# Probabilités
# Cours et Exercices
# Niveau Licence 1

Jean Marc OWO

UFHB-UFR MI

25 mars 2024

# Outline

# Outline

# Introduction 4

L'analyse combinatoire a pour but de dénombrer les différentes dispositions que l'on peut former à partir d'ensembles finis d'éléments. Ce chapitre fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utiles en probabilités.

Mais, c'est quoi une disposition ?

Une disposition est l'ensemble formé d'éléments choisis parmi les éléments de l'ensemble étudié. Un élément figurant dans une disposition est caractérisé par :
- le nombre de fois où il figure dans la disposition
- sa place (ou position) dans la disposition.

✓ Une disposition est dite ordonnée si l'ordre d'obtention d'un élément est important.

✓ Une disposition est dite non ordonnée si l'ordre d'obtention d'un élément n'est pas important, on en tient pas compte dans la caractérisation de la disposition.

# Principe multiplicatif 5

Ce principe est à la base des techniques de denombrement. Il permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences, i.e. en une suite d'expériences partielles, réalisées l'une après l'autre.

**Principe:** Supposons qu'une expérience est la succession de $r$ sous-expériences. Supposons de plus que la première sous-expérience peut produire $n_1$ résultats, et pour chaque résultat de la première sous-expéience, il y a $n_2$ résultats possibles pour la deuxième sous-expérience; pour chaque résultat des deux premières sous-expériences, il y en a $n_3$ pour la troisième, etc. Alors, le nombre total de résultats de l'expérience complète est le produit

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r.$$

Interprétation avec les ensembles:
Si $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_r$ (produit cartesien),
alors $Card(E) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \ldots \times Card(E_r)$.

# Principe multiplicatif 6

**Conséquence:** Si une expérience $\xi$ consiste à répéter $p$ fois de façon indépendante une même expérience $\xi_0$ qui a $n$ résultats possibles, alors l'expérience $\xi$ a $n^p$ issues possibles.

**Exemple 1:** On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

**Exemple 2:** On considère trois villes: Abidjan, Agboville et Akoupé et On suppose qu'il y a 5 chemins différents pour aller d'Abidjan à Agboville et 3 chemins pour aller d'Agboville à Akoupé. Combien de chemins différents y a t il pour aller d'Abidjan à Akoupé en passant par Agboville?

**Exemple 3:** Supposons qu'une plaque d'immatriculation contenant deux lettres distinctes suivies de trois chiffres dont le premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on imprimer?

**Exemple 4:** Nous désirons former un comité de 3 personnes dont 1 président, 1 secrétaire et 1 trésorier à partir d'une classe de 20 élèves. Combien de comités différents est-il possible de faire?

# Principe additif 7

Ce principe permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en des sous-expériences mutuellement exclusives.

**Principe:** Supposons qu'une expérience se décompose en $r$ sous-expériences mutuellement exclusives. Si la $i-me$ sous-expérience a $n_i$ résultats possibles (avec $i = 1, 2, ..., r$), alors le nombre total de résultats de l'expérience complète est la somme

$$n_1 + n_2 + ... + n_r.$$

Interprétation avec les ensembles:
Si $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_r$ avec $E_i \cap E_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$ (partition),
alors $Card(E) = Card(E_1) + Card(E_2) + ... + Card(E_r)$.

# Principe additif 8

**Exemple 5:** On considère trois villes: Abidjan, Agboville et Adzopé. On suppose qu'il y a 5 chemins différents pour aller d'Abidjan à Agboville et 3 chemins pour aller d'Abidjan à Adzopé. Combien de chemins différents y a t il pour aller d'Abidjan à l'une des deux autres villes?

**Exemple 6:** En plus des conditions de l'exemple 1 et 4, on suppose qu'il y a 2 chemins pour aller d'Adzopé à Akoupé et 4 chemins directs d'Abidjan à Akoupé. Combien de chemins différents y a t il pour aller d'Abidjan à Akoupé?

# Permutations 9

Une permutation de $n$ éléments est une disposition ordonnée (ou un réarrangement ordonné) de ces $n$ éléments.

**Notation:** La fonction "factorielle" est la fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui a tout $n \in \mathbb{N}$ associe $n! = n(n..1) \times \ldots \times 2 \times 1.$
On a: $0! = 1$ et $n! = n(n-1)!$.

- Permutations sans répétitions

Lorsque ces $n$ éléments sont distincts, on parle de permutations sans répétitions. Dans ce cas le nombre de permutations de $n$ éléments est $n!$.

**Remarque:** Une permutation de $n$ éléments distincts est une application bijective d'un ensemble $E$ à $n$ éléments dans lui-même.
Rq. $n!$ = nombre d'alignemens de $n$ objets dinstincts ; de classement sans ex-aequo.

# Permutations 10

- Permutations sans répétitions

Si parmi ces $n$ éléments, certains sont semblables, on parle de permutations avec répétitions.

Le nombre de permutations de $n$ éléments dont $n_1$ sont semblables, $n_2$ sont semblables, ..., $n_r$ sont semblables est :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_r!} \text{ (Coefficient multinomial)}$$

Si $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, on note $\left( \begin{array}{c} n \\ n_1, n_2, \cdots, n_r \end{array} \right) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_r!}$.

# Permutations 11

- Permutations sans répétitions

**Exemples:**

- Le nombre d'applications d'un ensemble de $n$ éléments dans un ensemble de $r$ éléments distincts $\{a_1, .., a_r\}$ qui envoient exactement $n_1$ éléments dans $a_1$, $n_2$ éléments dans $a_2$,..., $n_r$ éléments dans $a_r$ est égal à

$$\begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2, \cdots, n_r \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_r!}.$$

Rq. $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_r!}$ = nombre d'alignements de $n$ objets dont $n_1$ sont semblables, $n_2$ sont semblables, ..., $n_r$ ; classements avec ex-aequo.

# Arrangements 12

Un arrangement est une disposition ordonnée.

- Arrangements sans répétitions

Un arragement sans répétitions de $p$ éléments parmi $n$ est une permutation de $p$ éléments distincts pris parmi $n$ éléments distincts $(p \leq n)$.

**Remarque:**
(i) Les éléments sont pris sans répétition et sont ordonnés.
(ii) Un arragement sans répétitions de $p$ éléments parmi $n$ est une application injective de $\{1, 2, ..., p\}$ dans un ensemble $F$ à $n$ éléments.

On note $A_n^p$ le nombre d'arrangements sans répétitions de $p$ éléments parmi $n$. On a

$$A_n^p = n(n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

**Propriétés:**
(i) $A_n^0 = 1$ et $A_n^n = n!$
(ii) $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$
(iii) $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$

# Arrangements 13

- Arrangements sans répétitions

**Exemples:**

- Si $E$ et $F$ sont des ensembles finis tels que $Card(E) = p$ et $Card(F) = n$, alors le nombre d'applications injectives de $E$ dans $F$ est $A_n^p = n(n-1) \times ... \times (n-p+1)$ si $p \leq n$ et $0$ sinon.
- Le nombre de tirages différents sans remise de $p$ boules dans une urne contenant $n$ boules toutes discernables est égal à $A_n^p = n(n-1) \times ... \times (n-p+1)$ si $p \leq n$ et $0$ sinon.
- Le nombre de façons de placer $p$ objets distincts dans $n$ cases discernables, chaque case pouvant contenir au plus 1 objet est $A_n^p = n(n-1) \times ... \times (n-p+1)$ si $p \leq n$ et $0$ sinon.

# Arrangements 14

- Arrangements avec répétitions

Un arragement avec répétitions (possibles) de $p$ éléments parmi $n$ est une disposition ordonnée de $p$ éléments avec autant de répétitions que l'on souhaite.

**Remarque:** Un arragement avec répétitions de $p$ éléments parmi $n$ est une application de $\{1, 2, ..., p\}$ dans un ensemble $F$ à $n$ éléments.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de $p$ éléments parmi $n$ est $n^p$.

**Exemples:**
- Si $E$ et $F$ sont des ensembles finis tels que $Card(E) = p$ et $Card(F) = n$, alors le nombre d'applications de $E$ dans $F$ est $n^p$.
- Le nombre de tirages différents de $p$ boules dans une urne contenant $n$ boules toutes discernables est égal à $n^p$ lorsque les tirages sont non exhaustifs (i.e. avec remise après chaque tirage).
- Le nombre de façons de placer $p$ objets distincts dans $n$ cases discernables, chaque case pouvant contenir éventuellement plusieurs objets est $n^p$.

# Combinaisons 15

Une combinaison est une disposition non ordonnée.

- Combinaisons sans répétitions

Une combinaison sans répétitions de $p$ éléments pris dans un ensemble à $n$ éléments distincts ($p \leq n$) est un sous-ensemble à $p$ éléments de cet ensemble.

