

Deuxième partie :

Chapitre 5 : Comportement du consommateur et courbe de demande

Chapitre 5.1 : Calcul économique du consommateur

En théorie microéconomique, le comportement du consommateur est un exemple type de l'application de rationalité. Le consommateur dispose d'un certain revenu et peut acquérir différents biens à des prix unitaires qui sont pour lui des données (paramètres). Cet ensemble de biens que le consommateur cherche à acquérir s'appelle panier de biens. Autrement dit, si nous nous limitons à deux biens, un panier de consommation est donné par un point de l'orthant positif :

$$X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$$

Le consommateur cherche à satisfaire ses besoins tout en veillant à ce que les dépenses effectuées ne dépassent pas son revenu. Le choix du consommateur résulte à la fois de ses préférences et de sa contrainte budgétaire c'est-à-dire la contrainte imposée par la nécessité de ne pas dépenser plus que le revenu dont il dispose. Dans le panier de biens, des biens peuvent être soit indivisibles c'est-à-dire correspondant à des entiers naturels (une télévision, une voiture etc.), soit divisibles c'est-à-dire correspondant à des entiers réels positifs.

Quels qu'ils soient, les biens ne peuvent être consommés indéfiniment par l'agent économique car la contrainte budgétaire lui impose de faire un choix entre différents paniers de biens et l'expression de ce choix traduit la relation de préférence.

## I. Relation de préférence et courbe d'indifférence

### I.1 Propriété des préférences

Supposons deux paniers de biens quelconques X, Y, la préférence signifie que le consommateur peut classer ces paniers en fonctions de leurs caractéristiques respectives. Autrement dit, le consommateur peut dire clairement si l'un des paniers est meilleur que l'autre ou s'il est indifférent. Les relations de préférences sont admises cohérentes c'est-à-dire qu'il est inadmissible voire absurde d'avoir une situation dans laquelle le panier X est préféré au panier Y et dans le même temps le panier Y préféré au panier X.

La cohérence de la relation de préférence repose sur trois propriétés fondamentales.

- **La complétude** : c'est-à-dire que la relation de préférence est une relation complète.

Autrement dit, pour deux paniers de biens X et Y, X est préféré à Y ou Y est préféré à X

$\forall X, Y$ , on a soit  $X \succ Y$  soit  $Y \succ X$  soit  $X \sim Y$

- **La réflexivité** : elle traduit que la relation de préférence est réflexive c'est-à-dire tout panier de bien est au moins aussi préférable que lui-même.

$$X \succeq X \quad X \sim X.$$

car

- **La transitivité** : elle traduit que pour tous paniers de biens X, Y et Z, si  $X \succ Y$  et  $Y \succ Z$  alors  $X \succ Z$

### I-2 Utilité et courbe d'indifférence

#### I-2.1 L'utilité

On distingue deux sortes de mesure : la mesure cardinale et la mesure ordinale.

### I.2.1.1 L'utilité cardinale

L'utilité traduit la satisfaction qu'un agent économique retire de la consommation d'un bien.

Or cette consommation est liée aux préférences de ce dernier. La description des préférences fut une étape importante pour expliquer les choix de celui-ci. Au départ les auteurs néoclassiques de la fin du 19<sup>è</sup> siècle (W.S. Jevons, C. Menger, L. Walras) ont pensé que l'homme peut mesurer la satisfaction que le consommateur retire de ses choix. Cette approche primaire dite approche de l'utilité cardinale postule que l'utilité peut être mesurée par un indicateur. De façon simple, supposons que le consommateur peut acheter deux types de biens x et y et notons  $U(x)$ =utilité du bien x,  $U(y)$ =utilité du bien y. Au sens de la théorie de l'utilité cardinale, l'utilité totale est donc la somme des utilités associées à x et y.  $U_t = U(x) + U(y)$ .

| Quantité de bien x | Quantité de bien y | $U(x)$ | $U(y)$ |
|--------------------|--------------------|--------|--------|
| 0                  | 0                  | 0      | 0      |
| 1                  | 1                  | 12     | 20     |
| 2                  | 2                  | 20     | 30     |
| 3                  | 3                  | 27     | 37     |
| 4                  | 4                  | 33     | 41     |
| 5                  | 5                  | 36     | 43     |
| 6                  | 6                  | 38     | 44     |
| 7                  | 7                  | 39     | 48     |

Pour tout vecteur de consommation, l'individu peut calculer l'utilité associée. Par exemple s'il choisit de consommer 4 unités du bien x et 2 unités du bien y, l'utilité totale est égale à 63. Autrement  $U(4,2) = U(4) + U(2)$ .

S'il choisit de consommer 3 unités de x et 5 unités de y, l'utilité totale est 70. L'utilité du vecteur de consommation (4,2) est inférieure à celle du vecteur (3,5). Le consommateur préfère donc le vecteur de consommation qui lui apporte la satisfaction la plus élevée, le vecteur (3,5)

Donc au départ l'utilité était supposée mesurable et additive, si bien que l'utilité obtenue à partir d'un bien est indépendante de celle obtenue avec d'autres biens. L'additivité signifie que l'utilité totale est égale à la somme des utilités de chaque bien

Ex:  $U = U_1(X_1) + U_2(X_2) + U_3(X_3) + \dots + U_n(X_n)$

L'approche cardinale de la mesure de l'utilité est généralement contestée pour deux raisons. Premièrement, il est illusoire de vouloir trouver une mesure exacte de la satisfaction des individus.

Deuxièmement l'idée selon laquelle l'utilité est indépendante et additive est extrêmement restrictive : l'utilité des balles doit dépendre en partie de celle des raquettes.

### I.2.1.2 L'utilité ordinale

La justification selon laquelle la quantification de l'utilité serait un préalable indispensable à la description des choix du consommateur est en fait inutilement restrictive. Aussi les économistes Pareto et Slutsky puis Hicks et Samuelson montrent que la classification est préférable à la quantification. Pour ces auteurs, la représentation des préférences n'exige pas de quantifier l'utilité mais simplement de comparer et classer tout couple de situation possible. Cette théorie est le fondement de la représentation des préférences du consommateur et conduit à utiliser la notion mathématique de préordre. Le préordre stipule que le consommateur est capable de classer par ordre de préférence différents paniers de biens qu'il consomme. Ainsi, il est parfaitement capable de dire qu'il préfère le panier de biens A au panier de biens B et qu'il préfère B à C ainsi de suite.

Avec une utilité ordinale, la fonction d'utilité est :

$$U = U(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

où  $X_i$  est le niveau de consommation du bien  $i$ .

Cette approche de la fonction d'utilité conduit à celle de la courbe d'indifférence.

## I.2.2. De la fonction d'utilité aux courbes d'indifférence

### I.2.2.1 Fonction d'utilité et utilité marginale

En général le consommateur a la possibilité d'acquérir  $n$  types de biens. Supposons que  $n = 2$ , c'est-à-dire les biens  $x$  et  $y$ . A tout vecteur de consommation  $x$  et  $y$ , on associe un certain niveau d'utilité décrit par une fonction  $U(x, y)$  appelée fonction d'utilité. Cette fonction d'utilité est continue et dérivable. En effet la consommation des unités additionnelles d'un bien entraîne une baisse progressive de la satisfaction. L'utilité procurée par les unités additionnelles est appelée l'utilité marginale. En clair l'utilité marginale d'un bien est l'accroissement d'utilité qu'entraîne la consommation d'une unité supplémentaire de ce bien, les quantités des autres biens restant constantes. L'utilité marginale est notée  $U_m$

Pour un bien quelconque  $x$ , l'utilité marginale est  $U_m(x) = U(x+1) - U(x) = \Delta U_x$

Si on admet que les fonctions d'utilité  $U(x)$  et  $U(y)$  sont définies sur  $\mathbb{R}^+$  et différentiables alors le supplément d'utilité totale résultant d'une variation infinitésimale (extrêmement petite de  $x$  et  $y$ ) s'obtient par la différentielle totale de  $U$ .

Soit  $U(x, y) = c$ , niveau d'utilité donc une constante. Cette fonction d'utilité est différentiable.

$du = U_x dx + U_y dy = 0$  d'où  $U_x dx = -U_y dy$  et

Avec  $U_x = \partial U / \partial x = U'_x(x, y)$  et  $U_y = \partial U / \partial y = U'_y(x, y)$

$U_x$  est l'utilité marginale par rapport à  $x$

$U_y$  est l'utilité marginale par rapport à  $y$

- La fonction d'utilité d'un individu **n'est pas unique** :

Si  $v$  est une fonction qui représente les préférences d'un individu, **toute transformation monotone croissante** de  $v$  représentera toute aussi bien ces préférences :

$$\sqrt{v}, a v + b \quad (a \geq 0), e^v, \ln(v), \dots$$

En effet, ces fonctions conservent l'ordre de classement des paniers de biens.

Si  $X \succ Y$  alors  $U(X) > U(Y)$  et  $e^{U(X)} > e^{U(Y)}$ ,  $\ln(U(X)) > \ln(U(Y))$  etc.

Nous utiliserons par la suite uniquement des fonctions d'utilité **ordinales**.

### I.2.2.2 La courbe d'indifférence

#### a) Définition

Le choix du consommateur peut être formulé en termes de préférence mais le plus important est de décrire graphiquement ces préférences utilisant une représentation graphique connue sous le nom de courbe d'indifférence.

**Une courbe d'indifférence est le lieu géométrique des points ou des ensembles de biens pour lesquels le consommateur est indifférent.**

A partir d'une fonction d'utilité  $U(x_1, x_2)$  il est aisé de construire les courbes d'indifférences : ces dernières correspondent à tous les paniers qui donnent le même niveau de satisfaction et donc la même valeur d'utilité :

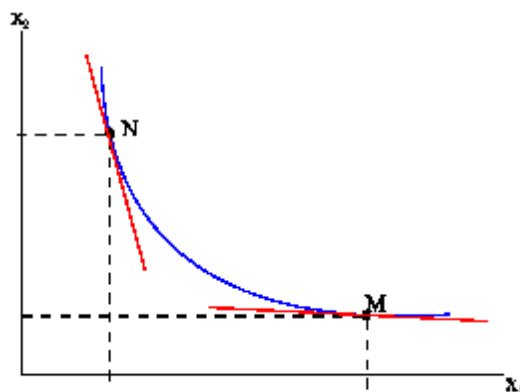
$$I_x = \{Y \mid U(Y) = U(X)\} \quad \text{ou} \quad I_{U_0} = \{Y \mid U(Y) = U_0\}$$

avec  $U(X) = U_0$ .

Les courbes définies par des équations de type :  $f(x, y) = x_0 = \text{Cste}$  correspondent aux courbes de niveau de la fonction  $f$ .

Donc les courbes d'indifférence sont les courbes de niveau de la fonction d'utilité. En faisant varier la constante, on obtient les courbes d'indifférences correspondant aux différents niveaux de satisfaction.

