx$. on trouve $L_3 = \frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{4} + C$.

   On est parfois amené à se servir plusieurs fois de la formule d'intégration par parties pour calculer une intégrale.

4. Calculer $L_4 = \int x^2 cosx dx$.

   une double intégration par parties donne $L_4 = x^2 sinx + 2xcosx - 2sinx + C$.

Calculons en conclusion l'intégrale $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}, n \in \mathbb{N}$
pour n $=$ 1 , on a l'intégrale tabulaire $I_1 = \arctan x + C$.
Supposons $n > 1$. en représentant 1 au numérateur comme $(x^2+1) - x^2$, on obtient $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n}$. Intégrons la deuxième intégrale par parties : $u = x, du = dx, dv = \frac{xdx}{(x^2+1)^n}, v = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}$, alors
$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)n-1}$, donc
$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)n-1} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1}$,
d'où $I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$. (3)
L'intégrale I_n est donc exprimée en fonction de I_{n-1}. c'est une formule de récurrence.
si l'on demande calculer $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$, la formule de récurrence (3) donne
$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, avec $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}$.
Or $I_1 = \arctan x$, donc

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{4} \arctan x + C.$$

1.5 Intégration des fonctions rationnelles

Les fractions (ou fonctions) rationnelles, c'est-à-dire les fonctions de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où P (x) et Q(x) sont des fonctions polynômes, forment une importante classe de fonctions dont l'intégrale s'exprime toujours par l'intermédiaire de fonctions élémentaires. Si le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, on obtient alors $\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$(1), où W(x) est un polynôme appelé partie entière de la fonction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ et $\frac{R(x)}{Q(x)}$ une fraction irréductible.
Exemples :
1)$\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}$
2)$\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}$
En algèbre supérieure on démontre que tout polynôme peut être décomposen un produit de la forme
$Q(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)\dots(x-\gamma)$,
où A est le coefficient dominant de $Q(x), \alpha; \beta, \dots, \gamma$ les racines l'équation $Q(x) = 0$ .les facteurs $(x-\alpha)(x-\beta)\dots(x-\gamma)$ s'appellent éléments simples.Si les éléments simples sont confondus ,on obtient la décomposition $Q(x) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\dots(x-\gamma)^t$,(2) où $r, s, \dots, t$ sont des entiers appelés multiplicités des racines $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ respectivement ,et tels que $r + s + \dots + t = n$,où n est le degré de $Q(x)$.

Le polynôme de $Q(x)$ peut aussi présenter des racines complexes .On démontre en algèbre que si $\alpha = a + ib$ est une racine complexe de multiplicité r d'un polynôme à coefficients réels, il en est de même de son conjugué complexe $\overline{\alpha} = a - ib$.En d'autres termes ,si la décomposition (2) contient le facteur$(x-\alpha)^r$,ou $\alpha = a + ib(b \neq 0)$,elle contiendra également le facteur $(x-\alpha)^r$ .En multipliant ces deux facteurs ,on obtient $(x-\alpha)^r(x-\overline{\alpha})^r = (x^2+2x+q)^r$, où $p = -a, q = a^2+b^2, p^2 - q^2 INFER0, p$ et q sont des réels.

En procédant de même avec les autres racines complexes, on peut mettre la décomposition (2) sous la forme $Q(x) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s \ldots (x^2+2x+q)^t(x^2+2uv+v)^n \ldots$,(3) où $\alpha, \beta, \ldots, p, q, u, v, \ldots$sont des réels.

Le théorème suivant est démontré en algèbre supérieure.

Théorème 1.3. *Une fraction rationnelle irréductible $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ dont le dénominateur $Q(x)$ est un polynôme de la forme (3),se décompose de façon unique sous la forme*

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} \tag{1.1}$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2} + \ldots + \frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \ldots, \tag{1.2}$$

où $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_r,\ \cdots,\ M_1,\ N_1,\ M_2,\ N_2, \cdots, M_t,\ N_t, \cdots$, sont réels.

L'expression (4) s'appelle décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Pour déterminer les nombres $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_r,\ \cdots,\ M_1,\ N_1,\ M_2,\ N_2, \cdots,$ $M_t,\ N_t, \cdots$, on utilise souvent la méthode des coefficients indéterminés ou celle des limites ou une combinaison des deux.

