Licence 1 de MIAGE

TD : Suites et fonctions dérivables

Exercice 1 Répondre par Vrai ou Faux et justigier votre réponse.

1. La somme de deux nombres irrationnels est un irrationnel.
2. La somme d'un nombre irrationnel et d'un nombre rationnel est un irrationnel.
3. Entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un rationnel.
4. Entre deux nombres rationnels distincts, il existe toujours un irrationnel.
5. L'ensemble des irrationnels est un intervalle de $\mathbb{R}$.
6. Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
7. Si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure M, alors tout réel m strictement inférieur à M appartient à A.

Exercice 2 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On pose

$$-A = \{-x \,:\, x \in A\}.$$

1. Si A est majorée, $-A$ est minorée et on a
$$\inf(-A) = -\sup A;$$
2. si A est minorée, $-A$ est majorée et on a
$$sup(-A) = -inf A.$$
3. si $A \subset \mathbb{R}_+^*$ alors
$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}.$$

Exercice 3 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble

$$A + B = \{x + y \,:\, x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Montrer que :

1. si A et B sont majorées alors
   - $A + B$ est majorée et on a
   $$\sup(A + B) = \sup A + \sup B;$$
   - $A \cup B$ est majorée et on a
   $$\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$$

2. si A et B sont minorées alors
   • $A + B$ est minorée et on a

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B;$$

$A \cup B$ est minorée et on a

$$\inf(A \cup B) = \inf(\inf A, \inf B).$$

Exercice 4

1. Donnez la définition de suites adjacentes
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 4$ et pour tout $n \geqslant 0$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

a) Déterminer u_1 et v_1.
b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$ on a

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

c) Démontrer que $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire que la suite $(v_n - u_n)$ tend vers 0.
d) Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
e) Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.
f) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 5
Déterminer le terme général de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

1. $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.
2. $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = 6$.
3. $u_{n+2} = 9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = 1$.

Licence 1 de MIAGE

TD : Suites et fonctions dérivables

Licence 1 de MIAGE
TD : Suites et fonctions dérivables