

FONCTIONS LOGIQUES ET ALGEBRE DE BOOLE

Les circuits numériques fonctionnent en mode binaire, c'est -à- dire un mode dans lequel les tensions de sortie et d'entrée sont 0 ou 1; les valeurs 0 ou 1 correspondent à des plages de tensions définies à l'avance. Une caractéristique des circuits logiques qui nous permet de recourir à l'Algèbre de Boole pour l'analyse et la conception des circuits numériques. Dans ce chapitre, nous étudierons **les portes logiques**, qui constituent les blocs élémentaires des circuits logiques et nous verrons comment il est possible de décrire leur fonctionnement grâce à l'algèbre booléenne.

I. CONSTANTES ET VARIABLES BOOLEENNES

- L'algèbre booléenne se distingue principalement de l'algèbre ordinaire par des constantes et des variables qui ne peuvent prendre que les deux valeurs possibles 0 et 1.
- Une variable booléenne est une grandeur qui peut, à des moments différents, avoir la valeur 0 ou 1. Les variables booléennes servent souvent à représenter un niveau de tension sur un fil ou aux bornes d'entrée ou de sortie d'un circuit.

Par exemple, dans un certain circuit numérique, on pourra avoir attribué la valeur booléenne **0** à l'intervalle de tension 0 à 0,8 V, et la valeur booléenne **1** à l'intervalle 2 à 5 V (ainsi, les valeurs comprises entre 0,8 et 2V sont indéterminées et ne doivent jamais survenir).

- Les valeurs booléennes **0** et **1** ne représentent donc pas des nombres réels, mais l'état d'une variable électrique ou un **niveau logique**.

La tension d'un circuit numérique peut être au niveau logique 1 ou au niveau logique 0, selon la valeur réelle de cette tension. En logique numérique, on utilise aussi d'autres expressions qui sont synonymes de 0 et 1;

Exemple:

Niveau logique 0	Niveau logique 1
Faux	Vrai
Arrêt	Marche
Bas	Haut
Non	Oui
Ouvert	Fermé

En algèbre booléenne, on ne retrouve que trois opérations élémentaires:

1- l'addition logique, dite opération **OU**; son symbole est le signe (+)

2-La multiplication logique, dite opération **ET**; son symbole est le signe (.)

3- La complémentation ou l'inversion logique, dite opération **NON**; son symbole est la barre de surlignement (-).

II TABLES DE VERITE

De nombreux circuits logiques possèdent plusieurs entrées mais seulement une sortie. Une table de vérité indique la réaction d'un circuit logique (sa valeur de sortie) aux diverses combinaisons de niveaux logiques appliqués aux entrées.

Exemples: Figure 1

Entrée sortie



A	B	X
0	0	
0	1	
1	0	?
1	1	

2 entrées

A	B	C	X
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	?
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

3 entrées

A	B	C	D	X
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	?
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

4 entrées

Dans chacune de ces tables, toutes les combinaisons possibles de 0 et de 1 pour les entrées (A, B, C, D) apparaissent à gauche, tandis que le niveau logique résultant de la sortie, X, est donné à droite. Les valeurs de sortie sont différentes pour chaque type de circuit.

En général, pour une table de N entrées, il ya 2^N lignes; et la succession des combinaisons correspond à la suite de comptage binaire.

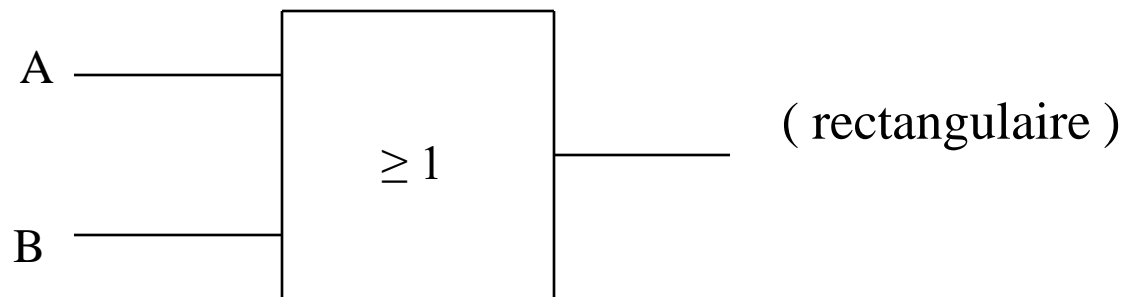
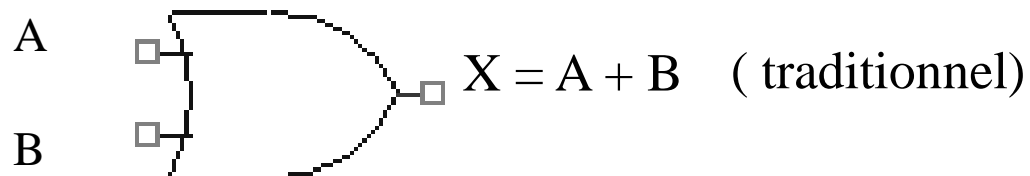
III. L' OPERATION OU (OR)

Soit A et B deux variables logiques indépendantes. L'addition logique de A et B s'écrit: $X = A + B$

❖ Table de vérité:

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

❖ Symboles: porte OU



❖ Analyse:

a. L'opération **OU** donne un **1** si l'une quelconque de ses variables d'entrée est égale à **1**

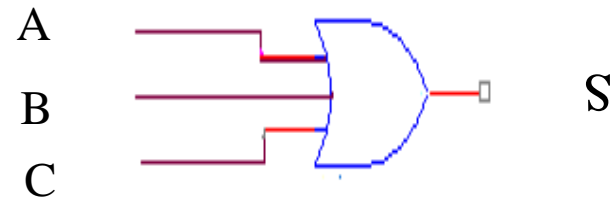
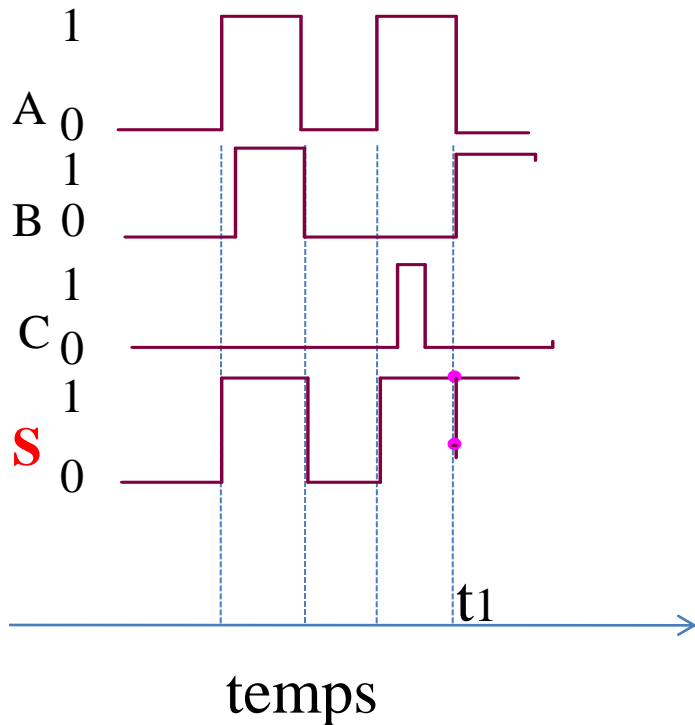
b. L'opération **OU** donne un **0** si toutes ses variables d'entrées sont **0**

c. Dans l'opération **OU**, $1 + 1 = 1$

Cette analyse est valable quel que soit le nombre d'entrées.

❖ Exemple:

Déterminer la forme d'onde de la sortie de la porte **OU** à trois entrées dont les états sont illustrés par les chronogrammes suivants:



Remarque:

Au temps t_1 , l'entrée A passe de 1 à 0 et l'entrée B passe de 0 à 1. Comme ces entrées permutent approximativement au même moment et que ces transitions prennent un certain temps, pendant un court instant les deux entrées de la porte OU sont dans un état indéterminé compris entre 0 et 1. La répercussion sur la sortie est indiquée par le décrochement ou la pointe de la forme d'onde de sortie au moment t_1 .

Cette pointe et sa taille (amplitude et largeur) dépendent de la rapidité de la transition.

Si l'entrée C était au niveau Haut à l'instant t_1 , la sortie de la porte OU conserverait le niveau Haut et ce, quels que soient les changements dans les autres entrées. Par conséquent, le décrochement ou pointe de tension ne serait plus observé.

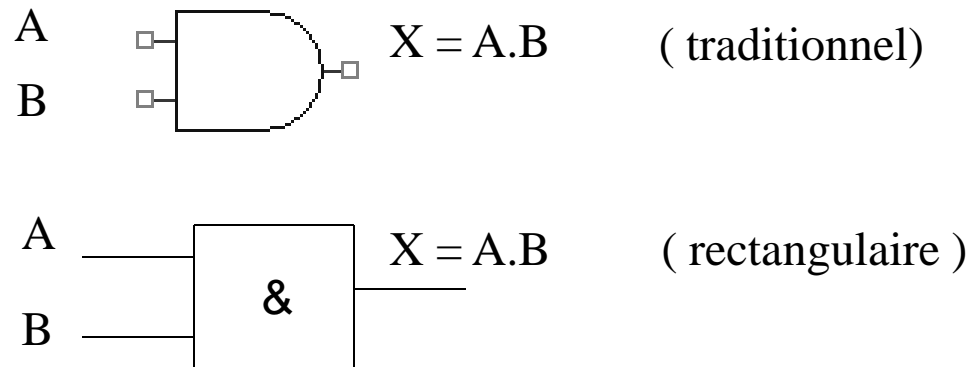
IV. L' OPERATION ET (AND)

Soit A et B deux variables logiques indépendantes. La multiplication logique de A et B s'écrit: $X = A \cdot B$

❖ Table de Vérité

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symboles: porte ET



❖ Analyse:

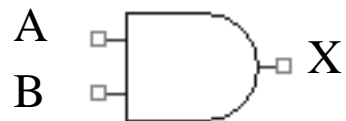
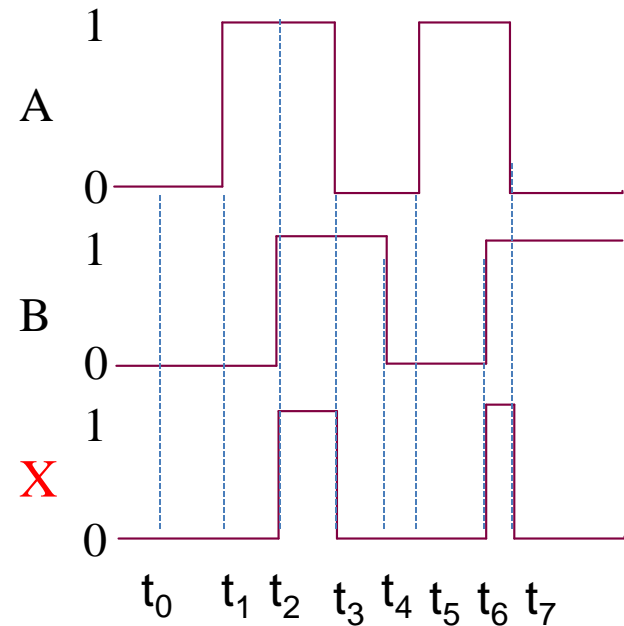
- a. L'opération ET suit les mêmes règles que la multiplication ordinaire des 0 et des 1.
- b. La sortie est égale à 1 dans le seul cas où toutes les entrées sont à 1
- c. La sortie est à 0 si au moins une entrée est à 0

Cette analyse est valable quelque soit le nombre d'entrées.

