

Éléments de Logique

Pr. Mathias K.KOUAKOU, cw1kw5@yahoo.fr

UNIVERSITE Félix HOUPHOUET BOIGNY d'Abidjan Cocody (Côte d'Ivoire)

Abidjan, 28 Novembre, 2014

Chapitre 1: ENSEMBLES

Chapitre 1: ENSEMBLES

Définitions, Exemples

Chapitre 1: ENSEMBLES

Définitions, Exemples

On appelle ensemble toute collection d'objets bien déterminés dans laquelle les objets sont uniques.

Chapitre 1: ENSEMBLES

Définitions, Exemples

On appelle ensemble **toute collection d'objets bien déterminés dans laquelle les objets sont uniques.**

Ces objets s'appellent **éléments** de l'ensemble, ou les **points** de l'ensemble.

Chapitre 1: ENSEMBLES

Définitions, Exemples

On appelle ensemble toute collection d'objets bien déterminés dans laquelle les objets sont uniques.

Ces objets s'appellent éléments de l'ensemble, ou les points de l'ensemble.

Si x est un point d'un ensemble A , on écrit $x \in A$ et on lit x appartient à A .

Si x n'est pas un point de A , on écrit $x \notin A$.

Un ensemble peut être fini ou non, peut être concret ou virtuel.

Un ensemble peut être fini ou non, peut être concret ou virtuel.

Exemples:

Un ensemble peut être fini ou non, peut être concret ou virtuel.

Exemples:

—0, 1, 2, 3, ... les entiers naturels forment un ensemble qui est noté $\mathbb{N}$.

Un ensemble peut être fini ou non, peut être concret ou virtuel.

Exemples:

- 0, 1, 2, 3, ... les entiers naturels forment un ensemble qui est noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des couleurs de l'arc-en-ciel.

Un ensemble peut être fini ou non, peut être concret ou virtuel.

Exemples:

- 0, 1, 2, 3, ... les entiers naturels forment un ensemble qui est noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des couleurs de l'arc-en-ciel.
- L'ensemble des étudiants de l'UFRMI inscrits pour cette année universitaire:

Un ensemble peut être fini ou non, peut être concret ou virtuel.

Exemples:

- 0, 1, 2, 3, ... les entiers naturels forment un ensemble qui est noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des couleurs de l'arc-en-ciel.
- L'ensemble des étudiants de l'UFRMI inscrits pour cette année universitaire:
- a, b, c, ..., z sont les lettres de l'alphabet français

Notations

Notations

- L'ensemble qui n'a aucun élément est dit vide et est noté $\emptyset$ ou $\{\}$.

Notations

- L'ensemble qui n'a aucun élément est dit vide et est noté $\emptyset$ ou $\{\}$.
- Un ensemble qui n'a qu'un seul élément x est noté $\{x\}$ et est appelé **singléton**.

Notations

- L'ensemble qui n'a aucun élément est dit vide et est noté $\emptyset$ ou $\{\}$.

- Un ensemble qui n'a qu'un seul élément x est noté $\{x\}$ et est appelé **singléton**.

Un ensemble constitué de deux éléments s, x est noté $\{s, x\}$, ou $\{x, s\}$ et est appelé **paire**.

Remarque:

Remarque:

Un ensemble s'écrit soit en *extension*, soit en *compréhension*.

Remarque:

Un ensemble s'écrit soit en **extension**, soit en **compréhension**.

Par exemple l'ensemble E de tous les entiers naturels inférieurs ou égal a 6 est écrit en extension:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Remarque:

Un ensemble s'écrit soit en **extension**, soit en **compréhension**.

Par exemple l'ensemble E de tous les entiers naturels inférieurs ou égal à 6 est écrit en extension:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

et en compréhension:

$$E = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 6\}$$

- L'ensemble $\mathbb{P}$ de tous les entiers relatifs pairs est écrit en compréhension:

$$\mathbb{P} = \{2n, n \in \mathbb{Z}\}$$

- L'ensemble $\mathbb{P}$ de tous les entiers relatifs pairs est écrit en compréhension:

$$\mathbb{P} = \{2n, n \in \mathbb{Z}\}$$

(ce n'est pas la seule façon !), $\mathbb{P}$ s'écrit aussi

- L'ensemble $\mathbb{P}$ de tous les entiers relatifs pairs est écrit en compréhension:

$$\mathbb{P} = \{2n, n \in \mathbb{Z}\}$$

(ce n'est pas la seule façon !), $\mathbb{P}$ s'écrit aussi

$$\mathbb{P} = \{m \in \mathbb{Z} : 2 \text{ divise } m\}$$

Notons que $101 \notin \mathbb{P}$

- L'ensemble S de toutes les puissances entières de 3 est écrit en compréhension:

$$S = \{3^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

- L'ensemble S de toutes les puissances entières de 3 est écrit en compréhension:

$$S = \{3^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

Notons qu'aucun nombre pair appartient à S .

- La collection $\{\star, 1, \star\}$ n'est pas un ensemble.

1.2 Inclusion

1.2 Inclusion

Soient E et F deux ensembles. On dira que E est inclus dans F si tout élément de E est élément de F . On dit encore que E est un sous-ensemble de F ou E est une partie de F . On écrit dans ce cas $E \subset F$ ou $F \supset E$.

Exemples

Exemples

- L'ensemble des poulets est contenu dans celui des oiseaux.

Exemples

- L'ensemble des poulets est contenu dans celui des oiseaux.
- L'ensemble

$$\left\{ \frac{\cos x}{2+n}; x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

est contenu dans $[-1, 1]$.

Exemples

- L'ensemble des poulets est contenu dans celui des oiseaux.
- L'ensemble

$$\left\{ \frac{\cos x}{2+n}; x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

est contenu dans $[-1, 1]$.

- $\{*\} \subset \{*, \triangle\}$, $\{\triangle\} \subset \{*, \triangle\}$,

Exemples

- L'ensemble des poulets est contenu dans celui des oiseaux.
- L'ensemble

$$\left\{ \frac{\cos x}{2+n}; x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

est contenu dans $[-1, 1]$.

- $\{*\} \subset \{*, \triangle\}$, $\{\triangle\} \subset \{*, \triangle\}$,
 $\{*, \square\} \not\subset \{\square, \triangle, O\}$ et $\{\square, \triangle, O\} \not\subset \{*, \square\}$.

$$- \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Remarques:

1- On convient que l'ensemble vide $\emptyset$ est contenu dans tout ensemble.

Remarques:

- 1- On convient que l'ensemble vide $\emptyset$ est contenu dans tout ensemble.
- 2- On a bien $E \subset E$, et **si** on a $A \subset B$ et $B \subset A$, **alors** $A = B$.

Remarques:

- 1- On convient que l'ensemble vide $\emptyset$ est contenu dans tout ensemble.
- 2- On a bien $E \subset E$, et **si** on a $A \subset B$ et $B \subset A$, **alors** $A = B$.
- 3- Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Les quantificateurs

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont appelés quantificateurs.

- $\forall$ est le quantificateur **universel**, $\exists$ est le quantificateur d'**existence**.