**Remarque:** Les éléments sont pris sans répétition et ne sont pas ordonnés.

**Exemple:** Les combinaison sans répétitions de $2$ éléments pris dans l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ sont: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$.

Le nombre de combinaisons (sans répétitions) de $p$ éléments parmi $n$ est noté $C_n^p$ ou $\binom{n}{p}$ qui est appelé coefficient binomial. On a

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

**Rq :** $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p, n-p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}$ et $A_n^p = C_n^p \times p!$.

# Combinaisons 16

- Combinaisons sans répétitions

**Exemples:**

- Si $E$ est un ensemble fini tels que $Card(E) = n$, alors le nombre de parties de $E$ ayant $p$ éléments est $C_n^p$.
- Le nombre d'applications d'un ensemble de $n$ éléments dans l'ensemble $\{a_1, a_2\}$ ($a_1 \neq a_2$) qui envoient exactement $p$ éléments dans $a_1$ et les autres dans $a_2$ est égal $C_n^p$.
- Le nombre de façons de placer $p$ objets indiscernables dans $n$ cases discernables, chaque case pouvant contenir au plus 1 objet est $C_n^p$ si $p \leq n$ et $0$ sinon.

**Propriétés:**

(i) $C_n^0 = C_n^n = 1$
(ii) $C_n^p = C_n^{n-p}$
(iii) Formule de récurrence (Triangle de Pascal) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

# Combinaisons 17

- Combinaisons sans répétitions

Triangle de Pascal :

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |

(iv) Formule de Binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$

En particulier, $2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$ (Le nombre de parties d'un ensemble à $n$ éléments).

# Combinaisons 18

- Combinaisons avec répétitions

Une combinaison avec répétitions (possibles) de $p$ éléments pris dans un ensemble à $n$ éléments distincts est une disposition non ordonnée de $p$ éléments avec possibilité de répétitions.

**Exemple:** Les combinaison avec répétitions (possibles) de $2$ éléments pris dans l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ sont: $aa$, $ab$, $ac$, $ad$, $bb$, $bc$, $bd$, $cc$, $cd$, $dd$.

Le nombre de combinaisons avec répétitions de $p$ éléments parmi $n$ est noté $K_n^p$ ou $(\binom{n}{p})$, et on a :

$$K_n^p = (\binom{n}{p}) = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p, n-1 \end{pmatrix}.$$

**Exemples:**
- Le nombre de façons de placer $p$ objets indiscernables dans $n$ cases discernables, chaque case pouvant contenir éventuellement plusieurs objets est $K_n^p$.

# Outline

# Notions de probabilités discrètes 20

Le but de ce chapitre est d'introduire les bases mathématiques utiles à la modélisation des phénomènes aléatoires. Ainsi, l'objectif visé est de donner un sens mathématique à la notion de "hasard".

# Expérience aléatoire 21

◇ Une expérience ou un phénomène est dit aléatoire si on ne peut pas prévoir son résultat, mais on connait tous les résulatats possibles et qui répétée dans les mêmes conditions peut donner lieu à des résultats différents.

Exemples
- Le lancer d'un dé à six faces.
- Le lancer d'une pièce de monnaie.
- Le tirage d'un numéro parmi $n$ numéros.

◇ L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'espace fondamental ou l'univers de l'expérience. On le note en général $\Omega$.

Exemples
- Pour le lancer d'un dé à six faces numéroté de 1à 6, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pour le lancer d'une pièce de monnaie, $\Omega = \{P, F\}$.

◇ Tout résultat d'une expérience aléatoire s'appelle aussi une éventualité. On note $\omega$ le résultat obtenu lors de la réalisation d'une expérience aléatoire.

# Événements 22

$\diamond$ Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produit ou non. On les appelle événements. Ils sont représentés par les sous-ensembles de l'univers $\Omega$. L'ensemble de tous les événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple
Pour le lancer d'un dé à six faces numéroté de 1 à 6, "obtenir un nombre pair", "obtenir plus de 4" sont des événements possibles.
Notons A l'événement "obtenir un nombre pair" et $B$ l'événement "obtenir plus de 4".
$A$ est décrit par les éventualités 2,4 et 6. On écrit: $A = \{2, 4, 6\}$.
B est décrit par les éventualités 5 et 6. On écrit: $B = \{5, 6\}$.

$\diamond$ Tout événement formé d'une seule éventualité est appelé événement élémentaire.

# Langage des événements 23

◇ On dit qu'un événement $A$ s'est réalisé si le résultat observé de l'expérience est un élément de $A$.

