

Fiche de TD / Structures algébriques

Exercice 1 : Soit $E = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$.

1. Combien de lois de composition internes y a-t-il sur E ?
2. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E , qui soit commutative, admette l'élément 0 comme élément neutre,
3. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E telle chaque élément admette pour symétrique son propre opposé.
4. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E , qui soit commutative, admette l'élément 0 comme élément neutre, et telle chaque élément admette pour symétrique son propre opposé.
5. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E , qui soit non commutative et admette l'élément 3 comme élément neutre,

Exercice 2 : Etudier les lois de composition internes

1) La \oplus définie sur \mathbb{R} , suivante :

$$a \oplus b = (a - 1)(b - 1) + 1$$

2) La loi de composition $*$ définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$a * b = \max\{a, b\}$$

3) La loi de composition interne \top définie sur \mathbb{N}^* par :

$$a \top b = PPCM(a, b)$$

(Associativité, commutativité, élément neutre, éléments symétriques, éléments idempotents)

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z + \bar{z}$

1. Montrer que f est une application bien définie.
2. Montrer que f est un homomorphisme pour les additions sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .
3. Donner trois parties stables de $(\mathbb{R}, +)$
4. Donner trois parties stables de $(\mathbb{C}, +)$
5. Montrer que si A est une partie stable de $(\mathbb{C}, +)$, alors $f(A)$ est une partie stable de $(\mathbb{R}, +)$ (où $f(A)$ est l'ensemble des éléments de \mathbb{R} ayant, par f , au moins un antécédent dans A).
6. Soit B une partie de \mathbb{R} .

(i) Montrer que si B est une partie stable de $(\mathbb{R}, +)$, alors $f^{-1}(B)$ est une partie non vide.
(Où $f^{-1}(B)$ est l'ensemble de tous les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) \in B$).

(ii) Montrer que si B est une partie stable de $(\mathbb{R}, +)$ alors $f^{-1}(B)$ est une partie stable de $(\mathbb{C}, +)$.

Exercice 4 :

- 1) Rappeler la définition d'un anneau unitaire.
- 2) Rappeler la définition d'un corps.
- 3) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on pose

$$a \top b = a + b - 1 \quad \text{et} \quad a * b = ab - a - b + 2$$

- (i) Montrer que $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un anneau commutatif unitaire.
- (ii) Vérifier si $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un corps.

Exercice 5 : On définit dans $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la loi de composition " \top " par :

$$\forall (a, b) \in E \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E, \quad (a, b) \top (x, y) = (ax, xb + y)$$

- 1) (E, \top) est-il un groupe commutatif?
- 2) Résoudre les équations suivantes dans E .

i) $(a, b) \top (1, 3) = (a^2, 0)$,

ii) $(a, b) \top (a, b) = (a^3, b^2)$.

Exercice 6

Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$d = PGCD(m, n) \Leftrightarrow m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$$

(2) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$p = PPCM(m, n) \Leftrightarrow m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$$

(3) Prouver que

$$PGCD(m, n) = 1 \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ tels que } mu + nv = 1$$

Exercice 7 : Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et le groupe $(\mathcal{P}(A), \Delta)$. où Δ est la loi différence symétrique.

1. Déterminer $\mathcal{P}(A)$.
2. Montrer que $\mathcal{H} = \{\emptyset, A\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{P}(A)$.
3. Déterminer le groupe quotient $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$, puis la table de sa loi quotient.

Exercice : 8 : Soient G le groupe quotient $\frac{\mathbb{Z}}{18\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer **tous les sous-groupes de G** .
2. Avec l'inclusion, ordonner ces sous-groupes.

Anneaux unitaires

Exercice 9 : On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est **un sous-anneau** du corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
2. Si $z = a + b\sqrt{7}$, on note $\widehat{z} = a - b\sqrt{7}$. Montrer que $\widehat{z_1 + z_2} = \widehat{z_1} + \widehat{z_2}$, $\widehat{z_1 \cdot z_2} = \widehat{z_1} \cdot \widehat{z_2}$, et $z \cdot \widehat{z} \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que si z est inversible alors \widehat{z} est inversible et $z\widehat{z} \in \{-1, 1\}$.
4. Donner 19 éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

Exercice 10 : On note par \bar{z} le conjugué de z dans \mathbb{C} .