- Affirmer qu'il existe un élément x au moins dans E qui n'est pas dans l'ensemble F s'écrit :

$$\exists x \in E \text{ tel que } x \notin F.$$

- Affirmer que tout élément x dans F est élément de E s'écrit:

$$\forall x \in F, x \in E \text{ vérifie } P.$$

Remarque

4- Si F est un ensemble fini et $E \subset F$, alors E est fini et $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.

Notation

Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de E .

Notation

Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de E .

Exercice

- Soit E l'ensemble $\{*, \triangle, \bigcirc\}$. Trouver tous les sous-ensembles de E .
- Montrer que si E est fini et $\text{card}(E) = n$, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et,

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

1.3 Opérations élémentaires dans les ensembles

1.3 Opérations élémentaires dans les ensembles

1.3.1 L'intersection d'ensembles

1.3 Opérations élémentaires dans les ensembles

1.3.1 L'intersection d'ensembles

On appelle intersection de 2 ensembles A et B , le nouvel ensemble constitué des objets α tels que $\alpha \in A$ et $\alpha \in B$.

Cet ensemble est noté $A \cap B$.

On définit de la même façon l'intersection de 3 ou de plusieurs ensembles.

Examples:

$$[-1, 1] \cap [0, 2] = [0, 1]$$

$$\{\triangle, \bigcirc, \star, +, \times, \square\} \cap \{\triangle, \bigcirc, \perp, 1, 2\} = \{\triangle, \bigcirc\}$$

Remarques

Remarques

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
- $A \cap A = A, \emptyset \cap A = \emptyset$

Remarques

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
- $A \cap A = A, \emptyset \cap A = \emptyset$
- Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**.

- Notons que $\alpha \notin A \cap B$ signifie qu'on est dans l'une des 3 situations suivantes:

(1) $\alpha \notin A$ et $\alpha \in B$ ou

(2) $\alpha \notin B$ et $\alpha \in A$ ou

(3) $\alpha \notin A$ et $\alpha \notin B$

1.3.2 Réunion d'ensembles

1.3.2 Réunion d'ensembles

On appelle réunion de 2 ensembles A et B , le nouvel ensemble constitué des objets α tels que $\alpha \in A$ ou $\alpha \in B$ ou $\alpha \in A \cap B$. Cet ensemble est noté $A \cup B$.

On définit de la même façon la réunion de 3 ou de plusieurs ensembles.

Remarques:

- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
- $A \cup A = A$, $\emptyset \cup A = A$.
- $A \cup B = \emptyset$ que si $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.
- Notons que $\alpha \notin A \cup B$ signifie que: $\alpha \notin A$ et $\alpha \notin B$.

1.3.3 Le complémentaire d'un ensemble contenu dans un autre

1.3.3 Le complémentaire d'un ensemble contenu dans un autre

Soient E un ensemble et A une partie de E . On appelle complémentaire de A dans E , le sous-ensemble de E constitué des $\gamma \in E$ tels que $\gamma \notin A$. Cet ensemble est noté $E - A$ ou $\complement_E A$.

Remarques: Si $A \subset E$, on a :

1. $A \cap \complement_E A = \emptyset$ et $A \cup \complement_E A = E$
2. $\complement_E \complement_E A = A$,
3. $\complement_E E = \emptyset$ et $\complement_E \emptyset = E$.

Une partition d'un ensemble E : On appelle **partition** de l'ensemble E tout ensemble $\{A_i\}_{i \in I}$ de **sous-ensembles** de E (où I est un ensemble non vide) telle que:

1- on a $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

2- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$

Une partition d'un ensemble E : On appelle **partition** de l'ensemble E tout ensemble $\{A_i\}_{i \in I}$ de **sous-ensembles** de E (où I est un ensemble non vide) telle que:

1- on a $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

2- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$

Par exemple, si $A \subset E$, la paire $\{A, \complement_E A\}$ est une partition de E .

1.3.4 Propriétés des opérations élémentaires

1.3.4 Propriétés des opérations élémentaires

-(i) $E \cup F = F \cup E$, $E \cap F = F \cap E$, on dit que la réunion et l'intersection sont des **opérations commutatives**.

1.3.4 Propriétés des opérations élémentaires

- (i) $E \cup F = F \cup E$, $E \cap F = F \cap E$, on dit que la réunion et l'intersection sont des **opérations commutatives**.
- (ii) $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap G$, $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup G$ on dit que la réunion et l'intersection sont des **opérations associatives**.

-(iii) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$ et
 $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

On dit que l'intersection et la réunion sont **distributives** l'une sur l'autre.

-(iii) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$ et
 $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

On dit que l'intersection et la réunion sont **distributives** l'une sur l'autre.

- (iv) Si A et B sont deux parties de E , alors $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_E A$, $\complement_E B$, $\complement_E A \cup B$, $\complement_E A \cap B$ sont toutes des parties de E , et on a

$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B) \quad \complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$$

1.3.5 Produit cartésien d'ensembles

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E par F , l'ensemble de tous les couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. On le note

$$E \times F$$

On a donc

$$E \times F = \{(x, y); x \in E, y \in F\}$$

Examples

$$1 - \{\triangle, \bigcirc, \square\} \times \{a, b\} = \\ \{(\triangle, a), (\triangle, b), (\bigcirc, a), (\bigcirc, b), (\square, a), (\square, b)\}$$

$$2 - \{\blacksquare\} \times \{1, 2, 3, 4\} = \{(\blacksquare, 1), (\blacksquare, 2), (\blacksquare, 3), (\blacksquare, 4)\}$$

Plus généralement si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont n ensembles, on appelle produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_n$ l'ensemble de tous les n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$. On le note

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$

Remarques:

- On convient de noter $E \times E$ par E^2 , et plus généralement $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ par E^n .

$$- E \times F = \emptyset \text{ ssi } E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset$$

- $A \times B \subset E \times P$ ssi $A \subset E$ et $B \subset P$.

- $E \times P \neq P \times E$, $E \not\subset E \times P$. En particulier $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R}^2$.

- Si E et P sont des ensembles **finis**, on a

$$\text{Card}(E \times P) = \text{Card}(E) \cdot \text{Card}(P)$$

1.4 Opérations logiques dans un ensemble

Soient $\mathcal{A}$ un ensemble et $P, Q, R, \dots$ des propriétés que peuvent posséder les éléments de $\mathcal{A}$.

Par exemple: $\mathcal{A}$ est l'ensemble des étudiants de l'Unisat,

- P : avoir le Bac D ;
- Q : avoir au plus de 22 ans;
- R : avoir une taille d'au moins 1m80,
- S : avoir déjà mangé du riz.

Partant de ces propriétés, on peut en construire de nouvelles à l'aide des opérations logiques élémentaires:

1.4.1 Opérations logiques élémentaires:

- 1° – *non* P (négation de P):

Dire que l'élément $x \in \mathcal{A}$ possède la propriété *non* P , c'est dire que x ne possède pas la propriété P .

-2°- *PetQ* (conjonction de P et Q):

Dire que l'élément $x \in \mathcal{A}$ possède la propriété *PetQ*, c'est dire que x possède à la fois la propriété P et la propriété Q .

