Université Felix Houphouët Boigny **Fiiche 2**
Année 2022-2023

Licence 1 de MIAGE
TD : Suites et fonctions dérivables

Exercice 1 Calcluler les limilites suivantes (l'emploi des fonctions équivalentes est conseillé) :

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(2-x)\tan(2x)}\qquad b)\ \lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x},\ a,b\in]0,+\infty[.$$

Exercice 2 A l'aide des des développements limités, calcluler les limilites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sqrt[3]{1+x}-2\sqrt{1+x}-1}{x^2}\right)\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 3
Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que lorsque x est au voisinage de l'infini, on peut écrire
$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
3. En déduire l'asymptôte de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de l'infini et la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptôte.

Exercice 4

1. Donnez la définition de suites adjacentes
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=2$ et $v_0=4$ et pour tout $n\geqslant 0$
$$u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}\quad \text{et}\quad v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}.$$
a) Déterminer u_1 et v_1.
b) Démontrer que pour tout $n\geqslant 0$ on a
$$u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n.$$
c) Démontrer que (v_n-u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire que la suite (v_n-u_n) tend vers 0.
d) Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
e) Démontrer que la suite (u_n+v_n) est constante.
f) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 5
Déterminer le terme général de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

1. $u_{n+2}=-u_{n+1}+2u_n$, $u_0=0$, $u_1=3$.
2. $u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$, $u_0=5$, $u_1=6$.
3. $u_{n+2}=9u_n$, $u_0=5$, $u_1=1$.