



Christophe Palermo  
Jérémie Torres

# Précis d'électricité

L'essentiel du cours  
Exercices corrigés

DUNOD

Tout le catalogue sur  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)



Une autre version de cet ouvrage existe  
dans la collection « Parcours IUT »

Illustration de couverture : © akulv - iStock

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2015

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-072569-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Électricité en régime continu</b>	<b>1</b>
1.1	Grandeurs électriques et outils de représentation . . . . .	1
1.1.1	Notions de base de l'électricité . . . . .	1
1.1.2	Grandeurs et modèles . . . . .	4
1.1.3	Représentation des tensions et des courants . . . . .	9
1.2	Symboles électriques et modèles équivalents . . . . .	13
1.2.1	Description des phénomènes physiques . . . . .	13
1.2.2	Symboles pour lier les grandeurs . . . . .	15
1.2.3	Un premier modèle électrique . . . . .	18
1.3	Les lois de Kirchhoff . . . . .	19
1.3.1	La loi des mailles . . . . .	20
1.3.2	Méthode . . . . .	20
1.4	Loi des nœuds . . . . .	21
1.4.1	Énoncé de la loi . . . . .	21
1.4.2	Cas particulier . . . . .	22
1.5	Loi d'Ohm, conventions récepteur et générateur . . . . .	22
1.5.1	Loi d'Ohm . . . . .	22
1.5.2	Convention récepteur . . . . .	22
1.5.3	Convention générateur . . . . .	24
1.5.4	Choix d'une convention . . . . .	25
1.6	Résistances équivalentes . . . . .	30
1.6.1	Montage série . . . . .	30
1.6.2	Montage parallèle . . . . .	31
1.6.3	Analogie hydraulique . . . . .	32
1.7	Ponts diviseurs . . . . .	37
1.7.1	Pont diviseur de tension . . . . .	37
1.7.2	Pont diviseur de courant . . . . .	39
1.8	Puissance électrique en régime continu . . . . .	43
1.8.1	Puissance consommée . . . . .	44
1.8.2	Puissance générée . . . . .	46

## TABLE DES MATIÈRES

1.8.3	Cas de la résistance . . . . .	47
1.8.4	Théorème de Boucherot en régime continu . . . . .	47
<b>2</b>	<b>Réseaux linéaires en régime continu</b>	<b>51</b>
2.1	Définitions générales . . . . .	51
2.1.1	Réseau électrique . . . . .	51
2.1.2	Nœuds, branches, mailles . . . . .	52
2.1.3	Problème d'électricité . . . . .	53
2.2	Méthode de Kirchhoff . . . . .	54
2.2.1	Problématique . . . . .	54
2.2.2	Choix des équations indépendantes . . . . .	55
2.3	Principe de superposition . . . . .	60
2.3.1	Principe physique . . . . .	60
2.3.2	Énoncé du principe de superposition en électricité . . . . .	61
2.3.3	Extinction d'une source . . . . .	62
2.4	Théorème de Millman . . . . .	69
2.4.1	Énoncé général . . . . .	69
2.4.2	Cas particulier : le circuit à deux nœuds . . . . .	73
2.4.3	Énoncé du théorème de Millman dans les circuits à deux nœuds . . . . .	73
2.5	Théorèmes du dipôle linéaire . . . . .	83
2.5.1	Dipôles . . . . .	84
2.5.2	Dipôles actifs et dipôles passifs . . . . .	85
2.5.3	Dipôles linéaires . . . . .	87
2.5.4	Théorème de Thévenin . . . . .	90
2.5.5	Théorème de Norton . . . . .	101
2.5.6	Transformation Thévenin-Norton . . . . .	113
<b>3</b>	<b>Du régime variable au régime alternatif sinusoïdal</b>	<b>121</b>
3.1	Représentation temporelle et grandeurs caractéristiques . . . . .	121
3.1.1	Régime périodique . . . . .	122
3.1.2	Régime alternatif . . . . .	126
3.1.3	Régime alternatif sinusoïdal . . . . .	128
3.1.4	Caractérisation d'un signal périodique . . . . .	131
3.2	Puissances électriques en régime alternatif . . . . .	138
3.2.1	Puissance et grandeurs associées . . . . .	139
3.2.2	Théorème de Boucherot . . . . .	146
3.3	Composants réactifs . . . . .	148
3.3.1	Capacité . . . . .	148
3.3.2	Inductance . . . . .	152

3.3.3	Modélisation d'une ligne électrique . . . . .	158
<b>4</b>	<b>Réseaux linéaires en régime alternatif sinusoïdal</b>	<b>161</b>
4.1	Outils mathématiques du régime alternatif sinusoïdal . . . . .	162
4.1.1	Les phaseurs . . . . .	163
4.1.2	Généralisation de la loi d'Ohm et impédances complexes	165
4.1.3	Propriétés des impédances . . . . .	168
4.1.4	Phaseurs et les puissances . . . . .	174
4.2	Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal . . . . .	175
4.2.1	Lois de Kirchhoff . . . . .	175
4.2.2	Ponts diviseurs de tension et de courant . . . . .	191
4.2.3	Théorèmes du dipôle actif linéaire . . . . .	197
4.2.4	Le principe de superposition . . . . .	199
<b>5</b>	<b>Régime transitoire</b>	<b>215</b>
5.1	Utilisation d'un oscilloscope pour l'étude du régime transitoire	216
5.2	Le régime transitoire dans un circuit RC . . . . .	218
5.2.1	Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance . . . . .	219
5.2.2	Énergie stockée par la capacité . . . . .	227
5.2.3	Applications du régime transitoire . . . . .	229
5.2.4	Notion de filtrage . . . . .	237
5.3	Le régime transitoire dans un circuit RL . . . . .	240
5.3.1	Établissement et rupture du courant dans la bobine . . . . .	240
5.3.2	Énergie stockée par l'inductance . . . . .	245



# 1

## Électricité en régime continu

L'objectif de ce premier chapitre est tout d'abord d'introduire les différentes grandeurs électriques d'intérêt telles que la tension, le courant, la résistance ou encore la puissance. Nous nous plaçons pour cela en régime continu, c'est-à-dire dans la situation où les différentes quantités décrites restent constantes dans le temps. L'électricité étant invisible, il peut être difficile d'avoir une réflexion intuitive sur le comportement et les liens entre les grandeurs électriques. Aussi, chaque fois que cela sera possible, nous raisonnerons par analogie hydraulique ou gravitationnelle. Nous aborderons en parallèle les différents outils de représentation des grandeurs électriques en nous arrêtant sur la notion de convention générateur et récepteur.

Nous décrirons ensuite les différents symboles électriques au travers de la notion de schéma équivalent. En recensant les phénomènes physiques, nous modéliserons notre premier circuit et ferons apparaître sans aucun calcul le modèle de Thévenin des différents éléments.

Enfin, nous aborderons les lois fondamentales de l'électricité en régime continu. La loi d'Ohm, qui relie les tensions et les courants dans les résistances, et les lois de Kirchhoff aussi appelées lois des mailles et des nœuds, seront décrites. Ainsi, nous pourrions dresser les formules très utiles des ponts diviseurs et déterminer la résistance équivalente d'une association.

### 1.1 GRANDEURS ÉLECTRIQUES ET OUTILS DE REPRÉSENTATION

#### 1.1.1 Notions de base de l'électricité

##### a) Conducteurs et isolants

Le courant électrique est un déplacement de charges électriques. De ce point de vue, on peut définir deux grandes familles de matériaux :

## Chapitre 1 – Électricité en régime continu

- celle des **isolants** qui s'opposent au passage du courant et qui sont composés de matériaux tels que le verre, le bois ou encore les composés plastiques ;
- celle des **conducteurs** (et des **semi-conducteurs**), qui permettent au courant de circuler plus ou moins facilement : les câbles métalliques et les résistors.

Dans le domaine de l'électricité, plus précisément appelé électrocinétique, dès lors que l'on s'intéresse au mouvement des charges électriques et à leur comportement de groupe, nous considérons plus particulièrement les conducteurs et les semi-conducteurs.

### b) Conversion énergétique

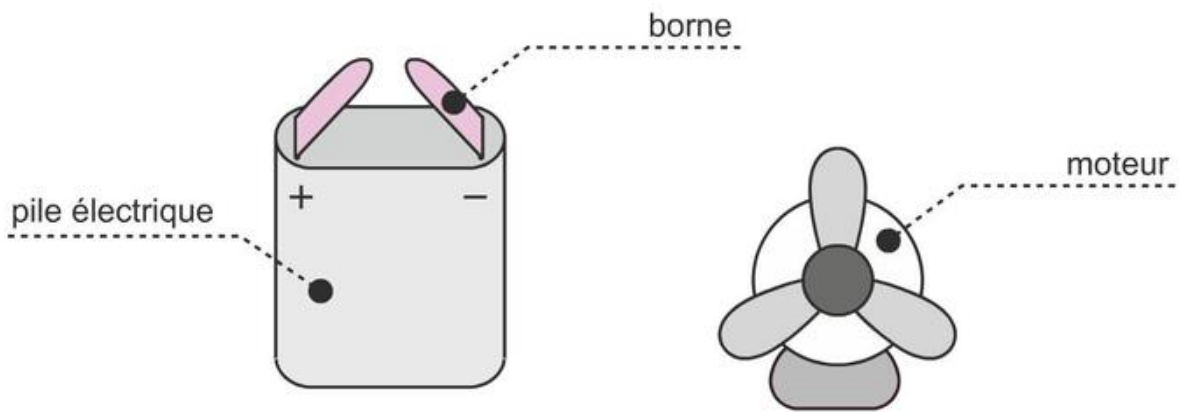
L'électricité est ce que l'on appelle une énergie secondaire, c'est-à-dire qu'elle n'existe pas à l'état de gisement naturel. L'électricité ne s'extrait pas, mais elle se produit au travers d'une conversion depuis une autre forme d'énergie. Pour ce faire, on utilise des **convertisseurs énergétiques**, comme les alternateurs (qui convertissent de l'énergie mécanique en énergie électrique alternative), les panneaux photovoltaïques (qui convertissent l'énergie de la lumière solaire en électricité sous forme continue) ou encore les piles (où l'énergie est stockée sous forme chimique afin d'être convertie en énergie électrique continue). De la même façon, l'électricité ne s'utilise pas en tant que telle : on ne peut par exemple pas la consumer comme on le ferait pour le charbon. Il faut donc avoir recours pour son utilisation à une conversion énergétique.

Nous allons introduire progressivement les différentes grandeurs de l'électricité, en commençant par la tension et le courant. Prenons pour cela l'exemple d'une pile connectée à un petit ventilateur, comme reporté sur le volet (a) de la figure 1.1.