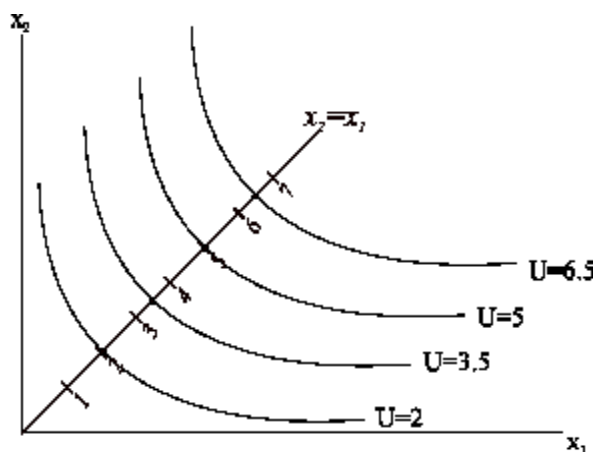
Graphiquement, elle se présente comme suit :



Sur la même courbe d'indifférence  $U(X_{1M}, X_{2M}) = U(X_{1N}, X_{2N})$ . Les paniers N et M sont équivalents pour le consommateur.

*Carte d'indifférence*

Soient les courbes d'indifférence suivantes :



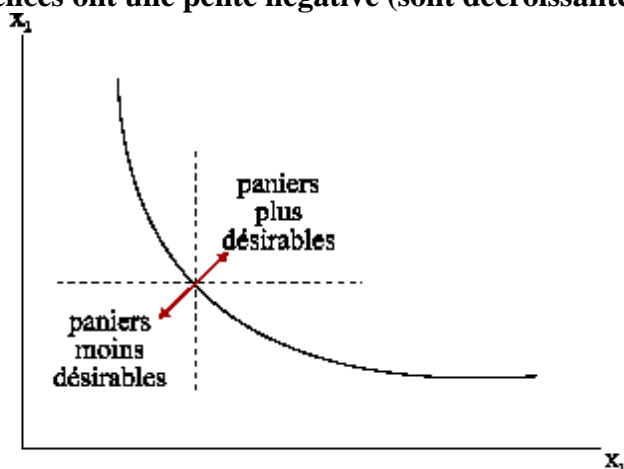
Si  $U_1$  est parallèle à  $U_2$  parallèle  $U_3$ , alors  $U_1, U_2, U_3$  forment une carte d'indifférence.

### **b) Les caractéristiques des courbes d'indifférence (Les préférences "normales")**

**i) la monotonicité stricte :** le consommateur préfère *strictement* toujours un panier qui contient plus de bien, « plus est mieux », (more is better). Le désir de disposer d'une quantité additionnelle de chacun des biens et qui conduit le consommateur à préférer des courbes d'indifférence plus élevée fonde l'hypothèse de non saturation des préférences. Selon cette hypothèse, la satisfaction du consommateur augmente à mesure que l'on passe à des courbes

d'indifférence situées plus haut. Il existe en conséquence une infinité de courbe d'indifférence.

ii) Les courbes d'indifférences ont une pente négative (sont décroissantes):



$$du = U_x dx + U_y dy = 0 \text{ d'où } dy/dx = -U_x/U_y < 0$$

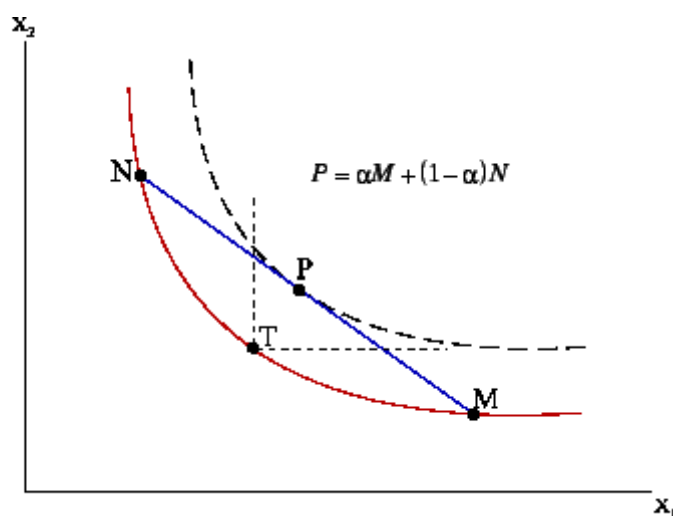
On pose  $-dy/dx =$  taux marginal de substitution à la consommation

$$TMS_{x \text{ à } y} = U_x/U_y$$

Le taux marginal de substitution de x à y est la quantité du bien y à laquelle il faut renoncer pour obtenir une unité supplémentaire du bien x tout en gardant le même niveau de satisfaction

iii) la convexité : les paniers intermédiaires sont préférés aux paniers *extrêmes*.

$$\begin{aligned} & \text{si } M \sim N \quad \alpha \in [0, 1], \\ & \text{et} \\ & P = \alpha M + (1 - \alpha) N \\ & P \succ M \sim N. \end{aligned}$$



Cela provient du caractère quasi-concave de la fonction d'utilité

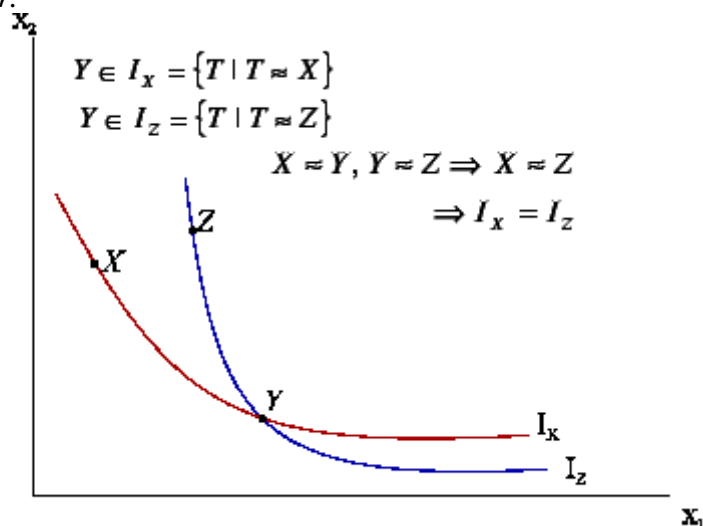
Soit  $U(x_1, x_2)$ , une fonction d'utilité avec  $U_1 = \partial U / \partial x_1$  ;  $U_2 = \partial U / \partial x_2$

$$U_{11} = \partial^2 U / \partial x_1^2 \text{ et } U_{22} = \partial^2 U / \partial x_2^2$$

On dit que  $U(x_1, x_2)$  est quasi concave si  
 $U_{11}U_{22} - 2U_{12}U_{1U2} + U_{22}U^2_1 < 0$

#### iv) Les courbes d'indifférence ne peuvent se couper

Les courbes d'indifférence correspondant à des niveaux différents de satisfaction ne peuvent se couper.

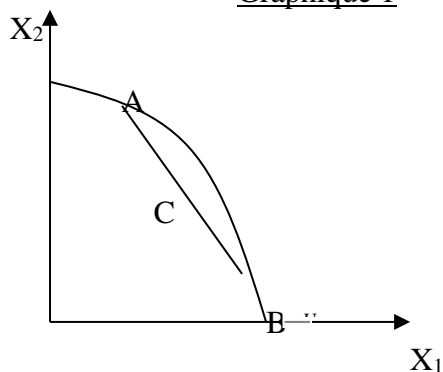


Si X, Y, Z représentent des combinaisons différentes de biens 1 et 2 et si Z est préféré à X alors par transitivité, Y est préféré à X. Mais X et Y sont sur la même courbe d'indifférence, donc le consommateur est indifférent entre eux. Ce qui est contradictoire.

#### c) Cas atypiques de courbes d'indifférence : Courbe d'indifférences non-convexes

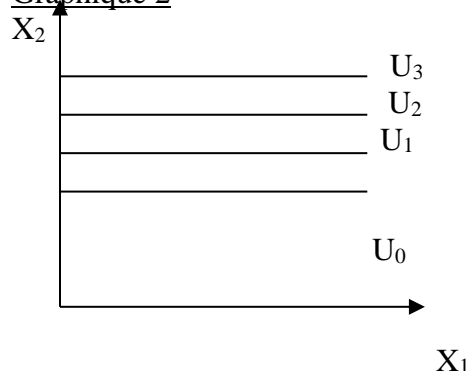
- Une courbe d'indifférence peut être concave : dans ce cas, les dotations A et B sont préférées à la dotation intermédiaire C (figure 1)

Graphique 1

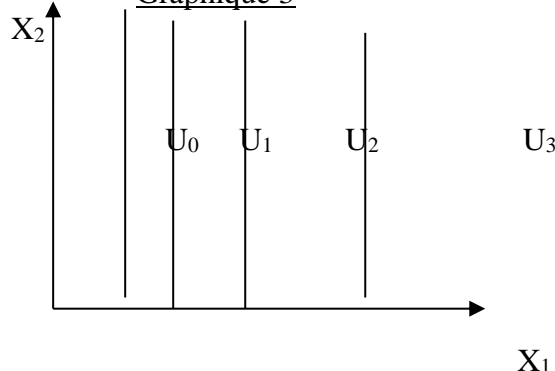


- Une courbe d'indifférence peut être horizontale (figure 2) ou verticale (figure 3)

Graphique 2



Graphique 3



Bien X1 non désiré

Bien X2 non désiré

- *Substituts parfaits*

Dans ce cas les deux biens ont la même valeur pour le consommateur. Il peut remplacer l'un des biens par l'autre.

Ce qui compte pour lui, c'est la quantité totale de bien contenu dans chaque panier. Par conséquent la fonction d'utilité

$$U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

représente bien ces préférences :

- ◆ elle a une valeur constante le long des courbes d'indifférence (formée des paniers qui contiennent la même quantité totale de biens);
- ◆ elle donne une valeur plus élevée quand la quantité totale augmente (et donc quand la satisfaction de l'individu augmente).

Les courbes d'indifférences correspondent à

$$I_{U_0} = \{(x_1, x_2) \mid U(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = U_0\}.$$

Naturellement les fonctions suivantes représentent tout aussi bien ces préférences :

$$V = \sqrt{U} = \sqrt{x_1 + x_2},$$

$$W = U^2 = (x_1 + x_2)^2.$$

De manière générale, si le consommateur considère que

- une unité de bien 1 a une valeur de a et
- une unité de bien 2 une valeur de b

du point de vue de leur contribution à sa satisfaction, ses préférences peuvent être représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

et les courbes d'indifférences sont données par

$$I_{U_0} = \{(x_1, x_2) \mid ax_1 + bx_2 = U_0\}$$

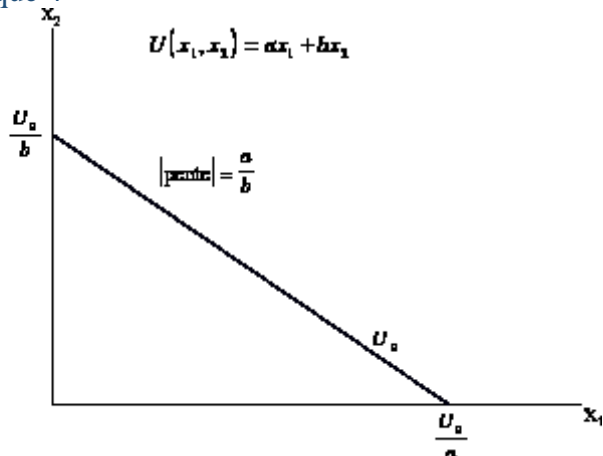
$$= \left\{ (x_1, x_2) \mid x_2 = \frac{U_0}{b} - \frac{a}{b}x_1 \right\}$$

avec une pente de  $-\frac{a}{b}$  et les ordonnées à l'origine

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{U_0}{b}, \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{U_0}{a}.$$

Ces deux paniers sont équivalents pour lui.