Exemple 1.4. 1. *Décomposer la fraction rationnelle $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ en éléments simples.Com* *$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$,la formule (4) donne $\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$.* *Après multiplication des deux membres de cette égalité x^2-5x+6,on obtient $2x-1 = A(x-2)+B(x-3)$.Par identification des coefficients suivant les mêmes puissances ,on trouve $A = 5, B = -3$.* *Donc $\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$.*

2. *Décomposer la fraction rationnelle $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ A_1,A_2,...,A_r,...,M_1,N_1,M_2, N_2,...,M_t,N*

Les racine du polynôme x^2+1 étant complexes, la forme (4) donne $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)}$. Après multiplication des deux membres de cette égalité par $x(x^2+1)^2$ et identification des coefficients suivant les même puissances, on obtient : $A = -1, B = 1, C = 0, D = 2, E = 0$. Donc la décomposition cherchée est $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Il résulte de ce qui précède que l'intégration d'une fonction rationnelle (1) se ramène à celle d'un polynôme $W(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ dont l'intégrale est tabulaire, et à celle d'une fraction rationnelle irréductible $\frac{R(x)}{Q(x)}$;ceci nous conduit au calcul d'l'intégrales des quatre types suivants :

I) $\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln|x-\alpha| + C$ II) $\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}\,dx = -\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r+1}} + C \quad (r>1)$. III) $\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,dx$; IV) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx \quad (r>1)$

Ceci étant, le trinôme $x^2+2px+q$ n'admet pas de racines réelles, c'est-à-dire que $p^2-q<0$. Pour calculer l'intégrale III), remarquons que $x^2+2px+q = (x+p)^2+q-p^2$. Posons par la suite $x+p=t$;$q-p^2 = h > 0$. On obtient alors $\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,dx = \int \frac{At+B-Ap}{t^2+h}\,dt = \frac{1}{2}A\int \frac{2tdt}{t^2+h} + (B-Ap)\int \frac{dt}{t^2+h}$. Le calcul de la première intégrale de droite est immédiat :$\int \frac{2tdt}{t^2+h} = ln|t^2+h| + C = \ln|x^2+2px+q| + C$. La deuxième intégrale est tabulaire.

Exemple : calculer $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx$ Complétons le dénominateur à un carré : $x^2+4x+9 = (x+2)^2+5$ et faisons la substitution $x+2=t$. On obtient : $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx = \int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5}\,dx = \int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5}\,dt = \int \frac{6t-7}{t^2+5}\,dx = 3\int \frac{2tdt}{t^2+5} - 7\int \frac{dt}{t^2+5} = 3\ln(t^2+5) - \frac{7}{\sqrt{5}}\arctan\frac{t}{\sqrt{5}} + C$. En revenant à la variable x, on obtient $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx = 3\ln(x^2+4x+9) - \frac{7}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C$

Passons à présent au calcul de l'intégrale IV :$\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx, q-p^2>0, r>1$. Introduisons è cet effet la nouvelle variable z par la formule $z = \frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}$, d'où $x = z\sqrt{q-p^2} - p, dx = \sqrt{q-p^2}dz \quad (5)$ On a par ailleurs $z^2+1 = \frac{(x+p)^2}{q-p^2} + 1 = \frac{x^2+2px+q}{q-p^2}$ (6) En faisant la substitution (5) et en tenant compte de (6), on obtient donc $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx = \int \frac{A(z\sqrt{q-p^2}-p)+B}{(z^2+1)^r(q-p^2)^r}\sqrt{q-p^2}\,dz = \int \frac{Mz+N}{(z^2+1)^r}\,dz = M\int \frac{zdz}{(z^2+1)^r} + N\int \frac{dz}{(z^2+1)^r}$, où M et N se déduisent de l'avant-dernière égalité. La deuxième intégrale peut être calculée à l'aide de la formule de récurrence (3), obtenue au paragraphe IV.3. En posant $z^2+1=t$ dans la première intégrale, on obtient $M\int \frac{zdz}{(z^2+1)^r} = \frac{M}{2}\int \frac{dt}{t^r} = -\frac{M}{2(r-1)}\frac{1}{t^{r-1}} + C = -\frac{M}{2(r-1)}\frac{1}{(z^2+1)^{r-1}} + C$.