- 3° - *PouQ* (disjonction de P et Q):

Dire que l'élément $x \in \mathcal{A}$ possède la propriété *PouQ*, c'est dire que x possède soit la propriété P , soit la propriété Q , soit les deux à la fois.

1.4.2 L'implication et l'équivalence de deux propriétés

1.4.2 L'implication et l'équivalence de deux propriétés

- L'implication **conditionnelle** de P et Q .

On dit que la propriété P **implique** la propriété Q et on écrit

$P \implies Q$, si tout élément $x \in \mathcal{A}$ possédant la propriété P , possède la propriété Q .

- **L'équivalence des propriétés P et Q .**

On dit que la propriété P est équivalente à la propriété Q et on écrit $P \iff Q$, si les éléments $x \in \mathcal{A}$ possédant la propriété P sont les mêmes que ceux qui possèdent la propriété Q .

1.4.3 La table de vérité des différentes propriétés

1.4.3 La table de vérité des différentes propriétés

P	Q	$P \text{ et } Q$	$P \text{ ou } Q$	$P \implies Q$	$\text{non } P$	$(\text{non } P) \text{ ou } Q$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V	V

1.4.4 Correspondance entre sous-ensembles et propriétés

1.4.4 Correspondance entre sous-ensembles et propriétés

Supposons qu'aux propriétés P et Q correspondent respectivement les sous-ensembles A et B de l'ensemble A .

1.4.4 Correspondance entre sous-ensembles et propriétés

Supposons qu'aux propriétés P et Q correspondent respectivement les sous-ensembles A et B de l'ensemble A .

On a:

- à $\text{non}P$ correspond $\mathcal{C}_A A$
- à $P \text{ et } Q$ correspond $A \cap B$
- à $P \text{ ou } Q$ correspond $A \cup B$

- L'implication $P \implies Q$ se traduit par $A \subset B$.
- L'équivalence $P \iff Q$ se traduit par $A = B$.

- L'implication $P \implies Q$ se traduit par $A \subset B$.
- L'équivalence $P \iff Q$ se traduit par $A = B$.

Les règles de calcul dans les ensembles correspondent aux règles de calcul logique:

- L'implication $P \Rightarrow Q$ se traduit par $A \subset B$.
- L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ se traduit par $A = B$.

Les règles de calcul dans les ensembles correspondent aux règles de calcul logique:

- $A \cup B = B \cup A$ correspond à $P \cup Q \Leftrightarrow Q \cup P$

- $A \cap B = B \cap A$ correspond à $PetQ \iff QetP$

- $\mathbb{C}_A(A \cup B) = (\mathbb{C}_A A) \cap (\mathbb{C}_A B)$

correspond à $non(PouQ) \iff (nonP)et(nonQ)$

- $A \cap B = B \cap A$ correspond à $PetQ \iff QetP$

- $\mathbb{C}_A(A \cup B) = (\mathbb{C}_A A) \cap (\mathbb{C}_A B)$

correspond à $non(PouQ) \iff (nonP)et(nonQ)$

$\mathbb{C}_A(A \cap B) = (\mathbb{C}_A A) \cup (\mathbb{C}_A B)$ correspond à

$non(PetQ) \iff (nonP)ou(nonQ)$

On a $A \subset B$ ssi $\complement_{\mathcal{A}} B \subset \complement_{\mathcal{A}} A$, cela correspond à
 $(P \implies Q) \iff (\text{non}Q \implies \text{non}P)$.

$\text{non}Q \implies \text{non}P$ est appelée **la contraposée** de l'implication
 $P \implies Q$

1.4.5 Les quantificateurs

1.4.5 Les quantificateurs

Les symboles $\forall$, $\exists$ sont appelés quantificateurs.

$\forall$ est le quantificateur **universel**,

1.4.5 Les quantificateurs

Les symboles $\forall$, $\exists$ sont appelés quantificateurs.

$\forall$ est le quantificateur **universel**,

$\exists$ est le quantificateur **d'existence**.

- Affirmer **qu'il existe un élément x au moins dans $\mathcal{E}$** qui possède la propriété P s'écrit:

$\exists x \in \mathcal{E}$ tel que x vérifie P .

- Affirmer **qu'il existe un élément x au moins dans $\mathcal{E}$** qui possède la propriété P s'écrit:

$\exists x \in \mathcal{E}$ tel que x vérifie P .

- Affirmer que **tout élément x dans $\mathcal{E}$** possède la propriété P s'écrit:

$\forall x \in \mathcal{E}$, x vérifie P .

- Affirmer que pour toute série du Bac, il y a eu au moins un admis, se note :

$\forall s \in \mathcal{B}, \exists e \in \mathcal{E}$ tel que e ait obtenu s .

- Affirmer que pour toute série du Bac, il y a eu au moins un admis, se note :

$\forall s \in \mathcal{B}, \exists e \in \mathcal{E}$ tel que e ait obtenu s.

- "Un aliment est bien consommé par tous les hommes", s'écrit:

$\exists r \in \mathcal{R}$ tel que $\forall h \in \mathcal{H}, h$ mange r .

- Affirmer que pour toute série du Bac, il y a eu au moins un admis, se note :

$\forall s \in \mathcal{B}, \exists e \in \mathcal{E}$ tel que e ait obtenu s .

- "Un aliment est bien consommé par tous les hommes", s'écrit:

$\exists r \in \mathcal{R}$ tel que $\forall h \in \mathcal{H}, h$ mange r .

- "Tous les hommes mangent tous les aliments" s'écrira;

$\forall h \in \mathcal{H}, \forall r \in \mathcal{R}, h$ mange r .

Remarques

- ▶ Notons que la phrase commence avec un quantificateur, et juste après le quantificateur est annoncé la variable dans son ensemble.
- ▶ Dans une phrase peuvent apparaître **deux** ou plusieurs quantificateurs.
- ▶ Contrairement aux symboles de l'inclusion $\subset$ et de l'appartenance $\in$, les symboles $\forall$ et $\exists$ **ne se barrent pas !**

1.5 Logique mathématique classique

1.5 Logique mathématique classique

Assertion ou Proposition

1.5 Logique mathématique classique

Assertion ou Proposition

On appelle **proposition** ou **assertion**, toute affirmation qui a **une seule valeur de vérité**, c'est à dire qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux à la fois.

Exemples:

- Tout polygône régulier de n cotés s'inscrit dans un cercle.

Exemples:

- Tout polygône régulier de n cotés s'inscrit dans un cercle.
- Après la voiture, on inventa l'avion.

Exemples:

- Tout polygône régulier de n cotés s'inscrit dans un cercle.
- Après la voiture, on inventa l'avion.
- un jour un africain fabriquera une aiguille.

Par contre, les affirmations suivantes ne sont pas des propositions:

Par contre, les affirmations suivantes ne sont pas des propositions:

- L'algèbre est plus facile que l'analyse

Par contre, les affirmations suivantes ne sont pas des propositions:

- L'algèbre est plus facile que l'analyse
- C'est jolie le ciel.

Par contre, les affirmations suivantes ne sont pas des propositions:

- L'algèbre est plus facile que l'analyse
- C'est jolie le ciel.
- Sur Mars la vie est meilleure.

