Suites et Fonctions dérivables

Modeste ESSOH

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Édition 2021

Table des matières

1 Propriétés des nombres réels **5**

1.1 Sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}$ 5

1.2 Relations d'ordre 5

1.3 Majorant, plus grand élément, borne supérieure 6

1.4 L'ensemble des réels, axiomatique 8

1.5 Valeur absolue. 8

1.6 La fonction partie entière 9

1.7 Les intervalles 9

1.8 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ 9

2 Suites réelles **11**

2.1 Définition, premières propriétés 11

2.2 Suites convergentes 11

2.3 Suites extraites 13

2.4 Suites monotones 13

2.5 Limites et inégalités. 14

2.6 Suites adjacentes. 15

2.7 Suites de cauchy. 16

2.8 Suites particulières 16

3 Fonctions réelles de la variable réelle **17**

3.1 Premières définitions 17

3.2 Fonctions remarquables 17

3.3 Opérations sur les fonctions 18

3.4 Limite d'une fonction 19

3.5 Opérations sur les limites 20

3.6 Limite et inégalités 21

3.7 Limites et fonctions monotones 21

4 Continuité des fonctions réelles de la variable réelle **23**

4.1 Premières définitions et propriétés 23

4.2 Fonctions continues sur un intervalle 24

4.3 Uniforme continuité 26

5 Dérivabilité **29**

5.1 Définitions 29

5.2 Opérations sur les dérivées 30

5.3 Accroissements finis 31

5.4 Variations des fonctions 33

5.5 Formules de Taylor 33

6 Fonctions trigonométriques et hyperboliques **37**

6.1 Fonctions circulaires directes 37

6.2 Fonctions circulaires réciproques 37

6.3 Fonctions hyperboliques directes 39

6.4 Fonctions hyperboliques réciproques 40

7 Dveloppement limit

7.1 Comportement local des fonctions

7.2 Formule de Taylor

7.3 Dveloppements limits

7.4 Oprations sur les dveloppements limits

7.5 Applications des dveloppements limits

Chapitre 1

Propriétés des nombres réels

1.1 Sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}$

Dans la suite, on note

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{\text{entiers positifs}\} = \{0, 1, 2, \ldots\}\\
&\mathbb{Z} = \{\text{entiers relatifs}\} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})\\
&\mathbb{Q} = \{\text{nombres rationnels}\} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}\\
&\mathbb{R} = \{\text{nombres réels}\}
\end{aligned}$$

1.2 Relations d'ordre

Définition 1. *Soient E, F deux ensembles non vides. Une relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F est définie par une partie $\mathcal{G}$ (appelée graphe de la relation) de $E \times F$. Si $(x, y) \in \mathcal{G}$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$.*

Définition 2. *Soit E un ensemble non vide. Une relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers E est dite :*
- *réflexive si $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$,*
- *antisymétrique si pour tous x et y dans E : ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$)$\Rightarrow x = y$,*
- *transitive si pour tous x, y, z dans E : ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) $\Rightarrow x\mathcal{R}z$.*

Définition 3. *Une relation d'ordre sur un ensemble non vide E est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. Lorsque E est munie d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.*

Exemples :

- Si $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, la relation $\leq$ est une relation d'ordre.
- L'ordre lexicographique est une relation d'ordre sur l'ensemble des mots.
- Soit E un ensemble non vide. La relation $\subset$ est une relation d'ordre sur les sous-ensembles de E.

Exercices :

- Montrer que la relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

– Soit $E = \mathbb{N}^*$. Pour $x, y \in E$ on note $x|y$ si x divise y. Montrer que $|$ est une relation d'ordre sur E.

Définition 4. *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Si pour tous x et y dans E, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est totalement ordonné.*

Exemples :
- $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ muni de $\leq$ est une totalement ordonné.
- L'ensemble des mots muni de l'ordre lexicographique est une ensemble totalement ordonné.

Définition 5. *Un préordre sur un ensemble non vide E est une relation binaire réflexive et transitive.*

Proposition 1. *L'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est compatible avec l'addition et la multiplication : pour tous x_1, x_2, y_1, y_2*

$$(x_1 \leq x_2 \quad et \quad y_1 \leq y_2) \Rightarrow x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$$
$$(x_1 \leq x_2 \quad et \quad 0 \leq y_1) \Rightarrow x_1 * y_1 \leq x_2 * y_1.$$

1.3 Majorant, plus grand élément, borne supérieure

Définition 6. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble de E. Un élément $x \in E$ est appelé majorant de A si pour tout $a \in A$, on a $a \leq x$. De même, un élément $x \in E$ est appelé minorant de A si pour tout $a \in A$, on a $x \leq a$. Dans le cas où l'ensemble A admet un majorant (resp. minorant), on dit que A est majoré (resp. minoré). Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.*

Exemple : le sous-ensemble $]-\infty, 1]$ de $\mathbb{R}$ est majoré et non minoré.

Définition 7. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble de E. Un élément $x \in E$ est appelé plus grand élément de A si $x \in A$ et x est un majorant de A. De même, un élément $x \in E$ est appelé plus petit élément de A si $x \in A$ et x est un minorant de A.*

Exercices :
- Montrer que $]1, 2]$ est borné, admet un pge mais pas de ppe.
- Montrer que $\{1/n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est borné, admet une pge mais pas de ppe.
- Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Montrer que A majorée est équivalent à $\{-a; a \in A\}$ est minoré.

Proposition 2. *Soit A un sous-ensemble d'un ensemble $(E, \leq)$ ordonné. Si A admet un plus grand élément (resp. plus petit élément), alors celui-ci est unique.*

Preuve. Soient x, y deux plus grands éléments. Comme $y \in A$ et x pge on a $y \leq x$. De même, $x \in A$ et y pge donne $x \leq y$. Par antisymétrie de la relation $\leq$, on a $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$. □

Théorème 1. *On munit $\mathbb{N}$ de la relation d'ordre usuelle. Alors :*
1) Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
2) Tout sous-ensemble non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Définition 8. *Soit A un sous-ensemble majoré d'un ensemble $(E, \leq)$ ordonné. Un élément $x \in E$ est appelé borne supérieure de A si x est le plus petit des majorants de A. Ainsi, la borne supérieure notée $\sup(A)$, si elle existe, est unique. De même, soit A un sous-ensemble minoré d'un ensemble $(E, \leq)$ ordonné. Un élément $x \in E$ est appelé borne inférieure de A si x est le plus grand des minorants de A. La borne inférieure notée $\inf(A)$, si elle existe, est unique.*

Exercice : on considère l'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}, \leq)$. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ est borné mais n'admet pas de borne supérieure.

Proposition 3. *Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, A un sous-ensemble de E et $x \in E$. Alors :*

$$x \textit{ pge de } A \Rightarrow x = \sup(A) \Rightarrow x \textit{ est majorant de } A,$$

$$x \textit{ ppe de } A \Rightarrow x = \inf(A) \Rightarrow x \textit{ est minorant de } A.$$

Preuve. Si x pge de A alors $x \in A$ et x majorant de A. Soit y un autre majorant de A. y majorant et $x \in A$ implque $x \leq y$. Donc x est le plus petit des majorants de A, d'où $x = \sup(A)$. De plus $x = \sup(A)$ implique x majorant de A. □

Théorème 2. *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle.*
1) Si A est majoré alors A admet une borne supérieure.
2) Si A est minoré alors la borne inférieure de A existe.

Preuve. Admise pour le moment. □

Proposition 4. *Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle. On a $x = \sup(A)$ ssi :*

1) pour tout $a \in A$, $a \leq x$,

2) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $x - \epsilon < a_\epsilon \leq x$.

De même, soit A un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle. On a $x = \inf(A)$ ssi :

1) pour tout $a \in A$, $x \leq a$,

2) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $x \leq a_\epsilon < x + \epsilon$.

Preuve. Supposons $x = \sup(A)$. x est un majorant de A d'où 1). Pour 2), on considère $\epsilon > 0$. Comme x est le plus petit des majorants de A, $x - \epsilon$ n'est pas un majorant car plus petit que x. Donc il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $x - \epsilon < a_\epsilon \leq x$.

Réciproquement, supposons que 1) et 2) soient vérifiés et montrons que $x = \sup(A)$. 1) prouve que x est un majorant de A. Il reste à montrer que c'est le plus petit. Soit $y < x$ et posons $\epsilon = x - y > 0$. Vu 2), il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $x - \epsilon < a_\epsilon \leq x$, ie $y < a_\epsilon \leq x$. En particulier, y ne peut être un majorant. □

Proposition 5. *On considère $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle.*

1) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a; a \in A\}$. Alors :

$$\sup(-A) = -\inf(A) \quad \textit{et} \quad \inf(-A) = -\sup(A).$$

2) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$. On appelle borne supérieure de f dans A le nombre (s'il existe) $\sup f(A)$ (encore noté $\sup_{a \in A} f(a)$) où

$$f(A) = \{f(a); a \in A\}.$$

De même, la borne inférieure de f dans A est donnée par $\inf f(A)$ *(encore notée* $\inf_{a\in A} f(a)$*. On dira que f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) si $f(A)$ est majoré (resp. minoré, resp. borné).*

Preuve. en exercice. □

1.4 L'ensemble des réels, axiomatique

Théorème 3. *Le "corps" des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies :*
- *deux applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prolongent les opérations d'addition et de multiplication définies dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$,*
- *une relation d'ordre totale $\leq$,*

qui satisfont aux axiomes suivants :
1. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
2. $x + y = y + x$,
3. *il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que $0 + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
4. *pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$ tel que $x + (-x) = 0$,*
5. $x(yz) = (xy)z$,
6. $xy = yx$,
7. *il existe un élément $1 \neq 0$ tel que $1x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
8. *pour chaque élément $x \neq 0$ de $\mathbb{R}$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que $xx^{-1} = 1$,*
9. $x(y + z) = xy + xz$.

De plus, la relation d'ordre vérifie les propriétés suivantes :
1. *$x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$,*
2. *($0 \leq x$ et $0 \leq y$) implique $0 \leq xy$.*

Proposition 6. Propriété d'Archimède. *Pour tout couple de réels (x, y) tel que $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \leq nx$.*

1.5 Valeur absolue.

Définition 9. *Si $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x, notée $\mid x \mid$, le réel défini par*

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases} .$$

Proposition 7. Propriétés de la valeur absolue.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3. $\forall (x, y, r) \in \mathbb{R}^3$, $|x - y| \leq r \Leftrightarrow y - r \leq x \leq y + r$,
4. *(1ère inégalité triangulaire)* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$,
5. *(2ème inégalité triangulaire)* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y|| \leq |x + y|$,
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x||y|$.

1.6 La fonction partie entière

Définition 10. *Soit x un nombre réel. Il existe un unique entier relatif, noté $E(x)$, tel que :*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

On appelle $E(x)$ la partie entière de x.

1.7 Les intervalles

On définit les intervalles possibles d'extrémités a,b , $+\infty$ ou $-\infty$ (où a et b sont deux réels), chaque crochet pouvant être ouvert ou fermé en une extrémité non infinie, et ouvert en une extrémité infinie(il y a 9 types possibles d'intervalles au total, dont 5 sont bornés). L'ensemble vide est également un intervalle. Par exemple, si $a < b$ sont 2 réels

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, \quad] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}.$$

Proposition 8. *Une partie de $\mathbb{R}$, notée I, est un intervalle si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow \ [x, y] \subset I.$$

Preuve. Supposons que I soit un intervalle (il y a donc 9 cas possibles). Par exemple, supposons $I =]a, b]$. Soient $(x, y) \in I^2$ tels que $x \leq y$. Montrons que $[x, y] \subset I$. Soit $z \in [x, y]$, cad $x \leq z \leq y$. Comme $a < x \leq b$ et $a < y \leq b$, on a $a < x \leq z \leq y \leq b$ donc $z \in]a, b]$.
Réciproquement, supposons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ satisfait $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow \ [x, y] \subset I$. Montrons que I est un intervalle. Si I est l'ensemble vide, la preuve est terminée. Sinon I est non vide. Il y a alors plusieurs cas possibles : I est majoré ou non, I est minoré ou non. Supposons par exemple que I soit majoré et non minoré. Notons $a = \sup(I)$. A nouveau 2 cas sont possibles, ou bien a est un plus grand élément de I ou bien il ne l'est pas. Traitons par exemple le cas où il l'est, et montrons que $I =] - \infty, a]$ (dans l'autre cas, il faut montrer $I =] - \infty, a[$). Soit $x \in I$. Comme a est un majorant de I, on a $x \leq a$ donc $x \in] - \infty, a]$. Inversement, soit $x \in] - \infty, a]$. On a $x \leq a$. Comme I est non minoré, x n'est pas un minorant de I, il existe donc $y \in I$ tel que $y < x$. Or $y, a \in I$ et $y \leq a$ donc $[y, a] \subset I$. En particulier $x \in [y, a] \subset I$. □

Par ailleurs, les intervalles ouverts possèdent la propriété suivante importante :

Proposition 9. *Soit I un intervalle ouvert. Alors :*

$$\forall a \in I, \exists \epsilon > 0,]a - \epsilon, a + \epsilon[\subset I.$$

Preuve. en exercice. □

1.8 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Proposition 10. *Soit $I =]a, b[$ ($a < b$) un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Alors $I \cap \mathbb{Q}$ est non vide ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) ainsi que $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ (densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).*

Preuve. D'après la propriété d'Archimède, on sait qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{b-a}{2}$. Soit k le plus grand entier tel que $k/n \leq a$. Par définition de k, on a $a < \frac{k+1}{n}$. De plus $\frac{1}{n} \leq \frac{b-a}{2}$ et $k/n \leq a$ implique $\frac{k+1}{n} \leq a + (b - a)/2 = (a + b)/2 < b$. Ceci prouve la première relation.
Pour la deuxième, on pose $J =]a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}[$. D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans J, il existe $q \in J \cap \mathbb{Q}$ (q non nul). Alors $\sqrt{2}q \in I$. D'autre part, $\sqrt{2}q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Chapitre 2

Suites réelles

2.1 Définition, premières propriétés

Définition 1. *Une suite réelle u est une application d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque :
- On peut généralement se ramener au cas où $I = \mathbb{N}$, ce que l'on supposera souvent.
- Notations : $u = (u_n)_{n \in I}$ parfois notée tout simplement $(u_n)_n$.