Graphique 4



#### - Compléments parfaits

Le consommateur doit combiner deux biens dans des proportions fixes pour pouvoir en tirer une satisfaction.

Exemple : Abat-jour  $(x_1)$  et ampoules  $(x_2)$ . Pour tirer satisfaction de l'achat d'un abat-jour, le consommateur doit aussi acheter au moins une ampoule avec.

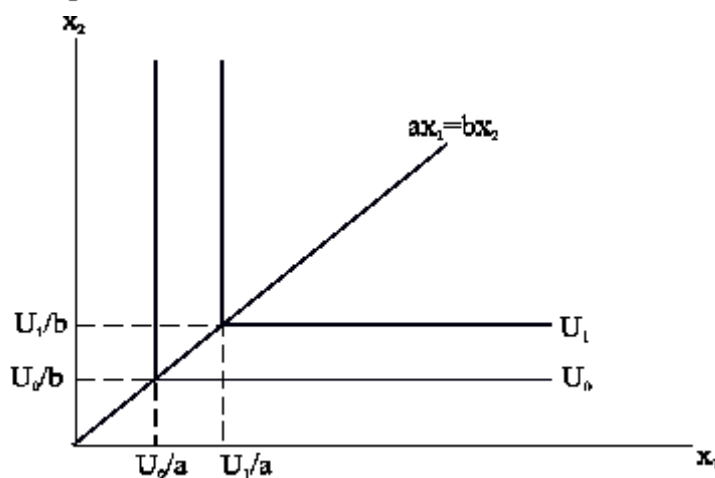
Le nombre de luminaires qui marchent effectivement est donné par :

$$\min\{x_1, x_2\} = U(x_1, x_2).$$

De manière générale, si les deux biens doivent être combinés dans des proportions fixes

Graphique 5

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} \Rightarrow U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$



#### d) Utilité marginale et TMS

L'utilité marginale mesure la variation de l'utilité suite à la consommation d'une unité supplémentaire du bien :

$$x_1 \rightarrow x_1 + \Delta x_1 \Rightarrow U(x_1, x_2) \rightarrow U(x_1 + \Delta x_1, x_2)$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{U(x_1 + \Delta x_1, x_2) - U(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = U m_1,$$

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = U m_1$$

Si  $x_1$  varie de  $dx_1$ , la variation de l'utilité peut être approximée par :  

$$dU = U m_1 dx_1.$$

**Important :** la valeur de l'utilité marginale dépend de la forme particulière de la fonction d'utilité utilisée car c'est une mesure de variation d'utilité et donc c'est une mesure **cardinale**.

**Exemple :** Si  $U(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ,  $U m_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = 2.$

$$V = 2.U = 4x_1 + 2x_2, \quad U m_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} = 4.$$

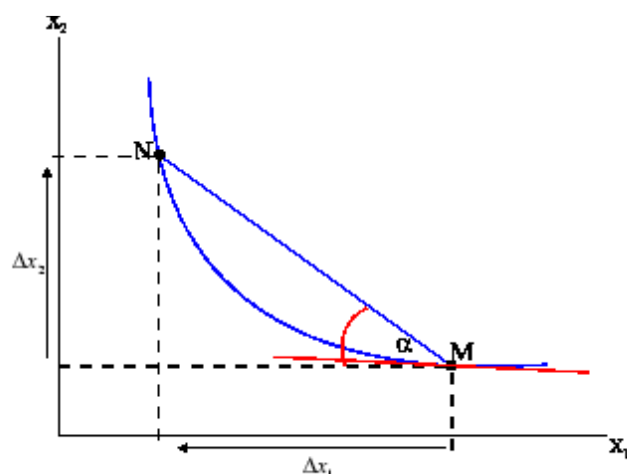
Avec

Donc on ne peut utiliser l'utilité marginale en tant que telle pour représenter les comportements de consommation.

On pourra néanmoins utiliser une autre grandeur qu'on construit en utilisant les utilités marginales.

### Le taux marginal de substitution (TMS)

Le taux marginal de substitution (TMS) d'un bien 1 au bien 2 est la quantité du bien 2 à laquelle un consommateur est prêt à renoncer pour obtenir une unité supplémentaire du bien 1, sa satisfaction (utilité) restant inchangée. Le TMS du bien 2 au bien 1 est l'inverse du précédent.



$$M \sim N, \Delta x_1 < 0,$$

$$M \rightarrow N \Rightarrow \Delta x_2 > 0 \text{ remplace } \Delta x_1$$

On substitue  $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$  à

$$\begin{aligned} TMS &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} -tg(\alpha) \\ &= |\text{pente de la tangente}| \end{aligned}$$

Considérons une situation où le consommateur substitue  $\frac{dx_1}{dx_2}$  en  $\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$ .

$$dx_1 \Rightarrow dU = Um_1 \cdot dx_1$$

+

$$dx_2 \Rightarrow dU = Um_2 \cdot dx_2$$

$$\Rightarrow dU = Um_1 \cdot dx_1 + Um_2 \cdot dx_2 = 0$$

car il s'agit d'une substitution. Nous avons alors :

$$dU = 0 \Leftrightarrow -\frac{dx_2}{dx_1} = TMS_{2,1} = \frac{Um_1}{Um_2}$$

Le TMS ne dépend pas de la fonction d'utilité retenue:

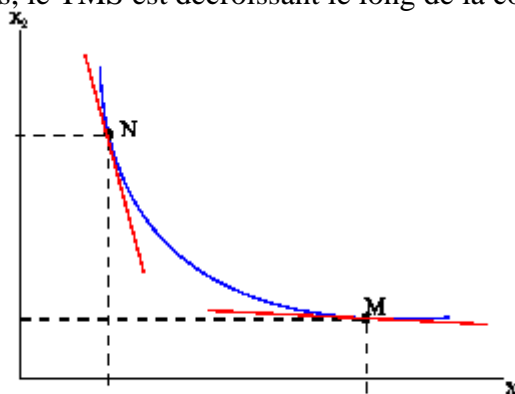
$$U = x_1 + x_2 \Rightarrow Um_1 = Um_2 = 1, TMS = 1,$$

$$V = U^2 = (x_1 + x_2)^2 \Rightarrow Um_1 = Um_2 = 2(x_1 + x_2), TMS = 1,$$

$$W = e^U = e^{x_1+x_2} \Rightarrow Um_1 = Um_2 = e^{x_1+x_2}, TMS = 1.$$

### . Variation du TMS

- pour les substituts parfaits le TMS est constant.
- pour les préférences convexes, le TMS est décroissant le long de la courbe d'indifférence:



$$TMS(N) > TMS(M)$$

La convexité des courbes d'indifférence implique que le TMS de  $x_1$  à  $x_2$  diminue au fur et à mesure que  $x_1$  est substitué à  $x_2$  le long d'une même courbe d'indifférence.

### La décroissance du TMS

Au fur et à mesure que le consommateur a plus de bien 1 et moins de bien 2, il est prêt à céder une quantité de plus en plus faible du bien 2 en échange d'une unité supplémentaire du bien 1. Donc le taux auquel un individu est disposé à échanger du bien  $x_2$  contre du bien  $x_1$ , diminue à mesure que  $x_1$  augmente.

## II La fonction de demande

Parmi l'ensemble des *paniers* de consommations qu'il *peut acquérir*, le consommateur va choisir celui qu'il considère comme étant *le meilleur* pour lui (*principe d'optimisation*). Dans cette section nous allons caractériser les paniers qu'il peut acquérir en tenant compte de son revenu.

### 2.1. La contrainte budgétaire

Soient deux biens de consommation dont les quantités sont  $x_1$  et  $x_2$ .

Deux prix :  $p_1$  et  $p_2$ .

Le revenu :  $m$ .

Les dépenses du consommateur s'il décide d'acheter le panier  $X = (x_1, x_2)$  :

$p_1 x_1$  : dépenses en bien 1

+

$p_2 x_2$  : dépenses en bien 2

=

$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$  : contrainte budgétaire

Tous les paniers vérifiant cette contrainte forment l'**ensemble de budget** du consommateur.

#### Les déplacements de la droite de budget

**a) augmentation de revenu :**  $m \rightarrow m' > m$

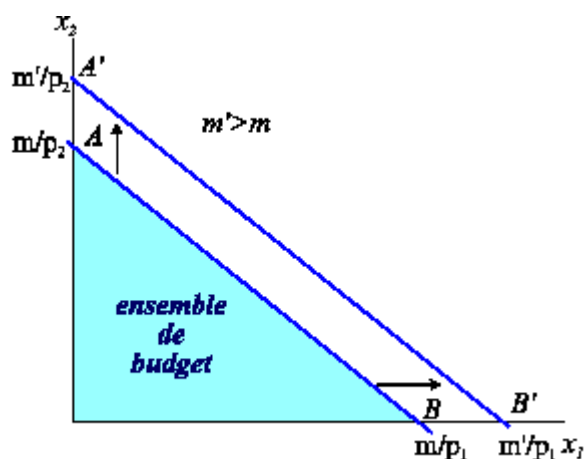
La droite de budget devient :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = m' > m$$

la pente n'a donc pas été modifiée. Les ordonnées à l'origine augmentent :

$$\left( \frac{m}{p_1}, \frac{m}{p_2} \right) \rightarrow \left( \frac{m'}{p_1} > \frac{m}{p_1}, \frac{m'}{p_2} > \frac{m}{p_2} \right)$$

déplacement parallèle de la droite de budget vers le haut:

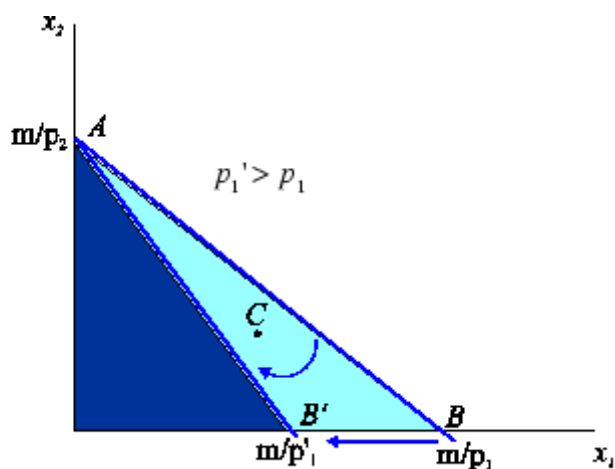


b) augmentation du prix du bien 1 :  $p_1 \rightarrow p'_1 > p_1$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \rightarrow p'_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

$$\Rightarrow \left( \frac{m}{p_1}, \frac{m}{p_2} \right) \rightarrow \left( \frac{m}{p'_1} < \frac{m}{p_1}, \frac{m}{p_2} \right)$$

$$|\text{pente}| : \frac{p_1}{p_2} \rightarrow \frac{p'_1}{p_2} > \frac{p_1}{p_2}$$



Le point  $C$  n'est plus accessible pour le consommateur : Cela correspond à la perte de pouvoir d'achat du consommateur.

c) Multiplication par un facteur  $t \neq 0$  de toutes les variables monétaires

$$\left. \begin{array}{l} p_1 \rightarrow t p_1 \\ p_2 \rightarrow t p_2 \\ m \rightarrow t m \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t p_1 x_1 + t p_2 x_2 = t m \\ \Leftrightarrow t (p_1 x_1 + p_2 x_2) = t m \\ \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{array} \right.$$

(Absence d'illusion monétaire.)