Exemple : Calculer $I = \int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx$ Posons $z = \frac{x-1}{\sqrt{5-1}} = \frac{x-1}{2}$, d'où $dx = 2dz$ et $x^2-2x+5 = 4(z^2+1)$, donc $\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx = \int \frac{5(1+2z)+3}{4^2(z^2+1)^2}2\,dz = \int \frac{10z+8}{8(z^2+1)^2}\,dz = \frac{5}{4}\int \frac{zdz}{(z^2+1)^2} + \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}$. Mais $\int \frac{zdz}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{z^2+1}, \int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \arctan z$. Donc $I = -\frac{5}{8}\frac{1}{z^2+1} + \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan z + C = \frac{4x-5}{8(z^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan z + C$. En revenant à la variable x, on obtient $I = \frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)} + \frac{1}{2}\arctan(\frac{x-1}{2}) + C$.

On a ainsi établi que l'intégration de toute fraction rationnelle se ramène à celle d'un polynôme et d'un nombre fini d'éléments simples dont les intégrales s'expriment par des fonctions rationnelles, logarithmes et des arcs tangentes. Autrement dit, toute fraction rationnelle s'intègre par des fonctions élémentaires.

VI. Intégration de certaines fonctions irrationnelles et transcendantes. Désignons préalablement par $R(u, v)$ une foction rationnelle de deux variables u et v,c'est-(́a)-dire une fonction obtenue uniquement par des opérations arithmétiques (addition, soustration, multiplicatoin et division) sur les variables u et v. Par exemple : $R(u, v) = \frac{3u^2v+u^5v^4}{u^3+4v^2}$. Si les variables u et v sont à leur tour fonction de x : $u = \varphi(x), v = \psi(x)$, la fonction $R[\varphi(x), \psi(x)]$ s'appelle fonction rationnelle de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{x+\sqrt{(x^2-1)^2}}{x^2-5\sqrt{x^2-1}}$ est une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{x^2-1}$: $f(x) = R(x, \sqrt{x^2-1})$. Ici $R(u, v) = \frac{u+v^2}{u^2-5v}, u = x, v = \sqrt{x^2-1}$. La fonction $f(x) = \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+2\cos x}$ est une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$: $f(x) = R(\sin x, \cos x)$. Considérons maintenant les intégrales de certaines fonctions irrationnelles et transcendantes élémentaires et montrons qu'elles se ramènent à des intégrales de fonctions rationnelles qui peuvent être calculées par les méthodes du paragraphe **V.**

VI. 1. **Intégrales de la forme** $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})\, dx$, où a, b, c et d sont nombres arbitraires ($\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$) ; m, un entier naturel, R une fonction rationnelle de x et $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Montrons que la substitution $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ nous conduit à

L ?intégration d'une fonction rationnelle.En effet, $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, x = \frac{b-dt^m}{ct^m-a}, dx = \frac{mt^{m-1(ad-bc)}}{(ct^m-a)^2}dt$,de sorte que

$$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt = \int R_1(t)dt$$

où $R_1(t)$ est une fonction rationnelle de t. **Exemple** :

1) Calculer T $= \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}$
   Posons $T = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .On obtient $t^2 = \frac{1+x}{1-x}$,soit $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$,$dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$.
   Donc $T = 2\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2\arctan t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$
2) Calculer S $= \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.
   En remarquant que $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2$, posons $t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6$, donc $dx = 6t^5dt$.
   On obtient alors S $= 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1})dt = 6(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C$

VI.2.Integrale de la forme $\int \mathbf{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$,où a , b et c sont des nombres arbitraires ;$a \neq 0$; R une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{ax^2+bx+c}$.
Si le trinôme ax^2+bx+C possède des racines réelles distinctes x_1 et x_2 et que $a > 0$,

alors
$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}$. Donc
$\mathrm{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \mathrm{R}(x, |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}) = \mathrm{R}_1(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}})$. (voir exemple 1))
Si $x_1 = x_2$, alors $\sqrt{ax^2+bx+c} = |x-x_1|\sqrt{a}$, c'est-à-dire qu'on a une fonction rationnelle de x sous signe d'integration. Il est donc plus intéressant de traiter le cas où le trinôme ax^2+bx+c n'admet pas de racine réelle et $a > 0$.
montrons que dans ce cas on se ramène à l'integration d'une fonction rationnelle par la substitution d'Euler $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}$ (on peut aussi poser $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}$).
En élevant les deux membres de l'égalité $t - x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2+bx+c}$ au carré, on obtient $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}tx$, de sorte que $x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{at+b}}$, $\sqrt{a^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$, $dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b^2)}dt$.
Donc$\int \mathrm{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int \mathrm{R}(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b})2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt = \int \mathrm{R}_1(t)dt$,

où $\mathrm{R}_1(t)$ est une fonction rationnelle de t. Si $a < 0$ et $c > 0$,on utilise une autre subtitution d'Euler :$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \neq \sqrt{c}$.

