

Licence 1 Maths-Info-Ing/ 2024-2025 / Cours
d'Algèbre:
STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Enseignant: AKEKE E. D.

October 3, 2024

1 LOIS DE COMPOSITION

- Définitions et exemples
- Quelques propriétés
- Homomorphismes

Définition

Soient E un ensemble non vide. On appelle **loi de composition interne** sur E toute application $f : E \times E \longrightarrow E$.

Si $z = f(x, y)$, on peut convenir d'écrire $z = x \top y$ (ou $x \perp y$, $x * y$, $x + y$, $x.y$,). Les éléments x et y s'appellent les **termes** et z le résultat de l'**opération** $x \top y$.

Exemple 1

Dans \mathbb{R} (ou \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{C}), les lois usuelles $+$, \times sont des lois de composition internes.

$$(1) \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x + y$$

$$(2) \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x \times y$$

$$(3) \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \longmapsto x + y$$

$$(4) \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \longmapsto x + y$$

$$(5) \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x \times y$$

$$(6) \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y.$$

Exemple 2

Soit F un ensemble. Sur l'ensemble $\mathcal{P}(F)$ des parties de F , on a les lois de composition internes suivantes.

$$(1) \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(F), (A, B) \longmapsto A \cap B$$

$$(2) \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(F), (A, B) \longmapsto A \cup B$$

$$(3) \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(F), (A, B) \longmapsto A \Delta B,$$

où $A \Delta B$ est la *différence symétrique* de A par B , définie par

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

où $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de F qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B .

Exemple 3

Soit F un ensemble non vide. Sur l'ensemble $\mathcal{A}(F)$ des applications de F vers F , la composition des applications de F vers F est une loi de composition interne dans $\mathcal{A}(F)$. Cette loi est souvent notée “ \circ ”. Précisément, on a

$$\mathcal{A}(F) \times \mathcal{A}(F) \longmapsto \mathcal{A}(F), (f, g) \longmapsto f \circ g$$

Exemple 4

L'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y - 3xy$$

est une loi de composition interne sur \mathbb{R} .

Exemple 5

La fonction

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x^2 + y + 5}{x + 3}$$

n'est pas une loi de composition interne sur \mathbb{R} . En effet, cette fonction n'est pas une application puisque $(-3, 5)$ n'a pas d'image.

Définition

Soit $(E, *)$ un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne.

1) Une partie non vide A de E est dite **stable** pour la loi $*$ si la propriété suivante est satisfaite:

$$\forall x, y \in A, \quad \text{on a } x * y \in A.$$

2) La loi $*$ est **associative** dans E si la propriété suivante est satisfaite:

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x * y) * z = x * (y * z).$$

3) Deux éléments x et y de E commutent dans E pour la loi $*$ si

$$x * y = y * x$$

Définition

4) La loi $*$ est **commutative** (dans E) si:

$$\forall x, y \in E, \quad x * y = y * x$$

c'est à dire que deux éléments quelconque de E commutent pour la loi $$.*

5) L'élément $e \in E$ est **élément neutre** pour la loi $*$ si:

$$\forall x \in E, \quad x * e = x \quad \text{et} \quad e * x = x$$

6) L'élément $a \in E$ est un **élément régulier** pour la loi $*$ si:

$$\forall x, y \in E, \quad a * x = a * y \Rightarrow x = y \quad \text{et} \quad x * a = y * a \Rightarrow x = y.$$

Définition

7) Si $(E, *)$ admet un élément neutre e et $x, y \in E$, on dit que y est le **symétrique** de x dans $(E, *)$ si:

$$x * y = e \quad \text{et} \quad y * x = e.$$

8) L'élément $a \in E$ est un **élément idempotent** pour la loi $*$ si:

$$a * a = a$$

9) L'élément $a \in E$ est dit **absorbant** si:

$$\forall x \in E, \quad a * x = a = x * a$$

Exemples et contre-exemples

- a) \mathbb{N} est une partie de \mathbb{R} stable pour l'addition usuelle $+$
- b) L'intervalle $[0, 1]$ est une partie de \mathbb{R} stable pour la multiplication usuelle \times .
- c) L'intervalle $[0, 1]$ est une partie de \mathbb{R} , non stable pour l'addition usuelle $+$.
En effet, on a $1 \in [0, 1]$ mais $1 + 1 \notin [0, 1]$.