### 2.1.2. Le choix de consommation

Parmi l'ensemble des paniers accessibles, le consommateur va choisir celui qu'il préfère. Le problème posé devient alors un problème de maximum lié ou contraint, car le consommateur doit trouver une combinaison de  $x_1$  et  $x_2$  telle qu'elle rende maximum la fonction d'utilité :  $U = f(x_1, x_2)$  et satisfasse en même temps l'équation budgétaire.

De manière générale, la solution de maximisation de  $U(x, y)$  donnant  $(x^*, y^*)$ , panier optimal est intérieur aux axes  $X_1$  et  $X_2$ , c'est-à-dire  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ .

Des cas particuliers où  $y$  et/ou  $x$  peuvent être égal à 0 sont traités par la méthode de KUHN et TUCKER.

### Cas général avec $x$ et $y \neq 0$

On peut résoudre le problème de maximisation de l'agent de trois manières :

- Méthode de substitution
- Méthode graphique
- Méthode du multiplicateur de Lagrange

#### - Méthode de substitution

Exemple : Soit la fonction d'utilité suivante :

$$(1) U = f(x_1, x_2) \text{ et la contrainte budgétaire}$$

$$(2) R = P_1x_1 + P_2x_2$$

Le problème consiste à maximiser la fonction (objectif) d'utilité sous la contrainte budgétaire.

On peut écrire l'équation (2) sous la forme suivante :

$$X_2 = R/P_2 - (P_1/P_2)x_1 \quad (3)$$

En substituant l'équation (3) dans l'équation (1) on obtient une fonction d'utilité en fonction de  $x_1$  seul :

$$(1') U = f(x_1, (R/P_2 - (P_1/P_2)x_1))$$

Puisque la relation entre  $x_1$  et  $x_2$  est fixée par la contrainte budgétaire, il suffit de maximiser (1') par rapport à  $x_1$  pour obtenir les quantités optimales des deux biens.

| <u>Conditions nécessaire et suffisantes pour un maximum</u> | <u>Conditions nécessaire et suffisantes pour un minimum</u> |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $dU/dx_1 = U'(x_1) = 0$                                     | $dU/dx_1 = U'(x_1) = 0$                                     |
| $D^2U/dx_1^2 = U''(x_1) < 0$                                | $d^2U/dx_1^2 = U''(x_1) > 0$                                |

En calculant la dérivée première de l'expression (1') et en l'annulant, on obtient :

$$4) dU/dx_1 = f_1 + f_2(-P_1/P_2) = 0$$

$$\iff f_1 = f_2(P_1/P_2) \text{ ou } f_1/f_2 = P_1/P_2$$

Cela signifie que le rapport des utilités marginales doit être égal au rapport des prix pour que l'on soit à l'optimum.

La relation (4) est nécessaire mais pas suffisante pour un maximum. La condition suffisante est indiquée par le signe de la dérivée seconde de l'expression (1') cette dérivée seconde est égale à :

$$(5) d^2U/dx_1^2 = f_{11} + 2f_{12}(-P_1/P_2) + f_{22}(-P_1/P_2)^2 < 0$$

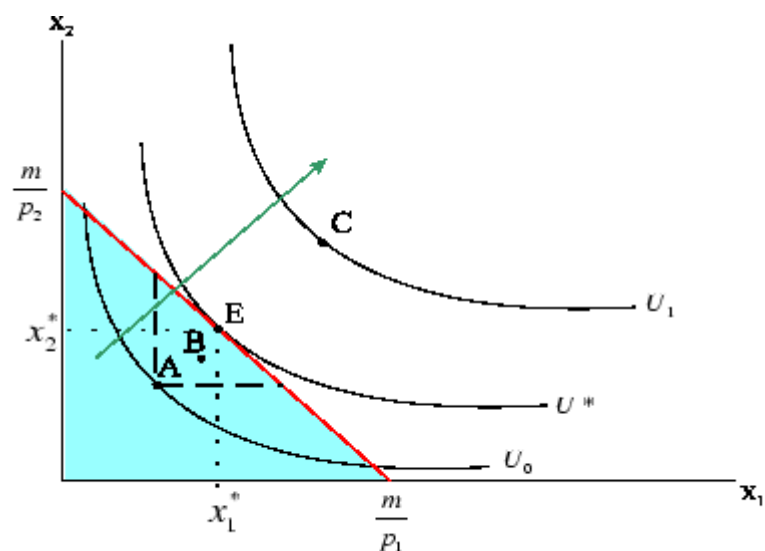
En remplaçant  $(P_1/P_2)$  par  $f_1/f_2$  et en multipliant par  $f_1^2$  et  $f_2^2$  on obtient

$$(6) f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 < 0$$

#### - Méthode graphique

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2)$$

$$S.à. p_1x_1 + p_2x_2 = m$$



$$C \succ B \succ A \Leftrightarrow U(C) > U(B) > U(A)$$

mais

$$p_1 x_1^C + p_2 x_2^C > m.$$

Le point  $E$  est l'**optimum** du consommateur. Il correspond à l'utilité la plus élevée possible ( $U^*$ ) qu'il peut atteindre étant donné son revenu.

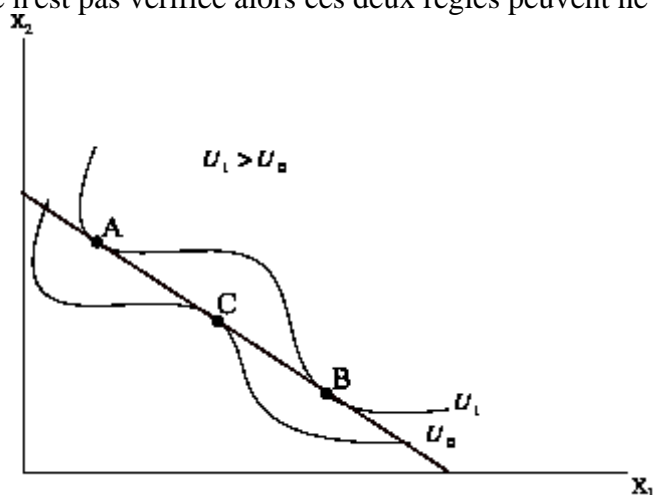
$$E = (x_1^*, x_2^*)$$

◆  $E$  est sur la droite de budget :  $p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m$ ;

◆  $E$  est le point de tangence entre une courbe d'indifférence et la droite de budget.

Pour les préférences *normales* ces deux conditions sont suffisantes pour déterminer l'optimum du consommateur.

Par exemple si la convexité n'est pas vérifiée alors ces deux règles peuvent ne pas suffire:



Cas à exclure

Si les préférences sont normales alors l'optimum doit correspondre à un point de tangence entre la droite de budget et une courbe d'indifférence.

La pente de la droite de budget doit alors être égale, en valeur absolue, à la pente de la tangente à la courbe d'indifférence :

$$E = (x_1^*, x_2^*) : \frac{p_1}{p_2} = TMS_{2,1} = \frac{U'_{m_1}(x_1^*, x_2^*)}{U'_{m_2}(x_1^*, x_2^*)}$$

$$E = (x_1^*, x_2^*) : \begin{cases} p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m \\ \frac{p_1}{p_2} = \frac{U'_{m_1}}{U'_{m_2}} \end{cases}$$

Ce système de deux équations à deux inconnues nous donne le panier optimal, étant donné le vecteur de prix et le revenu du consommateur :

$$x_1^*(p_1, p_2; m),$$

$$x_2^*(p_1, p_2; m).$$

Ce sont les **fonctions de demande** marshallienne ou ordinaire de biens du consommateur.

### - Méthode du multiplicateur de Lagrange

Cette troisième méthode permet d'obtenir les mêmes résultats que les précédentes. Elle consiste à définir une fonction auxiliaire appelée fonction de Lagrange (ou lagrangien) :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda (R - P_1 x_1 - P_2 x_2)$$

La nouvelle variable  $\lambda$  est appelée le multiplicateur de Lagrange parce qu'elle multiplie la contrainte. Le théorème de Lagrange dit qu'un choix optimal doit respecter les conditions de premier ordre suivantes :

**CIO**

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \partial U(x_1, x_2) / \partial x_1 - \lambda P_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \partial U(x_1, x_2) / \partial x_2 - \lambda P_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Le rapport (1)/(2)} \Leftrightarrow (\partial U(x_1, x_2) / \partial x_1) / \partial U(x_1, x_2) / \partial x_2 = -dx_2/dx_1 = P_1/P_2 \quad (4)$$

On obtient le taux marginal de substitution du bien  $x_1$  au bien  $x_2$  est égal au rapport des prix. C'est l'équilibre du consommateur.

Par ailleurs à l'équilibre le multiplicateur de Lagrange est égal aux utilités marginales pondérées des prix des deux biens. En outre, il mesure le supplément d'utilité qui découle d'un accroissement unitaire des ressources (revenu) du consommateur. En effet,

$$R = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$dR = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \text{ or de CIO, on a}$$

$$p_1 = U'_{x_1} / \lambda, \quad p_2 = U'_{x_2} / \lambda$$

$$\text{donc } dR = U'_{x_1} dx_1 / \lambda + U'_{x_2} dx_2 / \lambda$$

$$dR = (U'_{x_1} dx_1 + U'_{x_2} dx_2) / \lambda$$

$$dR = dU / \lambda \Rightarrow \lambda = dU / dR$$

**CII<sup>o</sup>**

Conditions de second ordre (CII<sup>o</sup>)

Les conditions suffisantes de la maximisation contrainte nécessitent que le déterminant hessien bordé formé des dérivées partielles de 2ème ordre de  $L(\cdot)$  soit positif.

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\lambda} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2\lambda} \\ L_{\lambda 1} & L_{\lambda 2} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & -P_1 \\ U_{21} & U_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

NB : Du fait que nous ayons une courbe d'indifférence convexe par rapport à l'origine avec  $U(X_1, X_2)$  quasi-concave, il n'est pas nécessaire de vérifier les conditions de second ordre.

