

Comparaison de fonctions, développements limités

I Comparaison de fonctions

1 Définitions

a Négligeable

Définition 1

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que f et g sont définies au voisinage de a . On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a . (g peut s'annuler en a)

On dit que f est **négligeable devant g au voisinage de a** si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

Propriété 1

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ définies au voisinage de a .

f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si il existe un intervalle I de la forme $[a - \alpha; a + \alpha]$, ou $[h; +\infty[$ (si $a = +\infty$) ou $] -\infty; h]$ (si $a = -\infty$) et une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple 1:

Soient les deux fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = x^3$. Montrons que $f \underset{+\infty}{=} o(g)$.

On a pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3}$. Comme $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3}$ est une fraction rationnelle, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et ainsi $f \underset{+\infty}{=} o(g)$.

b Équivalent

Définition 2

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que f et g sont définies au voisinage de a . On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a .

On dit que f est **équivalente à g au voisinage de a** si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Propriété 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ définies au voisinage de a .

f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement si il existe un intervalle I de la forme $[a - \alpha; a + \alpha]$, ou $[h; +\infty[$ (si $a = +\infty$) ou $] -\infty; h]$ (si $a = -\infty$) et une fonction φ définie sur I telle que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = g(x)\varphi(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$$

Attention avec cette proposition on voit que l'on ne peut donc jamais écrire qu'une fonction est équivalente à 0 au voisinage de a .

Exemple 2:

Montrer que $x^3 - \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$.

On a $\frac{x^3 - \ln x}{x^3} = 1 - \frac{\ln x}{x^3}$.

Or d'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - \ln x}{x^3} = 1$ et donc $x^3 - \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$.

2 Premières propriétés

Propriété 3

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors on a :

$$f \underset{a}{=} o(1) \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Propriété 4

Si f est équivalente à g au voisinage de a alors g est équivalente à f au voisinage de a

Attention cela ne fonctionne pas pour les o .

Théorème 1

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Attention : la réciproque est fausse!!!! Deux fonctions ayant la même limite ne sont pas forcément équivalentes. On a par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ mais $e^x \not\sim x^2$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Propriété 5

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que f est définie au voisinage de x_0 .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ où l est un réel **non nul** alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} l$.

Propriété 6

On a :

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g)$$

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow g - f \underset{a}{=} o(f)$$

On écrit alors $f \underset{a}{=} g + o(g)$ ou $g \underset{a}{=} f + o(f)$

Théorème 2

Soient α et β deux réels strictement positifs.

- Si $\alpha < \beta$, on a :

$$|x|^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(|x|^\alpha) \quad \text{et} \quad x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$$

- Au voisinage de $+\infty$ on a :

$$(\ln x)^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta) \quad x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x})$$

- Au voisinage de 0 on a :

$$\ln x \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

Remarque :

Ce théorème traduit, avec la notation o des limites usuelles que vous connaissez du chapitre précédent et en particulier les croissances comparées.

Propriété 7

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que f est dérivable en x_0 . Alors :

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Une grande partie des équivalents classique vient de cette propriété.

Propriété 8

On a les équivalents suivant :

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$$

$$\text{pour } \alpha \neq 0, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$$

Remarques :

- Ces équivalents classiques permettent de retrouver les limites classiques que vous êtes censé connaître comme par exemple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- Le dernier équivalent classique de la propriété précédente s'utilise le plus souvent avec $\alpha = \frac{1}{2}$, ce qui donne $\sqrt{x+1} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$

Propriété 9

Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $+\infty$ et $-\infty$ et à son monôme de plus petit degré en 0.

