Chapter 5

Fonctions circulaires et hyperboliques

5.1 Fonctions circulaires réciproques

Le but de cette section est de définir et d'étudier toute une famille de fonctions très utiles, les fonctions réciproques des fonctions circulaires usuelles cos, sin, tan. Comme aucune d'entre elles n'est une bijection il faut faire attention aux domaines de définition.

5.1.1 Arccos

La fonction cos est continue, strictement décroissante de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

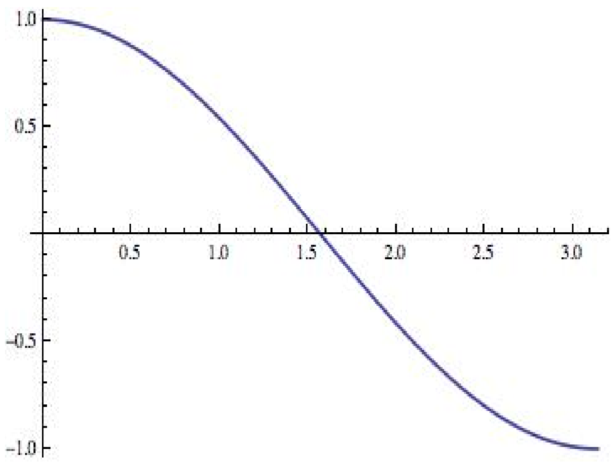

Figure 5.1: $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, \pi]$

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arccos la fonction réciproque de cos sur ces ensembles. Ainsi arccos est définie de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

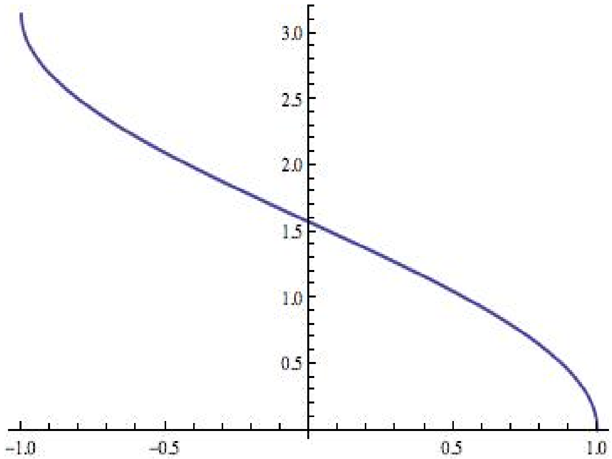

Figure 5.2: $f(x) = \arccos(x)$

Comme cos est dérivable, de dérivée $-\sin$ qui ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, alors arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Mais sur cet intervalle $[0, \pi]$ on a

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos(x)^2}$$

donc

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\arccos(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

sur $]-1, 1[$. Notez qu'en -1 et 1 les pentes sont infinies.

5.1.2 Arcsin

La fonction sin est continue, strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$.

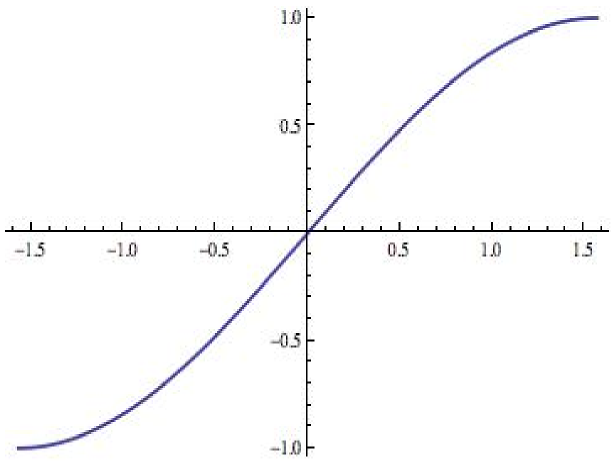

Figure 5.3: $f(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arcsin la fonction réciproque de sin sur ces ensembles. Ainsi arcsin est définie de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

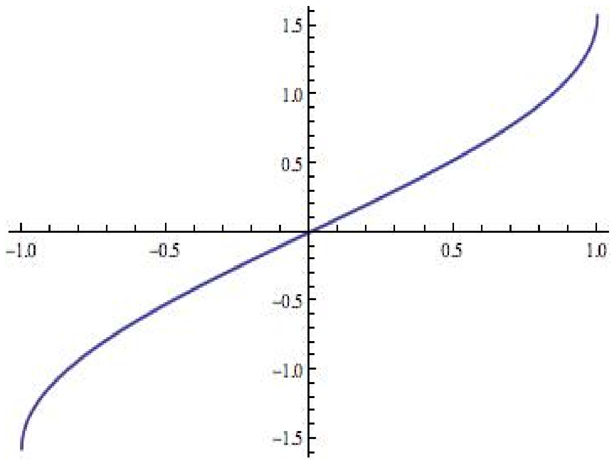

Figure 5.4: $f(x) = \arcsin(x)$

Comme sin est dérivable, de dérivée cos qui ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, alors arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Mais sur cet intervalle $[0, \pi]$ on a

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$$

donc

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

sur $]-1,1[$. Notez qu'en -1 et 1 les pentes sont infinies.