La résolution du système des trois équations par la méthode de cramer permet d'obtenir les fonctions de demande de  $x_1$  et  $x_2$  respectivement :

$$x_1 = x_1^*(P_1, P_2, R)$$

$$x_2 = x_2^*(P_1, P_2, R)$$

Ce sont des fonctions de demande ordinaire ou demande marshallienne.

En remplaçant les fonctions de demande  $x_1^*$  et  $x_2^*$  dans la fonction d'utilité initiale  $U = U(x_1, x_2)$ , on obtient une nouvelle fonction appelée fonction d'utilité indirecte

$$U^*(P_1, P_2, R) = U[x_1^*(P_1, P_2, R), x_2^*(P_1, P_2, R)]$$

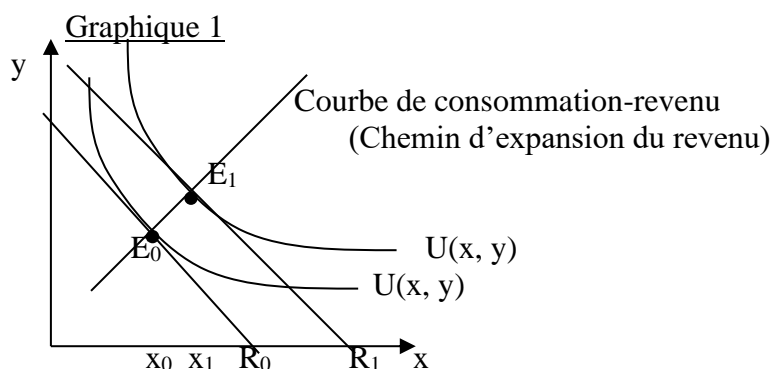
$U^*$  donne la valeur maximale de l'utilité pour toutes les valeurs de  $P_1$ ,  $P_2$ , et  $R$ .

## 2.2 La variation de la demande d'un bien

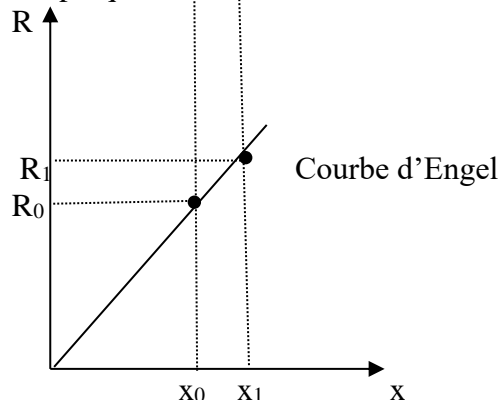
Soient  $U(x, y)$ ,  $R$ ,  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $x$  et  $y$  variables de choix,  $P_x$ ,  $P_y$  et  $R$  sont donnés. L'équilibre  $E$  peut être modifié avec un changement de  $P_x$ ,  $P_y$  ou  $R$ . On dit qu'on fait la statique comparative.

### 2.2.1 La modification du revenu

Lorsque le revenu du consommateur varie, la droite de budget se déplace parallèlement à elle-même : à droite si le revenu augmente et à gauche si le revenu baisse. Ainsi à chaque niveau de revenu correspond un choix optimal du consommateur.



Graphique 2



En joignant les points d'équilibre  $E_0$  et  $E_1$ , on obtient la courbe de consommation-revenu qui montre comment l'équilibre du consommateur se modifie lorsque le revenu change.

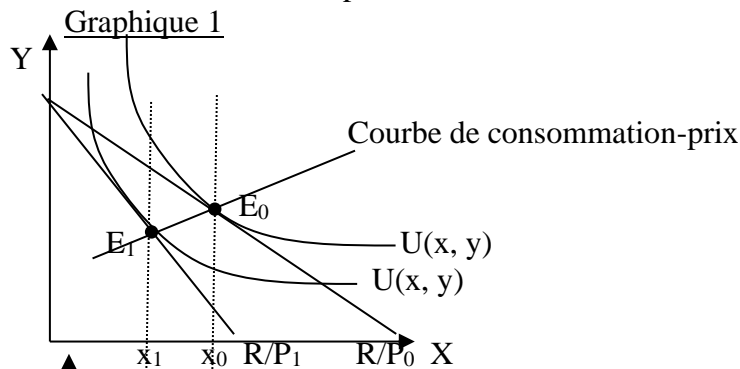
La courbe de consommation-revenu donne une information sur la manière dont la structure de la consommation change avec les variations qui affectent le revenu. Ainsi lorsque la consommation d'un bien augmente avec le revenu, on dit que ce bien est un bien normal.

Dans le cas contraire, on dit que le bien est inférieur. Si la demande croît proportionnellement plus que le revenu, le bien est dit un bien de luxe.

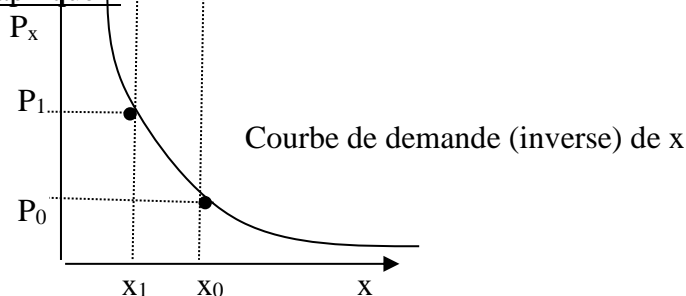
En traçant la relation existant entre le choix optimal du bien  $x$  et le revenu  $R$ , on obtient la courbe d'Engel. La courbe d'Engel est la courbe reliant la quantité consommée d'un bien au revenu, les prix étant maintenus constants.

### 2.2.2 Modification de la structure des prix

Lorsque le prix d'un bien varie, la droite de budget pivote autour d'un point. Lorsque le prix d'un bien augmente, la droite de budget fait une rotation à l'intérieur et à l'extérieur lorsque le prix de ce bien baisse. En joignant les différents points d'équilibre, l'on obtient la courbe de consommation-prix qui est le lieu géométrique des différentes combinaisons d'équilibre suite aux différentes variations du prix de ce bien, toutes choses étant égales par ailleurs.



Graphique 2



En représentant graphiquement la relation liant la quantité optimale du bien x et les différents prix on obtient la courbe de demande du bien x qui est le lieu géométrique des quantités que le consommateur désire acquérir pour tous les prix possibles de ce bien, toutes choses égales par ailleurs.

### 2.2.3 Elasticité de substitution entre deux biens

L'élasticité de substitution notée  $\sigma$  est le rapport de la variation relative du rapport  $y/x$  à la variation relative du taux marginal de substitution de x à y. Elle exprime la plus ou moins grande facilité avec laquelle on substitue un bien à un autre lorsqu'on se déplace le long d'une courbe d'indifférence.

Calculons l'élasticité de substitution ( $\sigma$ )

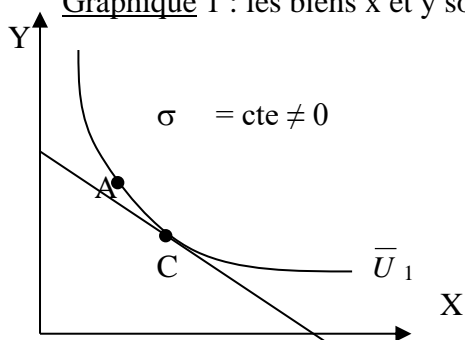
$$\sigma = \frac{\partial(y/x)/(y/x)}{\partial(TMS_{x/y})/TMS_{x/y}}$$

$$TMS_{x/y} = U_{mx}/U_{my}$$

En général,  $\sigma$  varie de 0 à l'infini en tout point de la courbe d'indifférence. Cependant, en cas de substituabilité parfaite,  $\sigma$  tend vers l'infini et en cas de biens complémentaires  $\sigma$  est nul.

Exemples :

Graphique 1 : les biens x et y sont substituables



$$U(x, y) = x^a y^b$$

$$\sigma = \frac{\partial(y/x)/(y/x)}{\partial(TMS_{x/y})/TMS_{x/y}}$$

$$TMS_{x/y} = U_{mx}/U_{my} = ax^{a-1}y^b/bx^ay^{b-1} = ay/bx$$

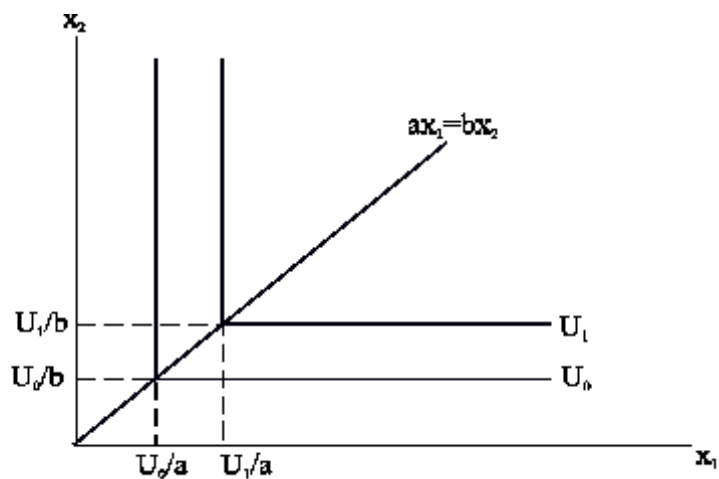
$$\text{Posons } t = TMS_{x/y} = ay/bx$$

$$k = y/x = (b/a)t$$

$$\sigma = dk/dt \cdot t/k = (b/a)x/(a/b) = 1$$

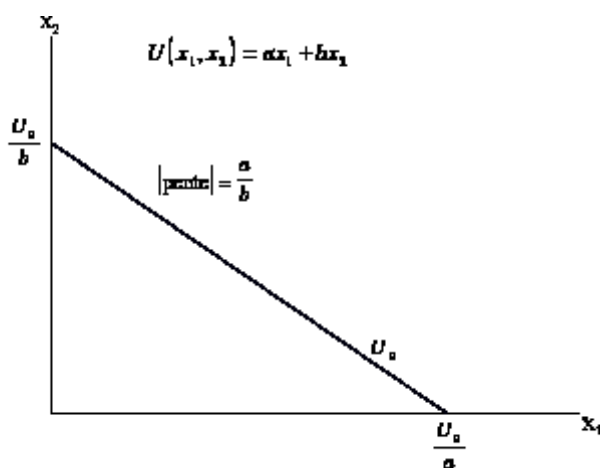
Graphique 2 : les bien x et y sont complémentaires

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} \Rightarrow U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$



$$\sigma = 0$$

Graphique 3 : les biens  $x$  et  $y$  sont parfaitement substituables



$$\sigma = \infty$$

La courbe d'indifférence se confond avec la droite de budget

## II La demande du consommateur

### II-1. La fonction de demande

#### 1.1 Définition et typologie de la demande

##### 1.1.1 Définition

Le vecteur de consommation dépend des prix unitaires des biens et du revenu du consommateur. Dans ces conditions, il est possible de décrire la consommation de chacun des biens comme fonction des prix et du revenu.