◇ Tout événement qui n'est jamais réalisé est dit événement impossible, il correspond à l'ensemble vide $\emptyset$. Exemple, "obtenir un nombre négatif", dans un lancer de dé est un événement impossible à réaliser.

◇ Tout événement qui est toujours réalisé est dit événement certain, il correspond à l'ensemble $\Omega$. Exemple, dans un lancer de dé "obtenir moins de 7" ou "obtenir plus de 0" sont des phrases équivalentes correspondant toutes deux à un événement toujours réalisé, soit à à l'ensemble $\Omega$.

◇ A chaque événement $A$ correspond son événement contraire "non $A$" noté $\overline{A}$. L'événement $\overline{A}$ est réalisé si, et seulement si, $A$ n'est réalisé.

L'événement certain et l'événement impossible sont contraires l'un de l'autre.

## Langage des événements 24

On considère deux événements $A$ et $B$.

◇ On dit que l'événement "$A$ et $B$" s'est réalisé si le résultat observé de l'expérience est un élément de $A$ et de $B$, i.e. si $A$ et $B$ sont réalisés au cours de la même expérience aléatoire. On le note $A \cap B$

◇ Les événements $A$ et $B$ sont dits incompatibles ou disjoints s'ils ne peuvent pas se produire simultanément au cours de la même expérience aléatoire. Autrement dit $A$ et $B$ sont incompatibles si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.
Remarque : Deux événements contraires sont incompatibles: $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

◇ On dit que l'événement "$A$ ou $B$", s'est réalisé si le résultat observé de l'expérience est un élément de $A$ ou de $B$, i.e. si l'un au moins des deux événements $A$ ou $B$ est réalisé au cours de la même expérience aléatoire. On le note $A \cup B$.
Remarque: Pour tout événement A, on a, $\overline{A} = C_\Omega A$, $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

# Langage des événements 25

◇ De même, on définit les événements:

— La différence: $A \backslash B = A \cap \overline{B}$. Remarque: $A \backslash B = A \backslash A \cap B$.
L'événement $A \backslash B$ est réalisé si, et seulement si, $A$ est réalisé et $B$ ne l'est pas.

— La différence symétrique: $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
L'événement $A \Delta B$ est réalisé si, et seulement si, l'un et l'un seulement des deux événements $A$ et $B$ est réalisé.

◇ On dit que $A$ implique $B$ si la réalisation de $A$ entraine la réalisation de $B$. Autrement dit $A$ implique $B$ si, et seulement si, $A \subset B$.

# Langage des événements 26

Soit $\Omega$ un ensemble fini, l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathcal{F}$ une famille d'événements (i.e., $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire (i.e. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$),

(iii) $\mathcal{F}$ est stable par réunion (i.e. $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$).

Exemples :
$\{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ et pour tout $A \subset \Omega$, $\left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ vérifient les propriétés ci-dessus.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés ci-dessus est appelé espace probabilisable (fini). En particulier, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.

# Système complet d'événements 27

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. Une famille finie d'événements $\{A_i, i \in I\}$ de $\mathcal{F}$ est appelée système complet d'événements si :

(i) les événements sont deux à deux incompatibles :

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ lorsque } i \neq j$$

(ii) la réunion des événements est certaine :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$$

Exemple

Pour tout $A \subset \Omega$, $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.

# Probabilité sur un univers fini 28

**Définition**

On appelle probabilité sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{F})$, toute application $\mathbb{P}: \ \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ telle que

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) si $A, B \in \mathcal{F}$ sont incompatibles (i.e., $A \cap B = \emptyset$), alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et pour tout événement $A \in \mathcal{F}$, on appelle $\mathbb{P}(A)$ la probabilité de $A$.

# Probabilité sur un univers fini 29

En pratique, une probabilité sur un ensemble fini $\Omega$ est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

✓ Si $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ est un ensemble fini, la probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des événements élémentaires : $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

Si $A \subset \Omega = \{\omega_i, i \in I\}$, sa probabilité est : $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i \in I / \omega_i \in A} p_i$

✓ Soit $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ un ensemble fini. Une famille finie de nombre réels $(p_i)_{i \in I}$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si et seulement si :

(1) $(p_i)_{i \in I}$ est une famille à valeurs positives ou nulles, c'est-à-dire : $\forall\, i \in I, \;\; p_i \geq 0$

(2) la probabilité totale vaut 1, c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{i \in I} p_i = 1.$

# Probabilité sur un univers fini



**Propriétés**

Toute probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie les propriétés suivantes:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Formule de Poincaré (ou du crible):

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{k=3}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}),$$

soit

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subset [[1,n]], |I| = k} \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i).$$

# Probabilité sur un univers fini 31

Exemple. **Cas d'équiprobabilité : Probabilité uniforme**

Une expérience aléatoire est dite équiprobable si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.