Proposition 1. Opérations sur les suites. *Soient u et v deux suites réelles et a un réel. On définit les suites :*
- *$w = uv$ par son terme général $w_n = u_n v_n$.*
- *$x = u + v$ par son terme général $x_n = u_n + v_n$.*
- *$y = au$ par son terme général $y_n = au_n$.*
- *De plus, si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$, on définit $z = \frac{u}{v}$ par par son terme général $z_n = \frac{u_n}{v_n}$.*

2.2 Suites convergentes

Définition 2. *On dit qu'une suite (u_n) est convergente vers le réel l (ou converge vers l, ou tend vers l) si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \mid u_n - l \mid \leq \epsilon.$$

Le nombre l est appelé la limite de la suite. Si (u_n) n'est pas convergente, elle est dite divergente.

Si (u_n) converge vers l, on note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

Exercice : écrire la définition pour dire qu'une suite est divergente.

Définition 3. *On dit qu'une suite divergente (u_n) tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A.$$

On dit qu'une suite divergente (u_n) tend vers $-\infty$ si $-(u_n)$ tend vers $+\infty$.
Si (u_n) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on dit que (u_n) est une suite divergente de première espèce.
Sinon, on dit que (u_n) est une suite divergente de deuxième espèce.

Notations. Si (u_n) converge vers $+\infty$, on note : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 2. Unicité de la limite *La limite d'une suite, si elle existe, est unique.*

Preuve. Supposons que $(u_n)_n$ tende vers l et l'. Soit $\epsilon > 0$. On peut trouver 2 entiers N_1 et N_2 tels que :

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - l| \leq \epsilon,$$
$$\forall n \geq N_2, \quad |u_n - l'| \leq \epsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a

$$|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| \leq 2\epsilon.$$

Ceci prouve que $|l - l'| \leq 2\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, donc $l = l'$. $\square$

Proposition 3. Condition nécessaire de convergence. *Une suite convergente est bornée.*

Preuve. Supposons que $(u_n)_n$ converge vers un réel l. Par définition de la convergence avec $\epsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq 1$. En particulier, pour $n \geq N$, on a $|u_n| \leq |l| + 1$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |l| + 1),$$

donc $(u_n)_n$ est bornée. $\square$

Remarque : une suite bornée n'admet pas forcément de limite. Par exemple $u_n = (-1)^n$.

Proposition 4. Opérations sur les limites *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = l_2$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2 \qquad \lim_{n\to\infty} u_n v_n = l_1 l_2.$$

Preuve. On a $|u_n + v_n - l_1 - l_2| \leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2|$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on ait $|u_n - l_1| \leq \epsilon/2$. De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on ait $|v_n - l_2| \leq \epsilon/2$. Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$ on a alors $|u_n + v_n - l_1 - l_2| \leq \epsilon$.
On a aussi $|u_n v_n - l_1 l_2| = |(u_n - l_1)v_n + l_1(v_n - l_2)| \leq |u_n - l_1||v_n| + |l_1||v_n - l_2|$. Comme $(v_n)_n$ est convergente, elle est bornée donc il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n$
$leqM$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on ait $|u_n - l_1| \leq \epsilon/(2M)$. De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on ait $|v_n - l_2| \leq \epsilon/(2|l_1| + 1)$. Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$ on a alors

$$|u_n v_n - l_1 l_2| \leq |u_n - l_1||v_n| + |l_1||v_n - l_2| \leq \epsilon M/(2M) + \epsilon/(2|l_1| + 1)|l_1| \leq \epsilon,$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Théorème 1. *Tout nombre réel est à la fois limite d'une suite de nombres rationnels et limite d'une suite de nombres irrationnels.*

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe (ch. 1, prop. 9) un point $u_n \in]x - 1/n; x + 1/n[\cap \mathbb{Q}$ et un point $v_n \in]x - 1/n; x + 1/n[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. On obtient ainsi 2 suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que pour tout n, $u_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, et

$$|u_n - x| \leq 1/n, \quad |v_n - x| \leq 1/n.$$

En particulier ces deux suites convergent vers x. $\square$

2.3 Suites extraites

A partir d'une suite (u_n), on peut obtenir une nouvelle suite (v_n) en enlevant certains termes de (u_n). On dira que (v_n) est une suite extraite de (u_n). La définition formelle est :

Définition 4. *On dit que $(v_n)_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$ s'il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, appelée extractrice, telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}.$$

Remarque : si ϕ est une extractrice, alors $\lim_{n\to+\infty} \phi(n) = +\infty$.

Proposition 5. *Si la suite $(u_n)_n$ converge vers l alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge également vers l.*

Preuve. Soit $(v_n)_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\phi(n)}$. Soit $\epsilon > 0$. Comme $(u_n)_n$ converge vers l, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq \epsilon$. Comme pour tout n, $\phi(n) \geq n$ (exercice), on a : $\forall n \geq N$, $\phi(n) \geq \phi(N) \geq N$. En conséquence $|v_n - l| = |u_{\phi(n)} - l| \leq \epsilon$. □

En pratique, on utilise surtout la conséquence suivante : si une suite (u_n) admet deux suites extraites qui ne convergent pas vers la même limite alors $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Exercice : si (u_n) est une suite divergente qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ alors toute suite extraite de (u_n) est divergente, et tend vers la même chose.

Proposition 6. *Soit $(u_n)_n$ une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. Alors $(u_n)_n$ converge également vers l.*

Preuve (TD). Soit $\epsilon > 0$. Comme $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l, on peut trouver 2 entiers N_1 et N_2 tels que

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_1, &\quad |u_{2n} - l| \leq \epsilon, \\ \forall n \geq N_2, &\quad |u_{2n+1} - l| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

En particulier si $n \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ alors :

- ou bien n est pair, ie $n = 2k$ pour un certain entier k. Alors $k \geq N_1$ et

$$|u_n - l| = |u_{2k} - l| \leq \epsilon,$$

- ou bien n est impair, ie $n = 2k + 1$ pour un certain entier k. Alors $k \geq N_2$ et

$$|u_n - l| = |u_{2k+1} - l| \leq \epsilon.$$

Dans tous les cas $|u_n - l| \leq \epsilon$. □

2.4 Suites monotones

Définition 5. *Une suite (u_n) est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.*
Une suite (u_n) est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
Une suite (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée (ce qui équivaut à $(| u_n |)$ est majorée.
Une suite (u_n) est croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

Une suite (u_n) est décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
Si les deux inégalités précédentes sont strictes, on dit que (u_n) est stritement croissante (ou décroissante).
Une suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.
Une suite (u_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
Une suite (u_n) est stationnaire si : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow u_{n+1} = u_n$.
Une suite (u_n) est constante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$.

Proposition 7. Critère de convergence des suites monotones.

1)Soit $(u_n)_n$ une suite croissante. Alors $l = \lim_{n\to\infty}(u_n)_n$ existe. De plus, $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si $(u_n)_n$ est majorée. Sinon $l = +\infty$.

2) Soit (u_n) une suite décroissante. Alors $l = \lim_{n\to\infty}(u_n)_n$ existe. De plus, $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si $(u_n)_n$ est minorée. Sinon $l = -\infty$.

Preuve. On prouve seulement le 1), le 2) se traitant de la même manière. Supposons tout d'abord $(u_n)_n$ majorée et posons $l = \sup_n u_n$. On va montrer que $(u_n)_n$ converge vers l. Soit $\epsilon > 0$. Comme $l - \epsilon$ n'est pas un majorant de la suite $(u_n)_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $l - \epsilon \leq u_N$. De plus, $(u_n)_n$ étant croissante, on a pour tout $n \geq N$, $l - \epsilon \leq u_N \leq u_n$. D'autre part l étant un majorant de la suite $(u_n)_n$, on a $u_n \leq l$. Ainsi, $\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq \epsilon$.
Si $(u_n)_n$ n'est pas majorée, on montre que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_n$ n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel $u_n \geq M$. Comme $(u_n)_n$ est croissante, on a pour tout n$\geq N$, $M \leq u_N \leq u_n$, ce qui termine la preuve. $\square$

2.5 Limites et inégalités.

Le lemme suivant est souvent utile :

Lemme 1. *Si (u_n) converge vers un réel a, et si $c < a < b$ alors pour n assez grand, $c \leq u_n \leq b$.*

Preuve. Posons $\epsilon = \min(b - a, a - c)/2 > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - a| \leq \epsilon$. En particulier, pour $n \geq N$, on a :

$$c < a - (a - c)/2 \leq a - \epsilon \leq u_n \leq a + \epsilon \leq a + (b - a)/2 < b. \quad \square$$

Théorème 2. Lemme des gendarmes. *Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour n assez grand, et si (u_n) et (w_n) convergent vers l alors (w_n) converge également vers l.*

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Il existe 2 entiers N_1 et N_2 tels que

$$\forall n \geq N_1,\ |u_n - l| \leq \epsilon, \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ |w_n - l| \leq \epsilon.$$

Donc pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a :

$$l - \epsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \epsilon$$

donc $(v_n)_n$ converge vers l. $\square$

Proposition 8. Encadrement.

1) Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, et si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (v_n) tend vers $+\infty$.

2) Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et (u_n) tend vers $-\infty$ alors (v_n) tend vers $-\infty$.

3) Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $(u_n)_n$ (resp. $(v_n)_n$) converge vers l (resp. l') alors $l \leq l'$.

Preuve. en exercice. □

Remarque : le 3) de la proposition précédente ne s'étend pas au cas d'inégalités strictes.

2.6 Suites adjacentes.

Définition 6. *On dit que deux suite réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :*
∘ L'une est croissante, l'autre est décroissante.
∘ $(u_n - v_n)_n$ converge vers 0.

Théorème 3. *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes alors elles convergent vers la même limite.*

Preuve. Supposons que $(u_n)_n$ soit croissante (et donc $(v_n)_n$ décroissante. Il faut tout d'abord remarquer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet si l'on fixe $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geq n_0$, $u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0}$. En passant à la limite $n \to \infty$ dans cette inégalité, on obtient $0 \geq u_{n_0} - v_{n_0}$. Montrons maintenant que $(u_n)_n$ est majorée et $(v_n)_n$ minorée : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Donc $(u_n)_n$ est majorée par v_0 et $(v_n)_n$ est minorée par u_0. D'après la proposition 7, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes. Notons l et l' leurs limites respectives. Comme $(v_n - u_n)_n$ converge vers 0, on a $l = l'$. □

Théorème 4. Théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout n : $-M \leq u_n \leq M$. Nous allons définir trois suites par récurrence. Posons $a_0 = -M$, $b_0 = M$ et $\phi(0) = 0$. L'un au moins des deux segments $[a_0; \frac{a_0+b_0}{2}]$, $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$. Soit $a_1 < b_1$ les extrêmités de ce segment noté I_1. Noter que $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$. On définit ensuite $\phi(1) = n_1 > 0$ de sorte que $u_{n_1} \in I_1$.