1) Les lois usuelles $+$ et \times sur \mathbb{R} , sont de composition internes, associatives et commutatives. En effet, pour tout nombres réels x et y , on a

$$x + y = y + x \quad \text{et} \quad x \times y = y \times x$$

et pour nombres réels x, y, z , on a

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{et} \quad x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

Dans $(\mathbb{R}, +)$, l'élément neutre est 0 puisque pour tout nombre réel c , on a

$$0 + c = c \quad \text{et} \quad c + 0 = c.$$

Dans (\mathbb{R}, \times) l'élément neutre est 1 puisque pour tout nombre réel c , on a

$$1 \times c = c \quad \text{et} \quad c \times 1 = c$$

La multiplication usuelle n'est pas une loi interne dans $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 0\}$. En effet, on a $-2 \in \mathbb{Z}_-$ et $-7 \in \mathbb{Z}_-$, mais

$$(-2) \times (-7) = 14 \notin \mathbb{Z}_-$$

2) Soit F un ensemble.

(i) Les lois \cap et \cup sont associatives et commutatives dans $\mathcal{P}(F)$.

C'est à dire que pour toutes parties A, B de F , on a

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A$$

Et pour toutes parties A, B, C de F , on a

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(ii) Dans $(\mathcal{P}(F), \cup)$, l'élément \emptyset est élément neutre car pour toute partie A de F , on a

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{et} \quad \emptyset \cup A = A.$$

(iii) Dans $(\mathcal{P}(E), \cap)$ l'élément F est l'élément neutre car pour toute partie A de F , on a

$$A \cap F = A \quad \text{et} \quad F \cap A = A.$$

3) Soit F un ensemble non vide.

- (i) La loi “ \circ ” de composition des applications de F vers F est associative, c’est à dire que pour toutes applications f, g, h de F vers F , on a

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

- (ii) Cette loi n’est pas commutative car en général $g \circ f \neq f \circ g$.
- (iii) L’élément neutre pour cette loi “ \circ ” est l’application identité de F , $id_F : F \rightarrow F, x \mapsto x$.

En effet, pour toute application g de F vers F , on a

$$g \circ id_F = g \quad \text{et} \quad id_F \circ g = g.$$

- (iv) Dans $(\mathcal{A}(F), \circ)$ les éléments qui admettent un symétrique sont exactement les applications bijectives de F sur F .
En effet, si f est une application bijective de F sur F , on a

$$f \circ f^{-1} = id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = id_F$$

où f^{-1} est la bijection réciproque de f .

Rappelons que s'il existe une application $g : F \rightarrow F$ telle que

$$g \circ f = id_F \quad \text{et} \quad f \circ g = id_F$$

alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

4) Considérons la loi $*$ définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = x + y + xy.$$

C'est bien une loi de composition interne dans \mathbb{R} .

(i) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$(x * y) * z = (x * y) + z + (x * y)z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z$$

Donc

$$(x * y) * z = x + y + z + xy + yz + xz + xyz.$$

De même, on montre que

$$x * (y * z) = x + y + z + xy + yz + xz + xyz.$$

Ainsi,

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

La loi $*$ est donc associative dans \mathbb{R} .

(ii) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$x * y = x + y + xy = y + x + yx = y * x.$$

Donc

$$x * y = y * x.$$

La loi $*$ est donc commutative.

(iii) On vérifie sans difficulté que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$0 * x = x \quad \text{et} \quad x * 0 = x,$$

donc 0 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}, *)$.

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, existe-t-il un élément $y \in \mathbb{R}$ tel que $x * y = 0$?

on a $x * y = 0 \Leftrightarrow x + y + xy = 0 \Rightarrow y = \frac{-x}{x+1}$ si $x \neq -1$.

Donc tout élément $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ admet un symétrique dans

\mathbb{R} pour la loi $*$ et son symétrique est $\frac{-x}{x+1}$.

5) La loi $*$ définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = x \times y + 3$$

est commutative. En effet, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$x * y = x \times y + 3 = y \times x + 3 = y * x$$

Ainsi $x * y = y * x$, d'où la commutativité.

Cette loi n'est pas associative. En effet, on a $(2 * 4) * 3 = 36$ et $2 * (4 * 3) = 33$, ainsi $(2 * 4) * 3 \neq 2 * (4 * 3)$ et cette loi $*$ n'est pas associative.

Cette loi n'admet pas d'élément neutre.

Supposons que cette loi $*$ admette un élément neutre $e \in \mathbb{R}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $e * x = x$. C'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e x + 3 = x$$

On déduit alors que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $e = \frac{x - 3}{x}$.

Ceci est absurde car l'élément neutre, s'il existe, il est unique, indépendant de tout autre élément de \mathbb{R} .

Proposition

Soit E un ensemble muni d'une loi $*$ **associative** et admettant un élément neutre $e \in E$. Alors tout élément $x \in E$ admet au plus un symétrique dans $(E, *)$.