❖ Exemple:

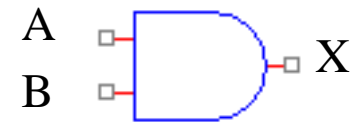
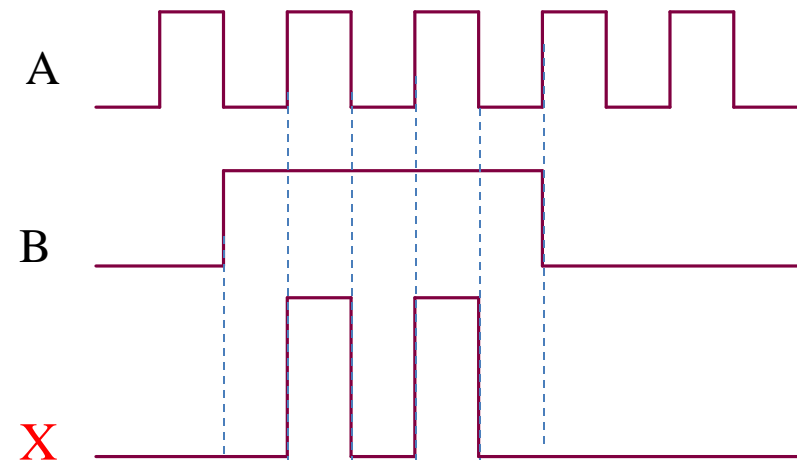
Déterminer la forme d'onde de la sortie X de la porte ET à deux entrées dont les états sont illustrés par les chronogrammes suivants:

1.



La sortie X passe au niveau Haut durant les intervalles $t_2 - t_3$ et $t_6 - t_7$ dans lesquels les entrées A et B se trouvent simultanément au niveau Haut.

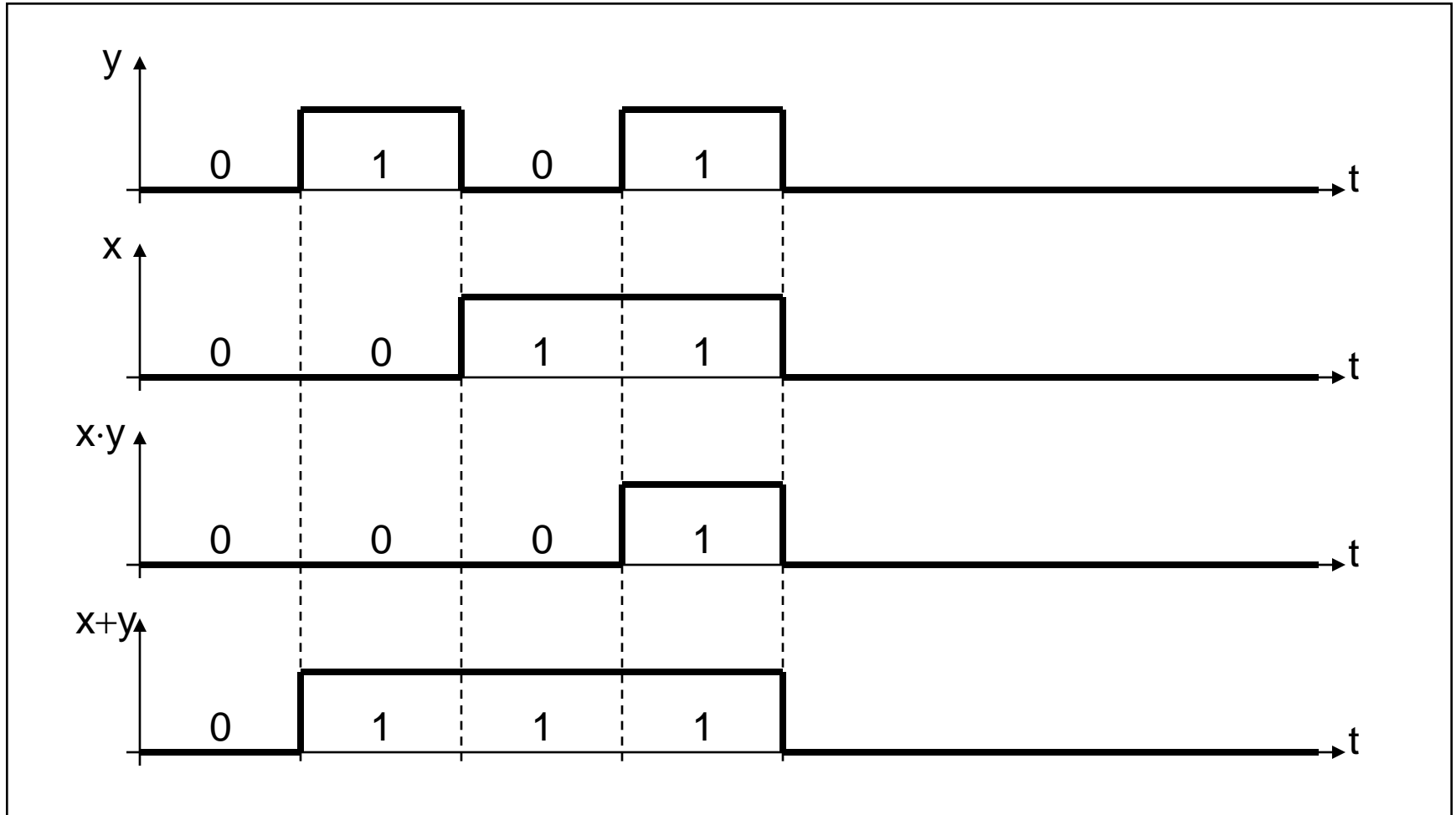
2.



La sortie X est à 0 quand B est à 0, quelle que soit la valeur de A , et elle est analogue à A quand B vaut 1. B joue le rôle de “commande” qui détermine si l’onde A est transmise à la sortie X ou non.

Représentation des fonctions logiques

– Chronogramme des fonctions ET et OU :



V. L'OPERATION NON

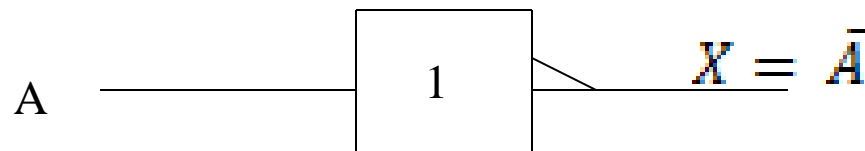
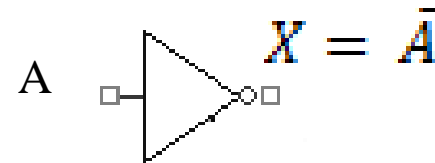
Cette opération ne concerne qu'une seule variable d'entrée. Si A est la variable soumise à l'opération NON, l'inversion logique ou la complémentation de A s'écrit:

$$X = \bar{A}$$

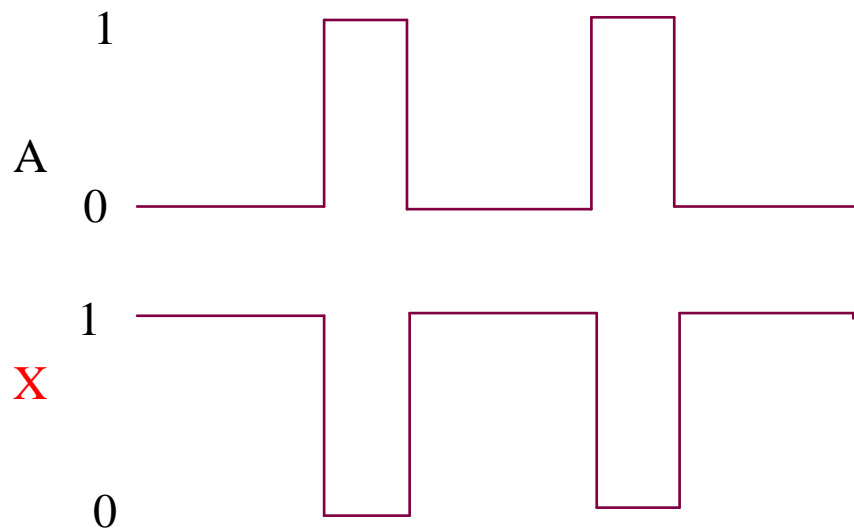
Table de vérité

A	$X = \bar{A}$
0	1
1	0

Symboles: porte NON



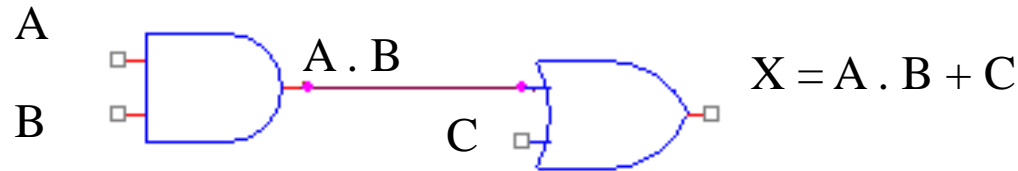
Formes d'ondes



VI. MISE SOUS FORME ALGEBRIQUE DES CIRCUITS LOGIQUES

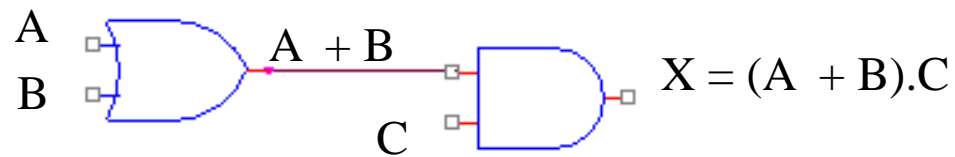
Tout circuit logique, quelle que soit sa complexité, peut être décrit au moyen des opérations booléennes déjà décrites parce que les portes ET, OU et NON sont les circuits constitutifs élémentaires des systèmes numériques.

Exemple 1:



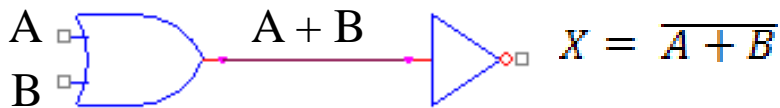
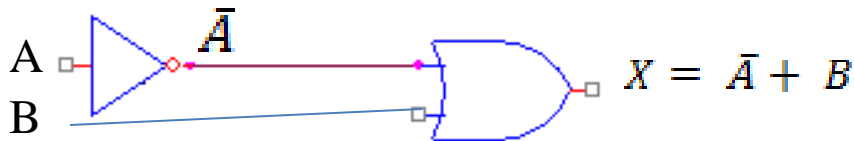
NB: Dans une expression contenant des opérateurs ET et OU, ce sont les opérations ET qui sont effectuées en premier.

Exemple 2:

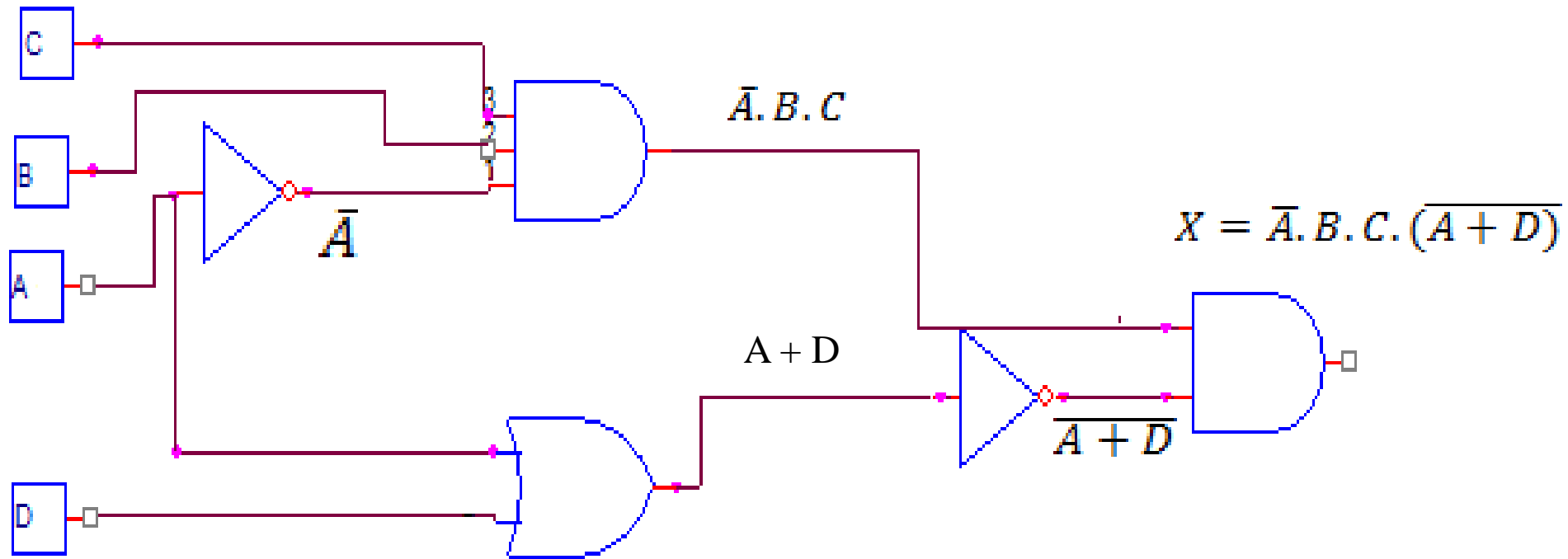


NB: Dans une expression contenant des parenthèses, ce sont les opérations entre parenthèses qui sont d'abord effectuées.