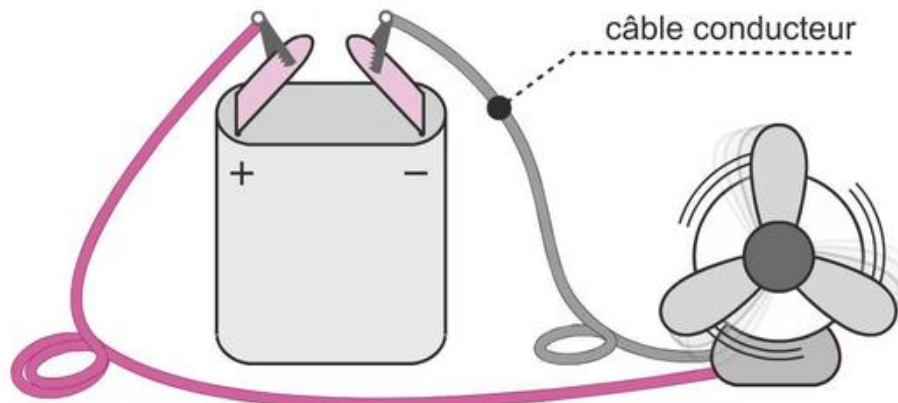
#### • La pile

La pile est un générateur de tension continue et de courant continu. Cela veut dire que ces deux grandeurs électriques gardent des valeurs constantes à mesure que le temps passe. La pile possède deux bornes, et ces deux bornes présentent chacune un potentiel différent. Le potentiel le plus haut est noté avec un signe plus (+) et le potentiel le plus bas est noté avec un signe moins (-). Attention, ces deux signes permettent juste de noter la hauteur relative des deux potentiels mais ne présagent en aucun cas des signes de ces derniers.

## 1.1 Grandeurs électriques et outils de représentation



**a** La pile et le moteur ne sont pas connectés



**b** La pile et le moteur sont connectés

**Figure 1.1** – Exemple de conversion énergétique illustrant les grandeurs de tension et de courant.

- **Le moteur**

Le moteur est un récepteur d'électricité. Dans notre exemple, il reçoit du courant continu dans la mesure où il fonctionne avec une pile. C'est également un convertisseur puisqu'il convertit l'énergie électrique qu'il reçoit en énergie mécanique.

- **La tension**

Tant que les bornes de la pile ne sont pas connectées, la seule grandeur électrique présente est la différence entre les potentiels des deux bornes de la pile.

## Chapitre 1 – Électricité en régime continu

Cette différence de potentiels, notée d.d.p., est appelée la **tension**. Si l'on ne relie pas les deux bornes par le biais d'un conducteur, il ne se passe rien.

### • *Le courant électrique*

Le courant électrique s'établit à partir du moment où il existe un lien électrique entre les deux bornes, c'est-à-dire lorsqu'un conducteur les relie. Dans ce cas, la tension (c'est-à-dire la d.d.p.) entraîne un mouvement de charges. Au même titre que pour une rivière, le mouvement des charges électriques constitue ce que l'on appelle le **courant**. Nous n'entrerons pas dans les détails des particules et ions constituant le courant électrique (qui varient selon que l'on se trouve dans une solution ionique ou dans un conducteur), et nous retiendrons que le sens conventionnel du courant électrique est celui des charges positives.

Le **sens conventionnel** du courant électrique est le sens de déplacement des charges positives.

### 1.1.2 Grandeurs et modèles

Au regard de l'expérience que nous venons de décrire, on peut se poser un certain nombre de questions. Par exemple, la pile est-elle adaptée au moteur ? Sinon, quelle pile doit-on choisir ? Combien de temps le moteur va-t-il pouvoir tourner avant que la pile ne se décharge complètement ? Y aura-t-il un échauffement excessif du moteur ou, même, de la pile ? Comment peut-on faire pour contrôler la vitesse du moteur ?

C'est à ce genre de questions que l'on tente de répondre en étudiant l'électricité, et l'on a besoin pour apporter ces réponses de définir et de maîtriser les **grandeurs** électriques et de dresser des **modèles**.

#### a) Grandeurs électriques

Afin de mieux cerner les grandeurs électriques, nous proposons de faire une analogie hydraulique. Attention toutefois à bien noter que cette analogie, comme toutes celles qui vont suivre dans ce chapitre, n'est valable qu'en régime continu et dans la limite des fluides incompressibles en écoulements laminaires.

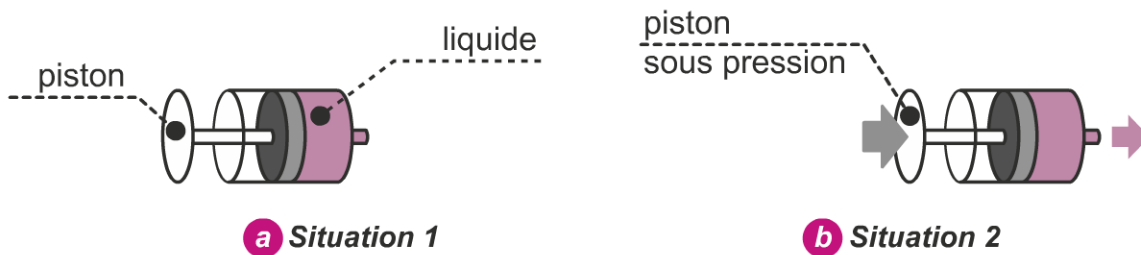
## 1.1 Grandeurs électriques et outils de représentation

### • Le courant électrique

Le courant électrique décrit le mouvement des charges électriques dans leur ensemble, lorsqu'on les considère comme un flux. À ce titre, le courant est l'analogie hydraulique du débit.

### • Le potentiel électrique

Le potentiel électrique est une notion plus subtile que le courant. Il est assimilable à la pression hydraulique. Prenons le cas d'un liquide dans une seringue, comme représenté sur la figure 1.2.



**Figure 1.2** – Analogie hydraulique du potentiel (comparé à la pression) et du courant électrique (comparé au débit volumique).

- Lorsque la pression du piston est la même que la pression atmosphérique à la sortie de la seringue, comme pour la situation 1, aucun mouvement n'est induit. D'un point de vue électrique, c'est exactement la même chose : si deux points A et B sont au même potentiel, la tension entre ces points est nulle et le courant électrique ne circule pas.
- En revanche, s'il existe une différence de pressions, comme c'est le cas dans la situation 2, le liquide entre en mouvement. Intuitivement, on peut dire que pour une seringue et un liquide donnés, le débit sera d'autant plus important que la différence de pressions sera grande. En électricité, c'est la différence de potentiels, appelée **tension**, qui va être de la même manière responsable du courant électrique.

### • Sens de déplacement du courant

La seringue ne produit pas la différence de pressions, mais elle la subit. Dans notre analogie électrique, elle décrit par conséquent un récepteur électrique.

## Chapitre 1 – Électricité en régime continu

Au même titre que le liquide se déplace de la pression la plus haute vers la pression la plus basse, le courant électrique circulant dans un récepteur va du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas.

Dans un **récepteur**, le sens conventionnel du courant électrique est dirigé du potentiel le plus haut (+) vers le potentiel le plus bas (-).

Intéressons-nous au montage de la figure 1.3 et suivons le déplacement du courant à partir de la borne +. Pour ce faire, indiquons quatre points A, B, C et D :

- le point A est au potentiel le plus haut car il est relié à la borne + ;
- le point D est au potentiel le plus bas car il est relié à la borne - ;
- le potentiel en B est supérieur au potentiel en C.

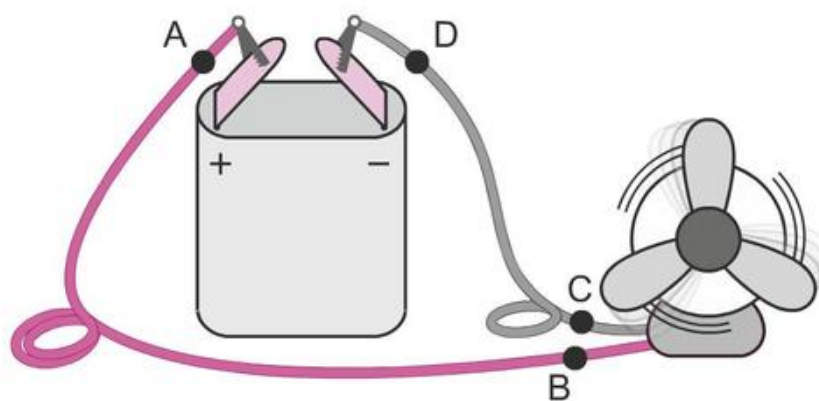


Figure 1.3 – Illustration du sens de déplacement du courant électrique.

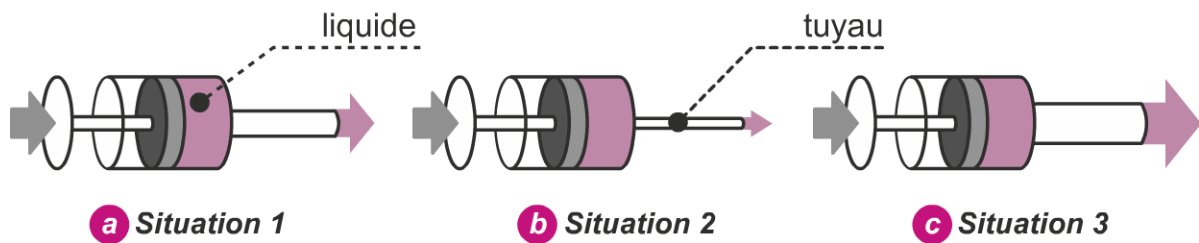
La différence de potentiels fait que le courant sort de A, passe par B puis traverse le moteur afin de le faire tourner. Il en ressort en C pour rejoindre le point D. Une fois au point D, le courant est ramené par la pile au point A : dans ces conditions, la pile peut être vue comme une pompe permettant aux charges arrivées au potentiel le plus bas de remonter vers le potentiel le plus haut, alimentant ainsi le cycle. Cette analogie restera vraie pour n'importe quel générateur continu.

Dans un **générateur**, le sens conventionnel du courant électrique est dirigé du potentiel le plus bas (-) vers le potentiel le plus haut (+).

b) Notion de résistance

La tension et le courant électriques ayant été abordés, nous nous intéressons à présent à la notion de résistance. Pour cela, nous reprenons l'exemple du liquide soumis à des différences de pressions par le biais d'une seringue, à laquelle nous adjoignons des tuyaux de différentes sections, comme reporté sur la figure 1.4.

- Dans la situation 1, une pression sur le piston de la seringue crée une différence de pressions entre l'entrée et la sortie. Le liquide se déplace alors. Électriquement, une tension (d.d.p.) entraîne un courant.



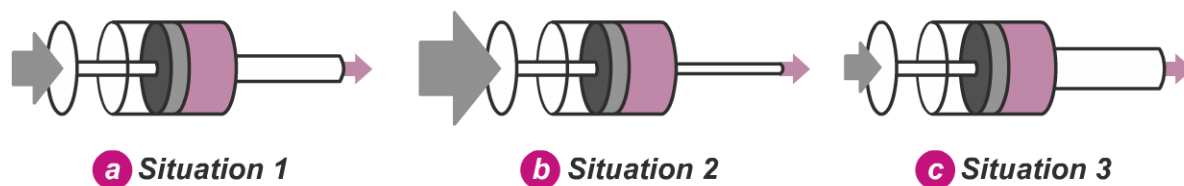
**Figure 1.4** – Pression sur une seringue dans trois situations différentes. (a) Une pression sur la seringue entraîne l'injection du liquide dans un tuyau. Le débit peut être évalué à la sortie du tuyau. (b) Le tuyau est plus étroit qu'en situation 1. Une même pression entraîne un débit injecté moindre. (c) Dans la situation 3, le tuyau est plus large qu'en situation 1 et 2. Une même pression entraîne un débit plus important que dans les deux précédentes situations.

