Licence 1 Maths-Info-Ing/ 2024-2025 / Cours d'Algèbre: **STRUCTURES ALGÉBRIQUES/ Chapitre 4**

Enseignant: AKEKE E. D.

November 6, 2024

1 Chapitre 4: POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

- Anneau des polynômes à coefficients dans un corps
  - Définitions
  - Opérations dans $\mathbb{K}[X]$
  - Notion de degré d'un polynôme
- Division euclidienne
- Division suivant les puissances croissantes
- Polynômes irréductibles
- Fractions rationnelles
  - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée
  - Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

Définition

On appelle **polynôme** *à coefficients dans le corps* $\mathbb{K}$ *en l'indéterminée* X *tout objet noté*

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

(on écrit aussi $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$*) où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathbb{K}$ **nulle à partir d'un certain rang**, *appelée suite des coefficients de* $P(X)$*.*
On note $\mathbb{K}[X]$ *l'ensemble de ces polynômes.*

Exemples

1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$P(X) = 3 + 2\,X + 7\,X^3 + 4\,X^6$$

est un polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{R}$.

2) $\mathbb{K} = \dfrac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$

$$Q(X) = \overline{4} + \overline{5}\,X^2 + \overline{3}\,X^6$$

est un polynôme à coefficients dans le corps $\dfrac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$.

Définition

Deux polynômes $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ *et* $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ *de* $\mathbb{K}[X]$ *sont dits égaux si et, seulement si, ils ont les mêmes coefficients, c'est à dire,*

$$P = Q \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n.$$

Définition

1) *On appelle* **monôme**, *tout polynôme de la forme* $P(X) = a\,X^k$ *avec* $a \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$.
2) *Soit* $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,X^n \in \mathbb{K}[X]$. *On dit que* P *est un* **polynôme pair** *(resp.* **impair***) si et seulement si* $\forall\, p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0$ *(resp.* $a_{2p} = 0$*).*

Exemple

Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = X^4 + 3X^2 + 7$ est un polynôme pair.

Et le polynôme $Q(X) = 2\,X^7 + 3X^3 + 10X$ est impair.

Définition

Soient $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ *et* $Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ *des polynômes dans* $\mathbb{K}[X]$.

1) On définit la **somme de polynômes** $P(X) + Q(X)$ *par*

$$P(X) + Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) X^n.$$

2) On définit le **produit de polynômes** $P(X) \times Q(X)$ *par*

$$P(X) \times Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Théorème

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *est un* **anneau commutatif, unitaire**, *d'élément nul le polynôme nul et d'élément unité le polynôme constant égal à* 1.

Définition

*(***Opération externe à support dans** $\mathbb{K}$*)*
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, *on définit le polynôme* $\lambda P(X)$ *par*

$$\lambda P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) X^n.$$

Définition

Soit $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ *un polynôme non nul. On appelle* **degré** *de* $P(X)$ *le plus grand entier* $k \in \mathbb{N}$ *tel* $a_k \neq 0$. *On le note* $k = deg\, P(X)$. *Le coefficient* a_k *est alors appelé* **coefficient dominant** *de* P.

Le polynôme P *est dit* **unitaire** *si son coefficient dominant égale* 1.

Si $P(X) = 0$ *on convient que* $deg\, P(X) = -\infty$.

On appelle **valuation** *de* $P(X)$ *le plus petit entier* $m \in \mathbb{N}$ *tel* $a_m \neq 0$. *On le note* $m = Val(P(X))$.

Proposition

On a les propriétés suivantes

1) $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X] \quad deg(P\,Q) = deg(P) + deg(Q),$

2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, P \in \mathbb{K}[X] \quad deg(\lambda\, P) = \begin{cases} deg\ P & si \quad \lambda \neq 0 \\ -\infty \quad si & \quad \lambda = 0, \end{cases}$

3) $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X]$, *on a*

$$deg(P+Q) \leq \max(deg(P), deg(Q)),$$

avec égalité lorsque $deg\ P \neq deg\ Q$.

Corollaire

1) Les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ *sont les polynômes constants non nuls.*
2) $\forall\, P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad P\,Q = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 0 \quad \textit{ou} \quad Q = 0$
(l'anneau $\mathbb{K}[X]$ *est intègre).*

En effet, si $P\,Q = 0$, on a $deg(PQ) = -\infty$. Comme $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$, on a forcement $deg(P) = -\infty$ ou $deg(Q) = -\infty$. C'est à dire que $P = 0$ ou $Q = 0$.

