Université Felix Houphouët Boigny
Année 2024-2025

Licence 1 de MIAGE

TD : Suites et fonctions dérivables

Exercice 1 Répondre par Vrai ou Faux

1. La somme de deux nombres irrationnels est un irrationnel.
2. Le produit d'un nombre irrationnel et d'un nombre rationnel est un irrationnel.
3. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
4. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On pose

$$-A = \{-x \, : \, x \in A\}.$$

1. Si A est majorée, $-A$ est minorée et on a
$$\inf(-A) = -\sup A;$$
2. si A est minorée, $-A$ est majorée et on a
$$sup(-A) = -inf A.$$

Exercice 3 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. On suppose $A \subset B$. Montrer que $\sup A \leqslant \sup B$ et $\inf A \leqslant \inf B$.
2. On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que
$$\sup(\inf A, \, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \inf(\sup A, \; \sup A).$$
Les inégalités peuvent-elles être strictes ?

Exercice 4

1. Enoncer avec précision le théorème des accroissemments finis.
2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que
$$\forall x > 0 \qquad \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$
En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a
$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$
3. Monter que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$
est équivalente à la suite $(w_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $w_n = \ln n$.
En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est divergente.

4. On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = u_n - \ln n$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n \in [0,\, 1]$.
   b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement monotone.
   c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Exercice 5

1. Donnez la définition de suites adjacentes
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_1 = 1$ et $v_1 = 12$ et pour tout $n \geqslant 1$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

   a) Démontrer que $(u_n - v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   En déduire que la suite $(u_n - v_n)$ tend vers 0.
   b) Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   c) Démontrer que la suite $(3u_n + 8v_n)$ est constante.
   d) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 6
Déterminer le terme général de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

1. $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.
2. $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = 6$.
3. $u_{n+2} + 9u_n = 0$, $u_0 = 5$, $u_1 = 1$.

Exercice 7 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f, g et h et i suivantes :

$$f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{|x| - 1}} \quad g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right) \quad h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 8 La fonction g suivante est-elle prolongeables par continuité en 0 ?

$$g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 9

1. Montrer que l'application f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si g est une application continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

   alors g est bornée.

Exercice 10 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1. Etudier la parité de la fonction f.

2. Etudier la dérivabilité de f.
3. Montrer que f définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Calcluler les limilites suivantes (l'emploi des fonctions équivalentes est conseillé) :

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x(2-x)\tan(2x)} \qquad b)\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x).$$

Exercice 12 A l'aide des des développements limités, calcluler les limilites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sqrt[3]{1+x}-2\sqrt{1+x}-1}{x^2}\right) \qquad c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 13
Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que lorsque x est au voisinage de l'infini, on peut écrire
$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
3. En déduire l'asymptôte de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de l'infini et la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptôte.