

Fiche de TD d'ELEMENTS de LOGIQUE

Exercice 1 :

Soient A , B et C trois ensembles (quelconques).

1. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. Montrer que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
4. Montrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Exercice 2 :

Soit A un ensemble et $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une famille d'ensembles.

1. Montrer que

$$A \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap B_k)$$

2. Montrer que

$$A \cup \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (A \cup B_k)$$

Exercice 3 :

Dire si les ensembles suivants sont cartésiens.

1. $\{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$
2. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 1), (1, 8)\}$
3. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 \geq 1\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x = -y\}$

Exercice 4 :

Dire ssssi les proposition suivantes sont vraies ou fausses, et justifier

Pour 3 ensembles A , B et H ,

1. on a toujours $A \subset A \cup H$ et $A \cap H \subset A$
2. si $A \cup B \subset H$, alors $A \subset H$ et $B \subset H$.
3. si $\forall X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$ on a $X \subset B$, alors $A \subset B$.
4. si $\forall X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ on a $X \not\subset B$, alors $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 5 :

Notons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de Math-info et par $\mathcal{M}$ l'ensemble des repas.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Les étudiants de Math-info mangent tous les repas.
2. Les étudiants de Math-info mangent un repas particulier.
3. Des étudiants de Math-info mangent tous les repas.

4. Il y a des repas que tous les étudiants de Math-info ne mangent pas.

Exercice 6 : Etant donnés deux entiers a et b , on considère les deux propositions suivantes : $P : a$ et b sont tous les deux pairs. et $Q : a$ et b sont de parités différentes.

Que signifient les implications suivantes, lesquelles sont vraies pour toutes les valeurs de a et b .

$$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P, \neg P \Rightarrow \neg Q, P \Rightarrow \neg Q, Q \Rightarrow \neg P, \\ \neg Q \Rightarrow P, \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Exercice 7 :

Sur l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on considère la relation binaire suivante :

$$a \prec b \text{ si } a \text{ divise } b.$$

Lorsqu'on aura $a \prec b$, on dira que b **major**e a ou encore a **min**ore b .

1. A-t-on $6 \prec 15$?, $12 \prec 1883$?, $20 \prec 107$?
2. Montrer que la relation $\prec$ est à la fois **réflexive** , **anti-symétrique** et **transitive**.
3. Soit $A = \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 18, 30\}$. La partie A est-elle **majorée** ?
4. La partie A est-elle **minorée** ?

Exercice 8 : Sur l'ensemble $\mathbb{N}$, on considère la relation binaire suivante :

$$a \mathcal{R} b \text{ si } a^2 - b^2 \in 12\mathbb{Z}.$$

1. Dire si les couples suivants sont dans la relation $\mathcal{R} : (-2, 6), (-2, -2), (22, 6), (1, 17)$.
2. Quelles sont les propriétés remarquables de $\mathcal{R}$?
3. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, déterminer les classes d'équivalence de 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Exercice 9 : . Soit l'intervalle $I =]-1, \sqrt{5}]$.

1. Trouver une application f de I dans I qui soit injective.
2. Trouver une application f de I dans I qui soit surjective.
3. Trouver une application f de I dans I qui soit **injective et surjective**.
4. Trouver une application f de I dans I qui soit **ni injective, ni surjective**.

Exercice 10 : .

1. Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.
2. La composée de deux applications surjectives est injective ?
3. Montrer que si la composée $g \circ f$ de deux applications est injective, alors f est injective.
4. Montrer que si la composée $g \circ f$ de deux applications est surjective, alors g est surjective.

Exercice 11 : .

Soit application de E vers F , $h : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que pour deux parties A_1 et A_2 de E , on a $h(A_1 \cup A_2) = h(A_1) \cup h(A_2)$.

2. Que peut-on dire de $h(A_1 \cap A_2)$ par rapport à $h(A_1) \cap h(A_2)$?
3. Montrer que pour deux parties B_1 et B_2 de F , on a

$$h^{-1}(B_1 \cup B_2) = h^{-1}(B_1) \cup h^{-1}(B_2) \text{ et } h^{-1}(B_1 \cap B_2) = h^{-1}(B_1) \cap h^{-1}(B_2)$$

4. Que peut-on dire de $h^{-1}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k)$ et de $h^{-1}(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k)$, pour une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties de F ?

Exercice 12 : . On considère l'application

$$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (p, q) \longmapsto p + \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1).$$

1. Calculer si possible $\varphi(-1, 0)$, $\varphi(0, 0)$, $\varphi(0, 1)$, $\varphi(2, 1)$.
2. φ est-elle bien définie ?
3. Montrer que pour deux couples d'entiers (p, q) et (a, b) tels que $p+q \neq a+b$, on a $\varphi(p, q) \neq \varphi(a, b)$.
4. En déduire que φ est injective.
5. On admet que φ est **bijectif**. Construire une application bijective de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}^2$, puis une autre de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 13 : . On considère les ensembles suivants :

$$E = \{-1, 0, 2, 5\} \text{ et } F = \{a, b, c\}$$

1. Trouver une application f de E dans F et une application g de F dans E telles que : $f \circ g = id_F$.
2. Trouver une application θ de E dans E telle que :

$$\theta \neq id_E \text{ et } \theta \circ \theta = id_E$$

Exercice 14 :

On considère $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$A_n = \{0, \dots, n\}$$

1. Ecrire A_n en compréhension. A-t-on $A_n \subset A_{n+1}$?
2. Pour toute partie X de $\mathbb{N}$, on note $\overline{X}$ son **complémentaire** dans $\mathbb{N}$. Déterminer $\overline{\overline{A_n}}$.
3. Calculer $A_m \cap \overline{A_n}$ suivant n et m .
4. Soit $A \subset \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'équation : $X \cup \overline{A} = X \cup A$