Exemples :

1) Calculer $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \mathrm{M}$. Les racines du trinôme x^2+x+1 étant complexes, faisons la subtitution $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$.En élevant au carré ,on obtient $x^2+x+1 = t^2 - 2tx + x^2$,d'où $x = \frac{t^2-1}{1+2t}$, $dx = 2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$. Alors $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt$. Par ailleurs ,$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{D}{(1+2t)^2}$. On obtient $A = 2, B = -3, D = -3$ Soit $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int [\frac{2}{t} - \frac{3}{t} - \frac{3}{(1+2t)^2}]dt = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)+c}$.
   Donc $M = 2\ln|\sqrt{x^2+x+1}+x| - \frac{3}{2}\ln|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}| + \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + C$

2) Calculer $\mathrm{P} = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.
   Les racines de $1+x-x^2$ étant complexe et $a < 0, c > 0$, on utilise la substitution $\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1$
   En élevant les membres au carré ,on obtient après simplification $x = \frac{1+2t}{t^2+1}$. Soit $dx = \frac{2(1-t-t^2)}{(t^2+1)^2}dt$, $\sqrt{1+x-x^2} = 2\int \frac{dt}{1+(t+1)^2} = -2\arctan(t+1) + C$.
   Donc $\mathrm{P} = \int \frac{2(1-t-t^2)}{(1+\frac{1+2t}{t^2+1})\frac{t^2+t-1}{t^2+1}(t^2+1)^2}dt = -2\int \frac{dt}{1+(t^2+1)^2} = -2\arctan(t+1) + C$.
   En définitive,$\mathcal{P} = -2\arctan\frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x} + C$
   Signalons que le calcul des intégrales par la substitution d'Euler conduit généralement à des calculs laborieux et des expressions volumineuses ,aussi n'y recout-on que dans les cas où il est impossible de calculer ces intégrales par

un procédé plus court.

VI.3.Intégrale de la forme $\int R(\sin x, \cos x)dx$,où R est une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$.
Montrons que la substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ nous ramène à l'integration d'une fonction rationnelle. En effet,
$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, de sorte que $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$, où $R_1(t)$ est une fonction rationnelle de t.
Exemple : Calculer $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.
La substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ nous donne $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, x = 2\arctan t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.
Donc $\int \frac{dx}{1+\sin x} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$

Remarque 1.1. *Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ conduit souvent à des calculs trop compliqués .Il est parfois préférable d'avoir recours à d'autre méthodes menant plus rapidement au but.*

1) Si $R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx)$ (c'est le cas si l'intégrale est de la forme $\int R(sinx)cosxdx$), poser $sinx = t$. Exemple : $\int \frac{cos^3x+cosx}{sin^4x+1}dx$ **2)** Si $R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx)$ (c'est le cas si l'intégrale est de la forme$\int R(cosx)sinxdx$), poser $cosx = t$. Exemple :$\int \frac{sin^3x}{2+cosx}dx$ **3)** Si $R(-sinx, -cosx) = R(sinx, cosx)$(c'est le cas si l'intégrale est de la forme $\int R(tanx)dx$), poser $tanx = t$. Exemple :$\int \frac{sin^2x}{cos^6x}dx$

VI.4. Intégrale de la forme$\int R(\exp x)dx$ Montrons que la substitution $t = \exp x$ nous conduit à l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet, vu que $x = \ln t$ et $dx = \frac{dt}{t}$, on obtient $\int R(\exp x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}$ où $R(t)$ est une fonction rationnelle de t. Exemple : Calculer $\int \frac{\exp x-1}{\exp x+1}dx$ posons $t = \exp x$, d'où $dx = \frac{dt}{t}$. Donc $\int \frac{\exp x-1}{\exp x+1}dx = \int \frac{t-1}{t+1}\frac{dt}{t} = \int \frac{2t-(t+1)}{t(t+1}dt = 2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\ln|t+1| - \ln|t| + \mathcal{C} = 2\ln(\exp x+1) - x + \mathcal{C}$.