Supposons construits $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ et $\phi(0) < \phi(1) < \ldots \phi(n)$ tels que pour tout $k \leq n$
- l'ensemble $[a_k, b_k] \cap \{u_n; n \geq \mathbb{N}\}$ est infini,
- $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$,
- $b_k - a_k = (b_{k-1} - a_{k-1})/2$,
- $\phi(k) > \phi(k-1)$ et $u_{\phi(k)} \in I_k$.

L'un au moins des deux segments $[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}]$, $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$. Soit $a_{n+1} < b_{n+1}$ les extrêmités de ce segment noté I_{n+1}. On a$b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$. On choisit ensuite $\phi(n+1) > \phi(n)$ de sorte que $u_{\phi(n+1)} \in I_{n+1}$. Nous avons ainsi construits par récurrence 2 suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, et une extractrice ϕ vérifiant les 4 propriétés indiquées ci-dessus. En particulier, les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite l. De plus, pour tout n on a $a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n$. Le théorème des gendarmes assure alors que la suite $(u_{\phi(n)})_n$ est convergente. □

2.7 Suites de cauchy.

Définition 7. *On dit qu'une suite (u_n) est de cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0, (\exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, (n \geq p \geq N \Rightarrow \mid u_n - u_p \mid \leq \epsilon))).$$

Théorème 5. *Une suite réelle est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergente. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $l \in \mathbb{R}$ (la limite) et il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq \epsilon/2$. En particulier, pour tout n, p tels que $n \geq p \geq N$, on a

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - l| + |l - u_p| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

ce qui montre qu'une suite convergente est de Cauchy.

Réciproquement, soit $(u_n)_n$ une suite réelle de Cauchy. Commençons par montrer qu'elle est bornée. En utilisant la définition d'une suite de Cauchy pour $\epsilon = 1$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - u_p| \leq 1$ pour tous $n \geq p \geq N$. Donc pour $n \geq N$,

$$|u_n| \leq |u_n - u_N| + |u_N| \leq 1 + |u_N|.$$

Donc $(u_n)_n$ est bornée par

$$|u_n| \leq \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |u_N|).$$

Ainsi $(u_n)_n$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite $(u_{\phi(n)})_n$ convergente vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Montrons que $(u_n)_n$ converge également vers l. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N_0 tel que $\forall n \geq N_0$, $|u_{\phi(n)} - l| \leq \epsilon/2$. Il existe aussi un réel $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p \geq N_1$, $|u_n - u_p| \leq \epsilon/2$. En particulier, pour $n \geq \max(\phi(N_0), N_1)$,

$$|u_n - l| \leq |u_n - u_{\phi(N_0)}| + |u_{\phi(N_0)} - l| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

ce qui complète la preuve. □

2.8 Quelques suites particulières

Une *suite réelle* est simplement une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre, on la voit plutôt comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ que comme une fonction $n \mapsto u(n)$.

Une suite peut être définie comme une fonction explicite de n :

$$u_n = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) ,$$

ou par récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 2 , \\ v_{n+2} &= 3v_{n+1} - 5v_n , \\ &\ldots \end{aligned}$$

Voyons maintenant quelques suites particulières.

Les *suites arithmétiques* sont définies par

$$u_{n+1} = u_n + r$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour un $r \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors

$$\boxed{u_n = u_0 + nr .}$$

En association avec ces suites, notez la formule utile suivante

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .}$$

Les *suites géométriques* sont définies par

$$u_{n+1} = q\, u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour un $q \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors

$$\boxed{u_n = q^n\, u_0 .}$$

Avec ces suites géométriques on a les formules bien connues suivantes

$$\boxed{\sum_{k=n_i}^{n_f} q^k = \frac{q^{n_i} - q^{n_f+1}}{1-q} = q^{n_i}\,\frac{1-q^N}{1-q}\,,}$$

où $N = n_f - n_i + 1$ est le nombre de termes de la somme.

Enfin on a un mix des deux avec les suites

$$u_n = au_n + b$$

qui donnent

$$\boxed{u_n = a^n\, u_0 + b\,\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\,.}$$

2.9 Résolution des suites $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Une situation très fréquente est de rencontrer des suites définies par récurrence de la forme

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\,,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont donnés et u_0, u_1 sont fixés. Le théorème qui suit donne la forme explicite de u_n dans ce cas.

Théorème : *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixé et soit (u_n) la suite définie par récurrence*

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\,, \tag{2.1}$$

*pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère l'*équation caractéristique *de cette suite*

$$r^2 - ar - b = 0\,. \tag{2.2}$$

i) Si l'équation (2.2) admet deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n},$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.

ii) Si l'équation (2.2) admet une seule solution réelle (double) r_0 alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n},$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.

iii) Si l'équation (2.2) admet deux solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{r}$ alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\,\rho^n\,\cos(n\theta) + \mu\,\rho^n\,\sin(n\theta)},$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.

Démonstration Commençons par le cas i). Si r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de (2.2) alors il est facile de vérifier que la suite

$$u_n = \lambda\,r_1^n + \mu\,r_2^n$$

vérifie la relation (2.1) :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \lambda\,r_1^n r_1^2 + \mu\,r_2^n r_2^2 \\ &= \lambda r_1^n(ar_1 + b) + \mu\,r_2^n(ar_2 + b) \\ &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= au_{n+1} + bu_n\,. \end{aligned}$$

Inversement, si (u_n) vérifie (2.1), il existe un unique couple $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$$u_0 = \lambda + \mu, \quad u_1 = \lambda\,r_1 + \mu\,r_2$$

car $r_1 \neq r_2$. Les suites solutions de (2.1) sont clairement entièrement déterminées par u_0 et u_1. Donc la suite

$$u_n = \lambda\,r_1^n + \mu\,r_2^n$$

est bien l'unique solution de (2.1) dans ce cas.

Le cas ii) se traite de la même façon : on vérifie que

$$u_n = \lambda\,r_0^n + \mu\,n\,r_0^n\,,$$

est solution dans ce cas (où l'on a en particulier $a = 2r_0$) :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \lambda\,r_0^{n+2} + \mu\,(n+2)\,r_0^{n+2} \\ &= \lambda\,r_0^n(ar_0 + b) + \mu\,n\,r_0^n(ar_0 + b) + 2\mu\,r_0^{n+1}r_0 \\ &= a\lambda\,r_0^{n+1} + b\lambda\,r_0^n + a\mu\,(n+1)\,r_0^{n+1} - a\mu\,r_0^{n+1} + b\mu\,n\,r_0^n + \mu\,r_0^{n+1}a \\ &= au_{n+1} + bu_n\,. \end{aligned}$$

Toutes les solutions sont déterminées par u_0 et u_1. A chaque couple (u_0, u_1) correspond un unique couple (λ, μ) qui fait que

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n},$$

est solution de (2.1) (exercice).

Pour le cas iii) il est plus facile de passer par les nombres complexes. On peut toujours trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$u_0 = z + \bar{z} \quad \text{et} \quad u_1 = zr + \bar{z}\bar{r}\,. \text{ (exercice)}$$

On en déduit que la suite

$$u_n = zr^n + \bar{z}\bar{r}^n$$

est solution de (2.1). Ce qui donne

$$zr^n + \bar{z}r^n = 2\mathrm{Re}(zr^n) = 2\mathrm{Re}(z)\,\rho^n\,\cos(n\theta) - 2\mathrm{Im}(z)\,\rho^n\,\sin(n\theta)\,.$$

$\square$

Chapitre 3

Fonctions réelles de la variable réelle

3.1 Premières définitions

Définition 1. *On appelle fonction numérique de variable réelle toute application $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On notera plus souvent $I = D(f)$, appelé le domaine (ou l'ensemble) de définition de f. Si $A \subset D(f)$, on appellera image de A par f l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$, et on appellera restriction de f à A la fonction notée $f_{|A} : A \to \mathbb{R}$ égale à f sur D.*

Par exemple, on notera

$$x \mapsto 3x$$

ou

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que } f(x) = 3x$$

la fonction qui à un réel x associe 3 fois ce réel.

Définition 2. Représentation graphique. *Si f est une fonction numérique de variable réelle, le graphe de f, noté $G(f)$, est défini par*

$$G(f) = \{(x, f(x)), x \in D(f)\}.$$

3.2 Fonctions remarquables

Définition 3. *On dit que :*

1. *$f : D(f) \to \mathbb{R}$ est paire si $\forall x \in D(f), -x \in D(f)$ et si $\forall x \in D(f), f(-x) = f(x)$.*
2. *$f : D(f) \to \mathbb{R}$ est impaire si $\forall x \in D(f), -x \in D(f)$ et si $\forall x \in D(f), f(-x) = -f(x)$.*
3. *$f : D(f) \to \mathbb{R}$ est périodique (de période $T \in R^*$) si $\forall x \in D(f), x + T \in D(f)$ et si $\forall x \in D(f), f(x) = f(x + T)$. (Il peut exister plusieurs périodes.)*
4. *$f : D(f) \to \mathbb{R}$ est croissante si $\forall (x, y) \in D(f) \times D(f), x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.*
5. *$f : D(f) \to \mathbb{R}$ est strictement croissante si $\forall (x, y) \in D(f) \times D(f), x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*
6. *$f : D(f) \to \mathbb{R}$ est décroissante si $\forall (x, y) \in D(f) \times D(f), x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*
7. *$f : D(f) \to \mathbb{R}$ est strictement décroissante si $\forall (x, y) \in D(f) \times D(f), x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*

8. $f : D(f) \to \mathbb{R}$ *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*
9. $f : D(f) \to \mathbb{R}$ *est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Définition 4. *On appelle majorant de* $f : D(f) \to \mathbb{R}$ *tout réel* M *tel que :* $\forall x \in D(f), f(x) \leq M$.
On appelle minorant de $f : D(f) \to \mathbb{R}$ *tout réel* m *tel que :* $\forall x \in D(f), f(x) \geq m$.
On dit que f *est majorée (resp. minorée) s'il existe un majorant (resp. un minorant) de* f*. On dit que* f *est bornée s'il existe un majorant et un minorant de* f*.*

Remarque : Toute ces définitions s'étendent ainsi : si D est une partie de $D(f)$, on dira que f est majorée (resp. minorée) sur D si $f\mid_D$ est majorée (resp. minorée).

Définition 5. *Soit* E *une partie de* $\mathbb{R}$*. On dit que :*

1. $f : D(f) \to \mathbb{R}$ *est dite injective si* $\forall (x,y) \in D(f) \times D(f), f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
2. $f : D(f) \to E$ *est surjective si* $\forall y \in E, \exists x \in D(f), y = f(x)$.
3. $f : D(f) \to E$ *est dite bijective si elle est injective et surjective. Dans ce cas la on peut définir une nouvelle fonction* $f^{-1} : E \to D(f)$ *par* $\forall y \in E, f^{-1}(y) = x$*, où* x *est le seul élément de* $D(f)$ *tel que* $f(x) = y$.

3.3 Opérations sur les fonctions

Remarque : On rappelle que la composée de deux fonctions monotones de même nature est croissante et que la composée de deux fonctions monotones de nature différente est décroissante.
Enfin, on rappelle alors que si $f : D \to E$ et $g : E \to D$ sont deux bijections, alors $f \circ g : E \to E$ et $g \circ f : D \to D$ sont des bijections, et que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Définition 6. *Si* f *et* g *sont deux fonctions ayant le même ensemble de définition et* $a \in \mathbb{R}$*, alors on note :*
∘ $f + g$ *la fonction définie par* $\forall x \in D(f), (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
∘ af *la fonction définie par* $\forall x \in D(f), (af)(x) = af(x)$.
∘ *Si par ailleurs* f *ne s'annulle pas, alors* $\frac{1}{f}$ *est la fonction définie par* $\forall x \in D(f), \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Définition 7. Composition de fonctions. *Soient* $f : D \to E$ *et* $g : E \to \mathbb{R}$ *deux fonctions définies sur deux parties* D, E *de* $\mathbb{R}$*. On définit la composée de* f *par* g*, notée* $g \circ f$*, par* $g \circ f(x) = g(f(x))$ *pour* $x \in D$.

Proposition 1. *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *La composée de deux fonctions monotones de même nature est croissante et que la composée de deux fonctions monotones de nature différente est décroissante.*
2. *La composée de deux fonctions injectives est injective.*
3. *La composée de deux fonctions surjectives est surjective.*
4. *La composée de deux fonctions bijectives est bijective. En particulier, la fonction réciproque est donnée par* $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Preuve. en TD. □

3.4 Limite d'une fonction

Définition 8. Limite en $x_0 \in \mathbb{R}$. *Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction et I un intervalle ouvert inclus dans $D(f)$. On suppose que $x_0 \in \mathbb{R}$ est soit une extrêmité de I, soit un point de I.*
On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 (ou plus simplement f a pour limite l en x_0) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D(f), \mid x - x_0 \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - l \mid \leq \epsilon.$$

On notera $lim_{x \to x_0} f(x) = l$, ou $f(x) \to l$ quand $x \to x_0$.

Remarque : si $x_0 \in D(f)$ et si f a pour limite l quand x tend vers x_0, alors $l = f(x_0)$.

Définition 9. Limite en $\pm\infty$.

1. *Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\subset D(f)$. On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ (ou plus simplement f a pour limite l en $+\infty$) si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D(f), x \geq M \Rightarrow \mid f(x) - l \mid \leq \epsilon.$$

   On notera $lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, ou $f(x) \to l$ quand $x \to +\infty$.

2. *Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $] - \infty, a[\subset D(f)$. On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ (ou plus simplement f a pour limite l en $-\infty$) si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D(f), x \leq M \Rightarrow \mid f(x) - l \mid \leq \epsilon.$$

   On notera $lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, ou $f(x) \to l$ quand $x \to -\infty$.

Définition 10. Limite infine.

1. *Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction et I un intervalle ouvert inclus dans $D(f)$. On suppose que $x_0 \in \mathbb{R}$ est une extrêmité de I.*
   On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 (ou plus simplement f a pour limite $+\infty$ quand $x \to x_0$) si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D(f), |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

   On notera $lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, ou $f(x) \to +\infty$ quand $x \to x_0$.

2. *Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\subset D(f)$. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (ou plus simplement f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$) si :*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D(f), x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M.$$

   On notera $lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ou $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

3. *Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $] - \infty, a[\subset D(f)$. On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (ou plus simplement f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$) si :*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D(f), x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M.$$

Proposition 2. *La limite d'une fonction, si elle existe, est unique.*

Preuve. en TD. □

Proposition 3. Caractérisation séquentielle. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ (limite d'au moins une suite de points de D) et $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de D telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$ on a $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = l$.*

Preuve. On traite le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ (les autres cas sont similaires et laissés en exercice).

Supposons donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Soit $(u_n)_n$ une suite de points de D convergeant vers x_0. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \quad |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Comme $(u_n)_n$ converge vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - x_0| \leq \eta.$$

En particulier, on a pour $n \geq N$, $|f(u_n) - l| \leq \epsilon$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de D telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$, on ait $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = l$. On raisonne par l'absurde en supposant que f ne tend pas vers l quand $x \to x_0$, cad

$$\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D, |x - x_0| \leq \eta \text{ et } |f(x) - l| > \epsilon.$$

En particulier, on peut choisir $\eta = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in D, |u_n - x_0| \leq 1/n \text{ et } |f(u_n) - l| > \epsilon.$$

Ceci prouve que la suite $(u_n)_n$ converge vers x_0 et $(f(u_n))_n$ ne tend pas vers l, d'où la contradiction. □

Proposition 4. *Si $f : D \to \mathbb{R}$ a pour limite l en x_0, alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que la restriction de f à $D \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ soit bornée.*

Preuve. en exercice. □

3.5 Opérations sur les limites

Proposition 5. *Soient $f : D(f) \to \mathbb{R}$ et $g : D(g) \to \mathbb{R}$ telles que $f(D(f)) \subset D(g)$. Soient $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$. On suppose $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to l_1} g(x) = l_2$. Alors $\lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = l_2$.*

Preuve. en exercice. □

Proposition 6. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ 2 fonctions et $x_0, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$. On a les propriétés suivantes :*

1. $\lim_{x\to x_0}(f + g)(x) = l_1 + l_2$,
2. $\lim_{x\to x_0} fg(x) = l_1 l_2$,
3. *si* $\forall x \in D$, $g(x) \neq 0$ *et* $l_2 \neq 0$ *alors* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Preuve. en exercice. □

3.6 Limite et inégalités

Proposition 7. Passage à la limite dans les inégalités. *On considère deux fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$ et $x_0, l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que : $\forall x \in D$, $f(x) \leq g(x)$ sur un voisinage de x_0 et*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1, \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2.$$

Alors $l \leq l'$.

Preuve. en exercice. □

Corollaire 1. *Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ trois fonctions, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que pour $x \in D$ dans un voisinage de x_0 on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = l.$$

Alors g admet une limite quand x tend vers x_0 et cette limite vaut l.

Corollaire 2. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que pour $x \in D$ dans un voisinage de x_0 on a $f(x) \leq g(x)$ et*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Alors g tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0.

3.7 Limites et fonctions monotones

Proposition 8. *Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application croissante.*

1. *Si f est majorée alors f admet une limite finie en b et*

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in]a,b[} f(x).$$

2. *Si f n'est pas majorée alors f admet $+\infty$ pour limite en b.*

Preuve. 1) L'ensemble $f(]a, b[)$ et non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure S dans $\mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Comme $S - \epsilon$ n'est pas un majorant, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $S - \epsilon < f(x_0) \leq S$. Comme f est croissante, on a pour tout $x \geq x_0$,

$$S - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq S.$$

On suppose $b \in \mathbb{R}$ (le cas $b = +\infty$ est similaire). En notant $\eta = b - x_0 > 0$, on a : pour tout $x \in]a, b[$ tel que $|x - b| \leq \eta$, $|f(x) - S| \leq \epsilon$. Ceci prouve que la limite de f en b vaut S.

2) Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > M$. Ainsi, pour tout $x \in]a, b[$, $x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) > M$. On suppose $b \in \mathbb{R}$ (le cas $b = +\infty$ est similaire). En notant $\eta = b - x_0 > 0$, on a : $\forall x \in]a, b[$, $0 < b - x \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$. Ceci prouve que la limite de f en b vaut $+\infty$. □

Chapitre 4

Continuité des fonctions réelles de la variable réelle

4.1 Premières définitions et propriétés

Définition 1. *Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D(f)$. On dit que f est continue en a ssi :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D(f), \mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid \leq \epsilon.$$

Sinon, on dit que a est un point de discontinuité de f, et que f est discontinue en a.
On dit que f est continue sur $D(f)$ si f est continue en tout point de $D(f)$.

Définition 2. *Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D(f)$. On dit que f est continue à droite en a ssi :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D(f), 0 \leq x - a \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid \leq \epsilon.$$

On définit de même la continuité à gauche.

Proposition 1. (Caractérisation sequentielle) *Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D(f)$. Alors f est continue au point a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ de points de $D(f)$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ on a $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$.*

Preuve. Supposons f continue en a. Soit $(u_n)_n$ une suite de points de $D(f)$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la continuité :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in D(f), |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

D'autre part,

$$\exists N, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - a| \leq \alpha.$$

Donc pour $n \geq N$, on a $|u_n - a| \leq \alpha$ donc $|f(u_n) - f(a)| \leq \epsilon$, ce qui veut dire que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite $(u_n)_n$ de points de $D(f)$ on ait $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$. Montrons que f est continue en raisonnons par l'absurde. Si f n'est pas continue en a alors

$$\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in D(f) \text{ tel que } |x - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon.$$

En particulier, on peut choisir $\alpha = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on obtient une suite $(x_n)_n$ de $D(f)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |x_n - a| \leq 1/n \text{ et } |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon.$$

En particulier, $(x_n)_n$ converge vers a mais $(f(x_n))_n$ ne peut converger vers $f(a)$. Contradiction. □

Proposition 2. *Soient f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$ et $a \in A$. Si f et g sont continues en a alors $f+g$, fg sont continues en a. Si de plus $\forall x \in A$, $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.*

Preuve. en exercice. □

Proposition 3. *Soient $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux applications et $a \in A$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

Preuve. en exercice. □

4.2 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 1. *Soient $[a,b]$ un intervalle fermé et borné et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes inférieures et supérieures. En d'autres termes, les quantités $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ existent et sont finies, et il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que*

$$f(c_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(c_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Preuve. Montrons tout d'abord que f est bornée en raisonnant par l'absurde. Si f est non bornée, ceci signifie :

$$\forall M > 0, \exists x_M \in [a,b], \quad |f(x_M)| > M.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir $M = n$ dans la relation précédente. Donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $|f(x_n)| > n$. La suite $(x_n)_n$ est dans $[a,b]$, donc est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ qui converge vers $d \in [a,b]$. D'autre part, on a $|f(x_n)| \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. Ceci est en contradiction avec la continuité de f en c. Donc f est bornée.

L'ensemble $A = \{f(x); x \in [a,b]\}$ est non vide, majorée et minorée vu ce qui précède. Il admet une borne supérieure, notée S, et une borne inférieure, notée I. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S - 1/n$ n'est pas un majorant de A donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $S - 1/n < f(x_n) \leq S$. Comme la suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans le segment $[a,b]$, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente vers $c_2 \in [a,b]$. D'autre part, il est clair que $(f(x_n))_n$ converge vers S. Par continuité de f en c_2, on a donc $c_2 = S$. On peut faire la même preuve pour la borne inférieure. □

Théorème 2. (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soient f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = c$.*

Preuve. 1ère étape : Tout d'abord que si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant $g(0) \leq 0$ et $g(1) \geq 0$ alors il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 0$. Soit g une telle fonction.

Posons $c_1 = 1/2$. On a : ou bien $g(c_1)g(1) \leq 0$ ou $g(c_1)g(0) \leq 0$. Donc, pour l'un des 2 segments $[0,c_1]$ ou $[c_1,1]$, le produit des images par g de ses extrêmités est négatif. Notons $[a_1,b_1]$ les extrêmités du segment correspondant.

Supposons construits des points $a_1,\dots,a_n$ et $b_1,\dots,b_n$ tels que

$$(P_n): \quad a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1}, \quad b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2, \quad g(a_n)g(b_n) \leq 0.$$

Montrons que (P_{n+1}) est vraie. Soit c_{n+1} le milieu du segment $[a_n, b_n]$. Comme $g(a_n)g(b_n) \leq 0$, l'un au moins des 2 produits suivants est négatif : $g(a_n)g(c_{n+1})$ ou $g(_{n+1})g(b_n)$. On note $a_{n+1} < b_{n+1}$ les deux points correspondants au produit négatif.

Cette procédure permet de construire par récurrence 2 suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ vérifiant la propriété (P_n). Il est facile de voir que ces 2 suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers un réel t_0 dans $[0, 1]$. Par continuité de g en t_0, on a

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n)g(b_n) = g(t_0)^2 \leq 0,$$

donc $g(t_0) = 0$.

2ème étape : il faut maintenant prouver le théorème pour la fonction f de l'énoncé. On définit la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(a + t(b - a)) - c$. On a $g(0)g(1) \leq 0$ donc on peut appliquer la 1ère étape, et il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) = 0$. En particulier on peut poser $x_0 = a + t_0(b - a)$. □

Corollaire 3. *Soit f une application continue sur un intervalle I non vide à valeurs réelles, alors $J = f(I)$ est un intervalle.*

Preuve. On va monter que pour tous $y_1 < y_2 \in J$, le segment $[y_1, y_2]$ est inclus dans J. Soient $y_1, y_2 \in J$. Il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $y_2 = f(x_2)$. Soit $z \in [y_1, y_2] = [f(x_1), f(x_2)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que $f(c) = z$, donc $z \in J$. Vu la caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$, J est un intervalle. □

Corollaire 4. *Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$ non vide à valeurs réelles. Alors*

$$f([a, b]) = [m, M], \quad \textit{où } m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}, \quad M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Preuve. D'après le théorème 1, il existe c_1, c_2 tels que $f(c_1) = \min_{[a,b]} f$ et $f(c_2) = \max_{[a,b]} f$. Vu le corollaire 3, on a $[f(c_1), f(c_2)] \subset f([a, b])$. Réciproquement, pour tout $z \in f([a, b])$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = z$. En particulier, $f(c_1) \leq z \leq f(c_2)$, d'où $z \in [f(c_1), f(c_2)]$. Ceci montre que $f([a, b]) \subset [f(c_1), f(c_2)]$.

En conclusion, on a bien $f([a, b]) = [f(c_1), f(c_2)]$. □

Théorème 3. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une application continue et strictement croissante (resp. décroissante) de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. L'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est une bijection continue strictement croissante (resp. décroissante).*

Preuve. Traitons le cas où f est strictement croissante. D'après le corollaire 3, $J = f(I)$ est un intervalle. D'autre part, il est clair que la fonction $f : I \to f(I)$ est surjective.

Montrons qu'elle est injective. Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ impossible. Si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ impossible. Donc $x_1 = x_2$ et ceci montre que f est injective, et donc bijective. On peut alors considérer la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$.