Exemple 3: Circuits renfermant des inverseurs.



Exemple 4:



VII. EVALUATION DES SORTIES DES CIRCUITS LOGIQUES

Quand on connaît l'expression booléenne de la sortie d'un circuit, il est possible de trouver le niveau logique correspondant à n'importe lesquelles des valeurs se trouvant aux entrées du circuit.

Supposons que pour l'exemple 4 précédent, on donne $A = 0$; $B = 1$; $C = 1$ et $D = 1$, et qu'on veuille connaître le niveau logique de la sortie X :

$$X = \bar{A}.B.C.(\overline{A+D})$$

$$X = \bar{0}.1.1.(\overline{0+1})$$

$$X = 1.1.1.(\overline{1})$$

$$X = 1.1.1.0$$

$$X = 0$$

Si on donne pour l'exemple 4 toujours: $A = 0$;

$B = 1$; $C = 1$; $D = 0$

On a:

$$X = \bar{A}.B.C.(\overline{A+D})$$

$$X = \bar{0}.1.1.(\overline{0+0})$$

$$X = 1.1.1.(\bar{0})$$

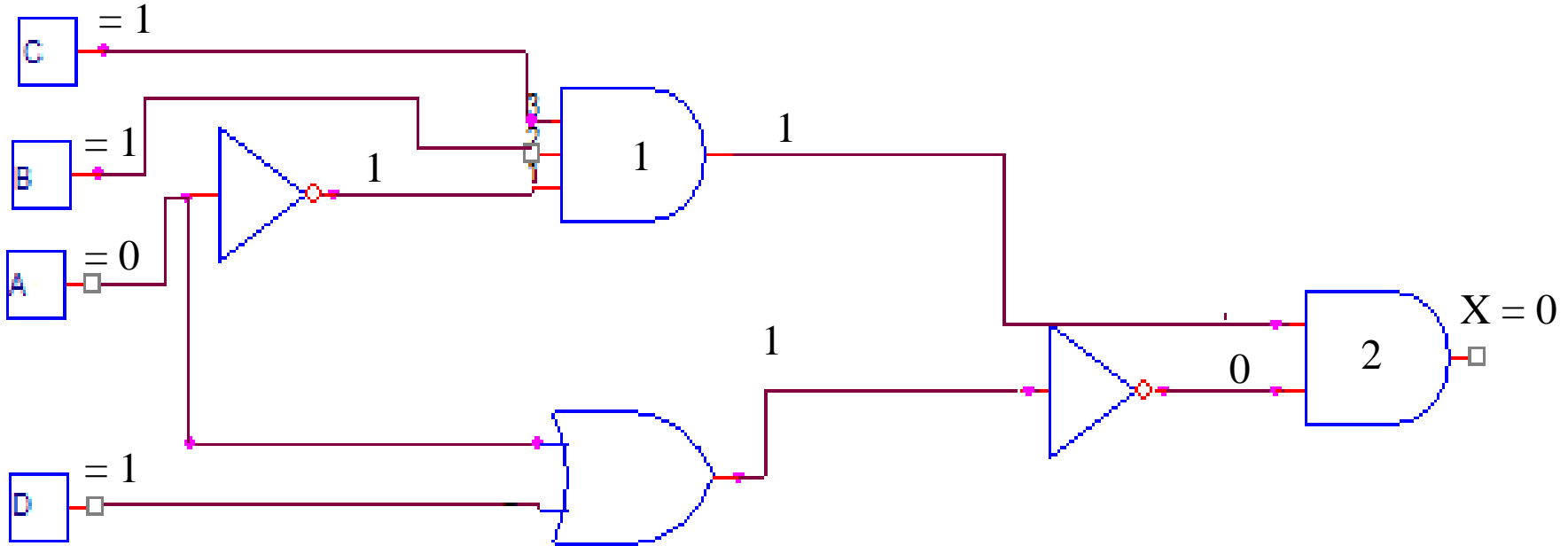
$$X = 1.1.1.1$$

$$X = 1$$

Règle générale: Pour l'évaluation d'une expression booléenne.

1. Effectuer toutes les inversions ne touchant qu'une seule variable; ($\bar{0} = 1$ et $\bar{1} = 0$).
2. Faire toute les opérations entre parenthèses.
3. Evaluer une opération ET avant une opération OU.
4. Si une expression est surmontée d'une barre, évaluer d'abord l'expression puis inverser le résultat.

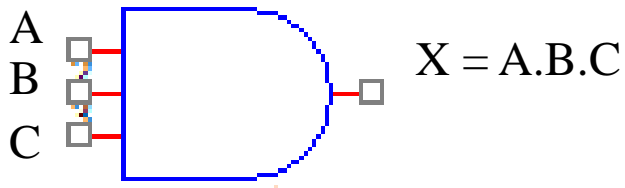
- Détermination d'un niveau de sortie d'après un diagramme de circuit:



VIII. MATERIALISATION DE CIRCUITS A PARTIR D'EXPRESSIONS BOOLEENNES

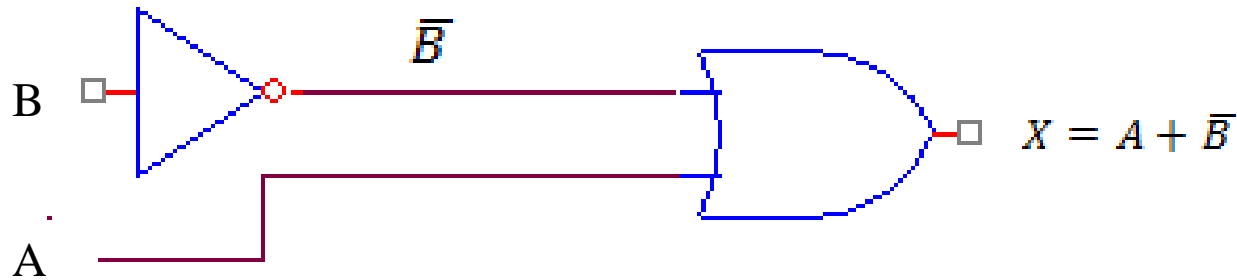
Si l'opération d'un circuit est définie par une expression booléenne, il est possible de tracer directement un diagramme logique à partir de cette expression.

Exemple 1: Tracer le diagramme du circuit tel que:
 $X = A.B.C$



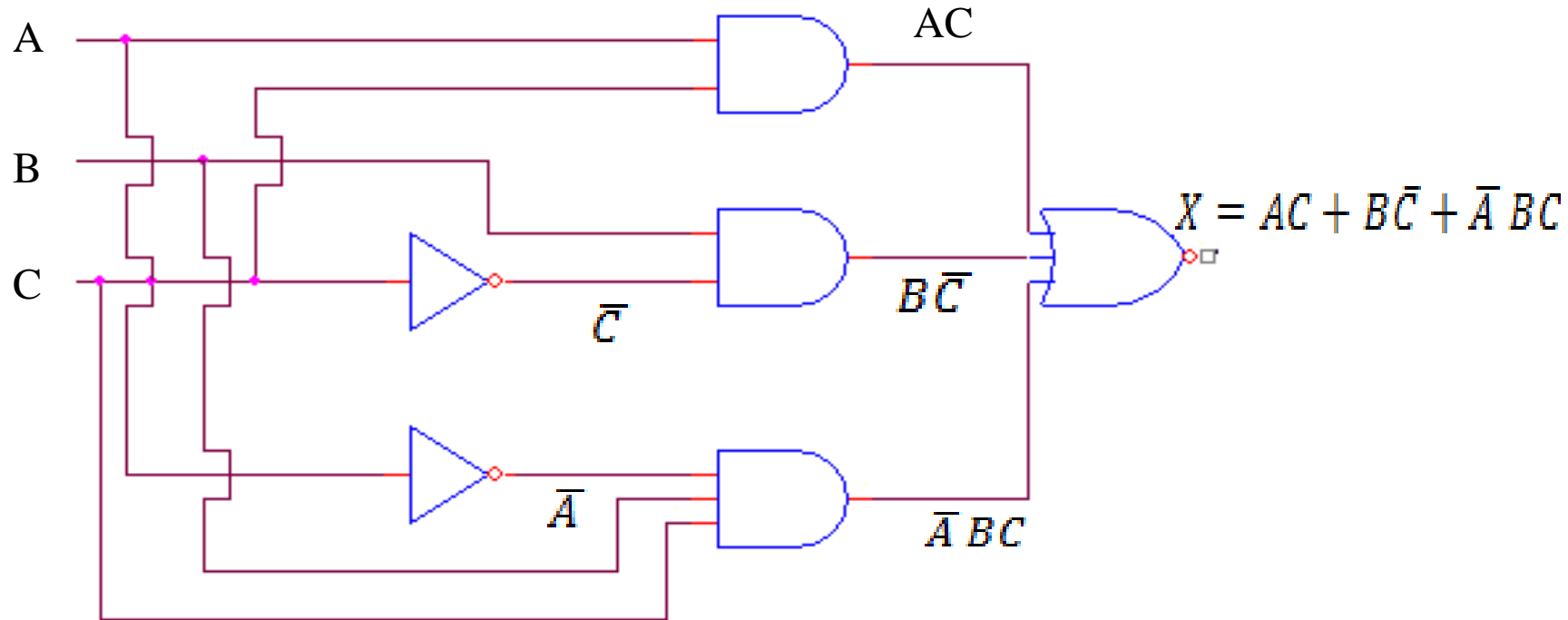
Exemple 2: Tracer le diagramme du circuit tel que:

$$X = A + \bar{B}$$



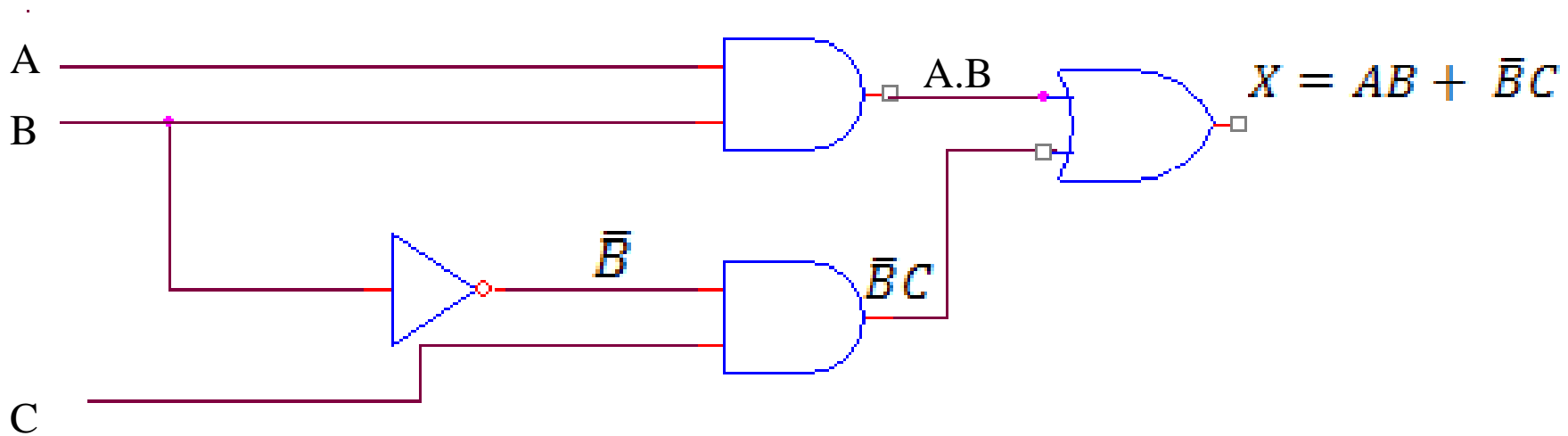
Exemple 3: Tracer le diagramme du circuit tel que:

$$X = AC + B\bar{C} + \bar{A}BC$$



Exemple 4: Tracer le diagramme du circuit tel que:

$$X = AB + \bar{B}C$$



IX. PORTES NI (NON-OU) ET NON- ET (NOR; NAND)

Les portes NI et NON-ET correspondent à des combinaisons d'opérations élémentaires OU, ET et NON.