5.1.3 Arctan

La fonction tan est continue, strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$.

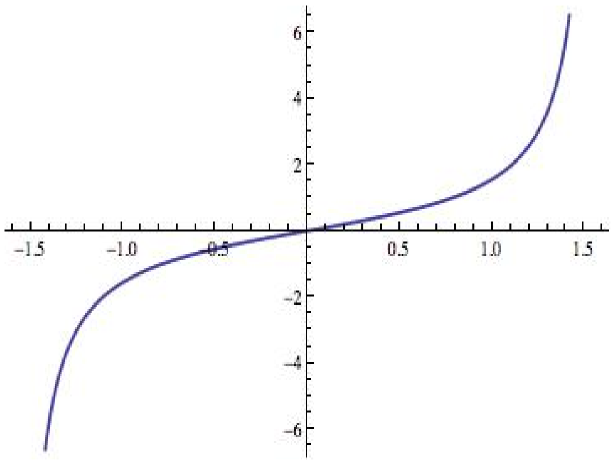

Figure 5.5: $f(x) = \tan(x)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arctan la fonction réciproque de tan sur ces ensembles. Ainsi arctan est définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

Comme tan est dérivable, de dérivée $1+\tan^2$ qui ne s'annule pas sur $]-\pi/2, \pi/2[$, alors arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

sur $\mathbb{R}$.

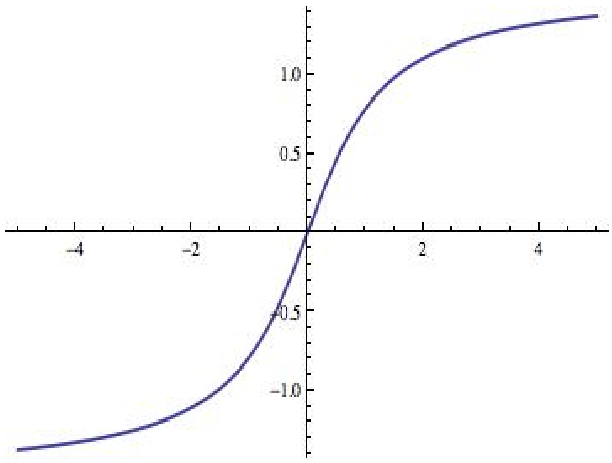

Figure 5.6: $f(x) = \arctan(x)$

5.1.4 Formules

Il faut un peu faire attention quand on utilise $\arccos(\cos(x))$ et $\cos(\arccos(x))$. En effet, $\cos(\arccos(x))$ est bien défini pour tout $x \in [-1, 1]$ et on a clairement

$$\boxed{\cos(\arccos(x)) = x}$$

pour tout $x \in [-1, 1]$.

Par contre, comme arccos renvoie toujours sur l'intervalle $[0, \pi]$, on a en général

$$\arccos(\cos(x)) \neq x\,.$$

En fait on a

$$\boxed{\arccos(\cos(x)) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [0, \pi]\,.}$$

De la même façon, $\sin(\arcsin(x))$ est bien défini pour tout $x \in [-1, 1]$ et on a clairement

$$\boxed{\sin(\arcsin(x)) = x}$$

pour tout $x \in [-1, 1]$.

Par contre, comme arcsin renvoie toujours sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, on a en général

$$\arcsin(\sin(x)) \neq x\,.$$

En fait on a

$$\boxed{\arcsin(\sin(x)) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]\,.}$$

Notez le lien suivant entre arcsin et arccos : pour tout $x \in [-1, 1]$

$$\boxed{\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}\,.}$$

En effet, la fonction arcsin + arccos est de dérivée nulle, donc elle est constante et on calcule $\arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$.