On suppose qu'on a l'hypothèse d'équiprobabilité sur $\Omega$, c'est à dire tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Sous cette hypothèse, la probabilité d'un événement $A$ est alors donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{Nb de cas favorables à } A}{\text{Nb de cas possibles}}.$$

Cette probabilité est dite uniforme sur $\Omega$.

Notons qu'il est impossible d'avoir l'hypothèse d'équiprobabilité sur un espace probabilisable non fini.

# Probabilité conditionnelle 32

Dans cette section, notre objectif est de quantifier les chances de réalisation d'un événement lorsqu'on dispose d'informations sur le résultat de l'expérience sans le connaître.

**Exemple**. On lance succesuvement deux dés non pipés. On suppose qu'on a l'information suivante: " la somme des chiffres obtenus est 8". On cherche sous cette information à évaluer la chance que le premier chiffre du résultat obtenu soit pair.

# Probabilité conditionnelle 33

**Définition**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $A$ et $B$ deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$, la quantité :

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Pour tout événement $B$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle sachant $B$ l'application notée $\mathbb{P}(./B)$ ou $\mathbb{P}_B$ définie sur $\mathcal{F}$ et qui à tout élément $A$ de $\mathcal{F}$ associe

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

qu'on note $\mathbb{P}(A/B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$.

# Probabilité conditionnelle 34

**Formule des probabilités composées**

Soit $A_1, \dots, A_n$ une famille d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

Alors, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2/A_1) \times \mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Exemple:

# Probabilité conditionnelle 35

**Formule des probabilités totales**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.

Alors, pour tout événement $B$, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i).$$

Exemple:

# Probabilité conditionnelle 36

## Formule de Bayes ou probabilités des causes

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et $B$ un événement de probabilité non nulle.

Alors pour tout $i_0 \in I$ fixé, on a:

$$\mathbb{P}(A_{i_0}/B) = \frac{\mathbb{P}(A_{i_0})\mathbb{P}(B/A_{i_0})}{\sum\limits_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)}.$$

Exemple:

# Indépendance de deux événements 37

**Définition**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A$ et $B$ deux événements. On dit que $A$ et $B$ sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

**Proposition** (Indépendance et probabilité conditionnelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Deux événements $A$ et $B$ de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si la probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$ est égale à la probabilité de $A$ : $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$

Remarque : Le résultat est aussi vrai si $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$. i.e. la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la chance de réalisation de l'autre.

Exemple:

# Indépendance de deux événements 38

## Propriétés

(i) Les événements $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si les événements $A$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

(ii) Les événements $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

(iii) L'événement certain est indépendant de tout événement.

(iv) L'événement impossible est indépendant de tout événement.

(v) Deux événements incompatibles en dehors de l'univers et de l'événement impossible ne sont pas indépendants.

# Indépendance mutuelle de $n$ événements 39

**Définition**
Soient $A_1, \ldots, A_n$ $n$ événements d'un espace probababilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants si pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$ et pour tout $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j}).$$

**Remarque.** L'indépendance mutuelle de $n$ événements est décrite à l'aide de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} C_n^k = 2^n - n - 1$ relations.

**Exemple.** $A, B, C$ sont mutuellement indépendants si
(1) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ; (2) $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ ; (3) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
(4) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{3} C_3^k = 2^3 - 3 - 1 = 4$ relations.

# Outline

# Variable aléatoire finie 41

## Définition

Une variable aléatoire est une application dont les valeurs dépendent du resultat d'une expérience aléatoire.

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable fini. Une variable aléatoire réelle finie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $X$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ($X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$) qui prend un nombre fini de valeurs $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ telle que

$$\forall\, i \in [[1, n]],\;\; X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F} \tag{1}$$

**Notation** : $X^{-1}(x_i)$ est l'image réciproque de $x_i$ par $X$ et est notée $\{X = x_i\}$.

La condition 1 est très importante pour la définition de variables aléatoires sur tout espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. Mais elle est toujours réalisée si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dans ce cas, toute application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, i.e. toute application dont les valeurs dépendent du resultat d'une expérience aléatoire est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

# Variable aléatoire finie 42

**NB** : $\{\{X = x_i\},\ i \in [[1,n]]\}$ est un système complet d'événements de $\Omega$.

**Remarque** : $\forall B \subset \mathbb{R}$, $X^{-1}(B) = \{X \in B\} = \bigcup_{x_i \in B} \{X = x_i\}$. Cette réunion est finie.