Symboles

Porte NI (NOR)

Porte NON-ET(NAND)

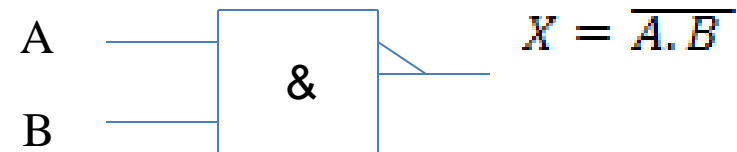
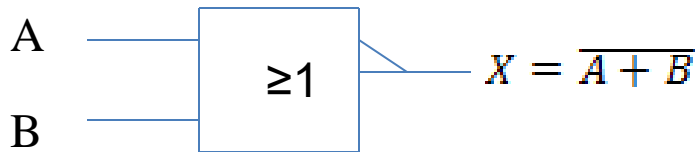
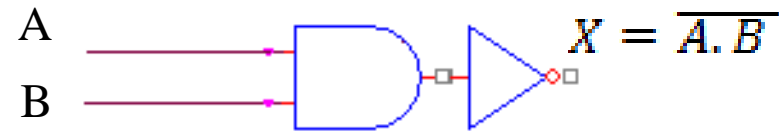
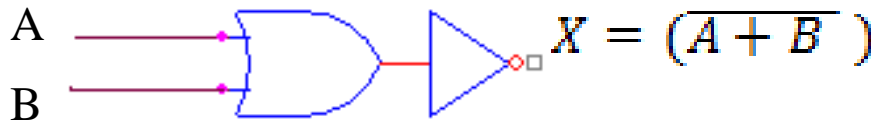
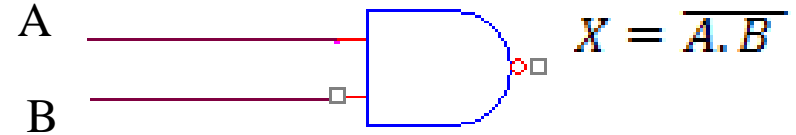
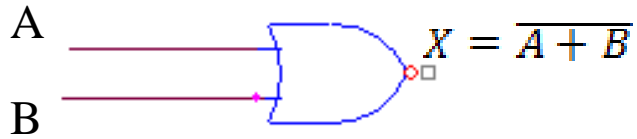
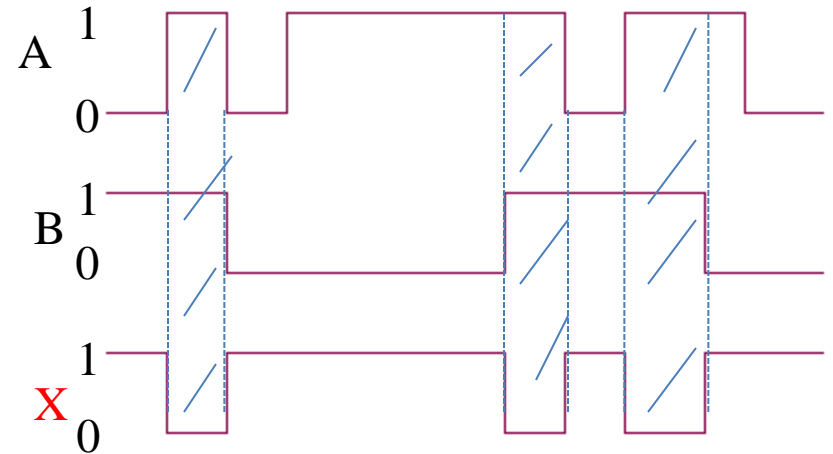
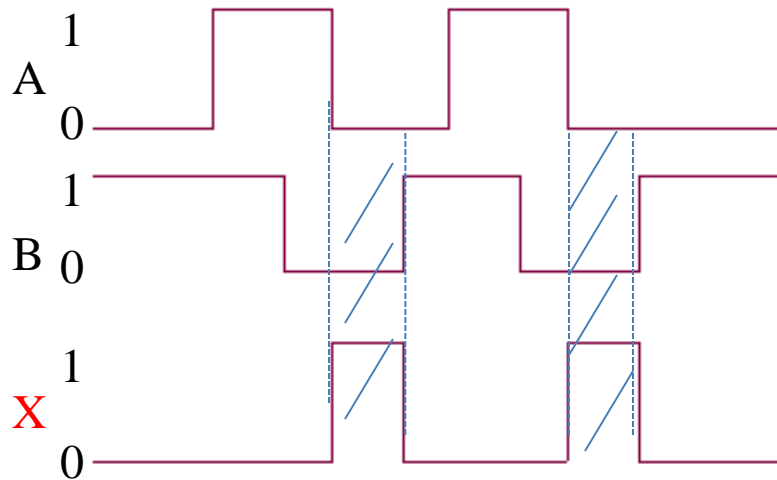


Table de vérité

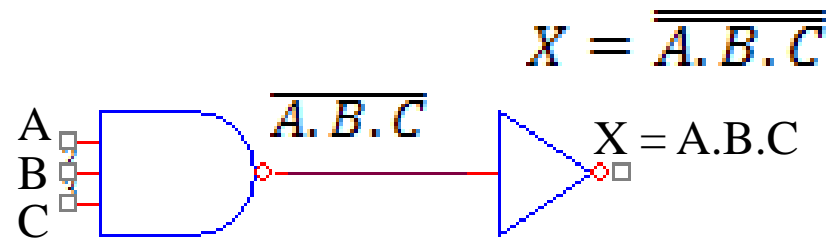
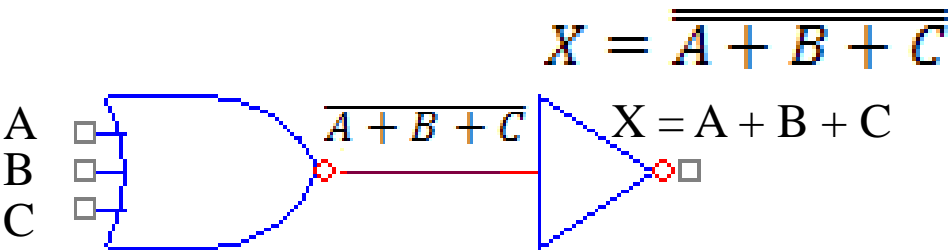
		OU		NI	
A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$	A	B
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

		ET		NON-ET	
A	B	$A . B$	$\overline{A . B}$	A	B
0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0

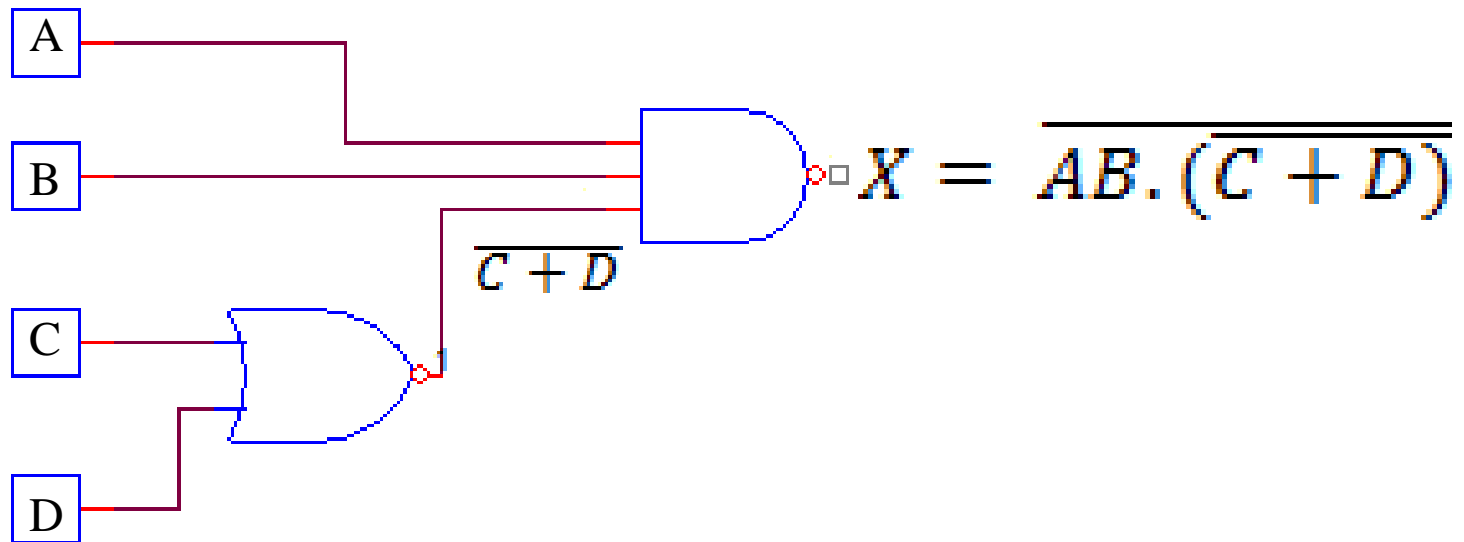
Formes d'ondes



Examples 1



Exemple 2: Réaliser le circuit logique correspondant à l'expression $X = \overline{AB \cdot (C + D)}$ en n'utilisant que des portes NI et NON-ET



- Trouver le niveau de sortie du circuit pour les conditions: $A = B = C = 1$ et $D = 0$:

$$X = \overline{AB \cdot (C + D)}$$

$$X = \overline{1 \cdot 1 \cdot (1 + 0)}$$

$$X = \overline{1 \cdot 1 \cdot (1)}$$

$$X = \overline{1 \cdot 1 \cdot 0}$$

$$X = \overline{0}$$

$$X = 1$$

X. THEOREMES DE BOOLE

Ce sont des règles utilisées pour simplifier les expressions logiques et, par le même fait, les circuits logiques.

a. Théorèmes pour une variable X:

(1) $X \cdot 0 = 0$



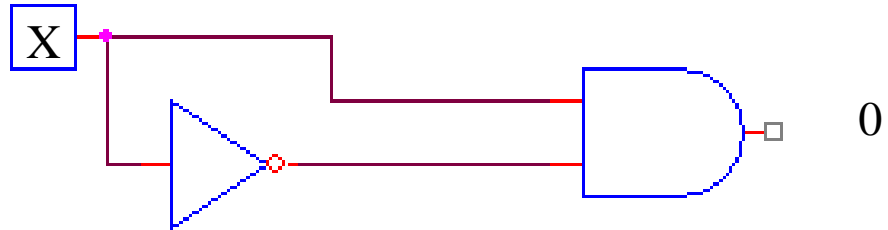
(2) $X \cdot 1 = X$



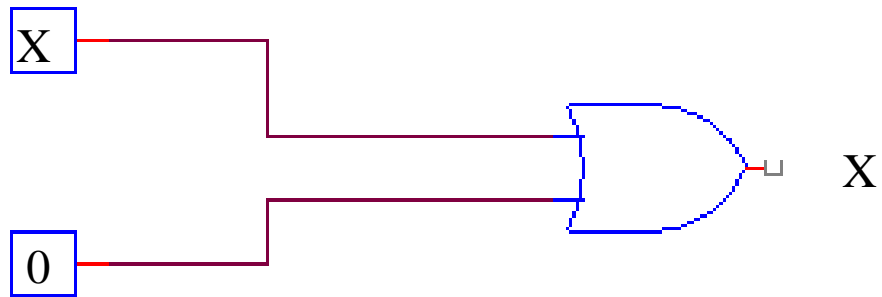
(3) $X \cdot X = X$



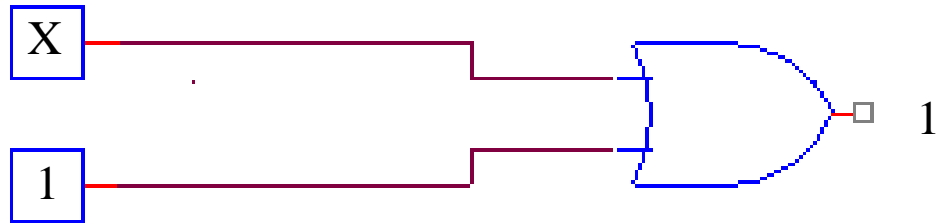
(4) $X \cdot \bar{X} = 0$



(5) $X + 0 = X$



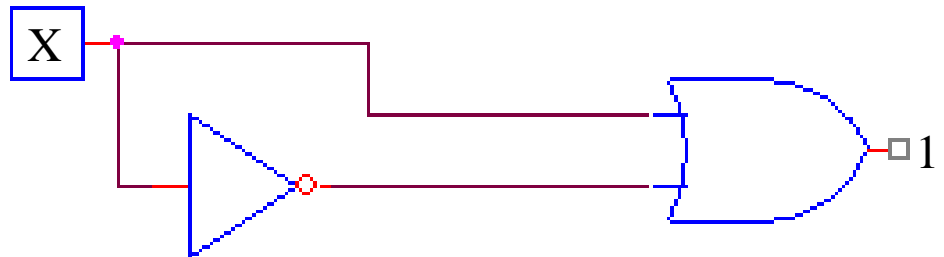
(6) $X + 1 = 1$



(7) $X + X = X$



(8) $X + \bar{X} = 1$



b. Théorèmes pour plusieurs variables:

$$(9) \quad x + y = y + x \quad (\text{Commutativité de OU})$$

$$(10) \quad x \cdot y = y \cdot x \quad (\text{Commutativité de ET})$$

$$(11) \quad x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z \quad (\text{Associativité de OU})$$

$$(12) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z \quad (\text{Associativité de ET})$$

$$(13.a) \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + xz \quad (\text{Distributivité de ET} \\ \text{Par rapport à OU})$$

$$(13.b) \quad (w + x) \cdot (y + z) = w \cdot y + x \cdot y + w \cdot z + x \cdot z$$

$$(14) \quad x + x \cdot y = x \cdot (1 + y) = x$$

$$(15) \quad x + \bar{x} \cdot y = x \cdot (y + 1) + \bar{x} \cdot y = xy + x + \bar{x} \cdot y \\ = x + y \cdot (x + \bar{x}) = x + y$$

C. Exemple:

- Simplifier

$$z = (\bar{A} + B) \cdot (A + B)$$

$$(13) \quad z = \bar{A} \cdot A + \bar{A} \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$

$$(4) \quad \bar{A} \cdot A = 0$$

$$(3) \quad B \cdot B = B$$

$$z = \bar{A} \cdot B + B \cdot A + B \stackrel{(13)}{=} B \cdot (\bar{A} + A + 1) \stackrel{(6)}{=} B \cdot 1$$

$$\text{et (2)} \rightarrow z = B$$

- Simplifier

$$z = ACD + \bar{A}BCD$$

$$z = CD \cdot (A + \bar{A}B) \stackrel{(15)}{=} CD \cdot (A + B) = CDA + CDB$$

$$z = ACD + BCD$$

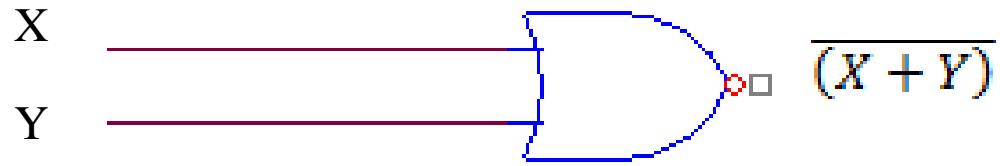
XI . THEOREMES DE DE MORGAN

Ils permettent de simplifier des expressions comprenant des sommes ou des produits de variables complémentés:

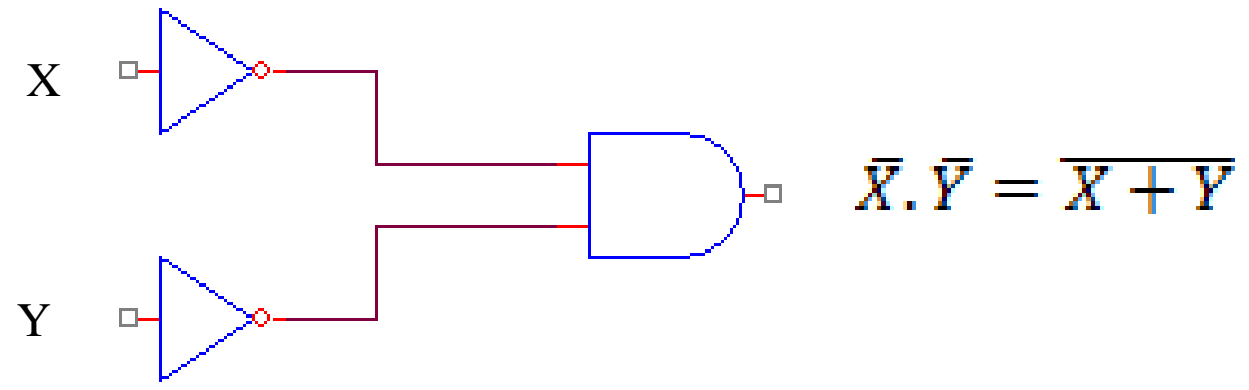
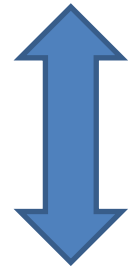
$$(16) \quad \overline{(X + Y)} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

$$(17) \quad \overline{(X \cdot Y)} = \bar{X} + \bar{Y}$$

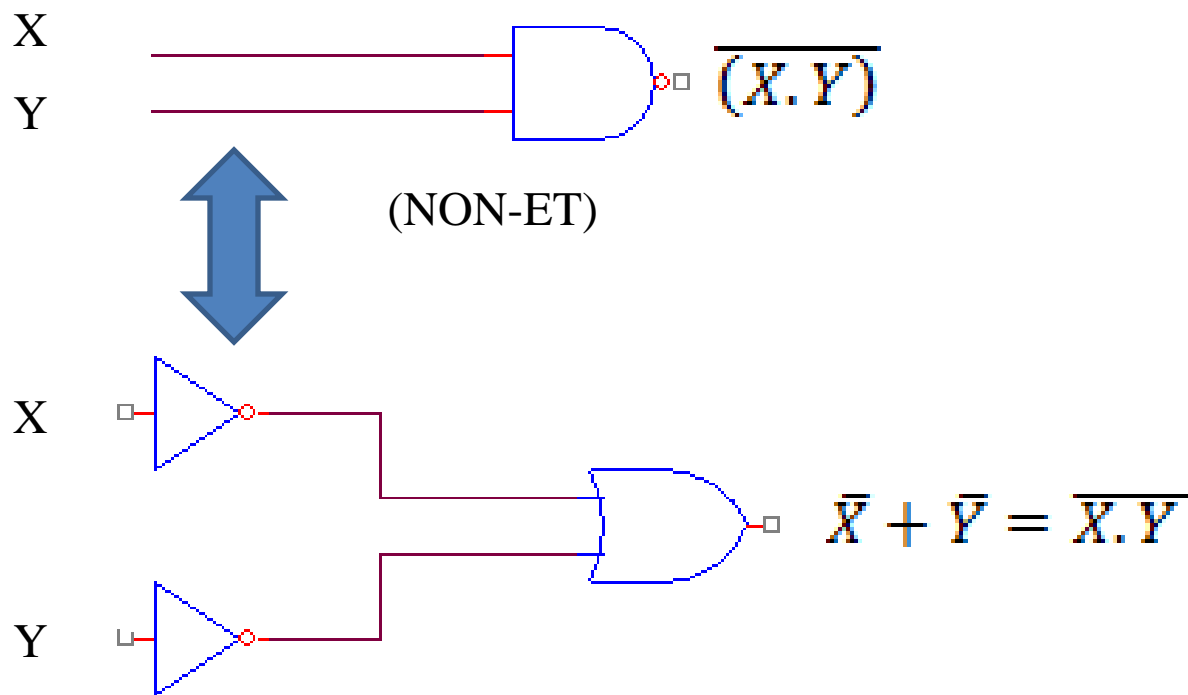
(16) => La somme logique complémentée de deux variables est égale au produit logique des compléments de ces deux variables.



(NI)



(17) \Rightarrow Le produit logique complémenté de deux variables est égal à la somme logique des compléments de ces deux variables.





Exemples:

1. Simplifier l'expression

$$Z = \overline{(\bar{A} + C) \cdot (B + \bar{D})}$$

(16)


(17) 
$$Z = \overline{(\bar{A} + C)} + \overline{(B + \bar{D})} = (\bar{\bar{A}} \cdot \bar{C}) + (\bar{B} \cdot \bar{\bar{D}})$$


$$Z = A \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot D$$

2. Simplifier l'expression

$$Z = \overline{(A + BC) \cdot (D + EF)}$$

(17)
$$Z = \overline{(A + BC)} + \overline{(D + EF)} \stackrel{(16)}{=} (\bar{A} \cdot \bar{B}\bar{C}) + (\bar{D} \cdot \bar{E}\bar{F})$$


$$Z = [\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C})] + [\bar{D} \cdot (\bar{E} + \bar{F})]$$

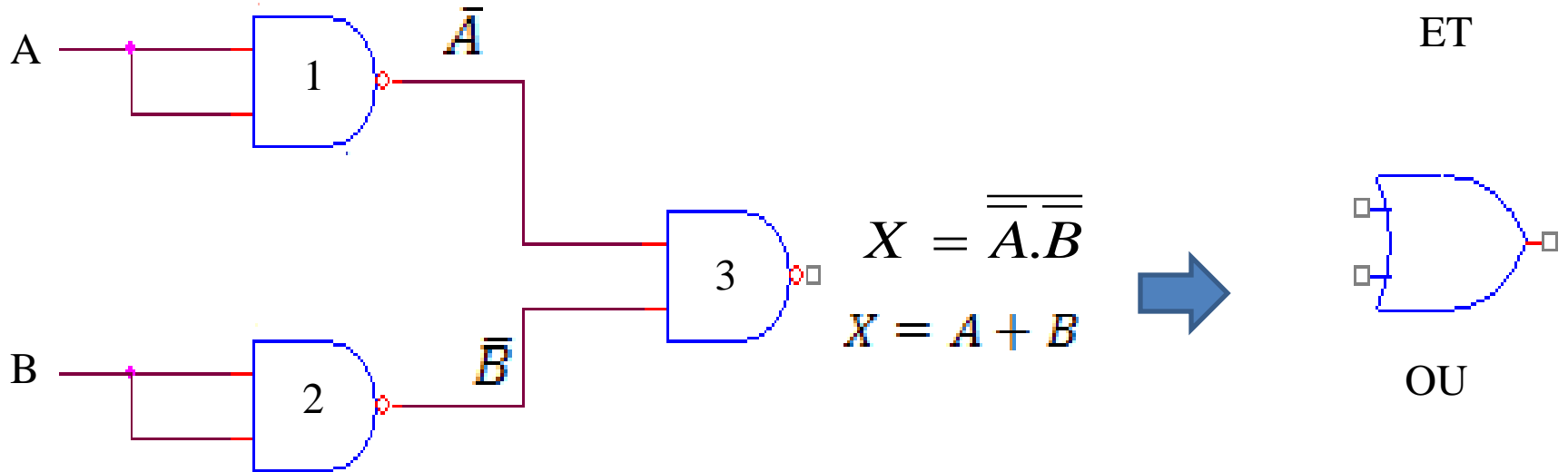
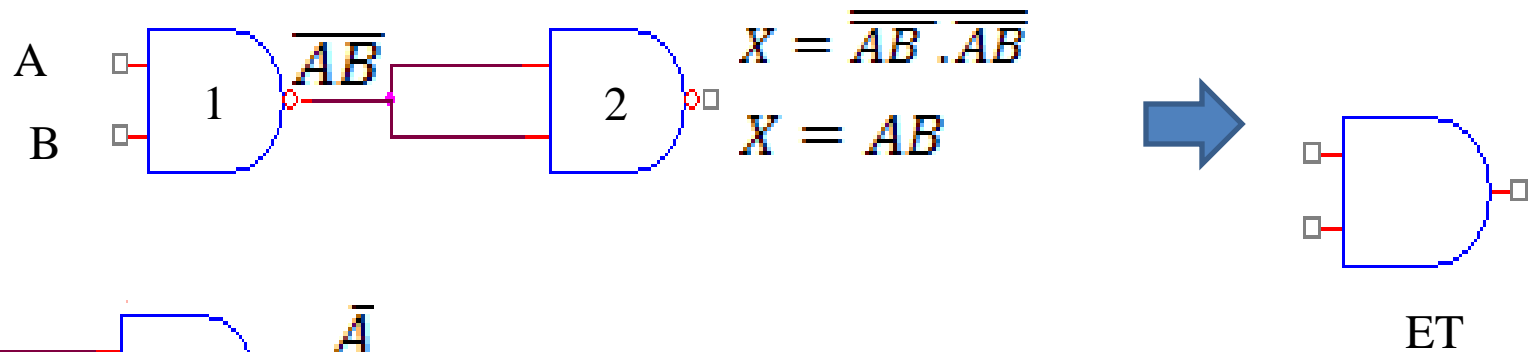
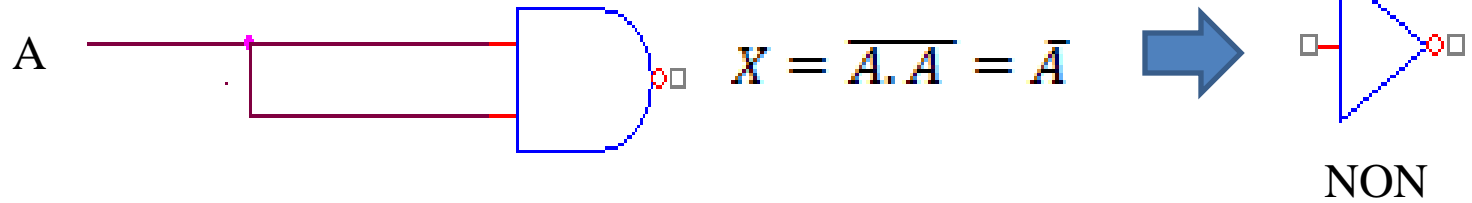