- Dans la situation 2, le tuyau mis en bout de seringue a une section plus faible que celui de la situation 1. Si la pression sur le piston ne change pas, le débit sortant du tuyau est plus faible.
- Dans la situation 3, le tuyau mis en bout est un tuyau de grande section. La pression restant la même, le débit mesuré augmente et est plus important que dans la situation 1.

Intuitivement, on établit que les caractéristiques d'un objet soumis à une tension électrique influencent grandement le courant le traversant.

Procédons maintenant à une expérience légèrement différente : pour les trois tuyaux mis en bout de seringue, nous cherchons à maintenir un débit constant, comme reporté sur la figure 1.5.

- Dans la situation 1, une pression sur le piston de la seringue crée une différence de pressions entre l'entrée et la sortie. Le liquide se



**Figure 1.5** – Pression sur une seringue dans trois situations différentes. (a) Une pression sur la seringue entraîne l’injection du liquide dans un tuyau. Le débit peut être évalué à la sortie du tuyau. (b) Le tuyau est plus étroit qu’en situation 1. Pour avoir le même débit qu’en situation 1, la pression exercée sur le piston doit être plus importante. (c) Dans la situation 3, le tuyau est plus large qu’en situation 1 et 2. Pour avoir le même débit, la pression à exercer sur le piston doit être moins importante que dans la situation 1.

déplace alors. Électriquement, une tension (d.d.p.) entraîne un courant.

- Dans la situation 2, le tuyau mis en bout de seringue a une section plus faible que celui de la situation 1. Pour avoir le même débit qu’en situation 1, il faut appuyer plus fort et donc augmenter la différence de pressions.
- Dans la situation 3, le tuyau mis en bout est un tuyau de grande section. Pour obtenir un débit équivalent à celui obtenu en situation 1, une légère pression suffit.

Le tuyau oppose une résistance au passage du liquide :

- pour une différence de pressions donnée, le débit est d’autant plus grand que la résistance du tuyau est faible ;
- pour assurer un débit donné, il faut une différence de pressions plus importante lorsque la résistance du tuyau est plus grande.

Cette résistance occasionne une perte d’énergie et, si la résistance du tuyau est plus grande, l’énergie perdue par le liquide par frottements est plus importante. On retrouve ce que l’on appelle en mécanique des fluides la perte de charge qui est associée à un **échauffement**. En effet, le surplus de pression nécessaire pour assurer le débit constant dans l’expérience de la figure 1.5, par exemple, est utilisé par les frottements et est converti en chaleur.

En électricité, il se passe exactement la même chose : la tension et le courant sont liés par une relation équivalente à celle que l’on vient de mettre en évidence : la **loi d’Ohm**.

## 1.1 Grandeurs électriques et outils de représentation



Figure 1.6 – Loi d'Ohm aux bornes d'une résistance.

Comme le montre la figure 1.6, si l'on appelle  $U$  la différence de potentiels entre les deux points A et B (le potentiel du point A étant plus élevé que celui du point B) alors celle-ci est liée au courant  $I$  circulant de A vers B par l'expression :

$$U = RI \quad (1.1)$$

On peut aussi retrouver intuitivement la **loi de Pouillet**. Pour cela, revenons à notre exemple hydraulique et considérons la section du tuyau. Nous avons déjà vu que plus celle-ci est petite, plus la résistance au passage du liquide est grande, de sorte que la résistance est inversement proportionnelle à la section  $S$ . Si maintenant, pour une section donnée, on augmente la longueur  $L$  du tuyau, alors les frottements du liquide sur les parois seront aussi plus importants. Par conséquent, la résistance est proportionnelle à la longueur du tuyau. Il vient alors que

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (1.2)$$

où  $\rho$  est la résistivité du matériau, une grandeur donnée en ohms-mètres  $\Omega\text{m}$ , qui décrit sa propension naturelle à freiner le courant électrique, indépendamment de sa géométrie.

### 1.1.3 Représentation des tensions et des courants

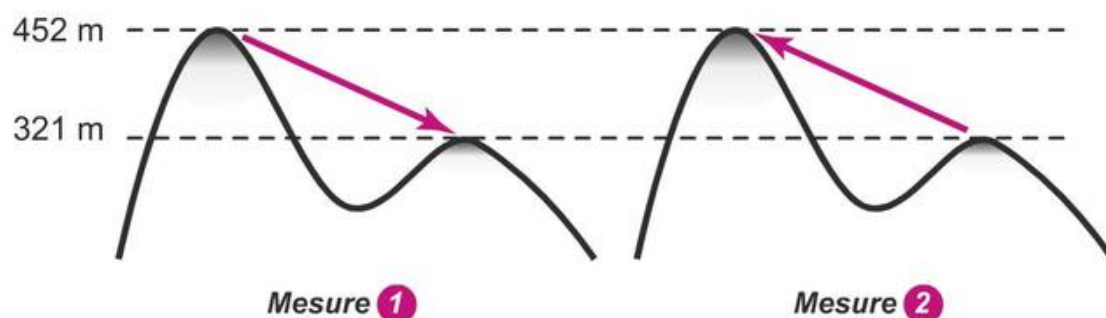
Pour décrire la tension et le courant, il est nécessaire d'indiquer une valeur mais aussi un sens et une direction. En effet, sur la figure 1.6, par exemple, nous avons représenté la tension aux bornes de la résistance et le courant la traversant à l'aide de flèches.

Nous proposons deux exercices permettant de maîtriser les flèches associées aux tensions et celles associées aux courants.

a) Exercices : analogies gravitationnelles

**Exercice 1.1 : Représentation d'une tension.**

On réalise les deux mesures de dénivelé reportées sur la figure 1.7.



**Figure 1.7** – Schéma de l'exercice 1.1. Le même dénivelé est mesuré dans les deux volets, mais en changeant de sommet de référence.

1. Quelles sont les valeurs données par la mesure de gauche et par celle de droite ?
2. Que dire du sommet pointé par une flèche indiquant un dénivelé positif ? et négatif ?

**Solution 1.1**

1. La mesure de dénivelé se fait entre le point de départ de la flèche et son point d'arrivée. Ainsi, la mesure 1 donne un dénivelé de  $-131$  m, et la mesure 2 correspond à un dénivelé de  $+131$  m.
2. Lorsque la flèche est associée à un dénivelé positif, comme c'est le cas pour le volet de droite de la figure 1.7, elle pointe vers le sommet le plus haut. Lorsqu'au contraire elle est associée à un dénivelé négatif, comme c'est le cas dans le volet de gauche, elle pointe vers le sommet le plus bas.

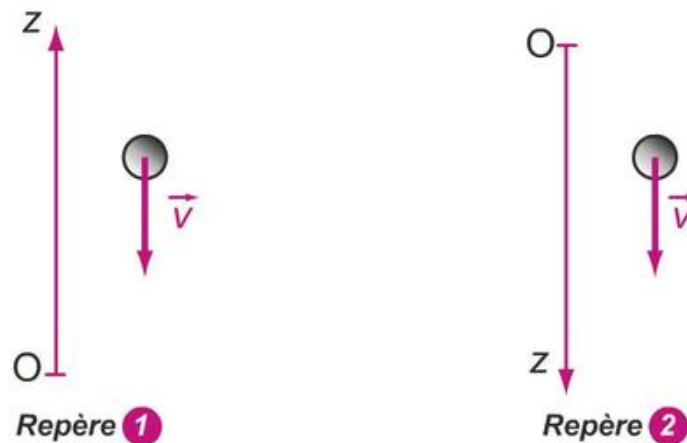
Cet exercice est assez intuitif, mais son intérêt réside dans le fait que les flèches de tension (ou de différences de potentiels) fonctionnent exactement de la même manière. Aussi :

- une flèche de tension associée à une valeur positive pointe vers le potentiel le plus haut ;
- une flèche de tension associée à une valeur négative pointe vers le potentiel le plus bas.

L'exercice suivant va aussi nous permettre d'aborder avec un exemple simple les flèches représentant le courant électrique.

**Exercice 1.2 : Représentation d'un courant.**

Deux personnes étudient un même problème et cherchent à déterminer la valeur de la vitesse d'un mobile en chute libre à un instant donné. Elles choisissent les deux repères reportés sur la figure 1.8. Les calculs sont correctement faits par les deux personnes, et celle qui a choisi le repère 2 trouve une vitesse de 5 m/s.



**Figure 1.8** – Schéma de l'exercice 1.2. Le même mouvement est décrit dans les deux volets mais l'axe est orienté dans deux sens inverses.

1. Quelle est la valeur trouvée par celle qui a choisi le repère 1 ?
2. Le choix du repère influence-t-il la dynamique du mobile ? Discuter du choix de ces repères.

**Solution 1.2**

1. Le repère 2 est orienté dans le sens du déplacement du mobile : quand ce dernier progresse, la valeur de son altitude  $z$  augmente. Ainsi, la vitesse déterminée est positive et vaut  $v_2 = 5 \text{ m/s}$ . Ce n'est pas le cas du repère 1 qui, lui, est orienté dans le **sens inverse** du déplacement du mobile : quand ce dernier progresse, la valeur de son altitude  $z$  diminue. Dans ces conditions, la vitesse est négative et vaut  $v_1 = -5 \text{ m/s}$ .
2. Quel que soit le repère choisi, le mobile tombe : le choix du repère n'influence en rien la dynamique du mobile. De plus, aucun des deux repères n'est plus pertinent que l'autre pour l'étude de la chute du mobile, le premier étant plus réaliste car collant à la mesure d'altitude, le second étant plus pratique car permettant d'avoir une vitesse positive. Le choix du repère n'est donc pas imposé.

b) Flèches de tensions et de courant

Lorsque l'on repère le courant dans une branche de circuit, on utilise une flèche qui fonctionne selon le même principe :

- une flèche de courant associée à une valeur positive est orientée dans le sens de déplacement du courant conventionnel ;
- une flèche de courant associée à une valeur négative est orientée dans le sens opposé au déplacement du courant conventionnel.

Il y a donc quatre possibilités pour repérer une tension et un courant traversant une résistance, par exemple. Celles-ci sont données sur la figure 1.9.

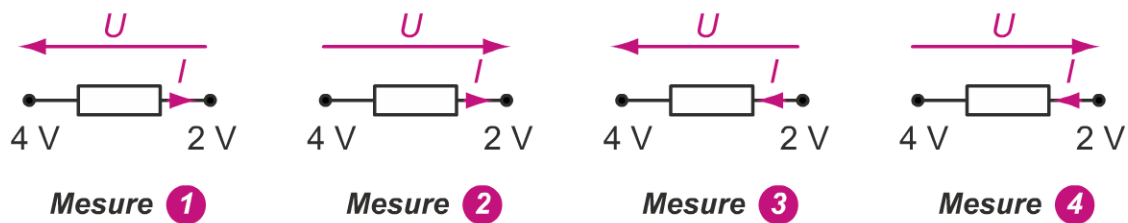


Figure 1.9 – Exemples de mesures et de repérages de la tension et du courant aux bornes d'une résistance.