Propriété 10

On considère f, g, h et j des fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$ et définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors on a : (toutes les relations sont au voisinage de a)

- (i) Si $f = o(g)$ et $h = o(j)$ alors $f + h = o(g + j)$
- (ii) Si $f = o(g)$ et $h = o(g)$ alors $f + h = o(g)$
- (iii) Si $f = o(g)$ et $h = o(j)$ alors $fh = o(gj)$
- (iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f = o(g)$ alors $f^n = o(g^n)$
- (v) Si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a et si $f = o(g)$ alors $\frac{1}{g} = o\left(\frac{1}{f}\right)$
- (vi) Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$
- (vii) Si $f = o(g)$ alors $|f| = o(|g|)$

Propriété 11

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$ et définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f = o_a(g)$. Soit h une fonction définie sur $\mathcal{D}_h$ telle que $h(\mathcal{D}_h) \subset \mathcal{D}$. Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_b h = a$. Alors on a $f \circ h = o_b(g \circ h)$. (**Changement de variable**)

Attention on ne peut pas sommer les équivalents ni les composer en général

Exemple 3:

- On a $x + 2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + 1$ et $-x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x$ or on a pas $2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1!!!!$
- On a $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ mais on a pas $e^{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$.

Les seules opérations que vous avez le droit de faire sont listées dans la propriété ci-dessous.

Propriété 12

On considère f, g, h et j des fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$ et définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors on a :

- (i) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$
- (ii) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} j$ alors $fh \underset{a}{\sim} gj$
- (iii) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$
- (iv) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} j$ et si h et j ne s'annulent pas au voisinage de a alors $\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{j}$
- (v) Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \underset{a}{\sim} g^n$
- (vi) Si f et g sont strictement positives au voisinage de a et si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$

Propriété 13

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$ et définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$. Soit h une fonction définie sur $\mathcal{D}_h$ telle que $h(\mathcal{D}_h) \subset \mathcal{D}$. Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_b h = a$. Alors on a $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$. (**Changement de variable**)

Propriété 14

Si $f = o(g)$ alors $f + g \sim g$

Exemple 4:

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} e^{-1/x^2}$.

On remarque tout d'abord que $\frac{1}{x^4} e^{-1/x^2} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 e^{-1/x^2}$

On pose donc $X = \frac{1}{x^2}$ et lorsque $x \rightarrow 0$, $X \rightarrow +\infty$. On a donc $\frac{1}{x^4} e^{-1/x^2} = X^2 e^{-X} = \frac{X^2}{e^X}$

Or on sait que $X^2 = o(e^X)$ donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 e^{-X} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} e^{-1/x^2} = 0$.

Exemple 5:

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3 - \ln(x))$.

On a ici une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$.

On sait que au voisinage de $+\infty$, $x^3 = o(e^x)$ et $\ln(x) = o(e^x)$ donc $e^x - x^3 - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ et donc comme

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3 - \ln(x)) = +\infty$.

Exemple 6:

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{e^x - x^3}$.

Cherchons séparément un équivalent du numérateur puis du dénominateur.

On a $\ln x = o(x^2)$ donc $x^2 + \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ et de plus $x^3 = o(e^x)$ donc $e^x - x^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$.

Par quotient d'équivalents on obtient $\frac{x^2 + \ln x}{e^x - x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^x}$.

De plus $x^2 = o(e^x)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{e^x - x^3} = 0$.

Exemple 7 : Les fractions rationnelles

Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\frac{x^5 - 3x^2 + 1}{2x^4 + 4x - 3}$.

On sait que $x^5 - 3x^2 + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^5$ et $2x^4 + 4x - 3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^4$, donc $\frac{x^5 - 3x^2 + 1}{2x^4 + 4x - 3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^5}{2x^4} = \frac{x}{2}$.

On retrouve, rédigé de façon propre, le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 1}{2x^4 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}$.

Exemple 8:

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$.

On a ici une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Mais on reconnaît des équivalents classiques.

On a $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1$.

Exemple 9:

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}e^{1/x}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$.

Le numérateur et le dénominateur de ce quotient nous font penser à des équivalents classiques.

• Pour le numérateur on souhaiterait utiliser l'équivalent $\sqrt{1+X} - 1 \underset{X \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}X$ avec $X = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$. Pour utiliser cela il nous faut bien vérifier que $X \rightarrow 0$. Or tout simplement par produit de limites on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}e^{1/x} = 0. \text{ Donc on peut bien écrire } \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}e^{1/x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}e^{1/x}.$$

• Pour le dénominateur on souhaiterait utiliser l'équivalent $\ln(1+X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ avec $X = \frac{1}{x^2}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc on a $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

• On a donc $\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}e^{1/x}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2x^2}e^{1/x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}e^{1/x}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}e^{1/x} = \frac{1}{2}$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}e^{1/x}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}$

II Développements limités

Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Définition

Définition 3

Si f est définie au voisinage de 0, on dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre n au voisinage de 0** s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ s'appelle la **partie régulière** du DL et $o(x^n)$ s'appelle le **reste** du DL.