Montrons que f^{-1} est strictement croissante. Soit $y_1 < y_2 \in J$. On note $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si $x_1 \geq x_2$ alors f croissante $\Rightarrow y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ impossible, donc $x_1 < x_2$.

Montrons maintenant que f^{-1} est continue. Soient $y_0 \in J$ et $\epsilon > 0$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0)$. On va prouver qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in J, \quad |y - y_0| \leq \alpha \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \epsilon.$$

Si x_0 n'est pas une éventuelle borne de I, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $]x_0 - \alpha_1; x_0 + \alpha_1[\subset I$. Posons $\epsilon' = \min(\alpha, \epsilon) > 0$. Comme f et f^{-1} sont croissantes, on a

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \epsilon' \iff x_0 - \epsilon' \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \epsilon' \iff f(x_0 - \epsilon') \leq y \leq f(x_0 + \epsilon').$$

Il suffit donc de poser $\alpha = \min(f(x_0 + \epsilon') - f(x_0); f(x_0) - f(x_0 - \epsilon')) > 0$. En effet, pour $|y - y_0| \leq \alpha$, on a $f(x_0 - \epsilon') \leq y \leq f(x_0 + \epsilon')$ et donc $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \epsilon' \leq \epsilon$.

Si x_0 est une borne de I, il suffit d'adapter le cas précédent. □

Proposition 4. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une application continue et injective de I dans $\mathbb{R}$, alors f est strictement monotone.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas strictement monotone. Alors il existe $x_1 < x_2 < x_3$ tels que : $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ ou bien $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Supposons par exemple que $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ (l'autre cas se traite exactement de la même façon). L'intervalle $]f(x_2); f(x_1)[\cap]f(x_2); f(x_3)[$ est non vide donc on peut prendre un z dans cet intervalle. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c_1 \in]x_1; x_2[$ tel que $f(c_1) = z$, et il existe $c_2 \in]x_2; x_3[$ tel que $f(c_2) = z$. Ceci contredit l'injectivité de f. □

4.3 Uniforme continuité

Définition 3. *Soit f une application de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur A ssi :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in A, |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \epsilon.$$

Remarque : une application uniformément continue est continue. La réciproque est fausse (considérer par exemple la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$).

Théorème 4. (Théorème de Heine) *Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Supposons f continue et non uniformément continue. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall \alpha > 0, \exists x, x' \in [a, b] \text{ tels que } |x - x'| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(x')| > \epsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut prendre $\alpha = 1/n$ dans la relation précédente et cela donne l'existence de $(x_n, x'_n) \in [a, b]$ tels que $|x_n - x'_n| \leq 1/n$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| > \epsilon$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, comme la suite $(x_n)_n$ est bornée, il existe une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\phi(n)})_n$ soit convergente (on note c cette limite). De même, la suite $(x'_{\phi(n)})_n$ est bornée. On peut donc trouver une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(x'_{\phi(\varphi(n))})_n$ soit convergente (on note c' la limite). Noter que la suite $(x_{\phi(\varphi(n))})_n$ converge vers c car elle est extraite de la suite $(x_{\phi(n)})_n$.

On rappelle que pour toute extractrice φ, on a la relation $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_{\phi(\varphi(n))} - x'_{\phi(\varphi(n))}| \leq \frac{1}{\phi(\varphi(n))} \leq \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} |x_{\phi(\varphi(n))} - x'_{\phi(\varphi(n))}| = 0.$$

En particulier, on a $c = c'$.

D'autre part, on a par continuité de f en c :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(\varphi(n))}) = f(c), \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} f(x'_{\phi(\varphi(n))}) = f(c).$$

Mais ceci est en contradiction avec : $|f(x_{\phi(\varphi(n))}) - f(x'_{\phi(\varphi(n))})| > \epsilon$. □

Chapitre 5

Dérivabilité

5.1 Définitions

Définition 1. *Soient f une application d'un intervalle ouvert I (non vide) à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. On dira que f est dérivable en x_0 si la limite suivante existe*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

où $l \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on notera $l = f'(x_0)$.

On dira que f est dérivable sur I si f est dérivable en x_0 pour tout $x_0 \in I$. Dans ce cas, on note f' l'application $f' : x \in I \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$.

Proposition 1. *Soient f une application d'un intervalle ouvert I (non vide) à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Alors f est dérivable au point x_0 si et seulement s'il existe $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{R}$ et une fonction $\epsilon :]-\alpha; \alpha[\to \mathbb{R}$ tels que $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset I$, $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$ et*

$$\forall h \in]-\alpha; \alpha[, \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\epsilon(h).$$

Dans ce cas, on a : $l = f'(x_0)$.

Preuve. 1) Si f est dérivable en x_0. Soit $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset I$. Il suffit de poser

$$\epsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \quad \text{si } 0 < |h| < \alpha, \qquad \text{et} \qquad \epsilon(0) = 0.$$

2) Réciproquement, on suppose que $f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\epsilon(h)$. Donc

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l + \epsilon(h).$$

Comme $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$, il est immédiat que f est dérivable et $l = f'(x_0)$. $\square$

Corollaire 5. *Si f est dérivable en $x_0 \in I$ alors f est continue en x_0*

Définition 2. *Soient f une application dérivable d'un intervalle ouvert I (non vide) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f' : I \to \mathbb{R}$ est continu, on dira que f est continûment dérivable sur I (ou bien de classe C^1 sur I).*

Définition 3. *1) Soient f une application d'un intervalle ouvert I (non vide) à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$ (ou bien la borne gauche de I). On dira que f est dérivable à droite en x_0 si la limite suivante existe*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

où $l \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on notera $l = f'_d(x_0)$.

Soient f une application d'un intervalle ouvert I (non vide) à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$ (ou bien la borne droite de I). On dira que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

où $l \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on notera $l = f'_g(x_0)$.

Remarque : on vérifie facilement que f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Définition 4. *Soient f une application d'un intervalle ouvert I (non vide) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si les dérivées successives f', $f'' = f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$ existent, on dira que f est n fois dérivable sur I. On dira que f est de classe C^n sur I si ces dérivées successives sont, de plus, continues.*

5.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 2. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur I. Alors :*

1) $(f+g)' = f' + g'$,

2) $(fg)' = f'g + fg'$,

3) si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(f^n)' = nf^{n-1}f'$

4) sur l'ensemble $\{x \in I; g(x) \neq 0\}$, $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Preuve. en exercice. □

Théorème 1. *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où I, J sont des intervalles ouverts (non vides), et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g' \circ f(x_0) \cdot f'(x_0)$$

Preuve. Soit $h \in \mathbb{R}$ (assez petit). On a :

$$\begin{aligned} g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) &= g\big(f(x_0) + hf'(x_0) + h\epsilon(h)\big) - g(f(x_0)) \\ &= g'(f(x_0))\big(hf'(x_0) + h\epsilon(h)\big) + \big(hf'(x_0) + h\epsilon(h)\big)\epsilon\big(hf'(x_0) + h\epsilon(h)\big) \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0)h + h\tilde{\epsilon}(h) \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 2. *Soient $f : I \to J$ une fonction continue strictement monotone, où I, J sont des intervalles ouverts (non vides) avec $J = f(I)$. Soit $g : J \to I$ la bijection réciproque et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors g est dérivable en $f(x_0)$ et $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Preuve. Soit $y_0 = f(x_0)$ et y proche de y_0 ($y \neq y_0$). On pose $x = g(y)$ et on a :

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

car $y \to y_0 \Leftrightarrow x \to x_0$. $\square$

Corollaire 6. *Soient $f : I \to J$ une fonction continue strictement monotone, où I, J sont des intervalles ouverts (non vides) avec $J = f(I)$. Soit $g : J \to I$ la bijection réciproque. Si f est dérivable (resp. de classe C^1) sur I et si $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors g est dérivable (resp. de classe C^1) et $g' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

Proposition 3. **(Formule de Leibniz)** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions n fois dérivables sur I intervalle ouvert. Alors :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Preuve. Par récurrence. La propriété est vraie au rang 1 (voir proposition 2).

Supposons la propriété vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} =& ((fg)^{(n)})' = \Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \Big)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(f^{(k)} g^{(n-k)} \Big)' \\
=& \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k+1)} g^{(n+1-k)} \Big) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n+1-k)} \\
=& \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \quad \square
\end{aligned}$$

5.3 Accroissements finis

Définition 5. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle (non vide) et $x_0 \in I$.*

1) On dit que f admet un maximum en x_0 si $\forall x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$.

2) On dit que f admet un minimum en x_0 si $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$.

3) On dit que f admet un maximum local en x_0 si : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f(x) \leq f(x_0)$.

4) On dit que f admet un minimum local en x_0 si : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Proposition 4. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une application, où I est un intervalle ouvert (non vide) et $x_0 \in I$. Si x_0 est un maximum local (ou minimum local) de f et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Preuve. Soit $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$ et $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f(x) \leq f(x_0)$ (même preuve dans le cas d'un minimum). Soit $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x < x_0$ alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

En passant à la limite quand $x \to x_0$, on obtient $f'(x_0) \geq 0$. Soit $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x > x_0$ alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

En passant à la limite quand $x \to x_0$, on obtient $f'(x_0) \leq 0$. Donc $f'(x_0) = 0$. □

Théorème 3. (Théorème de Rolle) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve. Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(a) = f(x) = f(b)$ alors le résultat est évident.

Sinon, il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(a) = f(b) < f(x)$ (ou bien $f(a) = f(b) > f(x)$, et dans ce cas la preuve est similaire). Soit $M = \max\{f(x); x \in [a, b]\}$. On sait qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$. De plus, $c \neq a$ et $c \neq b$. En particulier, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \leq f(c)$. Donc c est un maximum local et, d'après la proposition 4, $f'(c) = 0$. □

Théorème 4. (Théorème des accroissements finis) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Preuve. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a).$$

φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. De plus $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle, ce qui nous donne l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or $\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, d'où le résultat. □

Corollaire 7. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.*

1) Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) = l$ alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

2) Si $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f'(x) = l'$ alors f est dérivable à gauche en b et $f'_g(b) = l'$.

Preuve. Supposons que $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) = l$. Soit $h > 0$ assez petit. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_h \in]a, a + h[$ tel que $f(a + h) - f(a) = f'(c_h)h$, donc

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f'(c_h) = l = f'_d(a). \quad \square$$

Théorème 5. (Darboux) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.*

Preuve : Soient $a, b \in I$ ($a < b$) et $z \in [f'(a); f'(b)]$. D'aprè le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. On a alors 2 cas :

1) ou bien $z \in [f'(a); f'(c)]$: on définit alors la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x > a, \quad g(a) = f'(a).$$

g est continue sur $[a, b]$ (car f est continue sur $]a, b]$ et dérivable en a). D'autre part, comme $g(a) \leq z \leq g(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence d'un $y \in [a, b]$ tel que $g(c) = z$...

□

5.4 Variations des fonctions

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Int}(I)$ son intérieur, c'est-à-dire l'intervalle ouvert de même bornes que I.

Proposition 5. *Soient une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle non vide. Pour que f soit constante sur I, il faut et il suffit que f soit dérivable sur $\mathrm{Int}(I)$ et $f' = 0$ sur $\mathrm{Int}(I)$.*

Preuve. Si f est constante, il est clair que f est dérivable et $f' = 0$.

Réciproquement, pour tout $x_1 < x_2 \in I$, vu le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ donc f est constante. □

Proposition 6. *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $\mathrm{Int}(I)$.*

1) Pour que f soit croissante sur $\mathrm{Int}(I)$, il faut et il suffit que : $\forall x \in \mathrm{Int}(I)$, $f'(x) \geq 0$.

2) Si $\forall x \in \mathrm{Int}(I)$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.

Preuve. Supposons f croissante et soit $x_0 \in \mathrm{Int}(I)$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

En passant à la limite quand h tend vers 0, on obtient $f'(x_0) \geq 0$.

Réciproquement, supposons $\forall x \in \mathrm{Int}(I)$, $f'(x) \geq 0$. Soit $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x_1, x_2]$, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1 = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$, donc f est croissante.