- Mesure 1 : On a  $U = 4 - 2 = 2 \text{ V}$ . La flèche de tension, positive, pointe bien vers le potentiel le plus haut. Le courant conventionnel descend les potentiels, c'est-à-dire dans la direction de  $I$ . Aussi,  $I > 0$ .
- Mesure 2 : On a  $U = -2 \text{ V}$  qui pointe vers le potentiel le plus bas. Le courant a une valeur positive, car sa circulation réelle est orientée dans le sens de la flèche.
- Mesure 3 : On a une tension positive, car la flèche pointe vers le potentiel le plus haut. Dans un récepteur, quoi qu'il advienne, le courant conventionnel descend toujours les potentiels : la flèche qui repère le courant  $I$  est donc dans le sens opposé de son déplacement et l'on se retrouve dans le cas du repère 1 de l'exercice précédent. Donc  $I < 0$ .
- Mesure 4 : La flèche de tension pointe vers le potentiel le plus bas, et la flèche de courant est dans le sens opposé au déplacement réel du courant : on a  $U = -2 \text{ V}$  et  $I < 0$ .

Les flèches de tension et de courant sont des repères pour ces grandeurs. Elles peuvent être associées à des valeurs positives ou négatives. Une valeur négative signifie que la grandeur évolue dans le sens opposé au repère choisi.

### 1.2 SYMBOLES ÉLECTRIQUES ET MODÈLES ÉQUIVALENTS

L'électricité implique, dans sa production comme dans son utilisation, une conversion énergétique. Lorsque l'on trace un schéma électrique en régime continu, les symboles que l'on utilise doivent rendre compte :

- des phénomènes physiques impliqués ;
- de leurs liens au travers, entre autres, de la géométrie du réseau.

#### 1.2.1 Description des phénomènes physiques

En ce qui concerne les phénomènes physiques, nous définissons deux types de symboles : la résistance et les sources.

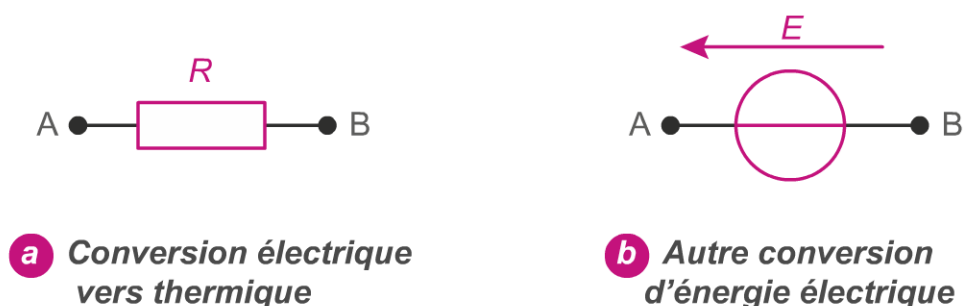
##### a) Conversion électrique-thermique (effet Joule)

La conversion de l'énergie électrique en énergie thermique, aussi appelée effet Joule, est décrite au travers du symbole rectangulaire reporté dans le volet (a) de la figure 1.10. Celui-ci représente une grandeur physique, la **résistance**, qui est responsable de l'échauffement comme nous l'avons dit précédemment. On généralise toutefois le symbole de la résistance aux composants totalement résistifs qui, en toute rigueur, devraient être appelés résistors, mais que l'on appelle généralement résistances.

Du point de vue des grandeurs électriques, nous avons déjà établi au travers d'une analogie que la tension  $U$  aux bornes de la résistance et le courant  $I$  la traversant sont liés par la loi d'Ohm (1.1). En l'absence d'une différence de potentiels aux bornes de la résistance, il n'y a donc pas de courant qui circule. De même, en l'absence de courant la traversant, il n'apparaît aucune tension aux bornes de la résistance. La résistance est donc ce que l'on appelle un **composant passif**.

##### b) La source de tension

Toutes les conversions énergétiques autres que celle représentées par la résistance sont représentées par le symbole de la **source de tension**, reporté



**Figure 1.10** – (a) Symbole de la résistance associée à la valeur  $R$  et traduisant la conversion électro-thermique. (b) Symbole de la source de tension associée à la force électromotrice  $E$  et traduisant une conversion énergétique – autre que thermique – impliquant l'énergie électrique.

sur le volet (b) de la figure 1.10. Aussi, ce symbole sera utilisé chaque fois que l'on voudra représenter :

- la conversion de l'énergie électrique en toute autre forme d'énergie que thermique ;
- la conversion de n'importe quelle forme d'énergie en énergie électrique.

Contrairement au cas de la résistance pour laquelle la tension et le courant sont liés par une relation linéaire, seule la différence de potentiels est imposée dans la source de tension : on appelle cette d.d.p la **force électromotrice** (f.é.m), souvent notée  $E$ . Ainsi, les valeurs du courant et de la tension aux bornes d'une source de tension sont indépendants : la source de tension peut donc générer ou recevoir du courant, fonctionnant comme un producteur ou un consommateur d'énergie électrique.

Lorsqu'on lit le schéma électrique d'un circuit, la présence d'une source de tension entre deux points A et B veut dire que la différence de potentiels est imposée. Par exemple, dans la figure 1.10(b), on a  $V_A - V_B = E$  quelle que soit la valeur et le sens du courant traversant la source. Cette propriété de la source de tension en fait un **composant actif**.

Une source de tension de f.é.m  $E$  impose à ses bornes la tension  $E$  quelle que soit le courant qui la traverse.

### c) La source de courant

Au même titre que la source de tension permet d'imposer une différence de potentiels entre deux points quelle que soit la valeur du courant, la source de courant, dont le symbole est représenté sur la figure 1.11, impose l'intensité du courant  $I$  quelle que soit la tension.



**Figure 1.11** – Symbole électrique d'une source de courant placée entre les points A et B.

Une source de courant impose l'intensité la traversant quelle que soit la valeur de la tension à ses bornes.

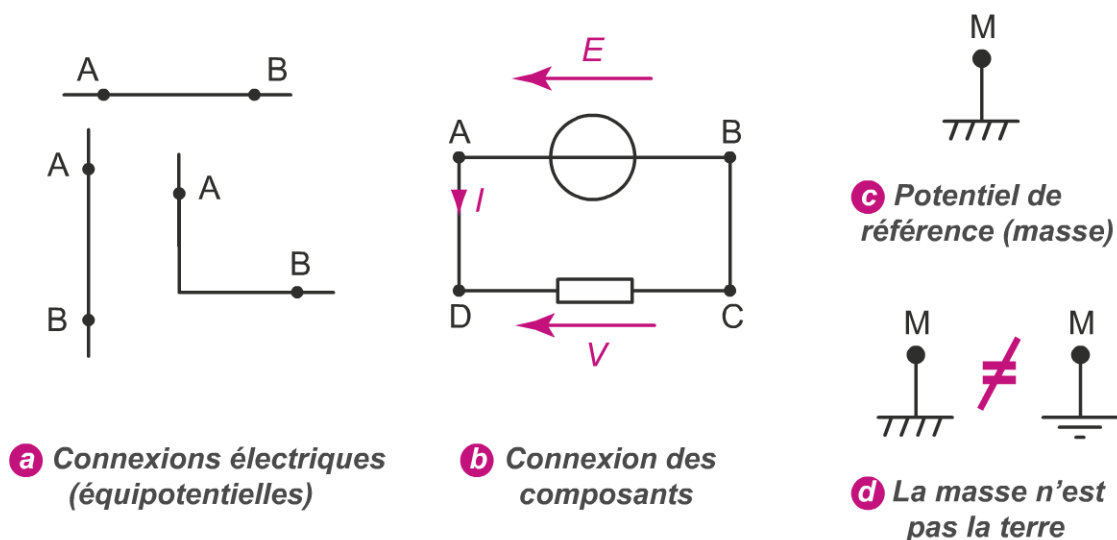
Remarquons que l'usage de la source de courant n'est pas intuitif, et qu'il s'agit plus d'un outil de résolution électrique que d'un symbole associé à un phénomène physique. Nous exposons en détail, dans la section 2.5 page 83 dédiée aux dipôles actifs linéaires, le lien entre source de tension et source de courant.

### 1.2.2 Symboles pour lier les grandeurs

#### a) La connexion, ou équipotentielle

Afin de décrire la géométrie du réseau électrique, c'est-à-dire les liens entre les phénomènes physiques et leurs effets, on utilise des **connexions**, aussi appelées **équipotentiels**. Celles-ci se représentent par de simples traits, comme reporté de différentes façons sur le volet (a) de la figure 1.12 : d'un point de vue électrique, ces schémas indiquent tous les trois que le potentiel du point A est le même que celui du point B. La tension aux bornes d'une connexion est donc nulle. En pratique, on trace les flèches de courant sur les connexions pour faciliter la compréhension d'un schéma de circuit.

Par abus de langage, la connexion est souvent appelée "*fil*". Cette appellation est inexacte, car un câble a toujours une résistance non-nulle et présente donc à ses bornes une chute de tension : il doit par conséquent être représenté par une résistance, même petite.



**Figure 1.12** – Symboles électriques permettant de lier les grandeurs. (a) Connexions équipotentielles entre le point A et le point B, tracées de trois manières différentes. (b) Exemple de circuit électrique. (c) Potentiel de référence (masse). (d) La masse, potentiel de référence, ne doit pas être confondue avec la terre.

### b) Connexion des composants

Nous avons reporté dans la figure 1.12(b) un exemple de circuit en utilisant les différents éléments que nous venons de présenter. Dans cet exemple :

- la d.d.p entre A et B est imposée par la source de tension, de sorte que  $V_A - V_B = E$  ;
- les points A et D sont au même potentiel car ils sont liés par une connexion équipotentielle, et  $V_A = V_D$  ;
- il en va de même pour les points B et C et  $V_B = V_C$  ;
- la tension aux bornes de la résistance  $V = V_D - V_C$  est donc égale à E.

Au regard de ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent, ce schéma pourrait représenter, par exemple, une pile court-circuitée, ou encore, selon la valeur de la résistance, une pile débitant dans une ampoule.