Pour un vecteur quelconque  $x_i$ , on peut écrire :

$$X_i = x_i(P_1, P_2, \dots, P_n, R)$$

Cette fonction est appelée fonction de demande  $x_i$ .

La fonction de demande explique les choix optimaux du consommateur en fonction des prix et du revenu de ce dernier. Ainsi, pour une fonction d'utilité quelconque, déterminer les demandes du consommateur revient à calculer les consommations optimales en exprimant celles-ci en fonction des prix et du revenu.

##### II.1.2 Demande individuelle

Elle indique la relation qu'il y a entre la quantité d'un bien et les prix de ce bien, les prix des autres biens (substituts et complémentaires) restant constants.

La demande d'un bien peut être fonction des caractéristiques de ce bien ou encore des facteurs exogènes au bien.

Ces caractéristiques exogènes sont donc identifiables par les effets suivants :

- Effet d'entraînement ou effet de panurge, C'est lorsque la demande d'un bien augmente parce que ce bien est demandé par d'autres individus. C'est en quelque sorte un effet de mode.

- Effet de snobisme, c'est lorsque la demande d'un bien diminue parce que ce bien est consommé par d'autres individus autres que soi. Il s'agit en fait d'un phénomène d'auto-exclusion.

- Effet Veblen, c'est lorsque la demande d'un bien augmente parce qu'il est cher. C'est un effet qui implique des comportements psychologiques et sociologiques.

Le marché étant composé d'une multitude de demandeurs et d'offreurs, on définit la demande globale ou demande collective comme la somme des demandes individuelles. Ainsi, la demande globale d'un bien à chaque niveau de prix est égale à la somme des quantités demandées à ce prix. La demande globale dépend donc des mêmes caractéristiques que la demande individuelle.

Exemple : Soient deux individus dont les fonctions de demande sont :

La demande du premier individu :  $X_1 = -2P_x + 10$

(Pour  $P < 5$ )

La demande du 2<sup>ème</sup> individu :  $X_2 = -5P + 15$

(Pour  $P < 3$ )

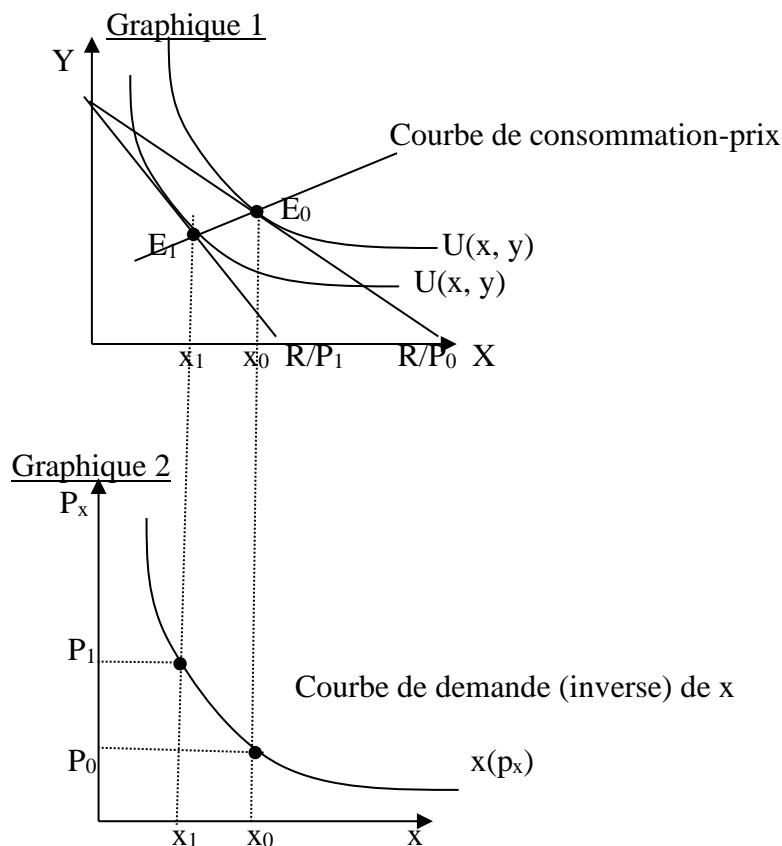
Lorsque le prix varie de 3 à 5, le 2<sup>ème</sup> individu renonce au bien, la demande globale se confond avec celle du 1<sup>er</sup> individu.

Lorsque le prix varie de 0 à 3, les deux individus participent à la demande globale, celle-ci vaut donc  $X = (-2P+10) + (-5P+15) = -7P + 25$  Notez que cette formule ne vaut que dans l'intervalle de prix entre 0 et 3.

#### 1.2 Calcul des quantités demandées

##### 1.2.1 La courbe de demande

Considérons un couple  $(x, y)$  quelconque et supposons une augmentation du prix de  $x$ .



En représentant graphiquement la relation liant la quantité optimale du bien  $x$  et les différents prix on obtient la courbe de demande du bien  $x$  qui est le lieu géométrique des quantités que le consommateur désire acquérir pour tous les prix possibles de ce bien, toutes choses égales par ailleurs.

### 1.2.2 La demande à l'équilibre

#### 1.2.2.1 La demande marshallienne

Les fonctions de demande marshallienne décrivent les demandes du consommateur encore appelée programme primal. Du programme primal, l'on obtient les fonctions de demande marshallienne ou fonctions de demande non compensée. Si nous considérons une fonction d'utilité de 2 biens  $x$  et  $y$ , le programme primal se présente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } U(X, Y) \\ \text{SC : } R = P_x X + P_y Y \end{array} \right.$$

Avec  $P_x$ ,  $P_y$  les prix respectifs de  $x$  et  $y$ ,  $R$ , le revenu du consommateur.

Trouver les demandes marshalliennes revient à trouver les quantités  $x$  et  $y$  qui maximisent son utilité sous contrainte de son budget. Pour résoudre ce programme, il faut écrire la fonction de Lagrange associée ou le lagrangien.

Le lagrangien de ce programme s'écrit  $L(X, Y, \lambda) = U(X, Y) + \lambda (R - P_x X - P_y Y)$

#### CNPO

$$\frac{\partial L}{\partial X} = U'_x - \lambda P_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = U'_y - \lambda P_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - P_x X - P_y Y = 0 \quad (3)$$

$$(1)/(2) \Leftrightarrow U'_x/U'_y = P_x/P_y$$

**CPO**

$$\begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} & -P_1 \\ U''_{yx} & U''_{yy} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Exemple :

Soient  $U(x,y) = xy$  fonction d'utilité d'un consommateur et  $P_x, P_y, R$ , les prix des deux biens et le revenu du consommateur.

TAF : Trouver les demandes marshalliennes.

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(R - p_x x - p_y y)$$

**CNPO**

$$\frac{\partial L}{\partial X} = y - \lambda P_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = x - \lambda P_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - P_x X - P_y Y = 0 \quad (3)$$

$$(1)/(2) \Leftrightarrow y/x = P_x/P_y$$

$$Y = P_x X / P_y \quad (4)$$

En remplaçant  $y$  par sa valeur dans (3), on obtient :

$$R - P_x X - P_y (P_x X / P_y) = 0$$

$$R - 2P_x X = 0$$

D'où

$$X^* = R/2P_x \text{ et } y^* = R/2P_y$$

**CPO**

$$\begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -P_x \\ 1 & 0 & -P_y \\ -P_x & -P_y & 0 \end{vmatrix} = P_x P_y + P_x P_y > 0$$

### 1.2.2.2. La demande hicksienne

Les fonctions de demande hicksienne sont issues de la solution du programme de minimisation du **revenu (dépense) du** consommateur appelé programme dual. Les fonctions de demande hicksienne ou demande compensée relèvent du fait que le consommateur cherche à minimiser ses dépenses. Pour cela il faut une compensation par un effet de revenu. Le programme dual s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Min } R = P_x x + P_y y \\ \text{SC : } \bar{U} = U(x, y) \end{cases}$$

Avec  $\bar{U}$  un niveau donné d'utilité donc une constante,  $P_x$ ,  $P_y$  les prix respectifs de  $x$  et  $y$ ,  $R$  dépense (le revenu) du consommateur.

La fonction de Lagrange associée au programme de minimisation s'écrit comme suit :

$$L(x, y, \mu) = P_x x + P_y y + \mu(\bar{U} - U(x, y))$$

#### CNPO

$$\frac{\partial L}{\partial X} = P_x - \mu U'_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = P_y - \mu U'_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = R - P_x x - P_y y = 0 \quad (3)$$

$$(1)/(2) \Leftrightarrow U'_x / U'_y = P_x / P_y$$

On obtient : le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix

Exemple : Calculer les fonctions de demande hicksienne de l'exercice précédent

Les fonctions de demande hicksienne sont obtenues à partir des solutions du programme dual suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } E = P_x x + P_y y \\ \text{SC : } \bar{U} = xy \end{cases}$$

La fonction de Lagrange associée au programme de minimisation s'écrit comme suit :

$$L(x, y, \mu) = P_x x + P_y y + \mu(\bar{U} - xy)$$

**CNPO**

$$\frac{\partial L}{\partial X} = P_x - \mu y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = P_y - \mu x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \bar{U} - xy = 0 \quad (3)$$

$$(1)/(2) \Leftrightarrow y/x = P_x/P_y \text{ d'où } y = P_x x/P_y \quad (4)$$

En substituant (4) dans (3), on obtient

$$\bar{U} - x P_x x/P_y = 0 \Leftrightarrow \bar{U} - P_x x^2/P_y = 0$$

$$\tilde{x} = (\bar{U} P_y/P_x)^{1/2} \quad \text{et} \quad \tilde{y} = \frac{P_x}{P_y} (\bar{U} P_y/P_x)^{1/2} = (\bar{U} P_x/P_y)^{1/2}$$

$$\tilde{x} = h(P_x, P_y, \bar{U}) \quad \tilde{y} = h(P_x, P_y, \bar{U})$$

En remplaçant x et y par  $\tilde{x}$  et dans la dépense on obtient une fonction appelée fonction de dépense minimale

$$E^*(P_x, P_y, \bar{U}) = P_x \tilde{x} + P_y \tilde{y} = 2 (\bar{U} P_y P_x)^{1/2}$$

**II Les notions d'élasticité**

La nécessité de comprendre l'élasticité vient du fait que la variation de la demande d'un bien qui résulte d'un changement du prix ou du revenu peut différer très fortement d'un bien à un autre. Aussi, les notions d'élasticité-prix et élasticité-revenu permettent-elles de mesurer cette sensibilité plus ou moins forte de la demande

**2.1. L'élasticité-revenu**

On appelle l'élasticité-revenu de la demande d'un bien x, le rapport de la variation relative de la demande de ce bien à la variation relative du revenu. On la note comme suit :

$$\epsilon_{x/R} = \frac{\Delta x/x}{\Delta R/R}$$

La demande étant fonction des prix et du revenu, toute variation infiniment petite soit-elle peut entraîner une variation de la demande.

$$\epsilon_{x/R} = \left( \frac{\partial x}{\partial R} \right) \left( \frac{R}{x} \right)$$

La classification des biens par nature peut être reliée au revenu. Ainsi,

si l'élasticité-revenu  $> 1$  : le bien est dit bien supérieur ou bien de luxe. Ce sont des biens dont la demande augmente plus que l'augmentation du revenu ;

Si  $0 < \text{élasticité-revenu} \leq 1$  : le bien est dit bien normal, c'est le cas des biens de première nécessité

Si l'élasticité-revenu  $< 0$  : le bien est dit bien inférieur, c'est le cas de certains biens alimentaires.