Preuve

Soit $x \in E$. Supposons que $y \in E$ et $z \in E$ soient symétriques de x dans $(E, *)$. Alors

$$y * x = e = x * z.$$

La loi $*$ étant associative, on a

$$(y * x) * z = y * (x * z)$$

Par conséquent $e * z = y * e$. D'où $z = y$ et x admet un unique symétrique dans $(E, *)$.

Notations

- 1) Soit E un ensemble muni d'une l.c.i noée “ \cdot ”, **associative** et admettant un élément neutre.
Si $x \in E$ admet un symétrique dans (E, \cdot) , l'unique symétrique de x dans E est noté x^{-1}
- 2) Soit E un ensemble muni de la loi $+$ (loi additive) **associative** et admettant un élément neutre (souvent noté 0).
Si $x \in E$ admet un symétrique, l'unique symétrique de x dans E est noté $-x$ (appelé **l'opposé** de x dans E pour la loi $+$).



Remarques

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée \cdot et associative, admettant un élément neutre $e \in E$.

(1) Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \in E$, on pose:

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ fois}}$$

Alors pour tous entiers $m, n \geq 1$ et pour tout $x \in E$, on a

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n} \quad \text{et} \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

(2) Soient $x, y \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En général, on a $(x \cdot y)^n \neq x^n \cdot y^n$ mais

$$\text{si } x \cdot y = y \cdot x \quad \text{alors} \quad (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$



Proposition

Soient E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée " \cdot ", associative et admettant un élément neutre et $x, y \in E$.

Si $x \in E$ admet un symétrique dans (E, \cdot) et $y \in E$ admet un symétrique dans (E, \cdot) alors $x \cdot y$ admet un symétrique dans E et on a

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$$

(la notation additive est $-(x + y) = -y - x$).



Preuve

En effet, on a

$$(x \cdot y) \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = (x \cdot y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} = x \cdot e \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = e$$

et on a aussi

$$y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot (x \cdot y) = e$$

où e est l'élément neutre dans (E, \cdot) . Donc $x \cdot y$ admet un symétrique dans (E, \cdot) et son symétrique est $y^{-1} \cdot x^{-1}$, ainsi

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$$

Corollaire

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée " \cdot ", **associative** et admettant un élément neutre. Si $x \in E$ admet un symétrique dans (E, \cdot) alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'élément x^n admet un symétrique dans (E, \cdot) et on a

$$(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$$

(la notation additive est $-(nx) = n(-x)$).

Définition

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne notée $*$ et F un ensemble non vide muni d'une loi interne notée \top .

On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est un **homomorphisme** de $(E, *)$ vers (F, \top) si:

$$\forall x, y \in E, \quad f(x * y) = f(x) \top f(y)$$

Un homomorphisme bijectif est appelé un **isomorphisme**.

Si $(E, *) = (F, \top)$ l'homomorphisme f est appelé un **endomorphisme** de E .

Un endomorphisme de E bijectif est appelé un **automorphisme** de E .

Exemples

1) L'application $f : (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ définie par $x \longmapsto \ln(x)$ est un homomorphisme.

En effet, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, on a

$$f(x * y) = \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) = f(x) + f(y)$$

donc $f(x * y) = f(x) + f(y)$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto g(x) = ax$$

est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.

En effet, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x + y) = a(x + y) = ax + ay = g(x) + g(y)$$

Donc

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

Théorème

*Si $f : (E, *) \longrightarrow (F, \cdot)$ et $g : (F, \cdot) \longrightarrow (G, \top)$ sont des homomorphismes alors $g \circ f$ est un homomorphisme.*

Preuve

$$g \circ f : (E, *) \longrightarrow (G, \top).$$

$\forall z \in E$, on a

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)).$$

$\forall x, y \in E$, on a

$$(g \circ f)(x * y) = g(f(x * y)) = g(f(x) \cdot f(y)) = g(f(x)) \top g(f(y))$$

donc

$$(g \circ f)(x * y) = (g \circ f)(x) \top (g \circ f)(y).$$

Ans, $g \circ f$ est un homomorphisme de $(E, *)$ vers (G, \top) .

Théorème

*Si $f : (E, *) \longrightarrow (F, \cdot)$ est un isomorphisme alors la bijection réciproque $f^{-1} : (F, \cdot) \longrightarrow (E, *)$ est un isomorphisme. On l'appelle **l'isomorphisme réciproque** de f .*

Preuve (exercice!)

Exemple

L'application logarithme $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est un isomorphisme de (\mathbb{R}_+^*, \times) sur $(\mathbb{R}, +)$, l'isomorphisme réciproque étant l'application exponentielle $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto e^x$.