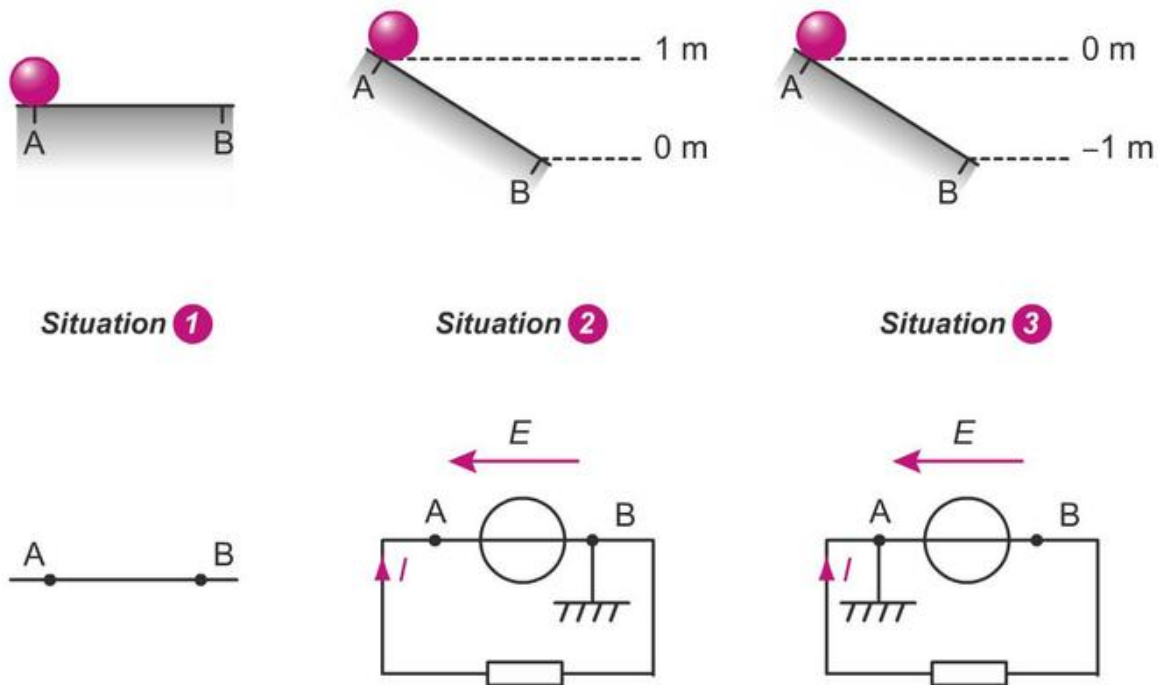
### c) La masse, point de référence des potentiels

La circulation du courant électrique est due à la présence d'une différence de potentiels, la tension, et non d'un potentiel seul. De ce point de vue, la valeur numérique d'un potentiel n'est importante que dans la mesure où elle diffère de celle d'un autre point : le potentiel peut donc être défini de ma-

## 1.2 Symboles électriques et modèles équivalents

nière relative sans que cela ait d'incidence sur la description des phénomènes électriques.

Inversement, connaissant les courants et les tensions, il n'est pas possible de déterminer avec précision les potentiels des différents points d'un circuit, à moins de se fixer une référence, c'est-à-dire un point où l'on considère que le potentiel a une valeur nulle. Le symbole permettant d'indiquer ce point d'origine est appelé la **masse**, et nous l'avons reporté sur le volet (c) de la figure 1.12. Remarquons qu'il ne faut pas confondre la masse avec la terre, représentée dans le volet (d) de la figure, qui a une toute autre signification et que nous n'utiliserons pas dans cet ouvrage.



**Figure 1.13** – Définition de la masse en électricité et analogie gravitationnelle. La situation 1 représente une liaison équipotentielle. Dans la situation 2, l'origine des potentiels est prise au point B. Dans la situation 3, l'origine des potentiels est prise au point A.

Dans le but d'illustrer la notion d'équipotentielle et de masse, nous avons fait sur la figure 1.13 une analogie gravitationnelle en faisant un parallèle entre le potentiel électrique et le potentiel gravitationnel, ce dernier étant assimilable à la hauteur d'un point. La circulation du courant électrique dans le circuit est modélisée par le déplacement de la bille magenta sur le sol.

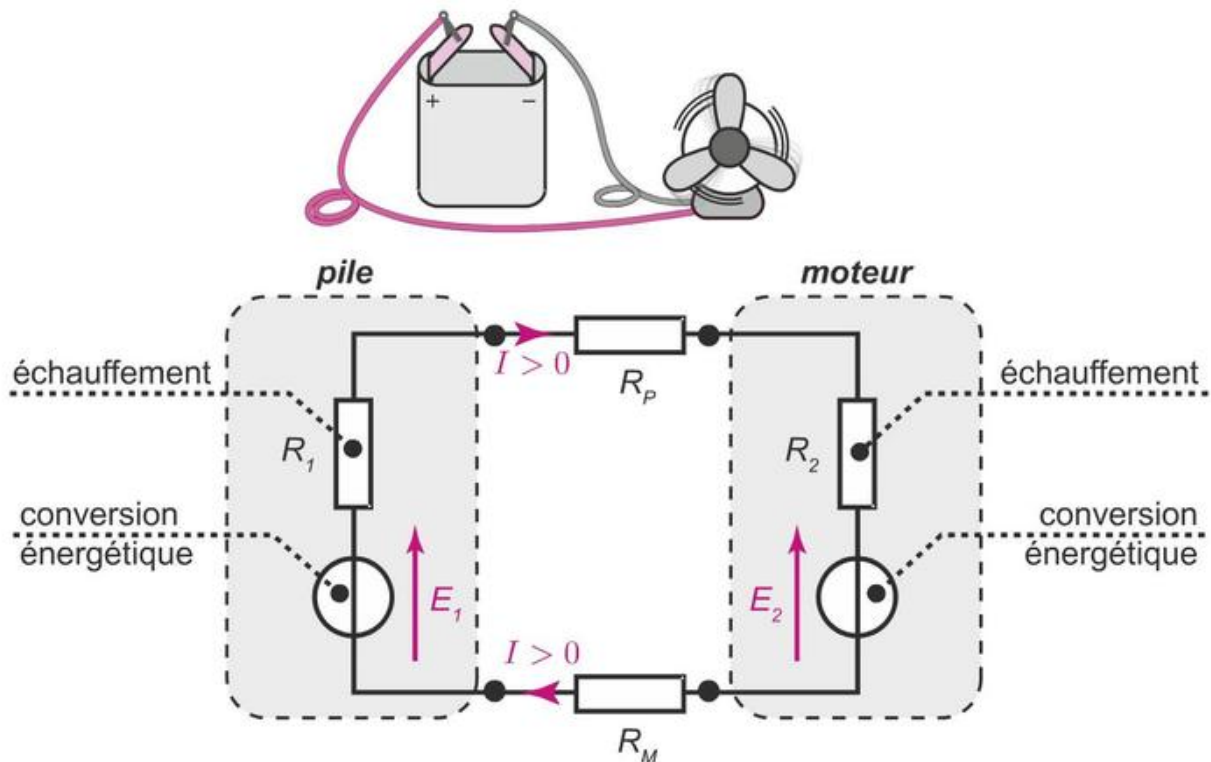
- Dans la situation 1, les points A et B sont liés par une connexion équipotentielle : on dit aussi qu'ils sont court-circuités. Le terrain est donc plat et la bille, si elle n'a pas de vitesse initiale, ne bouge pas. D'un point de vue électrique, les potentiels  $V_A$  et  $V_B$  sont les mêmes, de sorte que la différence de potentiels est nulle et qu'il ne circule pas de courant.
- Dans la situation 2, une différence de potentiels est appliquée par la source de tension. Elle se traduit par une différence de hauteurs pour les points A et B. La résistance électrique est assimilable dans cet exemple à la résistance du sol : la bille roule de A vers B, tout comme le courant électrique traverse la résistance pour arriver au point B. La référence est choisie au point B, de sorte que la hauteur du point A est positive : cela revient à mettre la masse en B dans le schéma électrique, ce qui implique que  $V_A > 0$ .
- La situation 3 est similaire à la situation 2, si ce n'est que la référence est prise en A et que le point B a une hauteur et un potentiel négatifs. Bien évidemment, la vitesse de la bille lorsqu'elle arrive en B est la même que dans la situation précédente : le fait de mettre la masse au point A dans le schéma électrique modifie les potentiels mais ne modifie en rien la valeur de leur différence, ni celle du courant.

### 1.2.3 Un premier modèle électrique

Les différents éléments que nous avons décrits nous permettent de dresser dès maintenant le modèle électrique équivalent à la situation prise en exemple à la page 2. Celle-ci est reprise dans la partie supérieure de la figure 1.14.

Dans la partie inférieure, nous identifions les différents éléments du montage :

- à gauche, la pile, qui est le siège d'une conversion d'énergie chimique en énergie électrique, représentée par une source de tension de f.é.m  $E_1$ , et d'un échauffement dû au passage du courant, représenté par la résistance  $R_1$  ;
- à droite, le moteur, qui reçoit le courant de la pile, ce qui entraîne un échauffement représenté par la résistance  $R_2$ , et qui convertit l'énergie électrique en énergie mécanique, conversion décrite par la source de tension de f.é.m  $E_2$  ;
- entre les deux, les câbles conducteurs, qui présentent une résistance faible mais non-nulle  $R_M + R_P$ .



**Figure 1.14** – L'analyse des phénomènes physiques mis en jeu dans la pile et dans le moteur permet d'établir de façon intuitive un modèle électrique équivalent pour ces éléments : le modèle de Thévenin. Les grandeurs  $R_M$  et  $R_P$  sont les résistances des câbles reliant les bornes + et les bornes – et ont de faibles valeurs.

Au travers d'une réflexion basée sur les phénomènes physiques impliqués par la situation décrite, nous venons de représenter, pour chacun des éléments pile-moteur-câble, ce que l'on appelle le modèle équivalent de Thévenin. Ce modèle sera vu plus en détail dans la section 2.5.4 liée aux théorèmes du dipôle linéaire, page 90.

### 1.3 LES LOIS DE KIRCHHOFF

Dans les sections précédentes, nous avons défini les différentes grandeurs électriques. Les symboles permettant d'établir les modèles équivalents des montages électriques ont été décrits, et nous ont permis de dresser notre premier modèle. Énonçons à présent deux lois essentielles permettant d'effectuer des calculs et qui constituent, avec la loi d'Ohm, les lois de base de l'électricité. Il s'agit de la loi des mailles et la loi des nœuds.

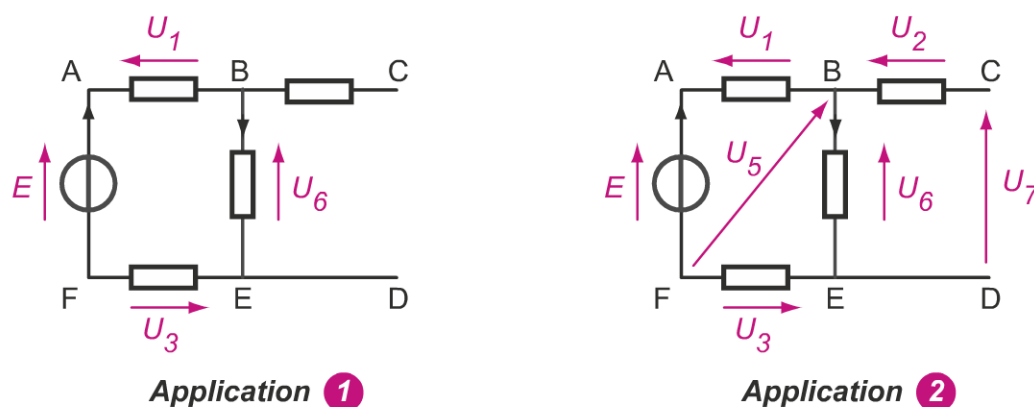
### 1.3.1 La loi des mailles

Une maille est une boucle de circuit fermé. La loi des mailles, en dépit de son nom, est bien plus générale car elle peut s'appliquer partout où l'on mesure les tensions, que le circuit soit fermé ou pas.

### 1.3.2 Méthode

La méthode pour appliquer la loi des mailles consiste à écrire une équation mettant en jeu des différences de potentiels, en suivant les étapes décrites ci-après.

1. On part d'un point du circuit pour y revenir. On aura franchi à la fin de l'application de la loi des mailles une différence de potentiels de 0 V. Le second membre de l'équation est donc 0.
2. Pour écrire le premier membre, on peut se déplacer dans le sens de son choix, et l'on peut emprunter les flèches ou les connexions électriques (équipotentiellles).
3. On relève avec un signe plus (+) les flèches de tension rencontrées qui sont orientées dans le sens du déplacement, et avec un signe moins (-) celles qui sont orientées en sens inverse. On a alors notre premier membre de l'équation.



**Figure 1.15** – Illustrations de la loi des mailles. Les tensions peuvent être prises (a) aux bornes des composants ou (b) entre différents nœuds du circuit.

À titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure 1.15 un circuit électrique dans lequel nous allons établir les liens entre les tensions représentées.

**Dans le volet de gauche** (application 1), nous appliquons la loi dans la maille. Nous partons par exemple du point F pour y revenir, en suivant le trajet FABEF. Nous rencontrons alors  $+E$ ,  $-U_1$ ,  $-U_6$  et  $-U_3$ , car ces trois dernières flèches sont opposées au sens de déplacement choisi. On aboutit alors à l'équation  $E - U_1 - U_6 - U_3 = 0$ . On peut aussi partir du point B, par exemple, et tourner dans le sens inverse pour suivre le trajet BAFEB. On rencontre alors  $U_1$ ,  $-E$ ,  $U_3$  et  $U_6$ , de sorte que  $U_1 - E + U_3 + U_6 = 0$  : on retrouve la même relation entre les grandeurs.

**Dans le volet de droite** (application 2), nous appliquons la loi en deçà ou au-delà de la maille, ce qui est autorisé dans la mesure où l'on dispose d'une flèche de tension pour se déplacer. Ainsi, partant du point E pour suivre le chemin EBCDE, on obtient  $U_6 - U_2 - U_7 = 0$ . On peut aussi suivre le chemin EBFEB pour écrire  $U_6 - U_5 + U_3 = 0$ .

## 1.4 LOI DES NŒUDS

Un nœud est un point où le courant se partage. Nous le définissons plus précisément à la page 52.

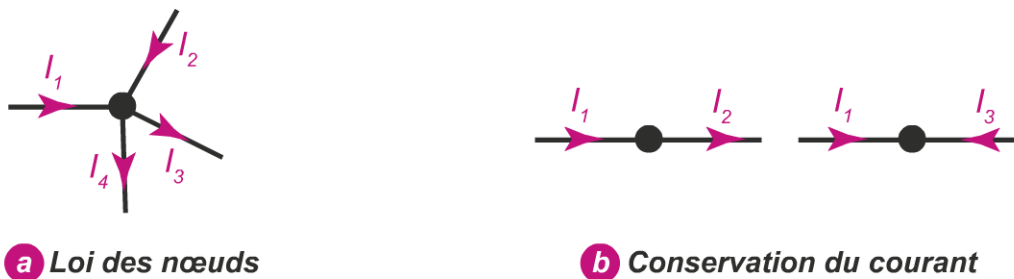


Figure 1.16 – Illustration de (a) la loi des nœuds et de (b) la conservation du courant.

### 1.4.1 Énoncé de la loi

La somme des courants **repérés** entrants dans le nœud est égale à la somme des courants **repérés** sortants du même nœud.

$$\sum \text{courants repérés entrants} = \sum \text{courants repérés sortants.}$$

Dans le cas de l'exemple reporté sur le volet (a) de la figure 1.16, les courants repérés entrants sont  $I_1$  et  $I_2$  alors que les courants repérés sortants

## Chapitre 1 – Électricité en régime continu

sont  $I_3$  et  $I_4$ . On écrit alors

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \quad (1.3)$$

### 1.4.2 Cas particulier

On retrouve la loi de conservation du courant en appliquant la loi des nœuds, non plus à un nœud, mais en un point d'une équipotentielle, comme sur le volet (b) de la figure 1.16. Dans les deux cas considérés, on peut écrire d'une part que

$$I_1 = I_2 \quad (1.4)$$

car on a affaire à un courant repéré entrant et un autre repéré sortant. D'autre part, on peut écrire que

$$I_1 = -I_3 \quad (1.5)$$

puisque les deux courants sont dans ce cas repérés entrants.

On retrouve le fait que le sens de la flèche n'indique pas le sens réel du courant. Il suffit d'interpréter correctement le signe de la valeur numérique associée.

## 1.5 LOI D'OHM, CONVENTIONS RÉCEPTEUR ET GÉNÉRATEUR

### 1.5.1 Loi d'Ohm

Nous avons déjà établi de façon intuitive que le courant et la tension dans une résistance sont liés par la relation

$$U = RI \quad (1.6)$$

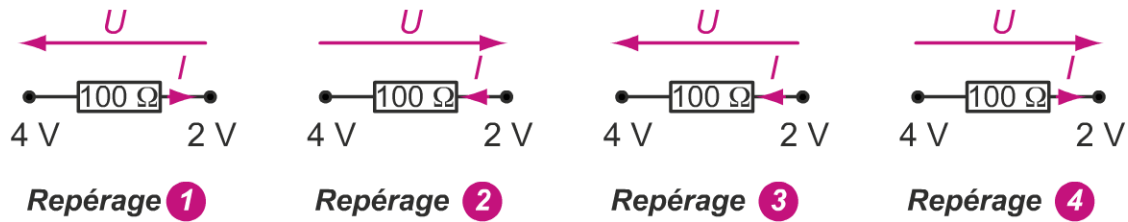
Cette relation n'est toutefois valable qu'en convention récepteur, et devra être accompagnée d'un signe moins (–) si l'on souhaite l'utiliser aux bornes d'une résistance repérée en convention générateur. Définissons à présent ces conventions.

### 1.5.2 Convention récepteur

Considérons une résistance et intéressons-nous aux différents repérages reportés sur la figure 1.17.

Souvenons-nous que, dans un récepteur, le courant conventionnel va du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas. Rappelons-nous aussi qu'une

## 1.5 Loi d'Ohm, conventions récepteur et générateur



**Figure 1.17** – Les quatre façons de repérer la tension et le courant aux bornes d'une résistance.

flèche de tension associée à une valeur positive pointe vers le potentiel le plus haut, et qu'une flèche de tension associée à une valeur négative pointe vers le potentiel le plus bas. Dans ces conditions :

- le repérage 1 donne une tension positive et un courant positif, et ce repérage permet d'appliquer la loi d'Ohm sans se soucier des signes. C'est en outre le repérage le plus facile à utiliser et à comprendre ;
- le repérage 2 donne une tension négative et un courant négatif. Il permet aussi d'appliquer la loi d'Ohm sans se soucier des signes ;
- le repérage 3 donne une tension positive et un courant négatif. Ce repérage n'est pas pratique pour appliquer la loi d'Ohm puisqu'il faut ajouter un signe moins pour faire le lien entre les deux grandeurs ;
- le repérage 4 donne une tension négative et un courant positif. Au même titre que le repérage 3, il ne paraît pas optimal pour la situation considérée.

Ainsi, si l'on fait un bilan, les repérages 1 et 2 permettent d'appliquer la loi d'Ohm simplement et semblent les plus adaptés. Ceux-ci ont le point commun suivant : la tension et le courant sont repérés par des flèches en sens opposées. C'est cette façon de repérer les flèches de tension et de courant en sens opposé que l'on appelle la **convention récepteur**.

On remarquera que les repérages 3 et 4, même s'ils ne sont pas les plus adaptés à la situation, n'empêchent en aucun cas de décrire ce qu'il se passe dans la résistance.

### Exercice 1.3

Pour chacun des repérages représentés sur la figure 1.17, préciser la convention choisie et calculer les valeurs de la tension et du courant.

### Solution 1.3

1. Le premier repérage est en convention récepteur car les flèches pointent dans des sens opposés. La tension  $U$  est la différence entre le potentiel pointé et le potentiel de départ de la flèche, de sorte que  $U = 4 - 2 = 2$  V. Le courant est positif car la flèche est dirigée du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas. Dans la mesure où le repérage est en convention récepteur, on applique la loi d'Ohm sans se soucier du signe et l'on obtient  $I = 2 \text{ V} / 100 \text{ } \Omega = 0,02 \text{ A} = 20 \text{ mA}$ .
2. Le second repérage est aussi en convention récepteur. Ici,  $U = 2 - 4 = -2$  V, et le courant est calculé en appliquant la loi d'Ohm avec  $I = -2 \text{ V} / 100 \text{ } \Omega = -0,02 \text{ A} = -20 \text{ mA}$ . On retrouve bien un courant négatif puisque la flèche est dans le sens opposé au sens conventionnel du courant.
3. Le repérage 3 est en convention générateur. La flèche de tension pointe vers le potentiel le plus haut, de sorte que  $U = 2$  V. En ce qui concerne le courant, celui-ci ne peut pas être calculé directement par la loi d'Ohm du fait du choix d'une convention générateur : il faut opposer le résultat, de sorte que  $I = -U / 100 \text{ } \Omega = -2 \text{ V} / 100 \text{ } \Omega = -0,02 \text{ A} = -20 \text{ mA}$ . On retrouve bien un courant négatif, car la flèche  $I$  est opposée au sens conventionnel. Les grandeurs tension et courant sont de signes différents puisque l'on décrit un récepteur avec une convention générateur.
4. Le repérage 4 est lui aussi en convention générateur, et le raisonnement utilisé pour le repérage 3 s'applique encore. On trouve alors  $U = -2$  V et  $I = 20 \text{ mA}$ .

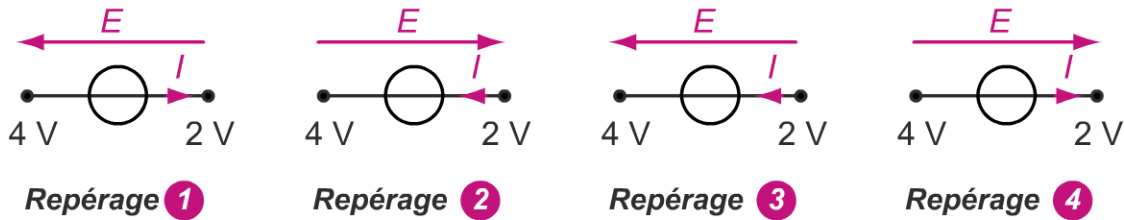
### 1.5.3 Convention générateur

Reprenons les quatre repérages précédents et remplaçons la résistance par un générateur pour obtenir la figure 1.18. Par convention, nous notons  $E$  la tension aux bornes de celui-ci : on indique les potentiels 2 V et 4 V à ses bornes. Pour analyser les signes des grandeurs  $E$  et  $I$  remarquons que, dans l'analogie hydraulique, un générateur est comparable à une pompe. En tant que tel, il va forcer le courant à remonter du point le plus bas vers le point haut. Ainsi, **dans un générateur**, et seulement dans ce cas là, le courant conventionnel se déplace du potentiel le plus bas vers le potentiel le plus haut (sous l'effet de la pompe-générateur). Dans ces conditions :

- le repérage 1 donne une tension positive mais un courant négatif (puisque, dans un générateur, le courant conventionnel remonte les

## 1.5 Loi d'Ohm, conventions récepteur et générateur

potentiels) et se déplace dans le sens opposé à celui indiqué par la flèche de courant ;



**Figure 1.18** – Les quatre façons de repérer la tension et le courant aux bornes d'un générateur.

- le repérage 2 donne une tension négative mais un courant positif ;
- le repérage 3 donne une tension positive et un courant positif. Il semble être le mieux adapté pour décrire la situation ;
- le repérage 4 donne une tension négative et un courant négatif. Il a pour point commun avec le repérage 3 le fait d'utiliser des flèches de tension et de courant orientées dans le même sens.