**Exemple.** Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé.
Alors, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ , $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit l'application $X$:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega = 6 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble des valeurs prises par $X$ est $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $X^{-1}(0) = \{1,2,3,4,5\}$ ; $X^{-1}(1) = \{6\}$.
On a $X^{-1}(0) \in \mathcal{F}_1$; $X^{-1}(1) \in \mathcal{F}_1$. $X$ est donc une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$.
Par contre, $X$ n'est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}_2)$ avec $\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \{5,6\}, \{1,2,3,4\}, \Omega\}$, car $X^{-1}(0), X^{-1}(1) \notin \mathcal{F}_2$ (la condition 1 n'est pas vérifiée).

# Loi d'une variable aléatoire finie 43

## Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X$ une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle loi de $X$, la probabilité image de $\mathbb{P}$ par $X$. C'est donc la probabilité notée $\mathbb{P}_X$, définie par :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B), \ \forall B \subset \mathbb{R}$$

**Remarque** : Si $X$ est une v.a. réelle disrète, alors : $\mathbb{P}_X(B) = \sum_{x_i \in B} \mathbb{P}(X = x_i).$

## Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire finie

Soit $X$ une variable aléatoire finie définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Alors la loi de $X$ est entièrement déterminée par la fonction $p_X : X(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ définie par :

$$\forall i \in [[1, n]], \ p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$$

**Remarque** : Déterminer la loi d'une variable aléatoire finie $X$, revient à déterminer la fonction $p_X$.

# Loi d'une variable aléatoire finie 44

✓ Si $X$ une variable aléatoire finie à valeurs dans $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, la loi de $X$ vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$$

✓ Réciproquement, si $p : \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \longrightarrow [0, 1]$ est une fonction vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire $X$ finie définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $p$ est loi de $X$.

# Loi d'une variable aléatoire finie 45

En pratique, pour déterminer la loi d'une variable aléatoire finie $X$,

1. on commence par modéliser le problème en identifiant l'univers $\Omega$ des résultats possibles, le sous ensemble $\mathcal{F}$ des événements et la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
2. on identifie ensuite les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prises par $X$, c'est-à-dire l'ensemble $X(\Omega)$
3. on calcule enfin $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$

**Remarque** :
- Si $n$ est petit, on représente souvent les résultats dans un tableau.
- Lorsque $X = f(Y)$ est définie à partir d'une variable aléatoire $Y$ dont on connaît la loi, l'étape de modélisation est inutile.

# Loi d'une variable aléatoire finie 46

**Exemple.** Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On tire sans remise 3 boules. On note $X$ le plus petit nombre tiré et $Y$ le plus grand nombre tiré. Donner les lois de $X$ et $Y$.

**Exemple.** Une urne contient 8 boules dont 5 noires et 3 rouges. On tire successivement sans remise 3 boules. On note $X$ le rang de la première boule rouge tirée. Donner la loi de $X$.

**Exemple.** Soit $X$ une variable aléatoire d'ensemble de valeurs possibles $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et de loi de probabilités définie par : $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{\alpha}{2}$.

1. Trouver la valeur de $\alpha$.
2. Déterminer la loi de $Y = |X|$.

# Fonction de repartition 47

## Définition

Soit $X$ une variable aléatoire réelle finie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle fonction de repartition de $X$ la fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

(2) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

(3) $F_X$ est croissante (au sens large)

(4) $F_X$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$: $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} F_X(x) = F_X(a)$.

(5) $F_X$ a un nombre fini de points de discontinuités.

Réciproquement, on prouve qu'une fonction vérifiant les propriétés précédentes est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire finie.

# Fonction de repartition 48

On a aussi les propriétés suivantes: $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$,

$\checkmark\ \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ ; $\checkmark\ \mathbb{P}(a \leq X < b) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} F_X(x) - \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} F_X(x)$.