I- On pose $\mathbb{Z}[i] = \{ z \in \mathbb{C} / \exists a, b \in \mathbb{Z} \quad z = a + i b \}$.

(1) Montrer $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.

(2) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$?

II- On considère l'ensemble

$$A = \{ z \in \mathbb{C} / \exists a, b \in \mathbb{Z} \quad z = a + i b \sqrt{5} \}$$

a) Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau.

Pour $u, v \in A$, on dit que u divise v dans l'anneau $(A, +, \times)$ si, il existe $w \in A$ tel que $v = w u$.

b) Montrer que si u divise v alors $u \bar{u}$ divise $v \bar{v}$ dans \mathbb{Z} .

c) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(A, +, \times)$?

d) Quels sont les diviseurs de 9 dans l'anneau $(A, +, \times)$?

Exercice 11 :

1) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{32\mathbb{Z}}$ et préciser l'inverse de chaque élément inversible.

2) Même question avec l'anneau $(\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}, +)$.

4) Déterminer tous les sous-groupes du groupe $(\frac{\mathbb{Z}}{17\mathbb{Z}}, +)$.
et tous les éléments inversibles de l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{17\mathbb{Z}}$.

Exercice 12 : On considère l'anneau quotient $A = \frac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}$.

1. Quels sont les restes par la division euclidienne par 24, de -2018 et de 17^{2016} ?
2. A est-il commutatif, unitaire, intègre ?
3. Déterminer $\mathcal{U}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A .
4. Déterminer tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\bar{x}^2 + \overline{12} \bar{x} + \overline{23} = \bar{0}$$

où \bar{x} est la classe de x modulo 24.

Exercice 13 : .

Résoudre dans \mathbb{Z} les systèmes de congruence suivants ;

$$\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{101} \\ x \equiv -6 \pmod{23} \end{cases}, \quad \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{101} \\ x \equiv 1 \pmod{23} \\ x \equiv -1 \pmod{11} \end{cases}$$

Exercice 14 : .

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Justifier vos réponses !

- a. Si le produit de deux entiers est congru à 0 modulo 5 alors l'un des deux est multiple de 5.
- b. Si un entier est congru à 2 modulo 5 alors sa puissance quatrième est congrue à 1 modulo 5.
- c. Si deux entiers sont congrus à 2 modulo 5, alors leur somme est congrue à 1 modulo 5.
- d. Pour tout entier, non multiple de 5, il existe un entier tel que le produit des deux soit congru à 1 modulo 5.
- e. Aucun entier n'est tel que son carré soit congru à 2 modulo 5.
- f. Aucun entier n'est tel que son carré soit congru à 2 modulo 5.
- g. La puissance quatrième d'un entier non multiple de 5 est toujours congrue à 1 modulo 5.

Polynômes et fractions rationnelles.

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , le polynôme $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$. Calculer le quotient.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme réel $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est divisible par $X^2 - 3X + 2$. Quel est le quotient ?

c) Soit $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Quel est le reste de la division euclidienne du polynôme réel $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$ par le polynôme $X^2 + 1$?

Exercice 16 : .

- Effectuer la **division euclidienne** de $X^6 + 2X^5 + 1$, par $X^2 + X + 1$.
- Effectuer la **division suivant les puissances croissantes** de $X^6 + 2X^5 + 1$, par $X^2 + X + 1$ à l'**ordre 3**.
- Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$\frac{X^6 + 2X^5 + 1}{(X^2 + X + 1)^2}$$

- Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles :
 $\frac{1}{X^6 - 1}$, $\frac{X + 1}{(1 + X + X^2)X^6}$, $\frac{X^6}{(X - 1)(X - 2)^3}$

Exercice : 17 .

(a) Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes

$$P = X^4 + 8X^3 - 3X^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q = 2X^3 - 5X + 3$$

i) Effectuer la division euclidienne de P par Q .

ii) Calculer le PGCD et le PPCM des polynômes P et Q

(b) On considère à présent le corps $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Dans $K[X]$, on considère les polynômes

$$T = X^4 + \bar{2}X + \bar{4} \quad \text{et} \quad H = \bar{5}X^3 + \bar{5}X + \bar{4}$$

- i) Factoriser le polynôme T dans $K[X]$.
- ii) Effectuer la division euclidienne de T par H .
- iii) Calculer le PGCD des polynômes T et H .