Enfin, de la même façon que précédemment on obtient facilement

$$\boxed{\tan(\arctan(x)) = x}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\boxed{\arctan(\tan(x)) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[\,.}$$

5.2 Fonctions hyperboliques

5.2.1 Définitions

On définit sur $\mathbb{R}$ les 3 fonctions suivantes. Le *cosinus hyperbolique*

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,$$

le *sinus hyperbolique*

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,$$

et la *tangente hyperbolique*

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

Ce sont toutes clairement des fonctions continues. On calcule assez facilement les limites suivantes

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) &= -1 \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) &= 1\,.
\end{aligned}$$

Elles sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ et on trouve facilement :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}'(x) &= \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}'(x) &= \mathrm{ch}(x) \\ \mathrm{th}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2\,. \end{aligned}$$

Voici les graphes de ces fonctions.

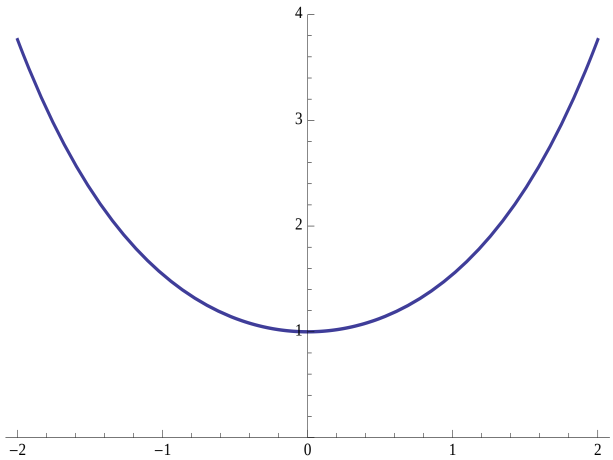

Figure 5.7: $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

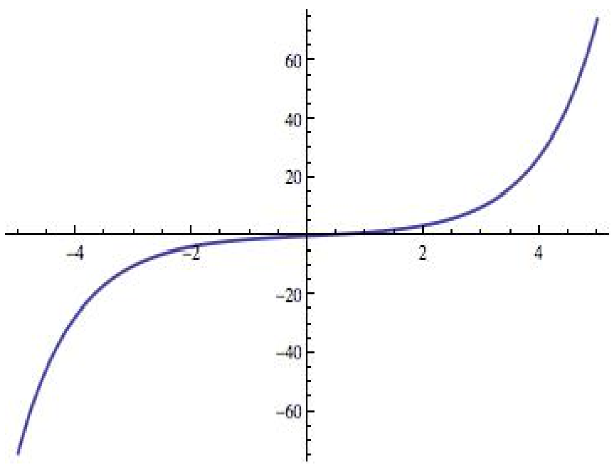

Figure 5.8: $f(x) = \mathrm{sh}(x)$

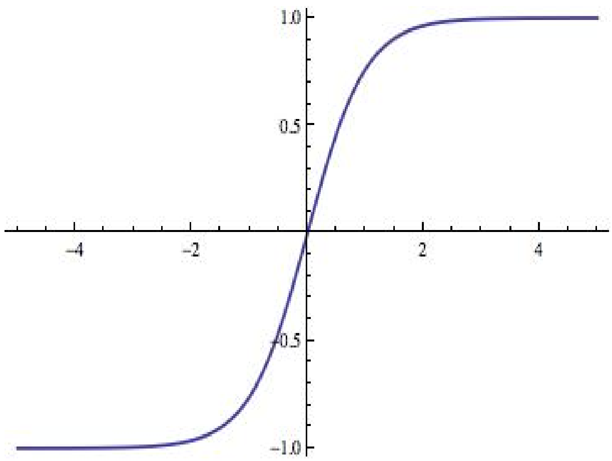

Figure 5.9: $f(x) = \mathrm{th}(x)$

5.2.2 Formules

Il y a beaucoup de formules similaires à celles des fonctions trigonométriques usuelles, avec des petite différences, souvent de signe, auxquelles il faut faire attention. Tout d'abord

$$\boxed{\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)\,, \quad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)\,.}$$

La formule habituelle devient

$$\boxed{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1\,.}$$

La formule de de Moivre devient triviale

$$(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)\,.$$

Les formules d'addition

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)\\
\mathrm{ch}(x-y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)\\
\mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)\\
\mathrm{sh}(x-y) &= -\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)\,.
\end{aligned}$$

5.3 Fonctions hyperboliques réciproques

5.3.1 Argch

La fonction ch est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle argch la fonction réciproque de ch sur ces ensembles. Ainsi argch est définie de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