$$Z = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{D} \cdot \bar{E} + \bar{D} \cdot \bar{F}$$

XII. UNIVERSALITE DES PORTES NON-ET ET NI

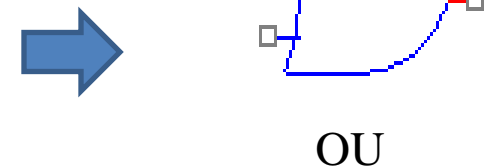
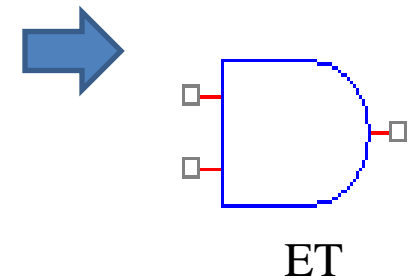
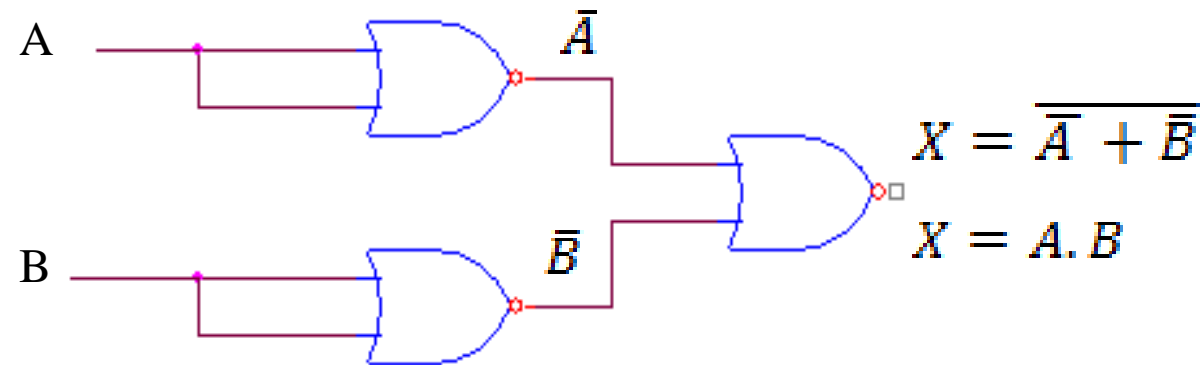
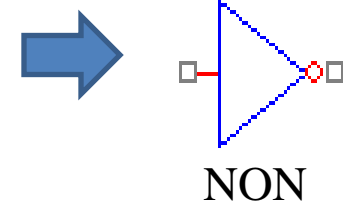
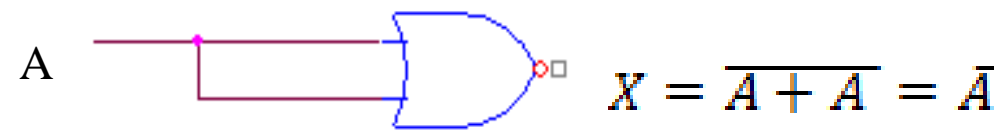
Toutes les expressions booléennes se résument à différentes combinaisons des opérations élémentaires OU, ET et NON.

Par ailleurs, les portes NON-ET et NI, judicieusement câblées et regroupées, peuvent réaliser les opérations booléennes OU, ET et NON:

Câblage avec des portes NON-ET



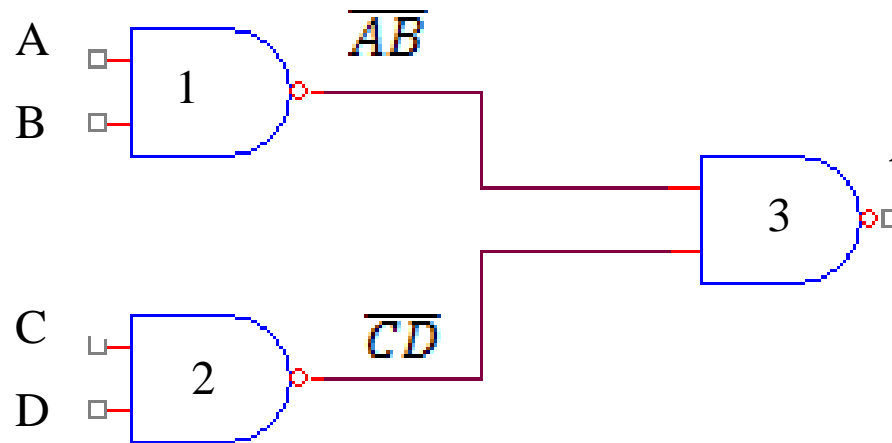
Câblage avec des portes NI



Etant donné que les trois opérations booléennes élémentaires peuvent être réalisées seulement avec des portes NON-ET ou avec des portes NI, il s'en suit que tout circuit logique peut être construit en ne recourant qu'à des portes NON-ET ou NI. Cette caractéristique est d'une très grande utilité dans la conception des circuits logiques.

Exemple: Réaliser un circuit dont l'expression de sortie est $X = AB + CD$, en n'utilisant que des portes NON-ET.

$$X = AB + CD = \overline{\overline{AB}} + \overline{\overline{CD}} = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}} \Rightarrow 3 \text{ portes NON - ET}$$



XIII. CONCEPTION DE CIRCUITS LOGIQUES COMBINATOIRES

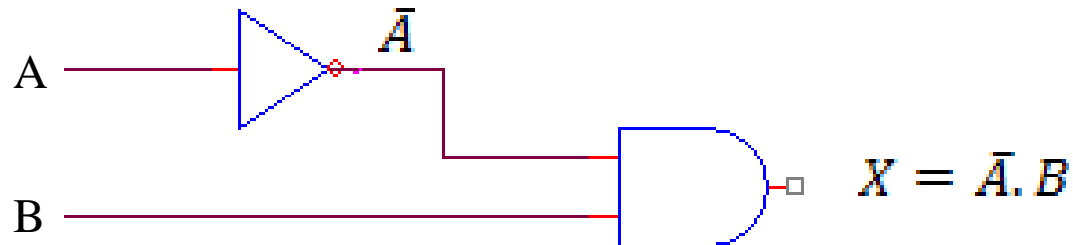
Quand le niveau logique recherché est indiqué pour toutes les conditions d'entrée possibles, les résultats peuvent être rangés dans une table de vérité, d'où on peut dériver l'expression booléenne du circuit.

Exemple 1

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

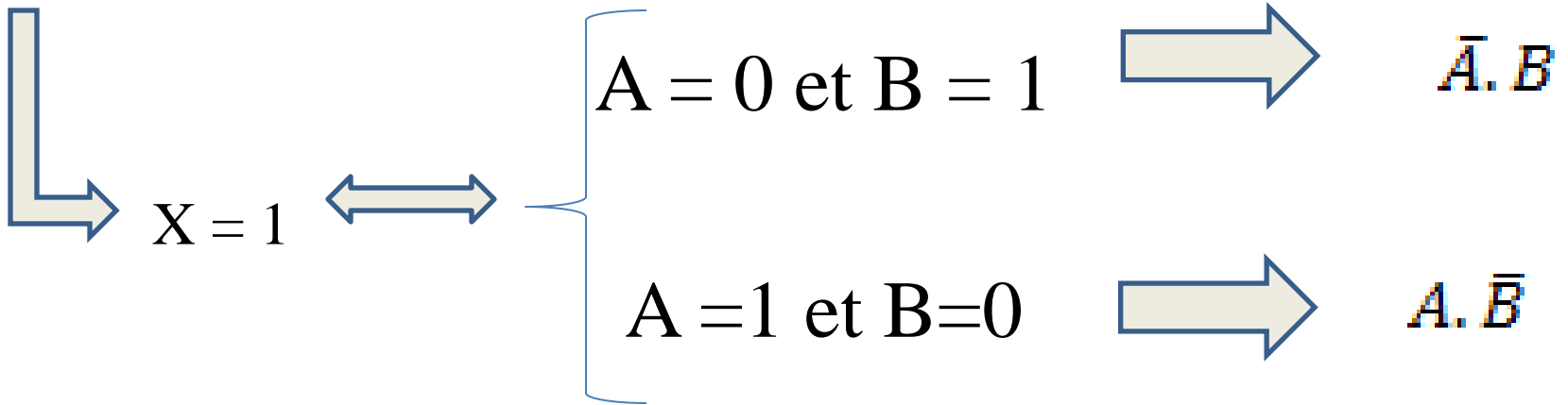
Cette table montre que la sortie X est à 1 seulement quand A=0 et B=1 $\Rightarrow X = \bar{A}.B$

D'où le circuit logique correspondant:



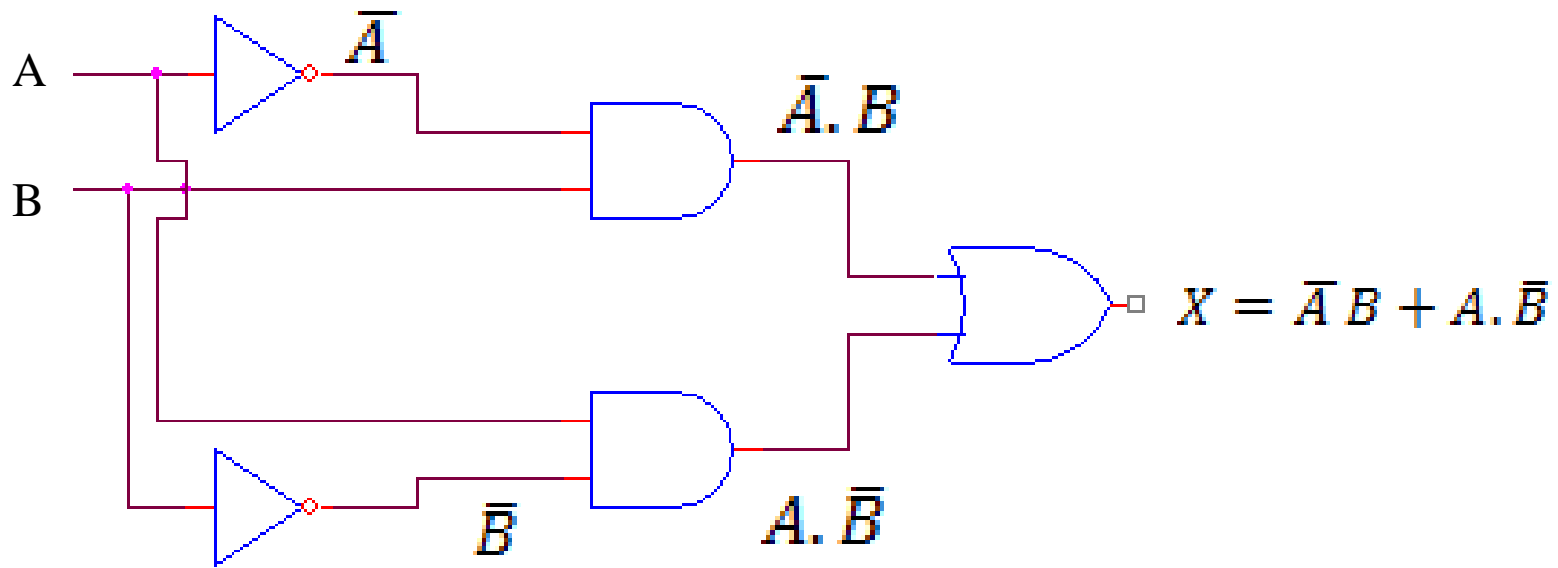
Exemple 2

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



D'où, $X = \bar{A}.B + A.\bar{B}$

D' où le circuit logique correspondant:



Exemple 3: Concevoir un circuit logique formé de trois entrées A, B, et C dont la sortie est 1 quand une majorité des entrées sont à 1.

Etape 1: Faire la table de vérité et écrire le produit logique pour chaque cas donnant la sortie $X = 1$:

A	B	C	X	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	→ $\bar{A}BC$
1	0	0	0	→ $A\bar{B}\bar{C}$
1	0	1	1	
1	1	0	1	→ $AB\bar{C}$
1	1	1	1	→ ABC

Etape 2: Donner l'expression de la sortie en faisant la somme des produits:

$$X = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

Etape 3: Faire les simplifications possibles de l'expression trouvée:

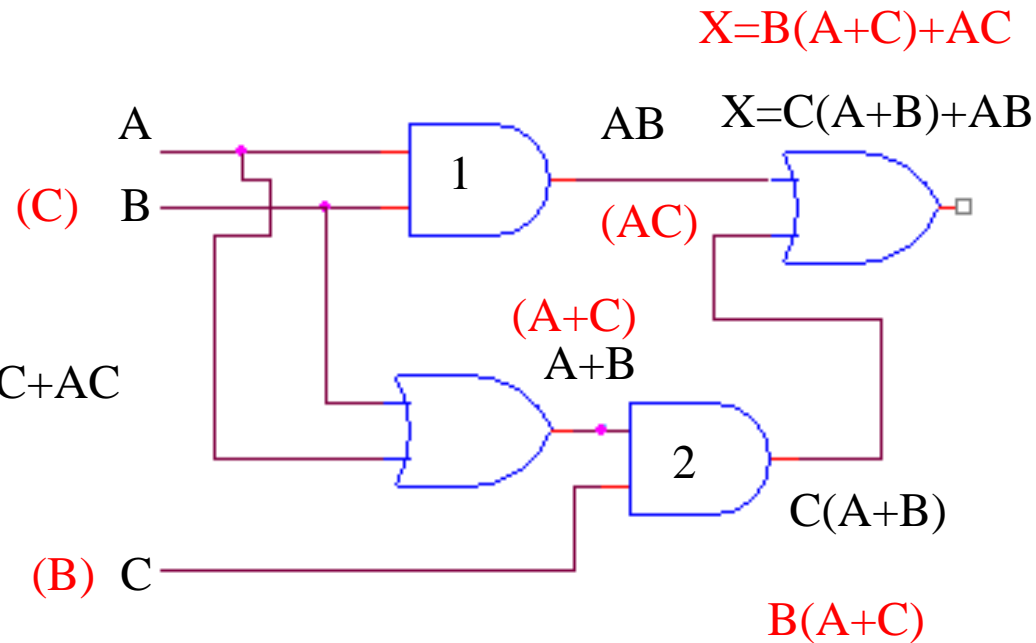
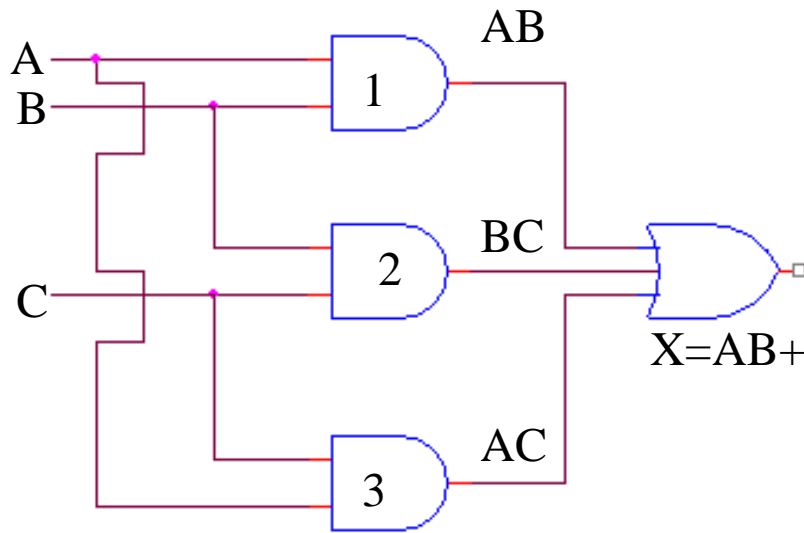
$$X = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC = \bar{A}BC + AB\bar{C} + AC(\bar{B} + B) \quad (8)$$

$$X = \bar{A}BC + AB\bar{C} + AC = \bar{A}BC + A(B\bar{C} + C) \quad (B+C) \quad (15)$$

$$X = \bar{A}BC + A(B + C) = \bar{A}BC + AB + AC = B(\bar{A}C + A) + AC \quad (A+C) \quad (15)$$

$$X = B(A + C) + AC = AB + BC + AC = C(A + B) + AB$$

Etape 4: Faire le circuit logique correspondant (logigramme):



Le choix du câblage dépend de plusieurs motifs:
nombre de connexions, temps de propagation des
signaux d'entrée,...

XIV. METHODE DES DIAGRAMMES DE KARNAUGH

Le diagramme de Karnaugh (diagramme K) est un outil graphique qui permet de simplifier de manière méthodique **une équation logique** ou le processus de passage d'une table de vérité à son circuit correspondant. En pratique, son utilité est limitée quand le nombre de variables dépasse six.

❖ **Forme:**

Tout comme la table de vérité, le diagramme K est un instrument qui met en évidence les rapports entre les entrées logiques et la sortie recherchée.

. Exemple 1: Deux variables A et B

Table de vérité:

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

→ $\bar{A}\bar{B}$

→ AB

$$X = \bar{A}\bar{B} + AB$$

Diagramme K:

	\bar{B}	B
\bar{A}	1	0
A	0	1

Exemple 2: Quatre variables A, B, C et D

Table de vérité:

A	B	C	D	X	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	→ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	→ $\bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	→ $AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	1	→ $ABCD$

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D + ABCD$$

Diagramme K

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

A partir de ces exemples, on note les points suivants:

1. La table de vérité donne la valeur de la sortie X pour chacune des combinaisons des valeurs d'entrée; par contre, le diagramme K organise l'information de manière différente. Chaque ligne de la table de vérité correspond à un carré du diagramme K : Pour l'exemple 1, la ligne $A=0$ et $B=0$ de la table de vérité est le carré $\bar{A}\bar{B}$ du diagramme K .

Etant donné que pour cette ligne $X = 1$, on inscrit 1 dans ce carré.

De même, pour la ligne $A=1$ et $B=1$ on associe le carré **AB**. Et comme $X = 1$, on inscrit 1 dans ce carré.

Le même raisonnement s'applique pour les diagrammes à trois ou quatre variables.

2. Les carrés d'un diagramme K sont désignés de manière que les carrés adjacents horizontalement n'aient qu'une variable qui soit différente. Il en est de même pour les carrés adjacents verticalement.

- Notons que chaque case de la rangée du haut (première ligne) est considérée comme adjacente à la case correspondante de la rangée du bas (dernière ligne). De même, les cases de la colonne de gauche sont adjacentes à celles correspondantes de la colonne de droite.

3. Ordre de désignation des cases de haut en bas:

$\bar{A}\bar{B}$, $\bar{A}B$, AB , $A\bar{B}$.

4. Dans un diagramme K , pour obtenir l'expression de X sous la forme d'une somme de produits, il faut additionner logiquement les carrés qui renferment un 1.

❖ **Réunion:** c'est le processus qui permet de simplifier l'expression de sortie X en combinant selon des règles précises les carrés du diagramme K qui contiennent des 1.

1. *Réunion de doublets (de paires):*

La réunion d'un doublet de 1 adjacents dans un diagramme K élimine la variable qui est à la fois non complétementée et complétementée.

Exemples 1

a) (1 doublet)

\bar{C} C

$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

$$X = \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} = B\bar{C}$$

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	0
$\bar{A}B$	0	0
AB	0	0
$A\bar{B}$	1	0

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} = \bar{B}\bar{C}$$

c) (1 doublet)

b) (1 doublet)

\bar{C} C

$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	1
AB	0	0
$A\bar{B}$	0	0

$$X = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC = \bar{A}B$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$$X = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D}$$

$$X = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{D}$$

d) (2 doublets)

2. Réunion de quartets (groupes de quatre):

La réunion d'un quartet de 1 adjacents élimine les deux variables qui sont à la fois non complémentées et complémentées.

Exemples 2:

	\bar{C}	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	1
$\bar{A}B$	0	1
AB	0	1
$A\bar{B}$	0	1

a) $X = C$

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

b) $X = AB$

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

c) $X = BD$

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

d) $X = A\bar{D}$

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

e) $X = \bar{B}\bar{D}$

3- Réunion d'octets (groupes de huit):

La réunion d'un octet de 1 adjacents élimine les trois variables qui sont à la fois non complémentées et complémentées.

Exemples 3:

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$$X = B$$

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
$\bar{A}B$	1	1	0	0
AB	1	1	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	0

$$X = \bar{C}$$

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	1	1	1

$$X = \bar{B}$$

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$$X = \bar{D}$$

4- Règle générale pour toute réunion:

Quand une variable est à la fois sous la forme non complétementée et la forme complétementée dans une réunion, cette variable est éliminée de l'expression. Seules apparaissent dans l'expression définitive les variables gardant la même forme dans tous les carrés d'une réunion.

* Etapes à suivre pour simplifier une expression booléenne en recourant à la méthode des diagrammes de Karnaugh:

- a) Dessiner le diagramme K correspondant à la table de vérité étudiée.
- b) Encercler les 1, dits isolés, qui ne sont adjacents à aucun autre 1.
- c) Trouver les 1 qui sont adjacents seulement à un autre 1, et réunir ces doublets de 1 adjacents.
- d) Réunir tous les octets de 1 adjacents même si des 1 se trouvent déjà dans des doublets.

- e) Réunir tous les quartets de 1 adjacents qui ont au moins un 1 qui n'a pas déjà été regroupé.
- f) Réunir tous les doublets nécessaires pour inclure n'importe quel 1 non encore regroupé, en prenant soin d'utiliser le moins de réunions possibles.
- g) Effectuer l'addition logique de tous les termes résultant des réunions.