Dans le cas d'un générateur, la convention la plus adaptée pour décrire la situation consiste à repérer les flèches de tension et de courant dans le même sens : c'est la **convention générateur**.

On remarquera toutefois que les repérages 1 et 2, s'ils ne sont pas les plus adaptés à la situation, n'empêchent en rien de décrire ce qu'il se passe au niveau du générateur.

### 1.5.4 Choix d'une convention

Lorsque l'on souhaite décrire la tension et le courant traversant un dipôle électrique, on peut **utiliser la convention de son choix**. Remarquons toutefois qu'il est plus simple d'utiliser la convention adaptée à la nature du dipôle : convention récepteur pour une résistance, convention générateur pour un générateur.

Lorsqu'un dipôle est de nature inconnue, et cela peut arriver dans le cas de dipôles réversibles tels que les accumulateurs ou les machines tournantes (dynamo, moteur, alternateur), on utilise l'une des deux conventions, au choix, et la nature du dipôle sera déduite des signes respectifs des grandeurs courant et tension mesurées ou calculées.

On retiendra que :

- lorsque la tension et le courant sont repérés par des flèches en sens opposés, on est en convention récepteur. Si les valeurs du courant et de la tension sont du même signe, le dipôle considéré est un récepteur, sinon c'est un générateur ;
- lorsque la tension et le courant sont repérés par des flèches dans le même sens, on est en convention générateur. Si les valeurs du courant et de la tension sont du même signe, le dipôle considéré est un générateur, sinon c'est un récepteur.

### Exercice 1.4

On présente le schéma de la figure 1.19 et l'on donne :

- $U = V_A - V_B = 240 \text{ V}$
- $U_2 = V_F - V_B = 184 \text{ V}$
- $U_3 = U_{AD} = 46 \text{ V}$
- $U_4 = V_E - V_D = -110 \text{ V}$

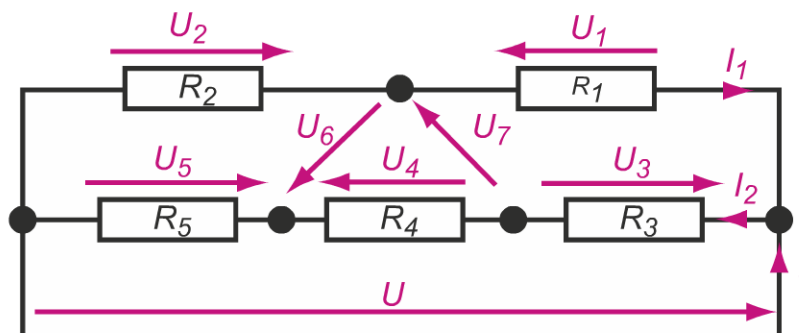
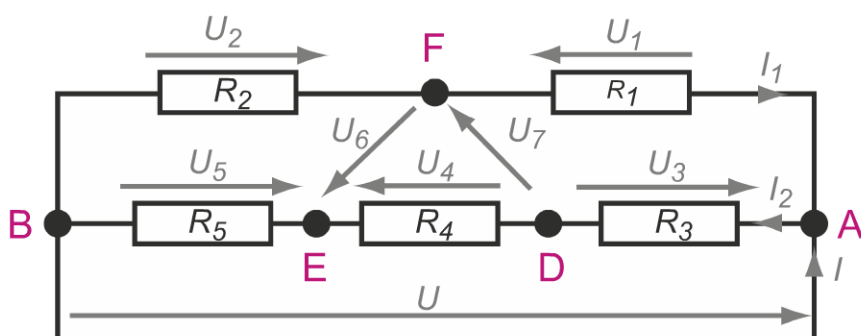


Figure 1.19 – Circuit électrique de l'exercice 1.4.

1. Placer les points  $A, B, D, E$  et  $F$  sur la figure.
2. Calculer la valeur des tensions inconnues, en précisant si la flèche pointe vers le potentiel le plus haut ou le plus bas.
3. Déterminer les intensités des courants représentés pour  $R_1 = R_3 = 100 \Omega$ . Que dire des sens choisis pour les flèches ?

**Solution 1.4**

1. Puisque  $U = V_A - V_B$  alors la flèche représentant  $U$  pointe vers le point A, ce qui permet de placer A et B. Le point F est repéré à l'aide de  $U_2 = V_F - V_B$  dont la flèche pointe vers F. De même le point D est repéré à l'aide de  $U_3 = V_A - V_D$  et dont la flèche pointe vers A. Le point E est placé grâce à  $U_4 = V_E - V_D$  qui est dirigée de D vers E. On obtient donc le schéma de la figure 1.20.



**Figure 1.20** – Correction de l'exercice 1.4.

2. Nous devons calculer les tensions  $U_1$ ,  $U_5$ ,  $U_6$  et  $U_7$ . Nous appliquons la loi des mailles en n'utilisant que des grandeurs dont les valeurs sont données par l'énoncé pour ne pas accumuler d'éventuelles erreurs.
  - Dans la maille BAFB, on établit que  $U + U_1 - U_2 = 0$ , de sorte que

$$U_1 = U_2 - U = 184 - 240 = -56 \text{ V}$$

Dans ces conditions  $V_F < V_A$ .

- En parcourant le chemin BADEB, on obtient la relation  $U - U_3 + U_4 - U_5 = 0$  et l'on a

$$U_5 = U - U_3 + U_4 = 240 - 46 - 110 = 84 \text{ V}$$

Ainsi,  $V_E > V_B$ .

- Le parcours BFEDAB donne  $U_2 + U_6 - U_4 + U_3 - U = 0$  et donc

$$U_6 = U - U_3 + U_4 - U_2 = 240 - 46 - 110 - 184 = -100 \text{ V}$$

On remarque que  $V_E < V_F$ .

- On établit en parcourant BFDAB que  $U_2 - U_7 + U_3 - U = 0$ , ce qui permet de calculer

$$U_7 = U_2 + U_3 - U = 184 + 46 - 240 = -10 \text{ V}$$

On a  $V_F < V_D$ .

## Chapitre 1 – Électricité en régime continu

3. — Pour déterminer le courant  $I_1$ , on se place aux bornes de la résistance  $R_1$  soumise à la tension  $U_1$ . Celle-ci étant en convention récepteur, on applique directement la loi d'Ohm :

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{-56 \text{ V}}{100 \Omega} = -0,56 \text{ A} = -560 \text{ mA}$$

La valeur de  $I_1$  étant négative, la flèche de courant a été choisie dans le sens opposé au sens conventionnel : celui-ci circule donc dans le sens opposé à celui indiqué par  $I_1$ .

- Pour déterminer le courant  $I_2$ , on se place aux bornes de la résistance  $R_3$  soumise à la tension  $U_3$ . Celle-ci est aussi en convention récepteur, et on applique là encore la loi d'Ohm sans se soucier du signe :

$$I_2 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{46 \text{ V}}{100 \Omega} = 0,46 \text{ A} = 460 \text{ mA}$$

La valeur de  $I_2$  étant positive, la flèche de courant a été choisie dans le sens conventionnel : celui-ci circule donc dans le sens indiqué par  $I_2$ .

- Le courant  $I$  se calcule en appliquant la loi des nœuds. On a

$$I + I_1 = I_2 \implies I = I_2 - I_1 = 0,46 - (-0,56) = 1,02 \text{ A}$$

La flèche de  $I$  étant associée à une valeur numérique positive, elle est orientée dans le sens conventionnel du courant.

### Exercice 1.5

On considère le circuit de la figure 1.21. Le générateur fournit une tension  $U = 6 \text{ V}$ . On donne les valeurs numériques, mais pas les flèches, des grandeurs suivantes :

- $U_1 = -0,25 \text{ V}$  ;  $U_3 = 1,7 \text{ V}$  ;  $U_4 = 2,3 \text{ V}$  ;
- $I_1 = 1,2 \text{ mA}$  ;  $I_3 = -4 \text{ mA}$  ;  $I_4 = 90 \text{ mA}$  ;

1. Indiquer les flèches correspondant aux tensions et aux courants dont les valeurs sont données dans l'énoncé, et déterminer les autres tensions et courants du circuit.
2. Déterminer la résistance équivalente du circuit vu du générateur.

### Solution 1.5

Pour faciliter la résolution de l'exercice, on commence par placer la masse, c'est-à-dire le point de référence des potentiels. Nous la plaçons au point D, de sorte que  $V_D = 0$ . Par conséquent,  $V_A = 6 \text{ V}$ .

## 1.5 Loi d'Ohm, conventions récepteur et générateur

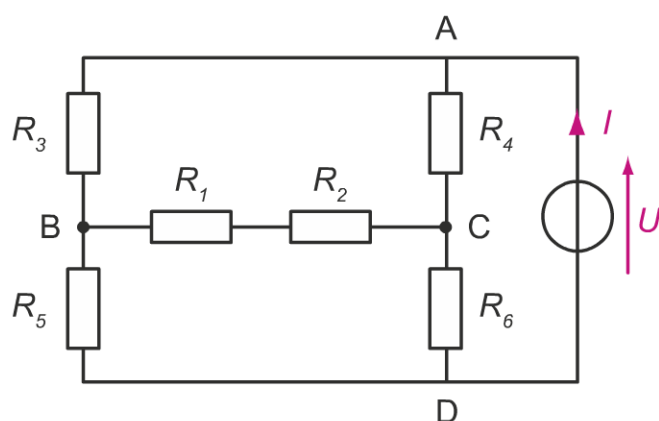


Figure 1.21 – Circuit de l'exercice 1.5.

1. Nous rappelons qu'une flèche de tension associée à une valeur positive pointe vers le potentiel le plus haut, qu'une flèche de courant associée à une valeur positive pointe dans le sens conventionnel du courant, et que ce dernier va, dans un récepteur, du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas. Dans notre cas, le sens conventionnel du courant est de A vers D. On établit que :
  - les flèches de tension  $U_3$  et  $U_4$  pointent vers le potentiel le plus haut, c'est-à-dire vers le point A ;
  - la flèche de courant  $I_3$  associée à une valeur négative s'oppose au sens conventionnel du courant, et est donc dirigée de B vers A ;
  - la flèche de courant  $I_4$  associée à une valeur positive est dans le sens conventionnel du courant, c'est-à-dire dirigée de A vers C.