On peut aussi définir le développement limité au voisinage de n'importe quel $x_0 \in \mathbb{R}$:

Définition 4

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est définie au voisinage de x_0 , on dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Voici un théorème qui donne une condition suffisante pour l'existence d'un développement limité à l'ordre n :

Théorème 3

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et si $x_0 \in I$ alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

On pourra démontrer ce théorème, appelé le théorème de Taylor-Young, dans le chapitre sur les intégrales, pour l'instant il est admis.

Remarque :

On utilise le plus souvent ce théorème dans le cas particulier où $x_0 = 0$ ce qui donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Propriété 15

Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$
alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$

On remarque donc que f ne peut pas admettre de DL en x_0 si f n'admet pas une limite finie en x_0 .

Propriété 16

Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$,
alors au voisinage de x_0 , f est équivalente au premier terme non nul de son développement limité :
c'est-à-dire que si p est tel que pour tout $0 \leq k \leq p-1$ $a_k = 0$ et $a_p \neq 0$ alors on a au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p (x - x_0)^p$$

On verra que sur les développements limités on peut faire plus d'opérations que sur les équivalents donc lorsqu'on sera bloqué avec les équivalents, il sera souvent judicieux de passer par les développements limités pour trouver par exemple une limite.

Théorème 4

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 alors ce développement limité est unique

Voici maintenant les développements limités classiques à connaître par cœur. Ce sont des développements limités au voisinage de 0 et à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

Théorème 5

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Pour obtenir un développement limité au voisinage d'un $x_0 \neq 0$ il faudra le plus souvent effectuer le changement de variable $X = x - x_0$ qui permet de chercher un développement limité en X au voisinage de 0.

4 Opérations sur les DL

a Somme et produit**Propriété 17**

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant chacune un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \text{ et } g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

- Alors $f + g$ admet le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 suivant :

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + o(x^n)$$

- Alors fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 que l'on obtient en faisant le produit des polynômes $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $\sum_{k=0}^n b_k x^k$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Exemple 10:

Calculer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\frac{e^x}{1+x}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+x} &= e^x \times \frac{1}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) (1 - x + x^2 + o(x^2)) \\ &= 1 - x + x^2 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

b Composition

Propriété 18

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k x^k}_{P(x)} + o(x^n)$$

Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$g(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k x^k}_{Q(x)} + o(x^n)$$

On suppose de plus que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n que l'on obtient en effectuant $Q \circ P$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Exemple 11:

Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $e^{\sqrt{x+1}}$.

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{x+1}} &= e^{\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)} \\ &= e \times e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)} = e \times e^X \quad \text{avec } X = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$ on peut calculer le développement limité de e^X . On sait que au voisinage de 0 :

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Or :

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\ X^2 &= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \times \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{4} + o(x^2) \\ o(X^2) &= o(x^2) \end{aligned}$$

Dans le développement du produit on « oublie » tous les terme en x^a avec $a > 2$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{x+1}} &= e \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right) + o(x^2)\right) \\ &= e \left(1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)\right) \\ &= e + \frac{e}{2}x + o(x^2) \end{aligned}$$

c Quotient

Lorsqu'on a un quotient il faut se servir de la composée avec le développement limité de $\frac{1}{1+x}$.

Exemple 12:

Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+\ln(1+x)}$.