$\checkmark\ \mathbb{P}(a < X < b) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} F_X(x) - F_X(a)$ ; $\checkmark\ \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} F_X(x)$

Soit $X$ une variable aléatoire réelle (v.a.r.) finie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, où les $x_i$ sont rangées dans l'ordre croissant et $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$. Alors la fonction de répartition $F_X$ est une fonction constante par morceaux de points de discontinuité $x_i$, définie par :

$$
\begin{array}{lll}
\forall\ x \in ]-\infty, x_1[, & F_X(x) = & 0; \\
\forall\ k \geq 1,\ \forall\ x \in [x_k, x_{k+1}[, & F_X(x) = & p_1 + p_2 + ... + p_k; \\
\forall\ x \in [x_n, +\infty[, & F_X(x) = & p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.
\end{array}
$$

**Exemple.** On considère une variable aléatoire discrète $X$ telle que $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$. Déterminer sa fonction de répartition.

# Fonction de repartition 49

Connaissant, la fonction de répartition $F_X$ d'une variable aléatoire réelle discrète $X$, on peut réconstituer sa loi :

$$\forall\, x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{\substack{u \to x \\ <}} F_X(u).$$

En particulier, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, où les $x_i$ sont rangées dans l'ordre croissant, alors

$$\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1),\ \text{et}\ \forall\, i \in [[2, n]],\ \mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$$

**Remarque.** Il est parfois plus simple de déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle à partir de sa fonctionde répartion.

**Exemple.** On jette successivement et indépendamment sur une table deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note $X_1$ le premier nombre obtenu, $X_2$ le deuxième nombre obtenu et $X$ le plus grand des deux nombres obtenus. Donner la loi de $X$.

# Expérance mathématique 50

## Définition

Soit $X$ une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. On appelle expérance mathématique de $X$ la quantité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

## Propriétés

- ✓ Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a : $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}(Y)$.
- ✓ Si $X \geq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$. En particulier, si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$
- ✓ Si $X$ est une constante, alors $\mathbb{E}(X) = X$.
- ✓ Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

**Remarque.** $\forall\, A \in \mathcal{F}$, on a : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$

**NB :** Une variable aléatoire est dite centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.

# Expérance mathématique 51

**Remarque :** Si $X$ est une variable aléatoire non centrée, alors la variable aléatoire $Y$ définie par : $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée. En effet,
$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)] = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}[\mathbb{E}(X)] = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0.$

## Théorème de transfert

Soit $X$ une variable aléatoire finie, et $h$ une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Alors $h(X)$ est une variable aléatoire finie, et son espérance se calcule par la formule :

$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i)\mathbb{P}(X = x_i) \qquad (2)$$

**Remarque :** Réciproquement, si pour toute fonction continue $h$, on a l'égalité (2), alors

$$p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i),\ i \in [[1, n]]$$

est la loi de $X$.

# Expérance mathématique 52

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

- si $h(x) = x^k$, on parle de moment d'ordre $k$ de $X$ et on note

$$m_k(X) = \mathbb{E}(X^k).$$

- si $h(x) = (x - \mathbb{E}(X))^k$, on parle de moment centré d'ordre $k$ de $X$ et on note

$$\mu_k(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k].$$

**Remarque :** $\mathbb{E}(X) = m_1(X)$

# Variance

53

## Définition

Soit $X$ une variable aléatoire réelle finie. On appelle variance de $X$ la quantité :

$$V(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

## Propriétés

- $V(X) \geq 0$
- $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$.
- Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

**Remarque :** - $V(X) = \mu_2(X)$.

- $V(X) = 0 \Longleftrightarrow X = \mathbb{E}(X)$.
- Formule de Huygens : $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

# Ecart type 54

## Définition

Soit $X$ une variable aléatoire réelle finie. On appelle ecart type de $X$ la racine carrée de la variance V(X):

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

## Propriété

$\sigma(\alpha X + \beta) = |\alpha|\sigma(X).$

**NB :** Une variable aléatoire est dite réduite si sa variance vaut 1 : $V(X) = \sigma^2(X) = 1$.

**Remarque :** Si $X$ est une variable aléatoire non réduite telle que $V(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire $Y$ définie par : $Y = \frac{X}{\sigma(X)}$ est réduite.
En effet, $V(Y) = V[\frac{X}{\sigma(X)}] = \frac{1}{\sigma^2(X)} V(X) = 1.$

**Remarque :** Si $X$ est une variable aléatoire non centrée, ni réduite telle que $V(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire $Y$ définie par : $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

# Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ 55

### Définition

On appelle epreuve de Bernoulli, toute expérience aléatoire à deux issues, l'une est appelée succes et l'autre l'echec. **Ex:** Le jet d'une pièce de monnaie ; Se présenter à un examen ; Le jet d'un dé cubique et l'observation d'une face marquée ; Dans une population subdivisée en deux parties, le tirage d'un individu.