Définition

Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ *et* $x \in \mathbb{K}$.

i) *Le scalaire* $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{K}$ *est appelé* **valeur** *de* P *en* x, *on le note* $P(x)$.

ii) *On appelle* **racine** *(ou* **zéro***) d'un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tout élément* $x \in \mathbb{K}$ *tel que* $P(x) = 0$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}[X]$, le nombre réel 2 est une racine du polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ car $P(2) = 0$.

Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$, il existe un **unique** *couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que*

$$P = A\,Q + R \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg A.$$

Le polynôme Q est appelé **quotient** *de la* **division euclidienne** *de P par A et le polynôme R est appelé le* **reste** *de la division euclidienne de P par A.*

Exemple (cf. CM)

Exercice

Déterminons le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^{2025}$ par le polynôme $(X-1)(X+2)$

D'après la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)(X+2)$, il existe des polynômes $Q(X)$, $R(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X) = Q(X)\,(X-1)(X+2) + R(X)$$

avec $deg(R(X)) < deg((X-1)(X+2)) = 2$. Donc $R(X)$ est de la forme

$$R(X) = a + bX$$

où a, $b \in \mathbb{R}$. On obtient donc

$$X^{2025} = Q(X)\,(X-1)(X+2) + a + b\,X$$

Déterminons a et b.
En prenant $X = 1$ et ensuite $X = -2$ dans la relation précédente, on obtient le système

$$(S)\begin{cases} a+b=1 \\ a-2b=(-2)^{2025} \end{cases}$$

On en déduit que

$$a = \frac{2-(-2)^{2025}}{3} \quad \text{et} \quad b = \frac{1-(-2)^{2025}}{3}$$

Donc le reste est $R(X) = \dfrac{2-(-2)^{2025}}{3} + \dfrac{1-(-2)^{2025}}{3}X$

Remarquons que $(-2)^{2025} = (-1)^{2025}\, 2^{2025} = -2^{2025}$ par conséquent, on a

$$R(X) = \frac{2 + 2^{2025}}{3} + \frac{1 + 2^{2025}}{3} X$$

Définition

On dit que le polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ **divise** *le polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *dans* $\mathbb{K}[X]$ *si le reste de la division euclidienne de* P *par* A *est nul, on écrit* A/P, *on dit aussi que* P *est un* **multiple** *de* A.

Proposition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$. *Alors*

$$a \quad \text{est une racine de} \quad P \quad \Leftrightarrow \quad (X-a) \,/\, P.$$

Preuve

Il est évident que si $(X - a)/P$ alors a est une racine de P. Réciproquement supposons que a est une racine de P. D'après la division euclidienne de P par $X - a$, il existe un couple (unique) $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$P = (X - a)\,Q + R \quad \text{avec} \quad deg\ R < deg\ (X - a).$$

Comme $deg(X - a) = 1$ alors $deg\ R = 0$ ou $deg\ R = -\infty$. On a nécessairement $deg\ R = -\infty$ c'est à dire $R = 0$, sinon $P(a) \neq 0$. Ainsi $P = (X - a)\,Q$, c'est à dire X-a divise P.

Théorème

Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ *des éléments* **deux à deux distincts** *de* $\mathbb{K}$. *Soit* $P(X) \in \mathbb{K}$. *Alors le polynôme* $(X - a_1) \cdots (X - a_n)$ *divise* $P(X)$ *si, et seulement si pour tout* $i = 1, \cdots, n$ *le polynôme* $(X - a_i)$ *divise* $P(X)$.

Exemple

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.
Alors le polynôme $Q(X) = (X - 3)(X + 5)$ divise $P(X)$ si et seulement si $X - 3$ divise $P(X)$ et $X + 5$ divise $P(X)$.

Théorème

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, $a \in \mathbb{K}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *Le polynôme* $(X-a)^k$ *divise* $P(X)$,

ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.

où $P^{(i)}(X)$ *est la dérivée d'ordre* i *de* $P(X)$.