Comme pour les propriétés, à partir de propositions on peut définir de nouvelles, par la

Comme pour les propriétés, à partir de propositions on peut définir de nouvelles, par la **négation** $\text{non}P$, la **conjonction** $P \text{ et } Q$, la **disjonction** $P \text{ ou } Q$,

Comme pour les propriétés, à partir de propositions on peut définir de nouvelles, par la **négation** $\text{non}P$, la **conjonction** $P \text{ et } Q$, la **disjonction** $P \text{ ou } Q$, l'**implication** $P \implies Q$ et l'**équivalence** $P \iff Q$.

Ces nouvelles propositions sont définies par la table de vérité suivante:

Ces nouvelles propositions sont définies par la table de vérité suivante:

P	Q	$PetQ$	$PouQ$	$P \implies Q$	$nonP$	$(nonP)ouQ$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V	V

Comment lire $P \implies Q$ et $P \iff Q$?

Comment lire $P \implies Q$ et $P \iff Q$?

L'implication $P \implies Q$ se lit de différentes façons:

- ▶ Si on a P , alors on a Q .
- ▶ On a Q dès qu'on a P .
- ▶ Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie.

Comment lire $P \implies Q$ et $P \iff Q$?

L'implication $P \implies Q$ se lit de différentes façons:

- ▶ Si on a P , alors on a Q .
- ▶ On a Q dès qu'on a P .
- ▶ Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie.

L'équivalence $P \iff Q$ se lit:

- ▶ On a P si et seulement si on a Q .
- ▶ Pour avoir P il faut et il suffit d'avoir Q .

1.6 Quelques méthodes de démonstration

1.6 Quelques méthodes de démonstration

Méthode 1: Démonstration directe:

1.6 Quelques méthodes de démonstration

Méthode 1: Démonstration directe:

On veut montrer que Q est vraie.

On sait qu'on a $P \implies Q$.

On montre que P est vraie, et on obtient que Q est vraie.

1.6 Quelques méthodes de démonstration

Méthode 1: Démonstration directe:

On veut montrer que Q est vraie.

On sait qu'on a $P \implies Q$.

On montre que P est vraie, et on obtient que Q est vraie.

Exemples:

1 - Dans un lycée, les élèves de terminale sont en tee-shirt vert.

1.6 Quelques méthodes de démonstration

Méthode 1: Démonstration directe:

On veut montrer que Q est vraie.

On sait qu'on a $P \implies Q$.

On montre que P est vraie, et on obtient que Q est vraie.

Exemples:

1 - Dans un lycée, les élèves de terminale sont en tee-shirt vert.

Aya est dans ce lycée et a un tee-shirt vert. Elle est donc en terminal.

(2)- Tous les élèves de la terminale TC_1 ont obtenu leur Bac.
Touré est un élève cette classe, il a donc obtenu son Bac.

(2)- Tous les élèves de la terminale TC_1 ont obtenu leur Bac.
Touré est un élève cette classe, il a donc obtenu son Bac.

(3)- On veut montrer que **97654321009** est le carré de deux nombres de $\mathbb{R}$. On sait que tout nombre réel positif est le carré de deux nombres de $\mathbb{R}$. Comme **97654321009** est positif, comme les autres, il admet lui aussi deux racines carrés dans $\mathbb{R}$.

Méthode 2: Démonstration par la contraposée:

Méthode 2: Démonstration par la contraposée:

On veut montrer que P implique Q : $P \implies Q$.

Méthode 2: Démonstration par la contraposée:

On veut montrer que P implique Q : $P \implies Q$.

On montre $\text{non}Q \implies \text{non}P$, c'est à dire:

si on n'a pas Q , alors on n'a pas P .

Méthode 2: Démonstration par la contraposée:

On veut montrer que P implique Q : $P \implies Q$.

On montre $\text{non}Q \implies \text{non}P$, c'est à dire:

si on n'a pas Q , alors on n'a pas P .

Exemple:

Soit a un entier. Si a^2 est pair, alors a est pair.

Si a n'est pas pair, a est de la forme $a = 2n + 1$. Dans ce cas on voit que

$$a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 \text{ est impair.}$$

On a ainsi établi la contraposée $a \text{ impair} \implies a^2 \text{ impair}$.

(2)- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $a + b \notin \mathbb{Q} \implies a \notin \mathbb{Q} \text{ ou } b \notin \mathbb{Q}$.

(2)- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $a + b \notin \mathbb{Q} \implies a \notin \mathbb{Q} \text{ ou } b \notin \mathbb{Q}$.

La contraposée de cette implication est:

Si a et b sont des nombres rationnels alors leur somme aussi.

Cette implication est claire!

Méthode 3: Démonstration par l'absurde:

Méthode 3: Démonstration par l'absurde:

On cherche à montrer que la propriété P est vraie.

On suppose qu'elle est fausse.

Méthode 3: Démonstration par l'absurde:

On cherche à montrer que la propriété P est vraie.

On suppose qu'elle est fausse.

Avec l'hypothèse que P est fausse, on arrive à une contradiction, par exemple à nier une propriété déjà établie.

Exemple: P : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Alors il existe deux entiers p et q premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Mais alors $2q^2 = p^2$. On voit alors que p^2 est pair, donc p est pair. On a alors $p = 2n$, cela conduit à $q^2 = 2n^2$ et par suite q aussi est pair, cela est contraire à l'hypothèse $\text{pgcd}(p, q) = 1$. On conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Méthode 4: Démonstration par disjonction des cas:

Méthode 4: Démonstration par disjonction des cas:

On veut montrer qu'une propriété C est vraie sur un ensemble $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, on montre que C est vraie sur $\mathcal{A}$, puis sur $\mathcal{B}$.

Méthode 4: Démonstration par disjonction des cas:

On veut montrer qu'une propriété C est vraie sur un ensemble $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, on montre que C est vraie sur $\mathcal{A}$, puis sur $\mathcal{B}$.

Exemple: Tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$:

Méthode 4: Démonstration par disjonction des cas:

On veut montrer qu'une propriété C est vraie sur un ensemble $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, on montre que C est vraie sur $\mathcal{A}$, puis sur $\mathcal{B}$.

Exemple: Tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$:

On a $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{I}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres pairs et $\mathcal{I}$ est celui des nombres impairs.

Méthode 5: Démonstration par récurrence:

Méthode 5: Démonstration par récurrence:

On veut établir une propriété P sur $\mathbb{N}$.

1°- On montre que P est vraie pour $n = 0$,

Méthode 5: Démonstration par récurrence:

On veut établir une propriété P sur $\mathbb{N}$.

1°- On montre que P est vraie pour $n = 0$,

2°- On admet que la propriété P est vraie pour les entiers $0, \dots, r$.

Méthode 5: Démonstration par récurrence:

On veut établir une propriété P sur $\mathbb{N}$.

1°- On montre que P est vraie pour $n = 0$,

2°- On admet que la propriété P est vraie pour les entiers $0, \dots, r$.

Avec cette hypothèse on montre que la propriété

Méthode 5: Démonstration par récurrence:

On veut établir une propriété P sur $\mathbb{N}$.