**2.2 L'élasticité -prix directe**

On appelle l'élasticité-prix directe de la demande d'un bien x, le rapport de la variation relative de la demande de ce bien à la variation relative de son prix. On la note comme suit :

$$\epsilon_{x/P_x} = \lim_{\Delta p_x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p_x}{P_x}} = \left( \frac{\partial x}{\partial P_x} \right) \left( \frac{P_x}{x} \right)$$

x : la quantité demandée

$p_x$  le prix du bien x.

En d'autres termes, l'élasticité prix directe mesure le pourcentage de variation de la consommation d'un bien qui résulte d'une variation de 1% du prix de ce bien.

$\epsilon_{x/P_x}$  peut être inférieure, supérieure ou égale à  $-1$ . Il est souvent commode de l'exprimer en valeur absolue. Ainsi, si :

|  $\epsilon_{x/P_x}$  | > 1 on dit que x est élastique par rapport à  $P_x$

|  $\epsilon_{x/P_x}$  | < 1 on dit que x est inélastique par rapport à  $P_x$

|  $\epsilon_{x/P_x}$  | = 1 X est à élasticité unitaire (demande de X est isoélastique)

Cas particulier : bien Giffen

Un bien Giffen est un bien dont l'élasticité prix directe est positive. Autrement dit une augmentation du prix de ce bien entraîne une forte augmentation de sa demande. Ce type de bien est dit d'extrême nécessité.

### 2.3 L'élasticité-prix croisée

On appelle l'élasticité-prix croisée de la demande d'un bien x, le rapport de la variation relative de la demande de ce bien à la variation relative du prix d'un autre bien y. On la note comme suit :

$$\epsilon_{x/P_y} = \left( \frac{\partial x}{\partial P_y} \right) \left( \frac{P_y}{x} \right)$$

Si l'élasticité-prix croisée > 0 x et y sont substituables

Si l'élasticité-prix croisée < 0 x et y sont complémentaires

Si l'élasticité-prix croisée = 0 x et y sont indépendants.

## III Effet de revenu et effet de substitution

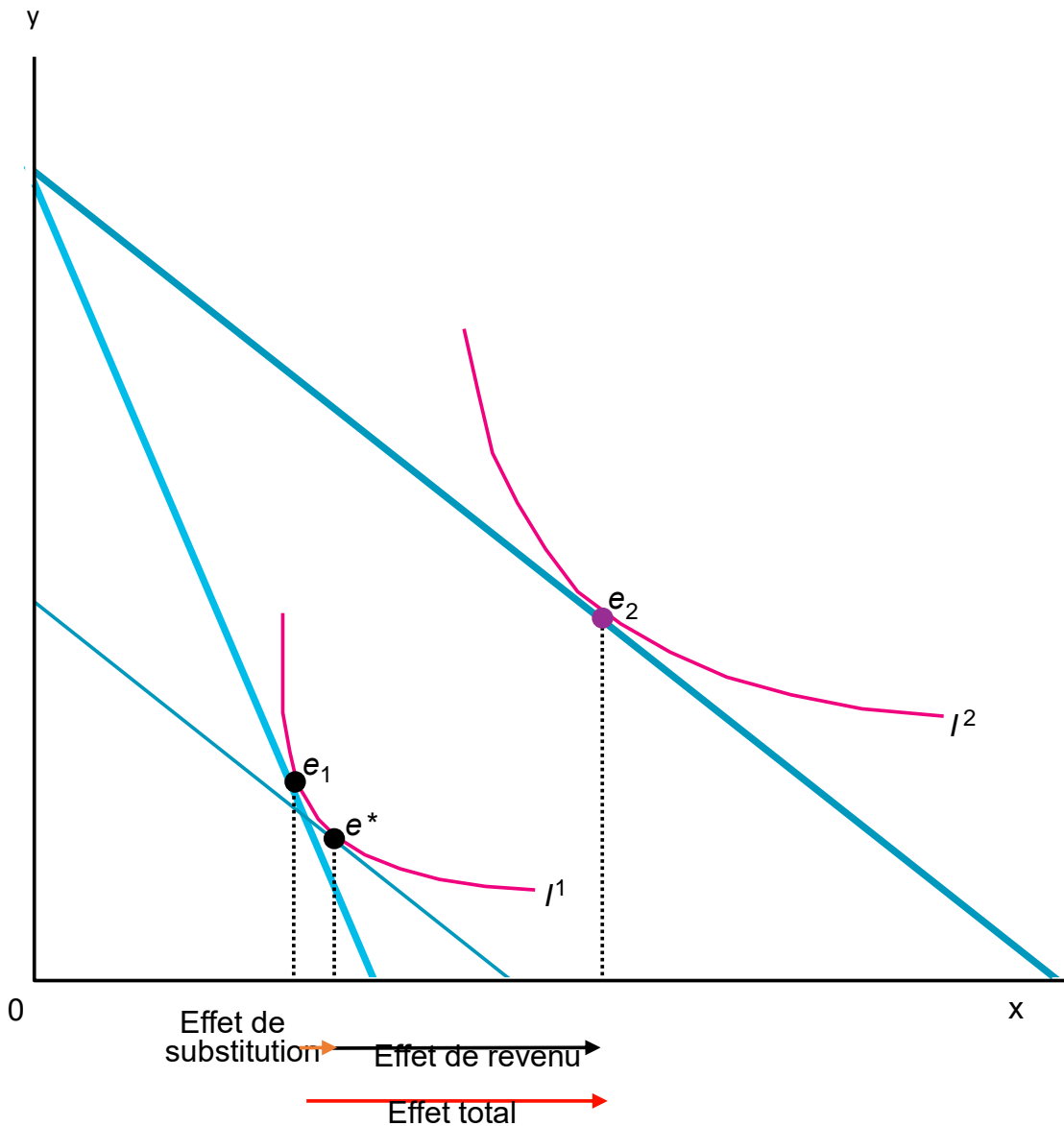
### 3.1 Selon Hicks

La variation du prix d'un bien entraîne deux effets : un effet de revenu et un effet de substitution. L'effet de substitution est la variation de la demande due à une modification du taux d'échange entre deux biens. L'effet de revenu est la variation de la demande consécutive à une modification du pouvoir d'achat. Ces deux effets s'apprécient d'abord par une rotation de la droite de budget autour du panier initialement demandé et ensuite par un déplacement de cette droite de budget jusqu'à ce qu'elle atteigne un nouveau panier de biens.

La rotation correspond à une modification de la pente de budget, le pouvoir d'achat restant constant alors que le déplacement parallèle correspond à une modification du pouvoir d'achat, la pente restant constante

Pour mieux comprendre la nature des deux effets, il est plus commode de les analyser graphiquement.

Graphique : Effet de substitution (Hicks) et revenu



Si l'on suppose une **baisse** du prix du bien  $x$ , cette **baisse** du prix s'accompagne d'une variation du revenu du consommateur qui soit telle que son utilité reste à son niveau initial. Tout se passe comme s'il y avait **une** variation compensatrice du revenu qui déplace la droite du budget parallèlement à sa nouvelle position jusqu'au niveau où le consommateur atteint la satisfaction initiale.

- Le passage du panier d'équilibre  $e_1$  au panier  $e^*$  représente l'effet de substitution
- le passage de l'équilibre  $e^*$  à  $e_2$  représente l'effet de revenu
- le passage de  $e_1$  à  $e_2$  représente l'effet total de la variation du prix

### 3.2 Résolution analytique de la décomposition au sens de Hicks (équation de Slutsky)

Pour arriver à  $V(P, R)$ , on peut soit maximiser  $U(x, y)$  pour  $R$  donné ou minimiser la dépense pour l'achat de  $x$  et  $y$  pour  $\bar{U}$  donné

Le point d'équilibre  $(x^*, y^*)$  peut être obtenu par la minimisation de la dépense totale affectée à l'achat du panier

A l'équilibre la dépense est égale au revenu

Soit  $X = d(P_x, P_y; E^*(P_x, P_y, \bar{U})) = h(P_x, P_y, \bar{U})$

Avec  $h$  = demande hicksienne ou demande compensée

$E^*(P_x, P_y, \bar{U})$  = fonction de dépense minimale

A l'équilibre du consommateur :

$X = d(P_x, P_y, E^*(P_x, P_y, \bar{U})) = h(P_x, P_y, \bar{U})$

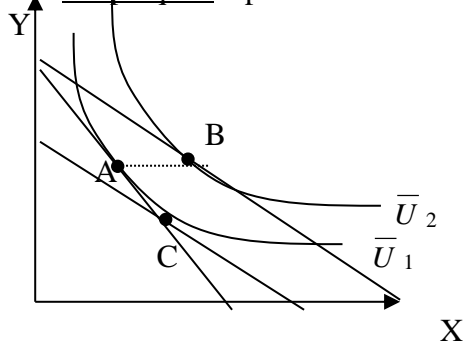
|                          |                    |
|--------------------------|--------------------|
| Demande<br>marshallienne | Demande hicksienne |
| Programme primal         | Programme dual     |
| Maximiser $U(x, y)$      | Minimiser $E$      |
| Lagrangien               | Lagrangien         |
| Cramer                   | Cramer             |
| $(x^*, y^*)$             | $(x^*, y^*)$       |
| $x^*(P, R)$              | $h(P, \bar{U})$    |
| Demande marshallienne    | Demande hicksienne |

L'effet prix indique comment la variation des prix influence la demande de  $x$ .

L'effet revenu indique comment la modification du revenu influence la demande de  $x$

Supposons qu'à partir de l'équilibre le prix du bien  $X$  baisse, on a

Graphique : le prix du bien  $X$  baisse



$\bar{U}$

$$dh/dp_x = \partial d/\partial P_x + (\partial d/\partial E^*)(\partial E^*/\partial P_x) \text{ avec } E^* = P_x X + P_y Y$$

$$d'où dh/dp_x = \partial d/\partial P_x + X(\partial d/\partial E^*)$$

$$\text{On obtient } \partial d/\partial P_x = dh/dp_x - X(\partial d/\partial E^*)$$

$$\text{Soit } \partial d/\partial P_x = \frac{dX/dp_x}{\bar{U}, R = \text{cst}} - \frac{X(\partial d/\partial E^*)}{P_x = \text{cst}}$$

Effet de substitution

Effet de revenu

De façon générale, avec  $d = x$

$$\frac{\partial X}{\partial P_x} = \frac{\partial X/\partial P_x}{\bar{U}, R \text{ cst}} - \frac{X(\partial X/\partial R)}{P_x \text{ cst}}$$

Effet total

Déplacement le long de la Courbe de demande marshallienne      Déplacement le long de la courbe de demande compensée

Cette équation est appelée équation de SLUTSKY. Le passage de A à C est l'effet de substitution et le passage de C à B, l'effet de revenu.

