Licence 1 de MIAGE
TD : Suites et fonctions dérivables

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f, g, h et i suivantes :

$$f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) \qquad h(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 2 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la parité de f.

Exercice 3 Les fonctions f et g suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 4

1. Montrer que l'application f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si g est une application continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

alors g est bornée.

Exercice 5 Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$ on a

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}.$$

Exercice 6 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1. Etudier la dérivabilité de f.
2. Montrer que f définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Calcluler les limilites suivantes (l'emploi des fonctions équivalentes est conseillé) :

$$a)\ \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x(2-x)\tan(2x)} \qquad b)\ \lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x) \qquad c)\ \lim_{x\to0} \frac{a^x - b^x}{x},\ a, b \in]0, +\infty[.$$

Exercice 8 A l'aide des des développements limités, calcluler les limilites suivantes :

$$a) \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) \qquad b) \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sqrt[3]{1+x}-2\sqrt{1+x}-1}{x^2}\right) \qquad c) \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 9
Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que lorsque x est au voisinage de l'infini, on peut écrire
$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
3. En déduire l'asymptôte de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de l'infini et la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptôte.

Licence 1 de MIAGE

TD : Suites et fonctions dérivables

Licence 1 de MIAGE

TD : Suites et fonctions dérivables