1°- On montre que P est vraie pour $n = 0$,

2°- On admet que la propriété P est vraie pour les entiers $0, \dots, r$.

Avec cette hypothèse on montre que la propriété

P est aussi vraie pour l'entier $r + 1$.

3°- On conclut alors que P est vraie pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Exemple:

On considère la suite numérique définie comme suit:

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$$

Exemple:

On considère la suite numérique définie comme suit:

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$$

On veut établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2}, 1[$.

On établit cette propriété par récurrence. comme suit:

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1[$.

On admet que la propriété $u_r \in [\frac{1}{2}, 1[$ est vraie pour les entiers $0, \dots, r$. Montrons que

$$u_{r+1} \in [\frac{1}{2}, 1[.$$

On a $u_{r+1} = \frac{u_r + 1}{2}$ et par hypothèse de récurrence $\frac{1}{2} \leq u_r < 1$. Il suit donc qu'on ait $\frac{3}{4} \leq u_{r+1} < \frac{2}{2}$ et en particulier

$$\frac{1}{2} \leq u_{r+1} < 1$$

On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [\frac{1}{2}, 1[$.

Éléments de logique : Fiche de TD

Exercice: 1

Soient A, B, C des ensembles. Montrer que

(i)- si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$

(ii)- si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ alors $B = C$

Exercice: 2 (Ensembles finis)

a)- Soit E un ensemble fini ayant n éléments.

Montrer E a un nombre fini de sous-ensembles et que le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à 2^n .

b)- Soient A et B deux ensembles finis tels que $A \subset B$.

Montrer que si $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ alors $A = B$.

Exercice: 3

Soient A un ensemble et $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une famille d'ensembles.

(i) - Montrer que

$$A \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap B_k)$$

(ii) - Montrer que

$$A \cup \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (A \cup B_k)$$

Exercice 4 (Logique):

(1) Dire si ces implications sont vraies ou fausses.

- $A \cap B \subset D \implies A \subset D \text{ et } B \subset D$

- $D \subset A \cap B \implies D \subset A$

- $D \subset A \text{ ou } D \subset B \implies D \subset A \cup B$

(2) Si P est une propriété et x est un élément vérifiant P , on écrit $P(x)$. Compléter avec $\implies$, $\impliedby$ ou $\iff$.

(a)- $[\forall x \in E, P(x) \text{ et } Q(x)] \dots\dots\dots [\forall x \in E, P(x)] \text{ et } [\forall x \in E, Q(x)]$

(b)- $[\exists x \in E, P(x) \text{ et } Q(x)] \dots\dots\dots [\exists x \in E, P(x) \text{ et } [\exists x \in E: Q(x)]]$

(c)- $[\forall x \in E, P(x) \text{ ou } Q(x)] \dots\dots\dots [\forall x \in E, P(x)] \text{ ou } [\forall x \in E, Q(x)]$

(d)- $[\forall x \in E, P(x) \text{ et } Q(x)] \dots\dots\dots [\forall s \in E, P(s) \text{ et } Q(s)]$

(3) Ecrire les proposition suivantes en utilisant les symboles logiques (quantificateurs, implication, équivalence).

Soient E l'ensemble des étudiants de l'UFRMI et $\mathcal{U}$ l'ensemble de toutes les unités d'enseignement.

(a)- Tous les étudiants de l'UFRMI n'ont pas l'ue EL .

(b)- Les étudiants de l'UFRMI n'ont pas l'ue EL .

(c)- Tous les étudiants de l'UFRMI n'ont pas **ue** .

(d)- Les étudiants de l'UFRMI n'ont pas d'**ue** .

(e)- Chaque étudiant de l'UFRMI a un repas préféré.

(f)- Tout repas est mangé par des étudiants de l'UFRMI.

(g)- Si un étudiant mange le repas p , alors tous les étudiants mangeront ce repas.

(h)- Si un étudiant mange un repas, alors les étudiants mangeront tous les repas.

Exercice 5:

A l'aide de la table de vérité, préciser le symbole logique, s'il existe, entre les couples de propositions suivantes:

$(P, P \text{ et } R), (P \implies Q, Q \implies \text{non}P),$

$((P \implies Q) \implies R, Q \implies R),$

$(\text{non}Q \implies \text{non}P, Q \text{ ou } (\text{non}P))$

Chapitre 2: Relations binaires dans un ensemble

Chapitre 2: Relations binaires dans un ensemble

Définitions et Exemples

Définition: Soit E un ensemble non vide. On appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E toute partie non vide de $E \times E$.

Chapitre 2: Relations binaires dans un ensemble

Définitions et Exemples

Définition: Soit E un ensemble non vide. On appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E toute partie non vide de $E \times E$.

Exemples: - (a) $E = \{\star, \clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$, la partie

$$\mathcal{R} = \{(\star, \star), (\heartsuit, \diamond), (\diamond, \diamond), (\heartsuit, \clubsuit), (\clubsuit, \heartsuit)\} \subset E \times E$$

est une relation binaire sur E .

Chapitre 2: Relations binaires dans un ensemble

Définitions et Exemples

Définition: Soit E un ensemble non vide. On appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E toute partie non vide de $E \times E$.

Exemples: - (a) $E = \{\star, \clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$, la partie

$$\mathcal{R} = \{(\star, \star), (\heartsuit, \diamond), (\diamond, \diamond), (\heartsuit, \clubsuit), (\clubsuit, \heartsuit)\} \subset E \times E$$

est une relation binaire sur E .

- (b) Sur $\mathbb{Z}$ on définit la relation $\mathcal{S}$ par :

$$(a, b) \in \mathcal{S} \text{ si } a^2 + b \geq 1.$$

On a donc

$$\mathcal{S} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b \geq 1\}$$

Notation: Soit E sur lequel est définie la relation binaire $\mathcal{R}$.

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x **est en relation $\mathcal{R}$ avec** y .
On écrit dans ce cas

Notation: Soit E sur lequel est définie la relation binaire $\mathcal{R}$.

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x **est en relation $\mathcal{R}$ avec** y .
On écrit dans ce cas

$$x\mathcal{R}y$$

Notation: Soit E sur lequel est définie la relation binaire $\mathcal{R}$.

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x **est en relation** $\mathcal{R}$ **avec** y .
On écrit dans ce cas

$$x\mathcal{R}y$$

Par exemple, on a par rapport aux relations ci-dessus:

$$\star\mathcal{R}\star, \quad \diamond\mathcal{R}\diamond, \quad 1\mathcal{S}3, \quad 3\mathcal{S}(-6).$$

$(\star, \diamond) \notin \mathcal{R}$, on dira que $\star$ n'est pas en relation avec $\diamond$, et
on écrira

$$\star \not\mathcal{R} \diamond$$

Notons bien Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est définie lorsqu'on sait quand un point x de cet ensemble est en relation avec un autre y de l'ensemble.

Quelques propriétés remarquables des relations binaires

Quelques propriétés remarquables des relations binaires

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble non vide E .

Quelques propriétés remarquables des relations binaires

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble non vide E .

Relation Réflexive: On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si on a : $x\mathcal{R}x$

pour tout $x \in E$

Quelques propriétés remarquables des relations binaires

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble non vide E .