On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\ln(1+x)} &= \frac{1}{1+x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{1+X} \quad \text{avec } X = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$ on peut utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+X}$. On sait que au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$$

Or :

$$\begin{aligned}X &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ X^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = x^2 - x^3 + o(x^3) \\ X^3 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times (x^2 - x^3 + o(x^3)) = x^3 + o(x^3) \\ o(X^3) &= o(x^3)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\ln(1+x)} &= 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + (x^2 - x^3 + o(x^3)) - (x^3 + o(x^3)) + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Exemple 13:

Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

On sait que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{1+1+x/2 - x^2/8 + x^3/16 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2+x/2 - x^2/8 + x^3/16 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x/4 - x^2/16 + x^3/32 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+X} \quad \text{avec } X = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$ on peut utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+X}$. On sait que au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$$

Or :

$$X = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)$$

$$X^2 = \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3) \right) \times \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3) \right) = \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{32} + o(x^3)$$

$$X^3 = \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3) \right) \times \left(\frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3) \right) = \frac{x^3}{64} + o(x^3)$$

$$o(X^3) = o(x^3)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3) \right) + \left(\frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{32} + o(x^3) \right) - \left(\frac{x^3}{64} + o(x^3) \right) + o(x^3) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{5}{64}x^3 + o(x^3) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{16} - \frac{5}{128}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

5 Applications des DL

a Position par rapport à une tangente

Propriété 19

Si f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 , $f(x) = a + b(x - x_0) + o((x - x_0))$ alors f est dérivable en x_0 et $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.

Remarque :

Dans ce cas, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc $y = a + b(x - x_0)$ et pour connaître la position de la courbe par rapport à la tangente il suffit de regarder le signe du terme suivant du développement limité.

Exemple 14:

Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

En déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Au voisinage de 0 on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1+1+x+x^2/2+x^3/6+o(x^3)} = \frac{1}{2+x+x^2/2+x^3/6+o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x/2+x^2/4+x^3/12+o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+X} \quad \text{avec } X = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$ on peut utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+X}$. On sait que au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$$

Or :

$$\begin{aligned}X &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\X^2 &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \right) \times \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \right) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) \\X^3 &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \right) \times \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) \right) = \frac{x^3}{8} + o(x^3) \\o(X^3) &= o(x^3)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3) \right) - \left(\frac{x^3}{8} + o(x^3) \right) + o(x^3) \right) \\&= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f admet en 0 une tangente d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$.

On a $f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} \right) = \frac{x^3}{48} + o(x^3)$ donc au voisinage de 0, la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $\frac{x^3}{48}$. Pour $x < 0$ la courbe est en dessous de la tangente et pour $x > 0$ la courbe est au dessus de la tangente.

b Détermination d'asymptotes obliques

On suppose ici que $\lim_{+\infty} f = \pm\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = \pm\infty$ et on est donc en train de chercher à déterminer si la courbe représentative de f , $\mathcal{C}$, possède une asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$.

Si $\mathcal{C}$ possède une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) en $\pm\infty$ alors on a

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en $\pm\infty$. On pose alors $X = \frac{1}{x}$ et ainsi lorsque x tend vers $\pm\infty$, X tend vers 0. On a donc

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{a}{X} + b + \varepsilon\left(\frac{1}{X}\right)$$

ce qui nous donne

$$Xf\left(\frac{1}{X}\right) = a + bX + X\varepsilon\left(\frac{1}{X}\right) = a + bX + o(X)$$

Ainsi on voit que pour déterminer les coefficients de l'asymptote oblique il suffit de déterminer le développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de $Xf\left(\frac{1}{X}\right)$. Si on continue plus loin dans le développement limité on pourra obtenir la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exemple 15:

Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{x^2 + 1}}$.

On remarque tout d'abord que $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$.

• *Etude en $+\infty$:*

On pose $X = \frac{1}{x}$, comme on est au voisinage de $+\infty$, X est au voisinage de 0 avec $X > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{1}{X}\right) &= \sqrt{\frac{1/X^4}{1/X^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{X^2 + X^4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{X^2(1 + X^2)}} \\ &= \frac{1}{X \times \sqrt{1 + X^2}} \quad \text{car } X > 0 \\ &= \frac{1}{X} \times (1 + X^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{X} \left(1 - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right) \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{2}X + o(X) \end{aligned}$$

Donc on a au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$ et ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Comme $f(x) - x = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et que en $+\infty$ $-\frac{1}{2x} < 0$, la courbe est en dessous de l'asymptote.