Signalons en conclusion que les méthodes d'intégration envisagées n'épuisent pas toutes les classes de fonctions élémentaires analytiquement intégrables. On a pu se rendre compte que l'intégration est plus compliquée que la dérivation. Il importe donc de résoudre un grand nombre d'exercices. Notons par ailleurs que si la dérivation est une opération stable, il en va autrement de l'intégration. Il existe des fonctions élémentaires (par exemple $\exp(-x^2)$, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{sinx}{x}$, $etc\ldots$) dont les primitives ne sont pas des fonctions élémentaires. Ces primitives existent bien pourtant et jouent un rôle important tant en analyse mathématique que dans ses applications. Ces primitives sont bien étudies et leurs tables et graphiques permettent de les utiliser fréquemment en pratique.

Chapitre 2

Equations différentielles

2.1 Généralités

Définition

Une équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est une équation de la forme :

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(m)}) = 0 \tag{2.1}$$

où f est une application d'une partie $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, y est une fonction continue de la variable x et $y', y'', ..., y^{(m)}$ sont des dérivées successives par rapport à x de y jusqu'à l'ordre m.
Une solution de (1) est une appication n fois dérivable qu'on note encore

$$y : I \to \mathbb{R}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, on ait
Une équation différentielle est une relation entre variable réelle (par example x), une fonction qui dépend de cette variable (par exemple y) et un certain nombre de ses dérivées successives. Lorsque la dérivée de plus haut dégré de la fonction (qui apparaît réellement) est la $n^{ime}(n \in \mathbb{N}^*)$ on dit que l'équation différentielle est d'ordre n.

Exemples

- $yy" = x - x^2y'$ est une équation différentielle d'ordre 2 où y est fonction de la variable x.

On peut aussi l'écrire $y" = \frac{x-x^2y'}{y}$.

- $x" - tx' + x^2 = 1$ est une équation différentielle d'ordre 2 où x est fonction de la variable t.
- $t' - tx + x^2 = 1$ est une équation différentielle d'ordre 1 où t est une fonction de la variable x.

Remarques

- Une équation différentielle d'ordre n peut donc s'écrire sous la forme :

  $\phi(x, y, y', y", \ldots, y^{(n)} = 0$ ou encore $\phi(x, y(x), y'(x), y"(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$

  Où y est donc une fonction qui dépend de x et ϕ est une fonction des $n+2$ variables $x, y, y', y", \ldots, y^{(n)}$.

  Nous nous intéressons aux fonctions y à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Il nous arrivera de rencontrer $\frac{dy}{dx}$ à la place de y' et nous pourrons avoir des équations de la forme

  $2xdx = y^2dy$.

Définition

résoudre (ou intégrer) une équation différentielle $\phi(x, y, y', y", \ldots, y^{(n)}) = 0$ sur un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier, c'est trouver toutes les fonctions f telles que :

a. f soit n fois dérivable sur $\mathcal{I}$

b. $\forall x \in \mathcal{I}, \phi(x, f(x), f'(x), f"(x), \ldots, f^{(n)}) = 0$

Une fonction qui vérifie les conditions (a) (b) est appelée solution (ou intégrale) poarticulière de l'équation différentielle et sa courbe représentative est appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.

On appelle solution (ou intégrale) générale de l'équation l'ensemble de toutes les fonctions solutions.

On appelle courbes intégrales d'une équetion différentielle l'ensemble des courbes représentatives de toutes les solutions de cette équation différentielle.

Remarque

- En pratique, on suppose souvent que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
- Si Id_1 désigne l'application identité de $\mathbb{R}$ restreint à I , on peut aussi écrire $\Phi(Id_1,y,y^{'},y^{"},\ldots,y^{(n)}\ ) = 0$

- Dans certains cas, à partir de la solution générale d'une équation différentielle, on peut rechercher

  une solution particulière satisfaisant à certaines conditions appelées conditions initiales. En

  général, ces conditions concernent les valeurs prises par la fonction ou certaines dérivées en une

  valeur x_0. Exemple

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est une solution particulière de l'équation différentielle

  $y^{''} + xy^{'} - 5y = 2 - 3x^2$.

- Les courbes intégrales de l'équation différentielle $y^{''} = 0$. sont les droites du plan non parallèles à l'axe des ordonnées. $y = \int_2^x tdt = \frac{1}{2}x^2 - 2$ est la solution particulière de l'équation différentielle $y' = x$ qui vérifie la condition initiale $y(2) = 0$

  Définition 2.1. *Une fonction* f *est dite une solution minimale d'une équation différentielle* (E) *s'il n'existe pas d'intervalle* J $\supset$ I *et de fonction g telle que* $g_{|I}$=f *qui soit aussi solution de* (E).