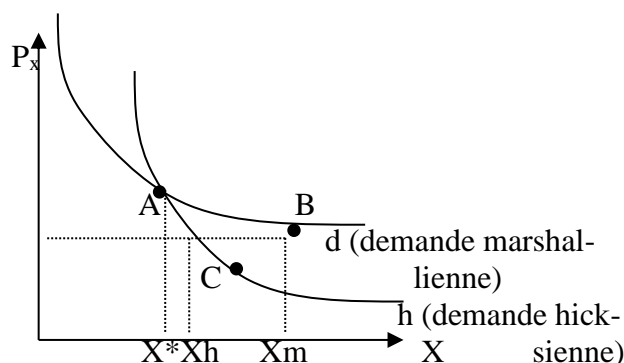
. Si  $\partial X/\partial R > 0$ , on dit que X est un bien normal

. Si  $\partial X/\partial R < 0$ , on dit que X est inférieur

. Si  $\partial X/\partial R = 0$  on dit que X est neutre

Si X est normal alors  $\partial X/\partial P_x < 0$

Si  $\partial X/\partial R < 0$  et l'effet de revenu l'emporte sur l'effet prix avec  $\partial X/\partial P_x > 0$  alors X est un bien Giffen



La fonction de demande marshallienne est homogène de degré zéro (0) dans les prix et le revenu, c'est-à-dire si on multiplie les prix et le revenu de manière proportionnelle, la demande marshallienne ne change pas.

$$X^* = X(P_x, P_y, R) = X(tP_x, tP_y, tR) \\ = t^0 X(P_x, P_y, R)$$

C'est la manifestation d'absence d'illusion monétaire. (les consommateurs ne sont pas victimes d'illusion monétaire : si l'on augmente les prix et le revenu dans le même sens et dans les mêmes proportions, leur demande ne change pas. Ils ne se croient pas devenus plus riches qu'avant)

La fonction de demande hicksienne est homogène dans les prix seulement.

$$h(P, \bar{U}) \Rightarrow h(tP, \bar{U}) = t^0 h(P, \bar{U}), t > 0$$

L'équation de Slutsky peut être utilisée pour identifier les biens substitués et les biens complémentaires.

L'effet prix croisé dans l'équation de Slutsky

$$\frac{\partial X}{\partial P_y} = \frac{\partial X}{\partial P_y} / \bar{U}, I \text{ cst} - y \frac{(\partial X / \partial R)}{P_x, P_y \text{ cst}}$$

Si  $\frac{\partial X}{\partial P_y} / \bar{U}, I \text{ cst} > 0$ , on dit que x et y sont des substitués

$\frac{\partial X}{\partial P_y} / \bar{U}, I \text{ cst} < 0$ , on dit que x et y sont complémentaires

## Propriétés

a) Le long d'une droite de budget, la somme des élasticités- revenus pondérées est égale à 1.

$R = P_x x + p_y y$ . Différencions par rapport à  $R$ , on obtient :

$$dR/dR = P_x \left( \frac{\partial x}{\partial R} \right) + p_y \left( \frac{\partial y}{\partial R} \right) = \left( \frac{P_x x}{R} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial R} \frac{R}{x} \right) + \left( \frac{P_y y}{R} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial R} \frac{R}{y} \right)$$

En posant

$$S_x = \left( \frac{P_x x}{R} \right) \text{ et } S_y = \left( \frac{P_y y}{R} \right), \text{ parts du budget affectées à l'achat de chaque bien ou coefficients}$$

budgétaires, on obtient

$$1 = S_x \left( \frac{\partial x}{\partial R} \frac{R}{x} \right) + S_y \left( \frac{\partial y}{\partial R} \frac{R}{y} \right)$$

$$1 = e_{x/R} S_x + e_{y/R} S_y$$

b) On peut écrire l'équation de Slutsky en termes d'élasticités

$$\text{Soit } \frac{\partial x / \partial P_x}{\bar{U} = \text{cte}, R = \text{cst}} = \frac{\partial X / \partial p_x}{\bar{U} = \text{cte}, R = \text{cst}} - X(\partial x / \partial E^*)$$

On multiplie par le rapport  $P_x/x$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x / \partial P_x}{\bar{U} = \text{cte}, R = \text{cst}} \right) (P_x/x) &= \left( \frac{\partial X / \partial p_x}{\bar{U} = \text{cte}, R = \text{cst}} \right) (P_x/x) - X(\partial x / \partial E^*) (P_x/x) (R/R) \\ e_{x/p_x} &= e_{x/p_x} - e_{x/R} S_x \end{aligned}$$

Élasticité prix directe = élasticité de la demande compensée – élasticité revenu.  $S_x$

c) Homogénéité

Si on a  $g(x, y)$  homogène de degré  $m$

$$g(tx, ty) = t^m g(x, y)$$

D'après le théorème d'Euler

$$m = x(\partial g / \partial x) + y(\partial g / \partial y)$$

Le long d'une courbe de demande, la somme des élasticités prix et revenu est égale à 0

Si  $x = x(P_x, P_y, R)$  en utilisant le théorème d'Euler par rapport aux différentes variables

$$0 = P_x(\partial X / \partial p_x) + P_y(\partial x / \partial p_y) + R(\partial X / \partial R)$$

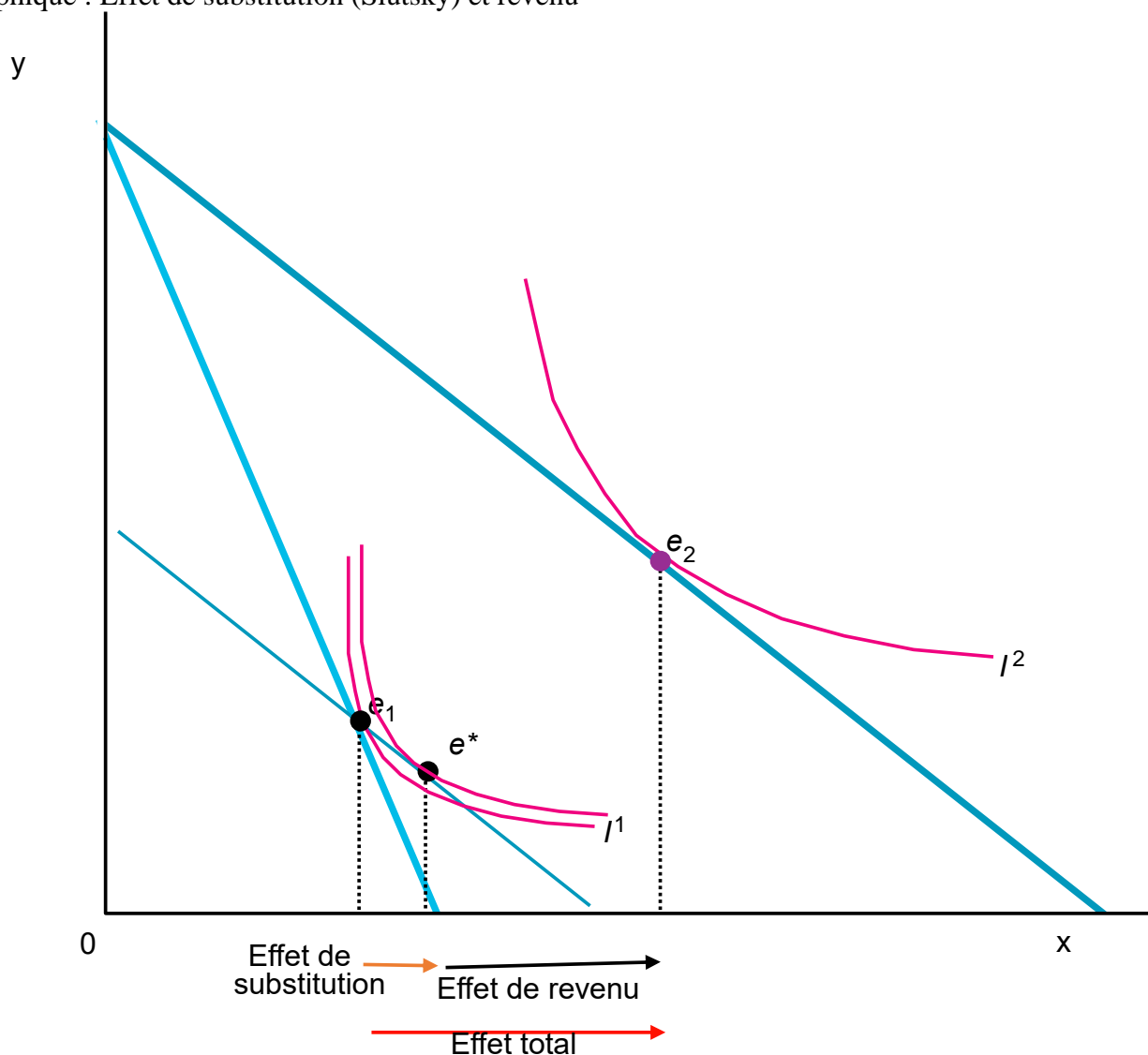
$$0 = (P_x/x)(\partial X / \partial p_x) + P_y/x(\partial y / \partial p_y) + (R/x)(\partial X / \partial R)$$

$$0 = e_{x/p_x} + e_{x/p_y} + e_{x/R} = \sum \text{Élasticités}$$

### 3.3 Selon Slutsky

La méthode de Slutsky reprend certains éléments techniques de celle de Hicks. La seule différence vient de la droite imaginaire de budgets qui toujours parallèle à la droite de budget finale passe par le panier optimal initial. Dans ces conditions, il est obligatoire de déterminer une courbe d'indifférence intermédiaire qui sera tangente à la droite de budget intermédiaire.

Graphique : Effet de substitution (Slutsky) et revenu



Il est possible d'apprécier l'effet de substitution et de revenu sous un angle initial. En effet, étant donné un panier initial de biens  $x$  et  $y$ , la **baisse** du prix du bien  $x$  fait subjectivement disposer au consommateur un revenu  $R'$ . Ainsi, le panier de bien  $(x, y)$  est accessible à la fois par  $(p_x, p_y, R)$  et  $(p_x', p_y, R')$ . Par conséquent,

$$\begin{array}{l}
 R = p_x x + p_y y \\
 R' = p_x' x + p_y y
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} R \\ R' \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 R - R' = p_x x - p_x' x + p_y y - p_y y \\
 \Delta R = x(p_x - p_x') \\
 \Delta R = \Delta p_x x
 \end{array}$$

Autrement dit, l'effet de substitution  $\Delta x^s$  est la variation du bien x quand le prix et le revenu deviennent respectivement  $p_x'$  et  $R'$   $\Delta x^s = x(p_x', R) - x(p_x, R)$

Quant à l'effet de revenu  $\Delta x^R$ , c'est la variation de la demande quand le revenu passe de  $R$  à  $R'$ .