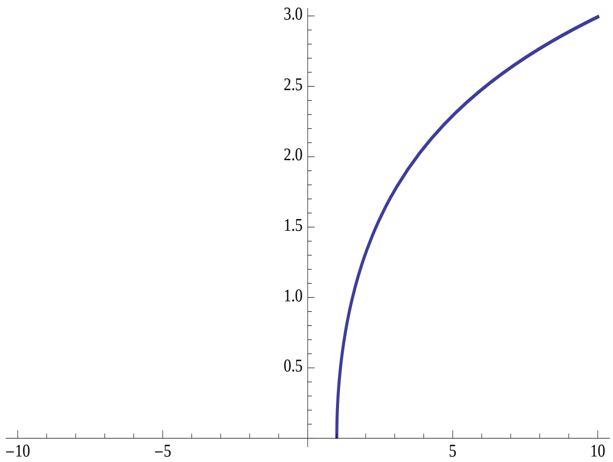

Figure 5.10: $f(x) = \text{argch}(x)$

Comme ch est dérivable, de dérivée sh qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, alors argch est dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée

$$(\text{argch})'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{argch}(x))} = -\frac{1}{\text{sh}(\text{argch}(x))}.$$

Mais on a

$$\text{sh}(x) = \sqrt{\text{ch}(x)^2 - 1}$$

donc

$$(\text{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}(\text{argch}(x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\text{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

sur $]1, +\infty[$. Notez qu'en 1 la pente est infinie.

5.3.2 Argsh

La fonction sh est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle argsh la fonction réciproque de sh sur ces ensembles. Ainsi argsh est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

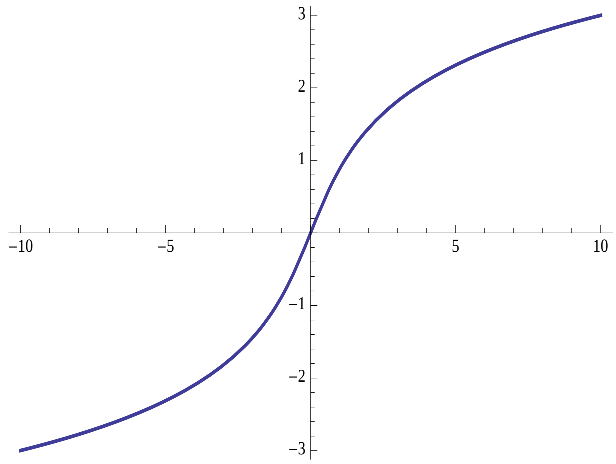

Figure 5.11: $f(x) = \text{argsh}(x)$

Comme sh est dérivable, de dérivée ch qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$(\text{argsh})'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(\text{argsh}(x))} = \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh}(x))}.$$

Mais on a

$$\text{ch}(x) = \sqrt{1 + \text{sh}(x)^2}$$

donc

$$(\text{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}(\text{argsh}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\text{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

sur $\mathbb{R}$.

5.3.3 Argth

La fonction th est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle argth la fonction réciproque de th sur ces ensembles. Ainsi argth est définie de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

Comme th est dérivable, de dérivée $1 - \text{th}^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors argth est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée

$$(\text{argth})'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{argth}(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}(\text{argth}(x))^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

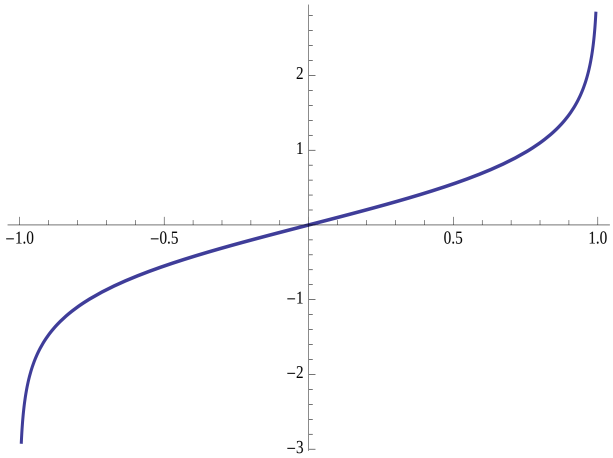

Figure 5.12: $f(x) = \operatorname{argth}(x)$

Donc à retenir

$$\boxed{(\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}\,.}$$

sur $]-1,1[$.

5.3.4 Formules

En fait on peut trouver des formules explicites pour les fonctions argch, argsh et argth. En effet, posons $t = \operatorname{argch}(x)$, i.e. $x = \operatorname{ch}(t)$. Comme $e^t = \operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t)$ et $\operatorname{ch}(t)^2 - \operatorname{sh}(t)^2 = 1$ on a

$$e^t = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

et donc

$$\boxed{\operatorname{argch}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})\,.}$$

De la même façon

$$\boxed{\operatorname{argsh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})\,.}$$

Enfin

$$\operatorname{th}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

donc $\operatorname{th}(y) = x$ revient à

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

et donc

$$\boxed{\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\,\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,.}$$