Relation Réflexive: On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si on a : $x\mathcal{R}x$
pour tout $x \in E$

$$(x, x) \in \mathcal{R} \quad \forall x \in E$$

Relation symétrique: $\mathcal{R}$ est dite symétrique si pour tout couple

$(x, y) \in E \times E$, la relation $x\mathcal{R}y$ implique la relation $y\mathcal{R}x$:

$$x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$$

Relation symétrique: $\mathcal{R}$ est dite symétrique si pour tout couple

$(x, y) \in E \times E$, la relation $x\mathcal{R}y$ implique la relation $y\mathcal{R}x$:

$$x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$$

$$(a, b) \in \mathcal{R} \implies (b, a) \in \mathcal{R}$$

Relation anti-symétrique: $\mathcal{R}$ est dite anti-symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$, les relations $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ impliquent l'égalité $x = y$.

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \implies x = y$$

Relation anti-symétrique: $\mathcal{R}$ est dite anti-symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$, les relations $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ impliquent l'égalité $x = y$.

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \implies x = y$$

Si on a $(a, b) \in \mathcal{R}$ et $(b, a) \in \mathcal{R}$, alors $a = b$

Relation transitive: On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$, les relations $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ impliquent la relation $x\mathcal{R}z$.

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$$

Relation transitive: On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$, les relations $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ impliquent la relation $x\mathcal{R}z$.

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$$

Si on a $(a, b) \in \mathcal{R}$ et $(b, c) \in \mathcal{R}$, alors $(a, c) \in \mathcal{R}$

Exercice: On considère l'ensemble $E = \{\clubsuit, \circ, \triangle, \diamond\}$
et les relations binaires suivantes:

$$\mathcal{R} = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\diamond, \diamond), (\heartsuit, \heartsuit)\} \text{ et}$$
$$\mathcal{S} = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\circ, \circ), (\diamond, \diamond), (\diamond, \circ), (\triangle, \circ), (\clubsuit, \diamond)\}$$

Etudier $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$

Relation d'ordre

Définition: Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble non vide E est dite relation d'**ordre** si $\mathcal{R}$ est à la fois **réflexive**, **anti-symétrique** et **transitive**.

Exemples classiques:

(1) – $(\mathbb{R}, \leq)$ usuel

(2) – Mots l'ensemble des mots écrits avec l'alphabet français muni de l'ordre **lexicographique**.

(3) – $\mathbb{R}^2$ avec la relation $\prec$ défini comme suit:

$$(a, b) \prec (a', b') \text{ si } a \leq a' \text{ et } b \leq b'$$

c'est l'ordre **cartésien**.

(4)– Soit $\emptyset \neq A$. Sur $\mathcal{P}(A)$ l'inclusion $\subseteq$ est une relation d'ordre.

(5)– Sur $\mathbb{N}^*$ la relation définie par : $a \mathcal{R} b$ si a divise b est une relation d'ordre.

Ordre total, ordre partiel:

- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est dite **totale** si pour tout couple x, y de points de E , on a **soit** $x\mathcal{R}y$, **soit** $y\mathcal{R}x$.

Ordre total, ordre partiel:

- Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est dite **totale** si pour tout couple x, y de points de E , on a **soit** $x\mathcal{R}y$, **soit** $y\mathcal{R}x$.

Les exemples (1) et (2) sont des relations d'ordre **totales**.

- Toute autre relation d'ordre qui n'est pas totale est dite **partielle**.

- Toute autre relation d'ordre qui n'est pas totale est dite **partielle**.

Par exemple , sur $\mathcal{P}(A)$ la relation définie par l'inclusion $\subset$ est partielle.

Eléments singuliers dans un ensemble ordonné

Soient $(E, \prec)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E .

Notion de majorant et de minorant

On appelle **majorant** de A tout élément $e \in E$ tel que:

$$\forall a \in A, a \prec e$$

On appelle **minorant** de A tout élément $s \in E$ tel que:

$$\forall a \in A, s \prec a$$

Élément maximal, Élément minimal

Un élément $u \in A$ est dit **maximal** si aucun autre élément de A n'est au dessus de lui.

$$\forall x \in E, u \prec x \implies x \notin A$$

Élément maximal, Élément minimal

Un élément $u \in A$ est dit **maximal** si aucun autre élément de A n'est au dessus de lui.

$$\forall x \in E, u \prec x \implies x \notin A$$

Un élément $v \in A$ est dit **minimal** si aucun autre élément de A n'est en dessous de lui.

$$\forall x \in E, x \prec v \implies x \notin A$$

Élément maximal, Élément minimal

Un élément $u \in A$ est dit **maximal** si aucun autre élément de A n'est au dessus de lui.

$$\forall x \in E, u \prec x \implies x \notin A$$

Un élément $v \in A$ est dit **minimal** si aucun autre élément de A n'est en dessous de lui.

$$\forall x \in E, x \prec v \implies x \notin A$$

Remarque: Les éléments maximaux et minimaux n'existent pas toujours, s'ils existent ils ne sont pas uniques.

Élément maximum, Élément minimum

Un élément $u \in A$ est dit **maximum** si u est au dessus de tous les autres éléments de A .

$$\forall x \in A, x \prec u$$

Elément maximum, Elément minimum

Un élément $u \in A$ est dit **maximum** si u est au dessus de tous les autres éléments de A .

$$\forall x \in A, x \prec u$$

Un élément $s \in A$ est dit minimum si s est en dessous de tous les autres éléments de A .

$$\forall x \in A, s \prec x$$

Elément maximum, Elément minimum

Un élément $u \in A$ est dit **maximum** si u est au dessus de tous les autres éléments de A .

$$\forall x \in A, x \prec u$$

Un élément $s \in A$ est dit minimum si s est en dessous de tous les autres éléments de A .

$$\forall x \in A, s \prec x$$

Remarque: Les éléments maximums et minimums n'existent pas toujours, s'ils existent ils sont uniques.

Borne supérieure, Borne inférieure:

On appelle **borne supérieure** de A le minimum de tous les majorants de A .

Borne supérieure, Borne inférieure:

On appelle **borne supérieure** de A le minimum de tous les majorants de A .

On appelle **borne inférieure** de A le maximum de tous les minorants de A .

Relation d'équivalence

Relation d'équivalence

Définition: Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'**équivalence** si elle est à **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Relation d'équivalence

Définition: Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'**équivalence** si elle est à **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Exemples: - Sur tout ensemble non vide E , la relation $x\mathcal{R}y$ si $x = y$ est une relation d'équivalence. (Cette relation est dite **discrete**).

Relation d'équivalence

Définition: Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'**équivalence** si elle est à **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Exemples: - Sur tout ensemble non vide E , la relation $x\mathcal{R}y$ si $x = y$ est une relation d'équivalence. (Cette relation est dite **discrete**).

- La relation $\mathcal{R} = E \times E$ est une relation d'équivalence. Elle est dite **grossière**.

Relation d'équivalence

Définition: Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'**équivalence** si elle est à **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Exemples: - Sur tout ensemble non vide E , la relation $x\mathcal{R}y$ si $x = y$ est une relation d'équivalence. (Cette relation est dite **discrete**).