Le résultat de cette expérience est représenté par une v.a. $X$, appélée v.a de Bernoulli, définie par:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si le choix de } \omega \text{ donne un succes} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $X(\Omega) = \{0,1\}$. Si $p = \text{Proba(succès)}$, alors $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$. On dit que $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$, ce qu'on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$.

- $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 0 \\ 1-p, & \text{si } \ 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } \ x \geq 1. \end{cases}$
- $\mathbb{E}(X) = p, \quad V(X) = p(1-p)$

# Loi Binomial $\mathcal{B}(n,p)$ 56

On effectue $n$ répétitions indépendantes d'une epreuve de Bernoulli et on note $X$ le nombre de fois où on a obtenu le succès. On définit ainsi une variable aléatoire $X$ qui suit une loi Binomial de paramètres $n$ et $p=$ Prob(Succès), caractérisé par

$$X(\Omega)=\{0,1,...,n\} \text{ et pour tout } \quad k\in X(\Omega),\ \ \mathbb{P}(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

On écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

- $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } \ x<0 \\ (1-p)^n, & \text{si } \ 0\leq x<1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} C_n^i p^i(1-p)^{n-i}, & \text{si } \ k\leq x<k+1 \\ 1, & \text{si } \ x\geq n \end{cases}$
- $\mathbb{E}(X)=np, \quad V(X)=np(1-p)$

**Remarque:** $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p) \Longleftrightarrow X=\sum_{i=1}^{n} X_i$, où les $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$ et indépendantes.

# Loi Binomial $\mathcal{B}(n,p)$ 57

**Exemple.** On lance dix fois dans les même conditions une pièce de monnaie, quelle est la probabilité d'obtenir $5$ faces.

Le lancer d'une pièce de monnaie est une épreuve de Bernoulli. Le fait de lancer dix fois dans les même conditions la pièce constitue 10 répétitions indépendantes de la même épreuve.

Soit $X$ le nombre de fois où l'on obtient face. Alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$, avec $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

# Loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ ou $\mathcal{H}(N,Np,n)$ 58

On effectue $n$ tirage sans remise dans une urne contenant $N$ objets dont $Np$ objets A ($p$ étant la proportion des objets A) et on note $X$ le nombre d'objets A tirés. Alors $X$ suit une loi Hypergéométrique de paramètres $N$, $Np$ et $n$ ou $N$, $p$ et $n$, caractérisé par :

$$X(\Omega) = \{\max(0, n - Nq), \ldots, \min(n, Np)\} \text{ avec } Np \in \mathbb{N},\ q = 1 - p \text{ et}$$

$$\forall\, k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{Np}^{k} C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}.$$ On écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, Np, n)$.

- $\mathbb{E}(X) = np, \quad V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$

**Exemple:** Une urne contient 10 pièces dont 4 sont défectueuses. On y prend au hasard un lot de 5 pièces. Soit $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de pièces non défectueuses contenues dans le lot.

1. Quel est l'ensemble des valeurs possibles de $X$?
2. Donner la loi de probabilité de $X$
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de $X$.
4. Quelle est la probabilité que le lot ne contienne aucune pièce défectueuse?

# Loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$; $\mathcal{U}_{\{1,\dots,n\}}$ 59

On dit qu'une v.a. suit une loi uniforme disctète sur un ensemble $E$ si $E$ est fini et $X(\Omega)=E$ tel que $\forall\, x\in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x)=\dfrac{1}{\mathrm{Card}(E)}$. On écrit $X\rightsquigarrow \mathcal{U}_E$.

En particulier, $X\rightsquigarrow \mathcal{U}_{\{1,\dots,n\}}$ si $X(\Omega)=\{1,\dots,n\}$ et $\forall\, k\in\{1,\dots,n\},\ \mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{n}$.

- $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<1\\ \dfrac{k}{n}, & \text{si } k\le x<k+1\\ 1, & \text{si } x\ge n\end{cases}$

- $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n+1}{2}$, $\mathbb{E}(X^2)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ et $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$

Généralement, $X\rightsquigarrow \mathcal{U}_{\{a_1,\dots,a_n\}}$ si $X(\Omega)=\{a_1,\dots,a_n\}$ et

$\forall\, x\in\{a_1,\dots,a_n\},\ \mathbb{P}(X=x)=\dfrac{1}{n}$.

$\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$.

## 60

FIN DU COURS