Le 2) se démontre de la même manière. □

5.5 Formules de Taylor

Théorème 6. (Formule de Taylor-Young) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Preuve : Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k - A\frac{(b - x)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

avec A constante (que l'on fixera ultérieurement). L'objectif est d'appliquer le théorème de Rolle à g. Vu les hypothèses, g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'autre part, $g(b) = 0$ et $g(a) = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k - A\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. Pour faire en sorte que $g(a) = 0$, on pose

$$A = \frac{(n + 1)!}{(b - a)^{n+1}}\Big(f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k\Big).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Calculons g'. On a

$$\begin{aligned} g'(x) &= -A\frac{(b-x)^n}{n!} - f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}\Big) \\ &= -A\frac{(b-x)^n}{n!} - f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k\Big) \\ &= -A\frac{(b-x)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n. \end{aligned}$$

Donc $g'(c) = 0$ équivaut à $A = f^{(n+1)}(c)$, d'où le résultat. □

Corollaire 8. (Formule de Taylor-Lagrange) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$, telle que $\sup_{x\in]a,b[} |f^{(n+1)}(x)| < +\infty$ alors :*

$$\Big|f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\Big| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in]a,b[} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Corollaire 9. (Formule de Taylor-Young 2) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Int}(I)$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur I. Alors il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ et*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + h^n\epsilon(h).$$

Preuve : Appliquons la formule de Taylor à l'ordre $n - 1$ sur le segment $[a; a + h]$ (ou $[a + h; a]$ selon le signe de h). Alors il existe $c_{a,h} \in]a; a + h[$ tel que

$$f(a+h) = f(a)+\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\frac{f^{(n)}(c_{a,h})}{n!}h^n = f(a)+\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\frac{f^{(n)}(c_{a,h}) - f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Posons pour $h \neq 0$

$$\epsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k}{h^n}$$

et montrons que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. On a $|\epsilon(h)| \leq \frac{1}{n!}|f^{(n)}(c_{a,h}) - f^{(n)}(a)|$. Or, quand $h \to 0$, alors $c_{a,h} \to a$ car $c_{a,h} \in]a, a+h[$. Comme $f^{(n)}$ est continue en a, on en déduit $|f^{(n)}(c_{a,h})-f^{(n)}(a)| \to 0$ quand $h \to 0$. Le lemme des gendarmes montre alors que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. □

Proposition 7. (Exemple d'application) *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I. Soit $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$.*

1) Si $f''(x_0) > 0$ alors x_0 est un minimum local de f.

Si $f''(x_0) < 0$ alors x_0 est un maximum local de f.

Preuve : 1) Appliquons la formule de Taylor-Young 2 à f à l'ordre 2 au point x_0. Alors il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ et

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + h^2\epsilon(h) = f(x_0) + h^2\Big(\frac{f''(x_0)}{2} + \epsilon(h)\Big).$$

Comme $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall h \in [-\alpha;\alpha]$, $|\epsilon(h)| \leq f''(x_0)/4$. En particulier, pour $h \in [-\alpha;\alpha]$, on a :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h^2\big(\frac{f''(x_0)}{2} + \epsilon(h)\big) \geq f(x_0) + h^2\frac{f''(x_0)}{4} \geq f(x_0).$$

Donc x_0 est un minimum local.

2) même preuve. □

Proposition 8. (Exemple d'application 2) *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{2n} sur I ($n \leq 1$). Soit $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = f^{(2)} = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$.*

1) Si $f^{(2n)}(x_0) > 0$ alors x_0 est un minimum local de f.

2) Si $f^{(2n)} < 0$ alors x_0 est un maximum local de f.

Preuve : Appliquer la formule de Taylor et adapter la preuve précédente. □

5.6 R•gle de LÕHospit

Dans cette section, nous dŽcrirons une mŽthode utile pour trouver des limites connu
nom de R•gle de lÕHopital.

Chapitre 6

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

6.1 Fonctions circulaires directes

Proposition 1. (Rappels et formulaire de trigonométrie circulaire) *On a :*

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$,

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

3) les fonctions $\cos$, $\sin$, $\tan$ *et* $\cot$ *sont de classe* C^∞ *sur leur ensemble de définition.*

4) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$,

5) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\cot'(x) = -1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$,

6) pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)
\end{aligned}$$

7) lorsque ces expressions ont un sens :

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)},\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.
\end{aligned}$$

6.2 Fonctions circulaires réciproques

Fonction $\arcsin$

L'application $\sin : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$ est continue, strictement croissante. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $[-\pi/2; \pi/2]$ dans $[-1; 1]$. La fonction $\sin$ admet donc une fonction réciproque, notée $\arcsin : [-1;1] \to [-\pi/2;\pi/2]$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in [-1;1] \times [-\pi/2;\pi/2], \quad y = \arcsin(x) \iff \sin(y) = x.$$

$\arcsin$ est impaire. De plus, comme $\sin$ est dérivable sur $]-\pi/2;\pi/2[$ et que $\forall x \in]-\pi/2;\pi/2[$, $\sin'(x) = \cos(x) > 0$, $\arcsin$ est dérivable et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il en résulte que $\arcsin$ est de classe C^∞ sur$]-\pi/2;\pi/2[$.

Fonction $\arccos$

L'application $\sin : [0;\pi] \to [-1;1]$ est continue, strictement décroissante. C'est donc une bijection continue strictement décroissante de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$. La fonction $\cos$ admet donc une fonction réciproque, notée $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in [-1;1] \times [0;\pi], \quad y = \arccos(x) \iff \cos(y) = x.$$

$\arccos$ n'est ni paire ni impaire. De plus, comme $\cos$ est dérivable sur $]0;\pi[$ et que $\forall x \in]0;\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$, $\arccos$ est dérivable et

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il en résulte que $\arccos$ est de classe C^∞ sur$]0;\pi[$.

Fonction $\arctan$

L'application $\tan :]-\pi/2;\pi/2[\to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, $\lim_{x\to -\pi/2} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\pi/2} \tan(x) = +\infty$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $]-\pi/2;\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $\tan$ admet donc une fonction réciproque, notée $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2;\pi/2[$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]-\pi/2;\pi/2[, \quad y = \arctan(x) \iff \tan(y) = x.$$

$\arctan$ est impaire. De plus, comme $\tan$ est dérivable sur $]-\pi/2;\pi/2[$ et que $\forall x \in]-\pi/2;\pi/2[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$, $\arctan$ est dérivable et $\forall x \in]-\pi/2;\pi/2[$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il en résulte que $\arctan$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2. *On a la formule suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}\text{signe}(x).$$

Preuve. Si $x > 0$, $\pi/2 - \arctan(x) \in]0,\pi/2[$ et

$$\tan\big(\pi/2 - \arctan(x)\big) = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} = \frac{1}{x}.$$

Il en résulte $\pi/2 - \arctan(x) = \arctan(1/x)$. Si $x < 0$, on utilise un argument de parité pour se ramener au cas $x > 0$. □

6.3 Fonctions hyperboliques directes

Définition 1. *On appelle :*

1) sinus hyperbolique l'application $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2) cosinus hyperbolique l'application $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Proposition 3. *Les fonctions* $\cosh$ *et* $\sinh$ *sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$*. De plus :*

1) $\sinh'(x) = \cosh(x)$ *et* $\cosh'(x) = \sinh(x)$*,*

2) $\cosh$ *est paire,* $\sinh$ *est impaire,*

3) $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $\cosh(x) \geq 1$.

Preuve : en exercice. □

Proposition 4. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) + \sinh(x) = e^x, \quad \textit{et} \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Preuve : en exercice. □

Remarque : Si l'on considère l'hyperbole (H) d'équation $x^2 - y^2 = 1$, la proposition précédente montre qu'elle admet une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \epsilon \cosh(t) \\ y(t) = \sinh(t) \end{cases}$$

avec $\epsilon = \pm 1$ selon que l'on veuille paramétrer la branche "haute" ou la branche "basse".

Définition 2. *On appelle :*

1) tangente hyperbolique l'application $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\tanh x = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

2) cotangente hyperbolique l'application $\coth : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\coth x = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Proposition 5. *Les fonctions* $\tanh$ *et* $\coth$ *sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^*$ *respectivement. De plus :*

1) $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = 1 - \tanh^2(x)$ *et* $\coth'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$*,*

2) $\tanh$ *et* $\coth$ *sont impaires.*

Preuve : en exercice. □

Proposition 6. Formulaire de trigonométrie hyperbolique. *On a :*

1) $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$

2) $\cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)$

3) $\sinh(a+b) = \cosh(a)\sinh(b) + \cosh(b)\sinh(a)$

4) $\sinh(a-b) = -\cosh(a)\sinh(b) + \cosh(b)\sinh(a)$

5) $\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$

6) $\tanh(a-b) = \frac{\tanh(a)-\tanh(b)}{1-\tanh(a)\tanh(b)}$.

6.4 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction argsh

L'application $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante et $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $\sinh$ admet donc une fonction réciproque, notée $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = \operatorname{argsh}(x) \iff \sinh(y) = x.$$

argsh est impaire. De plus, comme $\sinh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh'(x) = \cosh(x) \geq 1$, argsh est dérivable et

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Il en résulte que argsh est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 7. (expression logarithmique de argsh**)** *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Fonction argch

L'application $\cosh : [0;+\infty[\to [1;+\infty[$ est continue, strictement croissante et $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $[0;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$. La fonction $\cosh$ admet donc une fonction réciproque, notée $\operatorname{argch} : [1;+\infty[\to [0;+\infty[$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in [1;+\infty[\times[0;+\infty[, \quad y = \operatorname{argch}(x) \iff \cosh(y) = x.$$

De plus, comme $\cosh$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $\forall x \in]0;+\infty[$, $\cosh'(x) = \sinh(x) > 0$, argch est dérivable et

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{argch}(x))} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{argch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Il en résulte que argch est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.

Proposition 8. (expression logarithmique de argch**)** *On a :*

$$\forall x \in]1;+\infty[, \quad \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Fonction argth

L'application $\tanh : \mathbb{R} \to]-1;1[$ est continue, strictement croissante, $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ et $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. La fonction $\tanh$ admet donc une fonction réciproque, notée $\operatorname{argth} :]-1;1[\to \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad y = \operatorname{argth}(x) \Longleftrightarrow \tanh(y) = x.$$

argth est impaire. De plus, comme $\tanh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) > 0$, argth est dérivable et $\forall x \in]-1;1[$

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Il en résulte que argsh est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 9. **(expression logarithmique de** argth**)** *On a :*

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Chapitre 7

Développement limité

7.1 Comportement local des fonctions

Définition 7.1.1. Soit I un intervalle et $a \in [-\infty, +\infty]$, élément ou extrémité de I . Soit f une fonction définie sur I. On dit qu'une fonction g est dominée par la fonction f au voisinage de a si g est le produit de f par une fonction h bornée au voisinage de a :

$$\text{pour tout } x \in I, \quad g(x) = f(x)h(x)$$

et

$$\text{il existe } r > 0 \text{ et } M \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } x \in I \cap]a-r, a+r[, \quad |h(x)| \leq M \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{il existe } r \in \mathbb{R} \text{ et } M \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } x \in I \cap]r, +\infty[, \quad |h(x)| \leq M \text{ pour } a = +\infty$$

$$\text{il existe } r \in \mathbb{R} \text{ et } M \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } x \in I \cap]-\infty, r[, \quad |h(x)| \leq M \text{ pour } a = -\infty$$

On écrit alors $g(x) \underset{a}{=} O(f(x))$ et on lit $g(x)$ est un grand O de $f(x)$ au voisinage de a.

Exemple 7.1.2 : $x \sin \dfrac{1}{x} \underset{0}{=} O(x)$, car pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \sin \dfrac{1}{x} = x . \sin \dfrac{1}{x}$ et $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$.

Définition 7.1.3. Soit I un intervalle et $a \in [-\infty, +\infty]$, élément ou extrémité de I . Soit f une fonction définie sur I. On dit qu'une fonction g est négligeable devant la fonction f au voisinage de a si g est le produit de f par une fonction h de limite nulle en a :

$$\text{pour tout } x \in I, \quad g(x) = f(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} h(x) = 0.$$

On écrit alors $g(x) \underset{a}{=} o(f(x))$ et on lit $g(x)$ est un grand o de $f(x)$ au voisinage de a.

Exemple 7.1.4 : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$. Alors $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(x^\beta)$.

On a donc en particulier $1 \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$, $x \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x^2)$, $x^2 \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x^3) \ldots$

Proposition 7.1.5. *Soient f, g, h et k des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

— $f \underset{a}{=} o(h)$ *et* $g \underset{a}{=} o(h) \Rightarrow f + g \underset{a}{=} o(h)$

— $f \underset{a}{=} o(h)$ *et* $g \underset{a}{=} o(k) \Rightarrow fg \underset{a}{=} o(hk)$
— $f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow \lambda f \underset{a}{=} o(g)$
— $f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} o(\lambda g)$

Remarque 7.1.6. En revanche, on n'a la propriété suivante :

$$f = \mathrm{o}(h) \text{ et } g = \mathrm{o}(k) \Rightarrow f + g = \mathrm{o}(h + j)$$

En effet, $x \underset{0}{=} \mathrm{o}(1)$, $x \underset{0}{=} \mathrm{o}(-1)$ mais on n'a pas $2x \underset{0}{=} \mathrm{o}(0)$

Si f, g et h sont des fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, nous noterons $f \underset{a}{=} g + \mathrm{o}(h)$ pour $f - g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$.