Preuve (Utiliser la formule de Taylor)

Théorème-Définition

Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $v(B) = 0$. Soit $h \in \mathbb{N}$, il existe un couple unique de polynômes Q_h, R_h tels que:

$$A = B\,Q_h + R_h, \quad deg\ Q_h \leq \ h,\ \ val(R_h) > \ h.$$

Les polynômes Q_h et R_h s'appellent respectivement **quotient** *et* **reste** *dans la division* **suivant les puissances croissantes** *de A par B à l'ordre h.*

Exemple

On considère les polynômes réels suivants.

$$P(X) = 1 - X \quad \text{et} \quad Q(X) = 1 + X$$

Déterminons la division suivant les puissances croissantes du polynôme $P(X)$ par le polynôme $Q(X)$ à l'ordre 3.
On obtient

$$P(X) = Q(X)(1 - 2X + 2X^2 - 2X^3) + 2X^4$$

Notons qu'il existe une infinité de divisions suivant les puissances croissantes, une pour chaque valeur de l'entier h. Le lecteur est invité à noter que la division suivant les puissances croissantes de A par B n'est définie que si la valuation de B est nulle.

Définition

1) Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont dits **associés** *si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $\quad P = \lambda\, Q$.*
2) Un polynôme P est dit **unitaire** *si son coefficient dominant est égal à 1. Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, est associé à un unique polynôme unitaire.*

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** *dans $\mathbb{K}[X]$ si tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ diviseur de P dans $\mathbb{K}[X]$ est un polynôme constant non nul ou un polynôme associé à P.*
Autrement dit P est un polynôme irréductible si P n'admet pas dans $\mathbb{K}[X]$, de polynôme diviseur autre que les polynômes constants non nuls et les polynômes de la formes λP où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple
Le polynôme réel $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarques

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$. Le polynôme $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P(X)$ ne peut s'écrire comme produit de deux polynômes non constans de $\mathbb{K}[X]$.

1) Dans $\mathbb{K}[X]$ les polynômes de la forme $a + bX$ avec $a, b \in \mathbb{K}$, $b \neq 0$, sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
2) Dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes irréductibles sont exactement ceux de la forme $a + bX$ avec $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$,
3) Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont exactement ceux de la forme $a + bX$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ ou les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, de dégré 2 qui sont à discriminant strictement inférieur à 0.
4) Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais il est réductible dans $\mathbb{C}[X]$, puisque $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$.

Proposition

Soient A, $B \in \mathbb{K}[X]$ *et* P *un polynôme irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$. *Alors*

$$P \,/ A\,B \quad \Rightarrow \quad P/A \quad ou \quad P/B.$$

Théorème

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$. Alors $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\exists\, P_1, \ldots, P_n$ des polynômes irréductibles deux à deux distincts et $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}.$$

De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs, on l'appelle décomposition en **produit de facteurs irréductibles** de P.

Une fraction rationnelle F est une classe de couples de polynômes (P, Q) avec $Q \neq 0$. Si (P, Q) est un représentant quelconque de F on convient d'écrire $F = \dfrac{P}{Q}$. La relation d'équivalence s'écrit

$$(P, Q)\mathcal{R}\,(P_1, Q_1) \quad \Leftrightarrow \quad PQ_1 = Q\,P_1$$

Soit $D = pgcd(P, Q)$. On peut écrire $P = D\,P_1$ et on a $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1}$ avec P_1 et Q_1 premiers entre eux, d'où

Définition

Soit F une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$. Tout réprésentant de F, écrit $\dfrac{P_1}{Q_1}$, tel que P_1 et Q_1 soient premiers entre eux s'appelle **forme irréductible** *de F. Si de plus Q_1 est normalisé cette représentation est unique et s'appelle la* **forme réduite** *de F. Le polynôme P_1 est appelé* **numérateur** *et le polynôme Q_1 est appelé* **dénominateur** *de F.*

Théorème-Définition

Soient F une fraction rationnelle non nulle de $\mathbb{K}[X]$ et $\dfrac{P}{Q}$ une représentant quelconque de F. L'entier relatif $deg\ P - deg\ Q$ est indépendant du représentant choisi de F. On l'appelle le **degré** *de la fraction rationnelle F.*

Preuve En effet, si $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1}$, on a $P\,Q_1 = Q\,P_1$. Par conséquent on a

$$deg\ P + deg\ Q_1 = degP_1 + deg\ Q$$

d'où $deg\ P - deg\ Q = degP_1 - deg\ Q_1$. On convient, comme pour les polynômes, de poser $deg\,0 = -\infty$.