  On appelle éqation siplifiée toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $\Phi(x, y^{(n)})$=0.

Méthode de résolution

Si on peut mettre l'équation sous la forme $y^{(n)}$=g(x)alors il suffit d'intégrer n fois la fonction g.

Ex : On cherche à résoudre l'équation différentielle xy'-1=0.

A priori, cette équation est définie sur $\mathbb{R}$. toutefois, si x=0, alors aucune fonction ne convient.

On peut donc la résoudre soit sur $]-\infty; 0[$ soit sur $]0; +\infty[$. Pour simplifier, on prend $]0; +\infty[$.

On obient $y' = \frac{1}{x}$ et donc y=ln x+a où $a \in \mathbb{R}$.

Les courbes intégrales de l'équation s'obtiennent de celle de ln x par une translation parallèlement

à l'axe des ordonnées.

2.2 Equation différentielle du premier ordre

2.2.1 Equations à variables séparable

On appelle à variable séparables toutes equation différentielle qui peut se mettre sous la forme
a(x)+b(y)'=0

Méthode de résolution

A et B des primitives respectivement de a et de b sont continues.

En intégrant l'égalité, on obtient A(x)+B(y)=$cste$

Si B admet une application réciproque B^{-1},on a y=B^{-1}(-A(x)+$cste$).

Ex : On cherche à résoudre l'équation différentielle $x^2y'=e^y$.
Si x=0, alors aucune fonction ne convient.
On peut donc la résoudre soit sur $]-\infty;0[$ soit sur $]0;+\infty[$.
On a $-y'e^{-y}=\frac{-1}{x^2}$ et en intégrant $e^{-y}=\frac{1}{x}+c$ où $c\in\mathbb{R}$. Donc y$=-\ln(\frac{1}{x}$+c) où $c\in\mathbb{R}$.
L'ensemble de définition de la fonction y dépend de c.
Pour avoir une solution sur $]0;+\infty[$, il faut que $c>0$. Il n'y a pas de solution sur $]-\infty;0[$ tout
entier, car il faut $\frac{1}{x}+c>0$ c'est-à-dire $c>0$ et x $\in\ ]-\frac{1}{c};0[$.

Remarque 2.1. *Il arrivera que l'on ne puisse pas obtenir* y *en fonction de* x.

2.2.2 Equation non linéaires homogèmes

Définition 2.2. *On appelle équation homogène toute equation différentielle qui ne change ps lorsque l'on remplace* x *par* λx *et* y *par* λy *pour tout réel* λ. *Une équation homogène peut se mettre sous la forme* ϕ(y',$\frac{y}{x}$)*=0 et parfois sous la forme* y'=F($\frac{y}{x}$)*(1)*

Méthode de résolution

Nous nous bornerons aux équations homogènes que l'on peut mettre sous la forme (1).

Dans ce cas, on pose $y=tx$ où t est donc une fonction de x.

On obtient alors une équation à variable séparables.

Ex : On veut résoudre l'équation différentielle xy'-y=$\sqrt{x^2+y^2}$ sur $]0;+\infty[$.

On peut mettre cette équation sous la forme (1) en effet, on a

y'=$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$ =$\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}+\frac{y}{x}$.

On pose donc $y=tx$ et $y'=t'x+t$.

$x(t'x+t)-tx=\sqrt{x^2+t^2x^2}$

$\Leftrightarrow$ $t'x+t-t=\sqrt{1+t^2}$

$\Leftrightarrow$ t'$\times\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow$ $\ln(t+\sqrt{1+t^2})$=$\ln kx$ où $k\in\mathbb{R}_+^*$ ou argsh t=ln x+c où $c\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{1+t^2}=kx$ - t où $k\in\mathbb{R}_+^*$ ou $t=\frac{e^{\ln(kx)}-e^{-\ln(kx)}}{2}$ où $k\in\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow$ 1+ $t^2=k^2$ x^2-$2kxt+t^2$ où $k\in\mathbb{R}_+^*$ ou t=$\frac{kx-\frac{1}{kx}}{2}$ où $k\in\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow t=\frac{k^2x^2-1}{2k}$ où $k\in\mathbb{R}_+^*$.

Et donc $y(tx)=\frac{k^2x^2-1}{2k}$ où $k\in\mathbb{R}_+^*$.