Exemple 4 :

Etape b)

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

étape e)

étape e2)

Etape c)

$$X = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + ACD + BD$$

étape) \longrightarrow b) c) e)

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	1
AB	0	0	0	1
$A\bar{B}$	1	1	0	1

$$X = \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AC\bar{D}$$

Etape c)

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
AB	1	1	0	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

étape e1)

$$X = \bar{A}CD + \bar{A}B + B\bar{C}$$

étape \longrightarrow c) e1) e2)

	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	1
AB	0	0	0	1
$A\bar{B}$	1	1	0	1

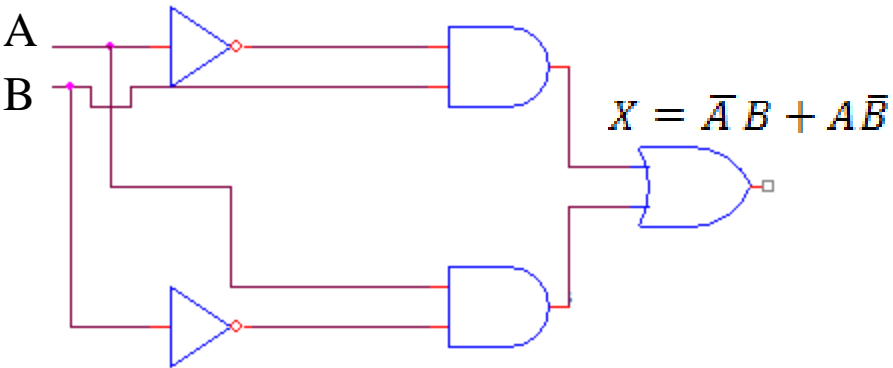
$$X = \bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BD + BCD\bar{C} + A\bar{B}\bar{D}$$

XV- CIRCUITS OU EXCLUSIF (XOR) ET NI EXCLUSIF (XNOR)

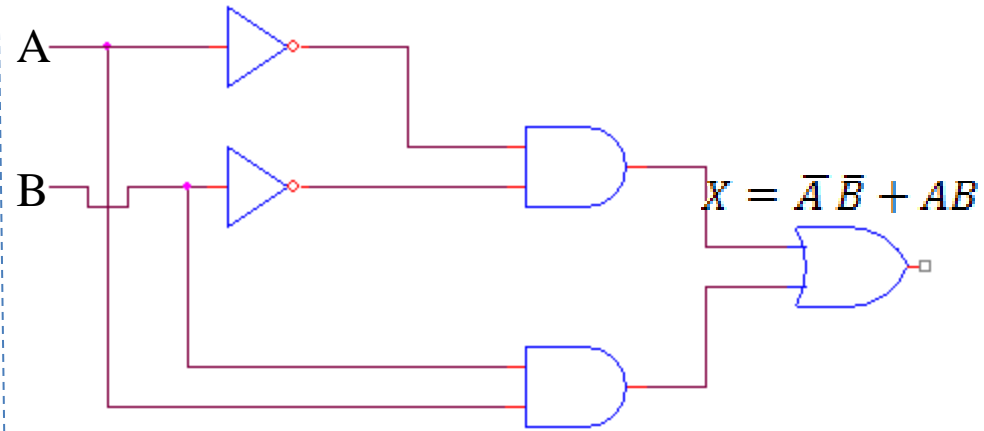
Les circuits OU EXCLUSIF et NI EXCLUSIF sont deux circuits logiques spéciaux qui interviennent souvent dans les systèmes numériques. Ils existent sous forme de portes logiques.

Circuits logiques

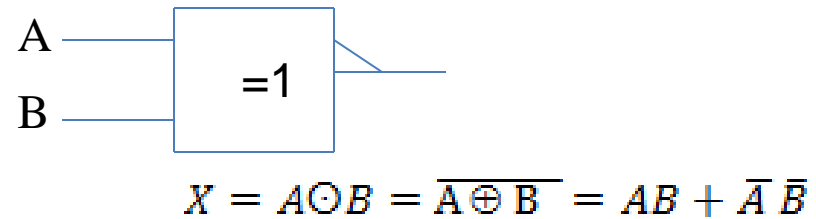
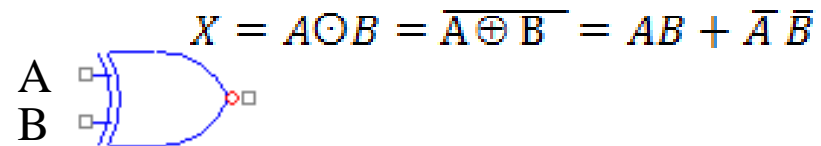
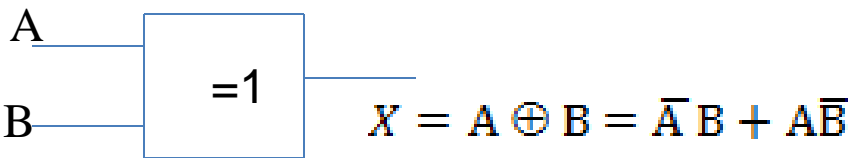
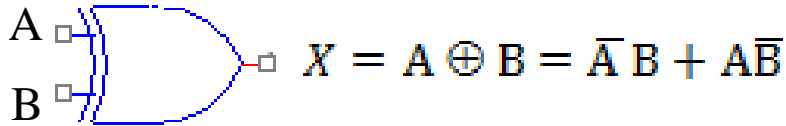
OU EXCLUSIF (XOR)



NI EXCLUSIF (XNOR)



Symboles de chaque porte



Tables de vérité

$$X = A \oplus B$$

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$X = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$$

$$X = A \odot B$$

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$X = A \odot B = \overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\bar{B}$$

Caractéristiques

- a) Deux entrées seulement
- b) $A \oplus B = 1$ si $A = 1(B = 0)$ ou $B = 1(A = 0)$
- c) Comparateur de différence:

$$A \oplus B = 1 \text{ si } A \neq B$$

- a) Clé d'imparité :

$$A \oplus B = 1 \text{ si } (A, B)$$

contient un nombre **impair** de 1

- e) Fonction associative et commutative

$$A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

- a) Deux entrées seulement
- b) Complément du OU EXCLUSIF:

$$A \odot B = \overline{A \oplus B}$$

- c)

$$A \odot B = \overline{A \oplus B} = 1 \text{ si } A = B = 1 \text{ ou } A = B = 0$$

- d) Comparateur d'identité:

$$A \odot B = 1 \text{ si } A = B$$

- e) Clé de parité: $A \odot B = 1$ si (A,B) contient un nombre **pair** de 1.

- f) Fonction associative et commutative:

$$A \odot B = B \odot A$$

$$A \odot B \odot C = (A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$$

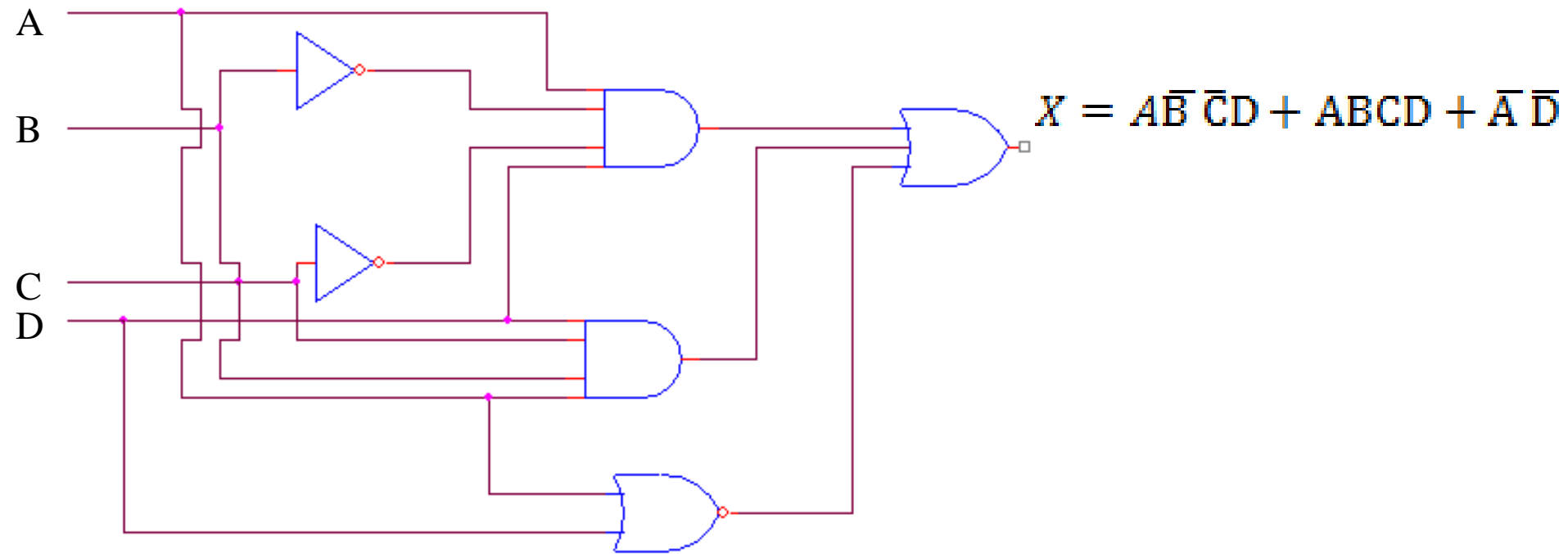
$$\overline{A \oplus B \oplus C} = \overline{A} \oplus B \oplus C = A \oplus \overline{B} \oplus C = A \oplus B \oplus \overline{C}$$

$$\overline{\overline{A \oplus B \oplus C}} = \overline{\overline{A}} \oplus \overline{\overline{B}} \oplus \overline{\overline{C}}$$

Pour complémenter $A \oplus B \oplus C$,
il suffit de complémenter
un nombre **impair** de
Variables.

Exemple

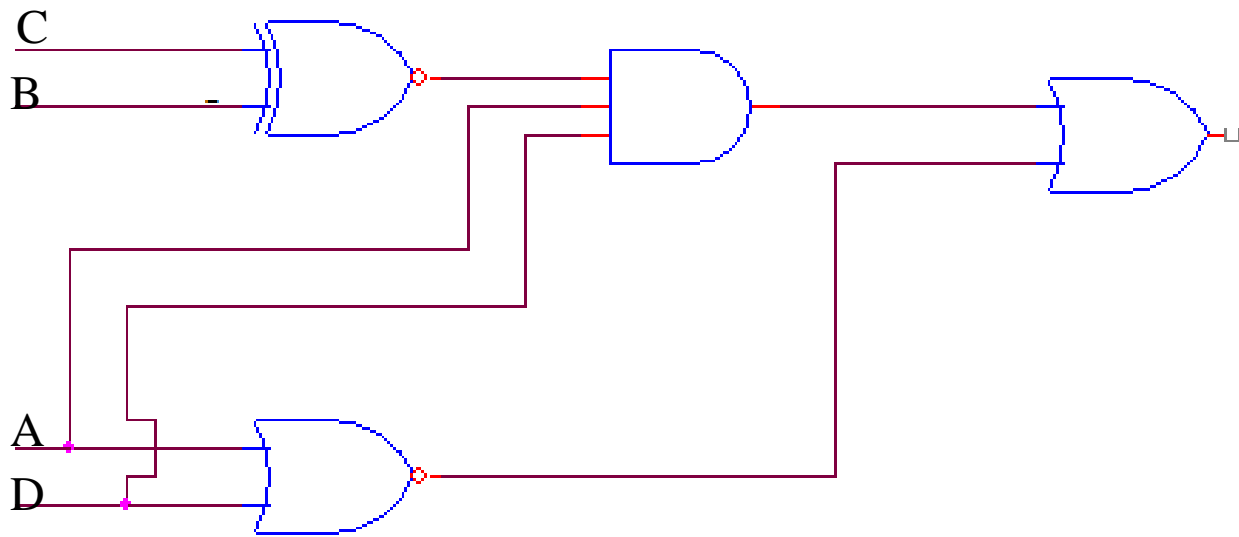
Simplifier le circuit ci-dessous à l'aide de portes NI EXCLUSIF



On peut écrire: $X = A\bar{B}\bar{C}D + ABCD + A\bar{D} = AD(BC + \bar{B}\bar{C}) + A\bar{D}$

→ $X = AD(B \odot C) + A\bar{D}$

d' où



$$X = AD(BOC) + \bar{A}\bar{D}$$