On définit sur $\mathbb{K}(X)$ l'addition et la multiplication de la façon suivante:

$$\forall \frac{P}{Q}, \frac{S}{R} \in \mathbb{K}(X), \quad \frac{P}{Q} + \frac{S}{R} = \frac{PR + QS}{QR}, \qquad \frac{P}{Q}\frac{S}{R} = \frac{PS}{QR}$$

Théorème

$(\mathbb{K}(X), +, .)$ *est un corps commutatif.*

Proposition

Soit $F = \frac{P}{Q}$, *il existe un unique polynôme* E *tel que* $F = \frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ *avec* $\deg R < deg\ Q$.

Preuve

D'après la division euclidienne de P par Q on a $F = PE + R$. avec $deg\ R < deg\ Q$ soit $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$. Ce qui montre l'existence de E ainsi que son unicité.

Soit F une fraction rationnelle quelconque écrite sous-forme irréductible et normalisée de $\mathbb{K}[X]$. Supposons également son dénominateur écrit sous forme de produit de polynômes irréductibles, c-à-d

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q_1^{n_1} \dots Q_l^{n_l}}$$

Théorème

Il existe une famille unique de polynômes $(E, N_{1,1}, \ldots, N_{1,n_1}, N_{2,1}, \ldots, N_{2,n_2}, \ldots, N_{l,1}, \ldots, N_{l,n_l})$ *telle que*

$$F = E + \left(\frac{N_{1,1}}{Q_1} + \cdots + \frac{N_{1,n_1}}{Q_1^{n_1}}\right) + \left(\frac{N_{2,1}}{Q_2} + \cdots + \frac{N_{2,n_2}}{Q_2^{n_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{N_{l,1}}{Q_l} + \cdots + \frac{N_{l,n_l}}{Q_l^{n_l}}\right)$$

avec $\forall\, i \in [[1, l]], \forall\, j \in [[1, n_i]], \quad deg\ N_{ij} < \ deg\ Q_i.$

NB: VOIR sur le net des exemples et méthodes de décomposition en éléments simples de fractions.

Soit $F \in \mathbb{C}[X]$ une fraction rationnelle complexe écrite sous-forme irréductible et normalisée. Supposons également son dénominateur écrit sous forme de produit de polynômes irréductibles, c-à-d

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_n)^{\alpha_n}}$$

Théorème

Il existe un unique polynôme E et une unique famille de scalaires

$$(\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{1,\alpha_1}, \lambda_{2,1}, \ldots, \lambda_{2,\alpha_2}, \ldots, \lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,\alpha_n})$$

tels que

$$F = E + \left(\frac{\lambda_{1,1}}{X - a_1} + \cdots + \frac{\lambda_{1,\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}}\right) + \left(\frac{\lambda_{2,1}}{X - a_2} + \cdots + \frac{\lambda_{2,\alpha_2}}{(X - a_2)^{\alpha_2}}\right) + \cdots + ($$

E s'appelle la **partie entière** *de F et* $\dfrac{\lambda_{i,1}}{X - a_i} + \cdots + \dfrac{\lambda_{i,\alpha_i}}{(X - a_i)^{\alpha_i}}$ **la partie polaire** *relative au pôle a_i.*

Théorème

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}[X]$ *une fraction rationnelle réelle. Soit*

$$Q(X) = (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_m)^{\alpha_m}(X^2+p_1 X+q_1)^{\beta_1} \dots (X^2+p_n X+q_n)^{\beta_n}$$

l'écriture de Q en produit de polynômes irréductibles. Alors il existe un polynôme unique E de $\mathbb{R}[X]$ *et des familles uniques de* **réels** $(A_{ij}), i \in [[1, m]], \quad j \in [[1, \alpha_i]], (B_{kl}),\ C_{kl},\ k \in [[1, n]],\ l \in [[1, \beta_k]]$ *tels que*

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(X-a_i)^j}) + \sum_{k}^{n} (\sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{B_{kl} X + C_{kl}}{X^2 + p_k X + q_k)^l})$$

Les éléments de la première sommation s'appellent éléments