- La relation $\mathcal{R} = E \times E$ est une relation d'équivalence. Elle est dite **grossière**.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Sur $\mathbb{Z}$ l'entier n permet de définir une relation d'équivalence par:

$(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $p\mathcal{R}q$ si $q - p \in n\mathbb{Z}$

Cette relation est dite de **congruence modulo** n .

Classes d'équivalence et ensemble quotient d'une relation d'équivalence.

Classes d'équivalence

Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $a \in E$.

On appelle classe d'équivalence de a le sous-ensemble de E constitué des points x qui sont en relation avec a .

On note $\dot{a}$ ou $\bar{a}$,... ce sous-ensemble.

Lemme: Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E . On a:

(i)- $\forall x \in E, \quad x \in \dot{x}$.

(ii)- Soit $(a, b) \in E^2$. Si $a \in \dot{b}$, alors $b \in \dot{a}$ et $\dot{a} = \dot{b}$

(iii)- Soit $(a, b) \in E^2$. On a soit $\dot{a} = \dot{b}$ soit $\dot{a} \cap \dot{b} = \emptyset$

(iv)- Les différentes classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble E .

Ensemble quotient

L'ensemble quotient est l'ensemble de toutes les classes d'équivalences. On le note $E/\mathcal{R}$ ou $\frac{E}{\mathcal{R}}$.

Ensemble quotient

L'ensemble quotient est l'ensemble de toutes les classes d'équivalences. On le note $E/\mathcal{R}$ ou $\frac{E}{\mathcal{R}}$.

Exemple:

Sur $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence par:

$(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $p\mathcal{R}q$ si $q - p \in 5\mathbb{Z}$ a pour classes d'équivalence

$\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}$. et pour ensemble quotient $\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{R}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$. On a

$$\mathbb{Z} = \dot{0} \cup \dot{1} \cup \dot{2} \cup \dot{3} \cup \dot{4}$$

Chapitre 3: Applications d'un ensemble vers un autre

Chapitre 3: Applications d'un ensemble vers un autre

Relations d'un ensemble vers un autre

Définitions

Soient A et B deux ensembles non vides.

- On appelle relation de A vers B **toute partie non vide** du produit cartésien $A \times B$.

Chapitre 3: Applications d'un ensemble vers un autre

Relations d'un ensemble vers un autre

Définitions

Soient A et B deux ensembles non vides.

- On appelle relation de A vers B **toute partie non vide** du produit cartésien $A \times B$.

Par exemple pour $A = \{\bigcirc, \diamond, \heartsuit, \triangle\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, la partie $\{(\bigcirc, 1), (\bigcirc, 2), (\diamond, 1), (\triangle, 7)\}$ est une relation de A vers B .

Chapitre 3: Applications d'un ensemble vers un autre

Relations d'un ensemble vers un autre

Définitions

Soient A et B deux ensembles non vides.

- On appelle relation de A vers B **toute partie non vide** du produit cartésien $A \times B$.

Par exemple pour $A = \{\circ, \diamond, \heartsuit, \triangle\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, la partie $\{(\circ, 1), (\circ, 2), (\diamond, 1), (\triangle, 7)\}$ est une relation de A vers B .

On pourrait représenter cette relation comme suit:

Examples

- $f_1 = \{(\bigcirc, 1), (\bigcirc, 2), (\diamond, 1), (\triangle, 7), (\diamond, 3)\}$

- $f_2 = A \times \{2\}$

- $f_3 = \{\diamond\} \times B$

- $f_4 = \{(\diamond, 3), (\heartsuit, 1), (\triangle, 1)\}$

- $f_5 = \{(\bigcirc, 1), (\triangle, 2), (\diamond, 2), (\heartsuit, 4)\}$

Application ou fonction

- On appelle **application** ou **fonction** de A vers B , **toute relation** f de A vers B telle que:
à tout élément $x \in A$ **correspond un élément et un seul**, bien déterminé y de B . On écrit $f : A \longrightarrow B$ ou , $A \xrightarrow{f} B$.

- A est appelé l'ensemble de **départ** de f

- A est appelé l'ensemble de **départ** de f
- B l'ensemble d'**arrivé** de f .

- A est appelé l'ensemble de **départ** de f
- B l'ensemble d'**arrivé** de f .
- y est **l'image de x** par f et est **noté $f(x)$** , et **x est un antécédent de y** .

Exemples et contre-exemples

Exemples et contre-exemples

-(1) Les applications constantes

Exemples et contre-exemples

- (1) Les applications constantes
- (2) L'application identité de A notée id_A

Exemples et contre-exemples

- (1) Les applications constantes
- (2) L'application identité de A notée id_A
- (3) L'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longmapsto 2n^2 - n$ est bien définie.

Exemples et contre-exemples

- (1) Les applications constantes
- (2) L'application identité de A notée id_A
- (3) L'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longmapsto 2n^2 - n$ est bien définie.
- (4) La relation $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto \sin x$ n'est pas une application.

Exemples et contre-exemples

- (1) Les applications constantes
- (2) L'application identité de A notée id_A
- (3) L'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longmapsto 2n^2 - n$ est bien définie.
- (4) La relation $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto \sin x$ n'est pas une application.
- (5) La relation $\{(1, \clubsuit), (2, \clubsuit), (4, \diamond), (5, \heartsuit)\}$ n'est pas une application de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ dans $B = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$.

Exemples et contre-exemples

- (1) Les applications constantes
- (2) L'application identité de A notée id_A
- (3) L'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longmapsto 2n^2 - n$ est bien définie.
- (4) La relation $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto \sin x$ n'est pas une application.
- (5) La relation $\{(1, \clubsuit), (2, \clubsuit), (4, \diamond), (5, \heartsuit)\}$ n'est pas une application de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ dans $B = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$.
- (6) La relation $h : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \frac{p}{q} \longmapsto p + q$ n'est pas une application.

- Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.
- Si $B \subset \mathbb{R}$, on parle de **fonction réelle**,
- si $A \subset \mathbb{R}$, on parle de fonction à **variables réelles**.

Remarque: Si $A' \subset A$, alors f induit une application naturelle $f' : A' \longrightarrow B$ définie par :

$$f'(a') = f(a')$$

On dit que f' est restriction de f à A' .

Remarque: Si $A' \subset A$, alors f induit une application naturelle $f' : A' \longrightarrow B$ définie par :

$$f'(a') = f(a')$$

On dit que f' est restriction de f à A' .

Si $B' \subset B$, f ne définit pas nécessaire une application de A dans B' .

Egalité de deux applications

Définition

Soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : C \longrightarrow D$ deux applications. On dira que $f = g$ lorsque :

Egalité de deux applications

Définition

Soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : C \longrightarrow D$ deux applications. On dira que $f = g$ lorsque :

$A = C$, $B = D$ et pour tout $x \in A$, on a $f(x) = g(x)$

Egalité de deux applications

Définition

Soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : C \longrightarrow D$ deux applications. On dira que $f = g$ lorsque :

$A = C$, $B = D$ et pour tout $x \in A$, on a $f(x) = g(x)$

Par exemple les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^2$ ne sont pas égales.