Définition 7.1.7. Soit I un intervalle et $a \in [-\infty, +\infty]$, élément ou extrémité de I . Soit f une fonction définie sur I. On dit qu'une fonction g est équivalente la fonction f au voisinage de a si g est le produit de f par une fonction h de limite 1 en a :

$$\text{pour tout } x \in I, \quad g(x) = f(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} h(x) = 1.$$

On écrit alors $g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$ et on lit $g(x)$ est équivalente à $f(x)$ au voisinage de a.

Exemple 7.1.8 :

$\sin x \underset{0}{\sim} x$	$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
$\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$	

Proposition 7.1.9. *Soient f, f', g et g' des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$*
— $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $f' \underset{a}{\sim} g' \Rightarrow ff' \underset{a}{\sim} gg'$
— $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $f \underset{a}{\sim} g' \Rightarrow \frac{f}{f'} \underset{a}{\sim} \frac{g}{g'}$

Proposition 7.1.10.
Soient f et g des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Remarque 7.1.11. — Si deux fonctions sont équivalentes au voisinage de a, elles sont de même signe au voisinage de a.
— Il n'y a pas de règle d'addition pour les équivalents :
$1 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x$, mais on n'a pas $1 \underset{x \to +\infty}{\sim} 0 \ldots$
— Il n'y a pas de règle de composition à gauche pour les équivalents.

7.2 Formule de Taylor

Théorème 7.2.1. *Soit I un intervalle ouvert, a un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ dérivable ($n \in \mathbb{N}$). Alors, pour tout $x \in I$, il existe un réel c compris entre a et x tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{7.1}$$

et il existe un réel d compris entre a et x tel que

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-d)^n(x-a) \tag{7.2}$$

La relation (7.1) est appelée formule de Taylor avec reste de Lagrange tandis que la relation (7.2) est appelée formule de Taylor avec reste de Cauchy.

Démonstration. Soit f une fonction $n+1$ dérivable sur I et $a\in I$. On prouve le résultat seulement pour $x>a$, le cas $x<a$ se traitant de la même manière. Considérons la fonction $R\colon [a,x]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie pour tout $t\in[a,x]$ par

$$R(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}-f(x).$$

Comme f est $n+1$ fois dérivable sur $[a,x]$, R est dérivable sur $[a,x]$ et on a pour tout $t\in[a,x]$

$$R'(t)=f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k-kf^{(k)}(x-t)^{k-1}}{k!}$$

$$R'(t)=f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$R'(t)=f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!}$$

$$R'(t)=f'(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!}+\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!}-f'(t)$$

$$R'(t)=\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}.$$

En appliquant le théorème de la moyenne de Cauchy aux fonctions R et $h\colon t\longmapsto (x-t)^{n+1}$ sur l'intervalle $[a,x]$, il existe $c\in]a,x[$ tel que

$$\frac{R(a)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{R(x)-R(a)}{h(x)-h(a)}=\frac{R'(c)}{h'(c)}=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!}\cdot\frac{-1}{(n+1)(x-c)^n}$$

d'où

$$R(a)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1}.$$

Par conséquent

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)(x-a)^k}{k!}-f(x)$$

ce qui donne la formule de Taylor avec reste de Lagrange.
Pour montrer a formule de Taylor avec reste de Cauchy, appliquons le théorème des accroissements à R : il existe $d\in]a,x[$ tel que

$$\frac{R(a)}{a-x}=\frac{R(a)-R(x)}{a-x}=R'(d)=\frac{f^{(n+1)}(d)(x-d)^n}{n!}.$$

Donc
$$R(a) = -\frac{f^{(n+1)}(d)(x-d)^n}{n!}(x-a)$$
Par conséquent
$$-\frac{f^{(n+1)}(d)(x-d)^n}{n!}(x-a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-a)^k}{k!} - f(x)$$
ce qui donne la formule de Taylor avec reste de Cauchy. □

On a une autre formule de Taylor dite avec reste intégral,

Théorème 7.2.2. *Soit I un intervalle ouvert, a un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionde classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors, pour tout $x \in I$, i*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \tag{7.3}$$

Démonstration. On effectue une récurrence sur l'entier n. Si $n = 0$ alors la relation est vraie pour toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I :
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$
donc la propriété est vraie.
Supposons que la formule est vraie pour un certain entier naturel n. Soit f une fonction $\mathscr{C}^{n+2}$ sur I. Comme f estde classe $\mathscr{C}^{n+1}$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$
Par une intégration par partie,
$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
D'où
$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$
□

Théorème 7.2.3 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $a \in I$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange (7.1) à l'ordre $n-1$ en a, on obtient : pour tout $x \in I$, il existe un réel compris entre a et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c).$$

Donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right).$$

Par suite

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!}$$

Comme c est compris entre a et x, lorsque x tend vers a, c tend vers a et comme $f^{(n)}$ est continue en a, il vient que

$$\lim_{x\to a} f^{(n)}(c) = f^{(n)(a)}.$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

□

7.3 Développements limités

Une application très importante des formules de Taylor est la notion de développement limité. Les développements limités sont un produit de la théorie des comparaisons de fonctions. L'idée sous-jacente est de comparer toute une classe de fonctions à une certaine famille de fonctions fixées. Dans le cadre des développements limités, il s'agira de polynômes. Dit simplement, un développement limité est donc une approximation en un point d'une fonction par un polynôme.

7.3.1 Généralités et exemples

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Définition 7.3.1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{R}$, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en au voisinage de a, ou un développement limité à l'ordre n en a (en abrégé $DL_n(a)$) s'il existe $n+1$ nombres réels $c_0, \cdots, c_n$ tels qu'au voisinage de a, on ait

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$ s'appelle partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en a.

La proposition suivante dit qu'une fonction admet au plus un développement limité.

Proposition 7.3.2 (Unicité du développement limité)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe deux $n+1$ uplets de nombres réels $(c_0, c_1, \cdots, c_n)$ et $(d_0, d_1, \cdots, d_n)$ vérifiant :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n) \quad \textit{et} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n),$$

alors $(c_0, c_1, \cdots, c_n) = (d_0, d_1, \cdots, d_n)$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)$ et qu'il existe $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ tel que $a_k \neq b_k$. Notons p le plus petit entier dans $\{0, 1, \cdots, n\}$ tel que $a_p \neq b_p$. On a donc $a_k = b_k$ pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$. Par soustraction des deux développements limités, il vient :

$$0 = (c_p - d_p)(x-a)^p + (c_{p+1} - d_{p+1})(x-a)^{p+1} + \cdots + (c_n - d_n))(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

Pour $x \neq a$, en divisant par $(x-a)^p$, il vient,

$$0 = (c_p - d_p) + (c_{p+1} - d_{p+1})x + (c_n - d_n)(x-a)^{p+1} + \cdots + \mathrm{o}((x-a)^{n-p}).$$

En faisant tendre x vers a,on obtient $0 = a_p - b_p$ et par conséquent $a_p = b_p$. Ce qui est absurde. □

La proposition suivante montre que si une fonction f possède un développement limité en un point a à un certain ordre n, on obtient facilement un un développement limité d'ordre $p < n$ en tronquant la partie régulière de ce développement limité à l'ordre p. Tronquer un polynôme à l'ordre p signifie que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leq p$.

Proposition 7.3.3. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet en a à l'odre $n \in \mathbb{N}$ le développement limité*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)),$$

alors f admet en a à l'odre p pour tout $0 \leq p \leq n$ pour développement limité

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} c_k(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^p)).$$

Démonstration. Supposons que f admette le développement limité en a à l'ordre n suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n))$$

. Alors pour tout $k \in \{p+1, \cdots, n\}$, on a $x^k = \mathrm{o}(x^p)$. Donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} c_k(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^p)).$$

□

On peut donc intégrer terme à terme un développement limité.

Proposition 7.3.4 (Intégration d'un développement limité)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont le développement limité en $a \in I$ à l'ordre n est*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

Notons F une primitive de f.

Alors F admet un développement limité en a à l'ordre $n+1$ qui s'écrit :

$$F(x) = F(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \mathrm{o}((x-a)^{n+1}).$$

Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le développement limité de F à la constante $F(a)$ près.

Démonstration. Soit $x \in I$. Comme $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$, il existe une fonction ε telle $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. De plus ε est continue sur I. D'où

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt = a_0(x-a) + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \int_a^x (t-a)^n\varepsilon(t)dt.$$

Notons $\eta(x) = \int_a^x (t-a)^n\varepsilon(t)dt$. Alors η est dérivable sur I et par le théorème des accroissements, il existe un réel c_x compris entre a et x tel que

$$\eta(x) = \eta(x) - \eta(a) = (x-a)\eta'(c_x) = (x-a)(c_x-a)^n\varepsilon(c_x)$$

On a c_x compris entre a et x, donc $|c_x - a| \leq |x-a|$. Par conséquent

$$|\eta(x)| \leq |x-a|^{n+1}|\varepsilon(c_x)|.$$

Comme $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(c_x) = 0$. Par suite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\eta(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$. Ce qui prouve que le développement limité de F.

$\square$

Remarque 7.3.5. Attention, en général il n'ya pas de réciproque au théorème ci-dessus : l'existence d'un développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0 n'entraîne pas forcément l'existence d'un développement limité de sa fonction dérivée f' à l'ordre $n-1$ en 0. Cependant si l'on sait que f' possède un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, alors sa partie régulière peut être obtenue en dérivant la partie régulière du développement limité d'une fonction f à l'ordre n puisque cette dernière en est une primitive.

Exemple 7.3.6 : 1. Toute fonction polynôme admet un développement limité en tout point a et à tout ordre .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

   et $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \mathrm{o}(x^n)$ donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

   est un développement limité en 0 à l'ordre n.

3. Toute fonction continue en a admet un développement limité en a à l'ordre 0 :

$$f(x) = f(a) + \mathrm{o}(1).$$

   En fait une fonction admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue (ou prolongeable par continuité) en a.

4. Toute fonction dérivable en a admet un développement limité en a à l'ordre 1 :

$$f(x) = f(a) + f(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a).$$

   En fait une fonction admet un développement limité en a à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable (ou prolongeable par dérivabilité) en a.

5. En revanche une fonction peut admettre un développement limité en a à l'ordre 2 sans être deux fois dérivable en a :

   En guise d'exemple la fonction
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$
   ad-met pour développement limité en 0 à l'ordre 2, $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Proposition 7.3.7 (Propriété de parité). *Soit $f\colon]-r,r[\longrightarrow \mathbb{R}$ ($r>0$) une fonction ayant en* 0 *pour développement limité à l'ordre n :*

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\mathrm{o}(x^n)$$

- *Si la fonction f est paire, alors n'y figurent dans le dévéloppement limité, avec des coefficients non nuls, que les termes d'exposant pair.*
- *Si la fonction f est impaire, alors n'y figurent dans le dévéloppement limité, avec des coefficients non nuls, que les termes d'exposant impair.*

Démonstration. Lorsque f est paire, on a pour tout $x\in]-r,r[$, $f(x)=f(-x)$. Donc

$$\begin{aligned} a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\mathrm{o}(x^n) &= a_0+a_1(-x)+\cdots+a_n(-x)^n+\mathrm{o}(x^n)\\ &= a_0-a_1x+\cdots+(-1)^na_nx^x+\mathrm{o}(x^n)\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on obtient pour tout $k\in\{0,\cdots,n\}$, $a_k=(-1)^ka_k$. Ce qui prouve que les coefficient a_k avec impaire sont nuls.
On raisonne de même pour les fonctions impaires. □

7.3.2 Développements limités en $\pm\infty$

Soit $x_0\in\mathbb{R}$.

Définition 7.3.8. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=]x_0,+\infty[$. On dit que f admet un développement limité en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $c_0,c_1,\ldots,c_n$ tels que

$$f(x)=c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Définition 7.3.9. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=]-\infty,x_0[$. On dit que f admet un développement limité en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $c_0,c_1,\ldots,c_n$ tels que

$$f(x)=c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Exemple 7.3.10 : la fonction $f\colon x\to\dfrac{x}{1+x}$ est définie au voisinage de $\pm\infty$ et por tout $x\neq -1$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{x}\right)^k+\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{x}}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{x}\right)^k+\left(\frac{1}{x}\right)^n.\frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\\ \frac{x}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{x}\right)^k+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).\end{aligned}$$

Remarque 7.3.11. 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. La fonction f admet un développement limité en a à l'ordre n si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(x+a)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n.