Suite d'éléments d'un ensemble E

On appelle **suite d'éléments** d'un ensemble E toute application de $\mathbb{N}$ ou d'une partie D de $\mathbb{N}$ dans E .

On écrit une suite d'éléments d'un ensemble E sous la forme $(u_n)_{n \in D}$.

Fonctions caractéristiques

Soient E un ensemble non vide et A une partie de E . On appelle **fonction caractéristique** de A l'application notée χ_A définie comme suit:

$$\chi_A : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1 \text{ si } x \in A \text{ et } x \longmapsto 0 \text{ si } x \notin A$$

Fonctions caractéristiques

Soient E un ensemble non vide et A une partie de E . On appelle **fonction caractéristique** de A l'application notée χ_A définie comme suit:

$$\chi_A : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1 \text{ si } x \in A \text{ et } x \longmapsto 0 \text{ si } x \notin A$$

Exercice:

Définir χ_E et $\chi_\emptyset$.

Propriétés remarquables des fonctions caractéristiques

(1)- $\chi_A = \chi_B \iff A = B.$

(2)- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B.$

(3)- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B.$

(4)- $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A.$

Les images directes et les images réciproques

Les images directes et les images réciproques

Une image directe

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F .

- L'ensemble de toutes les images des points de A est appelé **image directe** de A par f , on le note $f(A)$. On a

$$f(A) = \{f(a), a \in A\}$$

Remarques:

1. On a $f(A) \subset F$.
2. L'image directe de l'ensemble de départ E est appelée **image** de f , on la note ***Imf***

Une image réciproque

Une image réciproque

B étant une partie de F , l'ensemble de tous les points de E dont l'image appartient à B est appelé **image réciproque** de B par f , on le note $f^{-1}(B)$. On a

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$

Remarques:

1. On a $f^{-}(B) \subset E$ et on a $f^{-}(F) = E$.
2. On a $f(A) = \emptyset$ ssi $A = \emptyset$, alors que $f^{-}(B) = \emptyset$ n'implique pas nécessairement que $B = \emptyset$.

Applications injectives, surjectives, bijectives

Définitions

Soit une application $f : E \longrightarrow F$.

f est dite **injective** si deux éléments distincts quelconques de E ont des images distinctes dans F . **Autrement dit**, si une égalité d'images $f(x) = f(x')$ où $x, x' \in E$ entraîne que $x = x'$.

f est encore dite injective si tout $y \in F$ a **au plus** un seul antécédent.

Applications injectives, surjectives, bijectives

Définitions

Soit une application $f : E \longrightarrow F$.

f est dite **injective** si deux éléments distincts quelconques de E ont des images distinctes dans F . **Autrement dit**, si une égalité d'images $f(x) = f(x')$ où $x, x' \in E$ entraîne que $x = x'$.

f est encore dite injective si tout $y \in F$ a **au plus** un seul antécédent.

1. $\forall (x, x') \in E^2$, on a $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$.
2. $\forall (x, x') \in E^2$, on a $f(x) = f(x') \implies x = x'$.
3. $\forall y \in F$, on a $\text{card}(f^{-1}(\{y\})) \leq 1$

En particulier f n'est pas injective signifie qu'il existe dans F un élément qui a moins deux antécédents.

En particulier f n'est pas injective signifie qu'il existe dans F un élément qui a moins deux antécédents.

Remarque: Si les ensembles E et F sont finis et $f : E \longrightarrow F$ est injective, alors nécessairement

$$\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$$

En particulier toute application $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$ ou B est un ensemble fini non vide est non injective.

Application surjective

f est dite **surjective**, si tout élément de F a au moins un antécédent dans E .

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

Application surjective

f est dite **surjective**, si tout élément de F a au moins un antécédent dans E .

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

Remarque: Si les ensembles E et F sont finis et $f : E \longrightarrow F$ est surjective, alors nécessairement

$$\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$$

Application bijective

Application bijective

f est dite **bijective**, si f est à la fois injective et surjective , ou encore si tout élément de F a un antécédent et un seul dans E .

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$$

Ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables

Définitions: Deux ensembles non vides E et F sont dits **équipotents** s'il existe une application $f : E \longrightarrow F$ bijective.

Ensembles dénombrables

Définitions: Deux ensembles non vides E et F sont dits **équipotents** s'il existe une application $f : E \longrightarrow F$ bijective.

Un ensemble non vide E est dit dénombrable, si E est équipotent à $\mathbb{N}$ ou à une partie de $\mathbb{N}$.

Exemples:

- Tout ensemble **fini** est dénombrable.
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

Propriétés remarquables

- (1) Toute partie non vide d'un ensemble dénombrable est encore dénombrable.
- (2) La réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- (3) Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable. En particulier $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

La bijection réciproque d'une application bijective

Définition: Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Alors on peut définir une application $s : F \longrightarrow E$ de la façon suivante: à tout $y \in F$, on associe son unique antécédent x dans E .

$$y \longmapsto x \text{ si } y = f(x)$$

La bijection réciproque d'une application bijective

Définition: Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Alors on peut définir une application $s : F \longrightarrow E$ de la façon suivante: à tout $y \in F$, on associe son unique antécédent x dans E .

$$y \longmapsto x \text{ si } y = f(x)$$

s est appelé bijection réciproque de f et on la note f^{-1} .

Propriétés remarquables de s

(i) - s est **bijjective** et sa bijection réciproque s^{-1} est exactement f .

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

(ii) - On a $s(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$ et $f(s(y)) = y$ pour tout $y \in F$.

Exemples:

(1) - id_A est bijective et $(id_A)^{-1} = id_A$.

(2) - $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x + 2$ est bijective et $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x - 2$

(3) - $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto -x$ est bijective et égale à sa propre bijection réciproque.

Bijections classiques

(4) - $\ln : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \ln^{-1} = \exp$

(5) - $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1], \cos^{-1} = \arccos$

(6) - $\sin : [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1], \sin^{-1} = \arcsin$

Composition des applications

Définition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : N \longrightarrow M$ deux applications. Si $F \subset N$, alors on peut définir une nouvelle application $h : E \longrightarrow M$ par:
 $x \longmapsto g(f(x))$.

Composition des applications

Définition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : N \longrightarrow M$ deux applications. Si $F \subset N$, alors on peut définir une nouvelle application $h : E \longrightarrow M$ par:
 $x \longmapsto g(f(x))$.

h est appelé la **composée** de g par f et est noté

$$g \circ f$$

Notons bien que par définition, on a pour tout $x \in E$,
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Propriétés remarquables de la composition

(i)- Si $s : V \longrightarrow W$ est une 3^e application telle que $M \subset V$, alors

$$s \circ (g \circ f) = (s \circ g) \circ f$$

(ii)- On a $id_F \circ f = f$ et $g \circ id_N = g$

Exemples: $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$ et $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x + 2$, on a

$$s \circ v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (x + 2)^2 \text{ et } v \circ s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 + 2$$

On voit qu'en particulier que

$$s \circ v \neq v \circ s$$

Théorème: Soient E, F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que

$$g \circ f = id_E \text{ et } f \circ g = id_F$$

Alors f et g sont bijectives, et $f^{-1} = g$

Preuve: A faire en exercice.