2. Soit f une fonction définie définie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$). La fonction f admet un développement limité en $+\infty$ (ou en $-\infty$) à l'ordre n si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(\frac{1}{x})$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n.

Pour ces raisons, dans les énoncés qui suivent, nous formulons les résultats pour les développements limités en 0 ; il est très facile de les appliquer aux développements limités en un point a quelconque ou en $\pm\infty$.

7.3.3 Développements limités usuels en 0

En appliquons la formule de Taylor-Young aux fonctions usuelles, dont il est facile de calculer les dérivées successives on obtient leurs développements limités.

Exponentielle

$\exp\colon x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée n$^{\text{ème}}$ est elle-même. D'après Taylor-Young, elle admet un développement limité à tout ordre n en 0 :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) \tag{7.4}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \tag{7.5}$$

De même, les fonctions $\mathrm{ch}\colon x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}\colon x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; et pour tout entier n, on a $\mathrm{ch}^{(2n)} = \mathrm{sh}$, $\mathrm{ch}^{(2n+1)} = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{sh}^{(2n)} = \mathrm{ch}$, $\mathrm{sh}^{(2n+1)} = \mathrm{sh}$. Ce qui permet d'obtenir :

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \tag{7.6}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \mathrm{o}(x^{2n+1}) \tag{7.7}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \tag{7.8}$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \tag{7.9}$$

Fonction logarithme

La fonction $f\colon x \longmapsto \ln(x+1)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty$, et admettent donc un développement limité à tout ordre en 0. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout

$x \geq -1$, la dérivée n$^{\text{ème}}$ est $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. D'où $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.
Par conséquent :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \tag{7.10}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \tag{7.11}$$

Fonctions trigonométriques

cos et sin sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et admettent donc un développement limité à tout ordre en 0.

Par ailleurs pour tout entier n et pour tout réel x, on a $\cos^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$ et $\sin^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2)$. Donc

$$\cos^{(2n)}(0) = 0,\ \cos^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,\ \sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \text{ et } \sin^{(2n+1)}(0) = 0$$

D'où :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \tag{7.12}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \tag{7.13}$$

De même,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{7.14}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{7.15}$$

Fonctions Puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$. La dérivée n$^{\text{ème}}$ en tout $x \in]-1, +\infty[$ est $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{7.16}$$

On obtient pour tout n, respectivement pour $\alpha = 1/2$, $\alpha = -1/2$, $\alpha = -1$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)} x^n + \mathrm{o}(x^n) \qquad (7.17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} x^n + \mathrm{o}(x^n) \qquad (7.18)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \qquad (7.19)$$

Liste de développements limités en 0 usuels à connaître

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{th}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

7.4 Opérations sur les développements limités

7.4.1 Développement limité d'une somme ou produit de fonctions

Proposition 7.4.1. *On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développements limités en 0 à l'ordre n :*

$$f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^n) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^n) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

— *$f+g$ admet un développement limité en 0 l'ordre n qui est :*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + \cdots + (c_n + d_n)x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

— *$f \times g$ admet un développement limité en 0 l'ordre n qui est :*

$$(f \cdot g)(x) = T_n(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

où $T_n(x)$ est le polynôme $P(x) \cdot Q(x)$ tronqué à l'ordre n.

Exemple 7.4.2 : Calculer le développement limité de $\cos x \cdot \sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2. On donne les développements limités en 0 à l'ordre 2 de $\cos x$ et $\sqrt{1+x}$: $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 +$

$\mathrm{o}(x^2)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) \\
\cos x \cdot \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^2)
\end{aligned}$$

7.4.2 Développement limité d'une composition de fonctions

Proposition 7.4.3. *On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développements limités en 0 à l'ordre n :*

$$f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^n) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^n) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $d_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n qui est :

$$(f \circ g)(x) = T_n(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

où $T_n(x)$ est le le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $P(Q(x))$.

Exemple 7.4.4 : Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\sqrt{\cos x}$.

On donne le développements limité en 0 à l'ordre 4 de $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Donc $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)} = \sqrt{1+u}$ où $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$. On voit que lorsque x tend vers 0, u tend vers 0, donc $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \mathrm{o}(u^2)$. Or $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, donc $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$ et $\mathrm{o}(u^2) = \mathrm{o}(x^4)$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos x} &= \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \mathrm{o}(u^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x^4\right) + \mathrm{o}(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{32}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \\
\sqrt{\cos x} &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \mathrm{o}(x^4)
\end{aligned}$$

7.4.3 Développement limité d'un quotient de fonctions

Proposition 7.4.5. *On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développements limités en 0 à l'ordre n :*

$$f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^n) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^n) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Si $g(0) \neq 0$ (c'est-à-dire $d_0 \neq 0$) alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n qui est :

$$\frac{f}{g}(x) = T_n(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

où $T_n(x)$ est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de $P(x)$ par $Q(x)$ à l'ordre n.

Exemple 7.4.6 : Déterminer le développement limité de

$$f(x) = \ln\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right).$$

à l'ordre 3 au voisinage de 0.

On a les développements limités

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3) \\ 1+\sin(x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

La division suivant les puissances croissantes de $1 - \frac{x^2}{2}$ par $1 + x - \frac{x^3}{6}$ nous donne

$$
\begin{array}{r|l}
1-\dfrac{x^2}{2} & 1+x-\dfrac{x^3}{6} \\ \cline{2-2}
-1-x+\dfrac{x^3}{6} & 1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3} \\ \cline{1-1}
-x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6} & \\
x+x^2-\dfrac{x^4}{6} & \\ \cline{1-1}
\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{6} & \\
-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{12} & \\ \cline{1-1}
-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{6}+\dfrac{x^5}{12} & \\
\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{3}-\dfrac{x^6}{18} & \\ \cline{1-1}
\dfrac{x^4}{6}+\dfrac{x^5}{12}-\dfrac{x^6}{18} &
\end{array}
$$

Par conséquent, le développement limité de $\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$ en 0 à l'ordre 3 est :

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} = 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3).$$

Posons maintenant $t=-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$. Lorsque x tend vers 0, t tend vers 0, donc

$$\ln\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right) = \ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\mathrm{o}(t^3)$$

Or $t=-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$, $t^2 = x^2-x^3+\mathrm{o}(x^3)$ et $t^3=-x^3+\mathrm{o}(x^3)$, donc

$$\ln\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right) = -x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(x^2-x^3)-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3) = -x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$$

7.5 Applications des développements limités

7.5.1 Calcul de limites

Quand une limite se présente sous forme indéterminée, un développement limité permet le plus souvent de lever l'indétermination. Cette section sera traitée sous forme d'exercices.

***Exercice* 7.5.1 :** *Calculer* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$.

Faisons un développement limité à l'ordre 2 *de* $\ln(1+x)$: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)$. *Donc*

$$\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{1}{x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)}.$$

Posons $X=-\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)$. *Lorsque* x *tend vers* 0, X *tend vers* 0, *donc*

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)}=\frac{1}{1+X}=1-X+\mathrm{o}(X)=1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x).$$

Par conséquent $\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)$. *D'où* $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)$. *Ainsi, on obtient*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

***Exercice* 7.5.2 :** *Calculer* $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}\right)$.

Posons $t=\frac{1}{x}$ *; on a* $\frac{1}{1+x}=\frac{t}{1+t}$ *et quand* x *tend vers* $+\infty$, t *tend vers* 0^+. *Donc*

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}\right)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}\right).$$

Faisons un développement limité à l'ordre 2 *de* $\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}$. *On a :*

$$\mathrm{e}^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$$
$$\frac{t}{1+t}=t\frac{1}{1+t}=t(1-t+\mathrm{o}(t))=t-t^2+\mathrm{o}(t^2)$$

Posons $X=t-t^2+\mathrm{o}(t^2)$. *Lorsque* t *tend vers* 0, X *tend vers* 0, *donc*

$$\mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}=\mathrm{e}^{t-t^2+\mathrm{o}(t^2)}=\mathrm{e}^X=1+X+\frac{X^2}{2}+\mathrm{o}(X^2).$$

On a $X=t-t^2+\mathrm{o}(t^2)$, $X^2=t^2+\mathrm{o}(t^2)$ *et* $\mathrm{o}(X^2)=\mathrm{o}(t^2)$. *D'où*

$$\mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}=1+t-t^2+\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)=1+t-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2).$$

Finalement $\frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}\right)=\frac{1}{t^2}\left(1+t+\frac{t^2}{2}-1-t+\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right)=1+\mathrm{o}(1)$. *Par suite,* $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}\right)=1$ *et donc* $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}\right)=1$.

***Exercice* 7.5.3 :** *Calculer Calculer* $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

On a le développement limité d'ordre 3 *en* 0 *:* $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. *D'où*

$$\frac{sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

En posant $X = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, *on a* X *tend vers* 0 *lorsque* x *tend vers* 0, *et*

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

Comme $X = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$ *et* $X^2 = o(x^2)$ *nous obtenons*

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1 - \frac{x^2}{6} - o(x^2) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}\ .$$

7.5.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 7.5.1. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction admettant un développement limité en a :* $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$, *où k est le plus petit entier* ≥ 2 *tel que le coefficient* c_k *soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est :* $y = c_0 + c_1(x-a)$ *et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe de* $c_k(x-a)^k$.

Il y a 3 cas possibles.

— Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.
— Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.
— Si ce signe change (lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$) alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. C'est un point d'inflexion.

Exemple 7.5.2 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

1. Déterminons la tangente en $\frac{1}{2}$ du graphe de f et précisons la position du graphe par rapport à la tangente.
   Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On a pour tout réel x, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$, donc $f''(\frac{1}{2}) = -3 \neq 0$ et $k = 2$.

   De la formule de Taylor-Young, on détermine le développement limité de f en $\frac{1}{2}$ à l'ordre 2 :
   $$f(x) = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + o((x - \frac{1}{2})^2).$$

   Donc la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $y = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2})$ et le graphe de f est en dessous de la tangente car $-\frac{3}{2}(x - \frac{1}{2})^2$ est négatif au voisanage de $x = \frac{1}{2}$.

2. Déterminons les points d'inflexion.
   Les points d'inflexion sont à chercher parmi les solutions de $f''(x) = 0$. Les points candidats sont donc $x = 0$ et $x = 1$.
   — Le développement limité en 0 est $f(x) = 1 - 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc $y = 1$ (une tangente horizontale). Comme $-2x^3$ change de signe en 0 alors 0 est un point d'inflexion de f (ici $k = 3$).
   — Le développement limité en 1 est : $f(x) = -2(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^4 + \mathrm{o}((x-1)^4)$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc $y = -2(x-1)$. Comme $2(x-1)^3$ change de signe en 1, 1 est aussi un point d'inflexion de f.

7.5.3 Position d'une courbe par rapport à une asymptote oblique

Proposition 7.5.3. *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet un développement limité en $+\infty$ (ou en $-\infty$) :*

$$\frac{f(x)}{x} = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_k}{x^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^k}\right),$$

où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient de $\dfrac{1}{x^k}$ soit non nul.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (c_0x + c_1)] = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (c_0x + c_1)] = 0$) et la droite d'équation $y = c_0x + c_1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{c_k}{x^{k-1}}$.

Exemple 7.5.4 : Considérons la fonction définie pour tout $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ par $f(x) = \exp \dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$. Déterminons les éventuelles asymptotes ainsi la position relatives de ces asymptotes par rapport à la courbe.

Au voisinage de $\pm\infty$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \exp \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

Posons $t = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $\pm\infty$, t tend vers 0, et on a

1. Au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \exp \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^t \sqrt{1 - t^2} \\
&= \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \mathrm{o}(t^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^3)\right) \\
&= 1 + t - \frac{1}{3}t^3 + \mathrm{o}(t^3) \\
&= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).
\end{aligned}$$

On obtient au voisinage de $+\infty$, $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{3}x^2 + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Donc l'asymptote de f en $+\infty$ est la droite d'équation $y = x + 1$. Comme $f(x) - x - 1 = -\frac{1}{3x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$, le graphe de f reste en dessous de l'asymptote.

2. Au voisinage de $-\infty$. $\frac{f(x)}{x} = \exp\frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\exp\frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$. On déduit du cas précédent,
$$f(x) = -x - 1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
Donc $y = -x - 1$ est une asymptote de f en $-\infty$.
On a $f(x) + x + 1 = \dfrac{1}{3x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to -\infty$; le graphe de f reste au-dessus de l'asymptote.