Nous allons maintenant chercher à orienter  $I_1$  et  $U_1$ . Pour cela, il nous faut comparer les potentiels des points B et C. Or,

$$V_B = V_A - U_3 = 6 - 1,7 = 4,3 \text{ V}$$

et

$$V_C = V_A - U_4 = 6 - 2,3 = 3,7 \text{ V}$$

de sorte que  $V_B > V_C$ . La flèche de courant  $I_1$  étant associée à une valeur positive, elle est orientée de B vers C, et  $U_1$ , qui est associée à une valeur négative, est dans le même sens.

Nous avons reporté en gris sur la figure 1.22 les grandeurs qu'il reste à déterminer. Les tensions  $U_5$  et  $U_6$  se calculent en évaluant les différences de potentiels. On a

$$U_5 = V_B - V_D = 4,3 \text{ V}$$

et

$$U_6 = V_C - V_D = 3,7 \text{ V}$$

Nous pouvons alors orienter les courants  $I_5$  et  $I_6$  et les calculer à l'aide de la loi des nœuds. On a

$$I_6 = I_1 + I_4 = 91,2 \text{ mA}$$

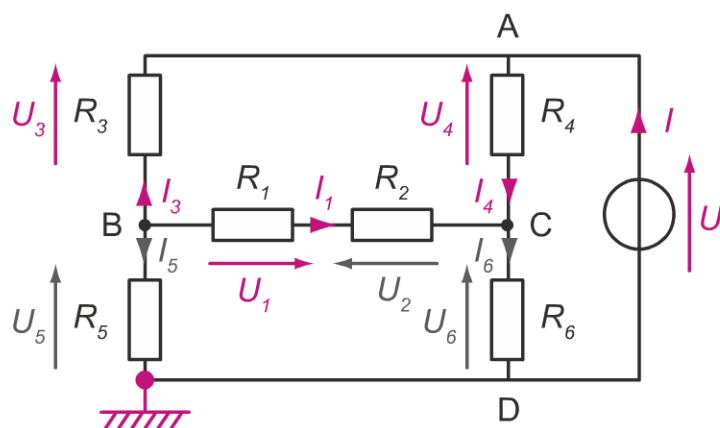


Figure 1.22 – Correction de l'exercice 1.5.

et

$$I_5 = -I_1 - I_3 = 2,8 \text{ mA}$$

La tension  $U_2$  se calcule par

$$U_2 = U_{BC} + U_1 = V_B - V_C - U_1 = 4,3 - 3,7 + 0,25 = 0,35 \text{ V}$$

Enfin, le courant  $I$  se calcule de deux façons différentes, avec

$$I = I_4 - I_3 = I_5 + I_6 = 94 \text{ mA}$$

2. La résistance équivalente  $R$  du circuit vue du générateur est telle que

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6 \text{ V}}{0,094 \text{ A}} = 63,8 \Omega$$

## 1.6 RÉSISTANCES ÉQUIVALENTES

Maintenant que nous connaissons les différentes lois de base de l'électricité, nous pouvons déterminer la résistance équivalente d'une association de résistances. Cette valeur diffère selon que les résistances sont montées en série ou en parallèle.

### 1.6.1 Montage série

Plaçons-nous dans le volet (a) de la figure 1.23. En appliquant la loi des mailles, on observe que

$$U = U_1 + U_2 \tag{1.7}$$

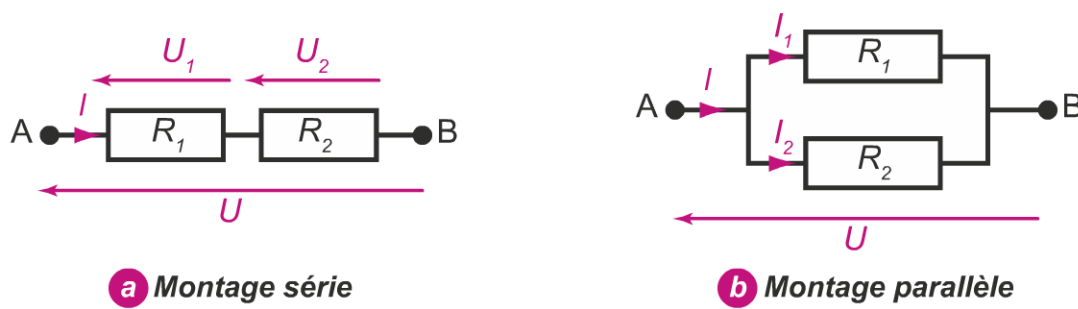


Figure 1.23 – Associations de résistances. (a) Montages série et (b) parallèle.

Si l'on applique la loi d'Ohm aux bornes de la branche AB et de chaque résistance, on peut exprimer ces tensions en fonction du courant, qui est partout le même, ce qui permet d'écrire

$$U = RI \quad ; \quad U_1 = R_1 I \quad ; \quad U_2 = R_2 I \quad (1.8)$$

de sorte que

$$RI = R_1 I + R_2 I \quad (1.9)$$

ce qui permet d'obtenir, en simplifiant par  $I$ , la relation des **résistances série** :

$$R_S = R_1 + R_2 \quad (1.10)$$

Remarquons que cette relation se généralise au cas de plusieurs résistances.

### 1.6.2 Montage parallèle

Plaçons-nous dans le volet (b) de la figure 1.23. En appliquant la loi des nœuds, on établit que

$$I = I_1 + I_2 \quad (1.11)$$

Si l'on appelle  $R_P$  la résistance équivalente à  $R_1 // R_2$ , on peut écrire en appliquant la loi d'Ohm pour chacune des résistances et en remplaçant les courants dans la relation (1.11) que

$$\frac{U}{R_P} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \quad (1.12)$$

de sorte que

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (1.13)$$

Cette dernière relation se généralise à un plus grand nombre de résistances.

## Chapitre 1 – Électricité en régime continu

Lorsqu'il n'y a que deux résistances, on peut utiliser la relation suivante, obtenue en réduisant les fractions de l'expression (1.13) au même dénominateur et en inversant le résultat :

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.14)$$

On remarquera enfin que, lorsque l'on a deux résistances  $R_1 = R_2 = R$  montées en parallèle, la résistance équivalente  $R_p = R/2$ .

Deux résistances  $R$  en parallèle se comportent comme une résistance  $R/2$  :

$$R // R = \frac{R}{2} \quad (1.15)$$

Par exemple, deux résistances de  $100 \Omega$  montées en parallèles sont équivalentes à une résistance de  $50 \Omega$ .

Lorsque l'on couple plusieurs résistances entre elles, celles-ci se comportent comme une seule résistance équivalente. On retiendra que :

—  $n$  résistances montées toutes en série se comportent comme une résistance  $R_s$  telle que

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (1.16)$$

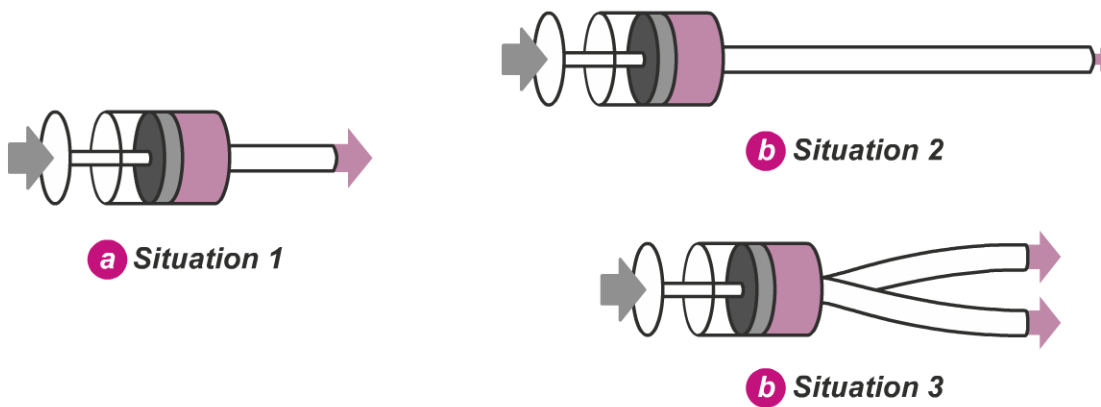
—  $n$  résistances montées toutes en parallèle se comportent comme une résistance  $R_p$  telle que

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (1.17)$$

### 1.6.3 Analogie hydraulique

Pour se souvenir de ces relations (et ne pas les confondre avec, par exemple, celles qui permettent de calculer les associations de capacités), on peut faire un parallèle avec ce qui se passe dans le cas des seringues précédemment vu.

Dans le cas de la résistance série, on se trouve dans la situation 2 décrite dans la figure 1.24. En effet, l'augmentation de la résistance peut être



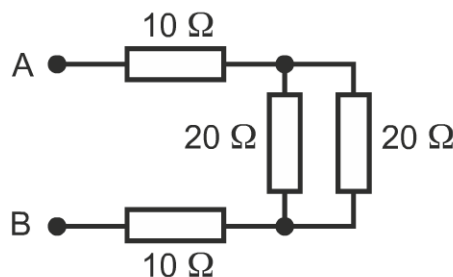
**Figure 1.24** – Analogie hydraulique de l’association de résistances. La situation 1 est prise comme référence. Dans la situation 2, la résistance a augmenté du fait de l’allongement du tuyau (mise en série de résistances). Dans la situation 3, au contraire, l’augmentation du nombre de chemins possibles diminue la résistance équivalente des tuyaux (mise en parallèle de résistances).

vue comme une augmentation de la longueur du tuyau par rapport à la situation 1, menant pour une différence de pressions donnée à un débit plus faible.

Dans le cas de la résistance parallèle, on se trouve dans la situation 3. Cette fois-ci, l’ajout d’une résistance parallèle est assimilable à celui d’un second tuyau à la sortie de la seringue. Ici, la pression exercée sur le piston agit sur les deux tuyaux, de sorte que le débit total est augmenté : la résistance a alors diminué.

**Exercice 1.6**

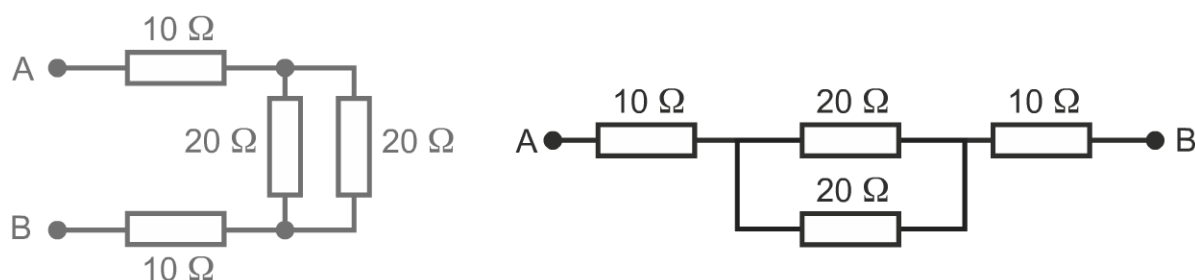
Calculer la résistance équivalente au réseau de résistances de la figure 1.25.



**Figure 1.25** – Circuit de résistances de l’exercice 1.6.

**Solution 1.6**

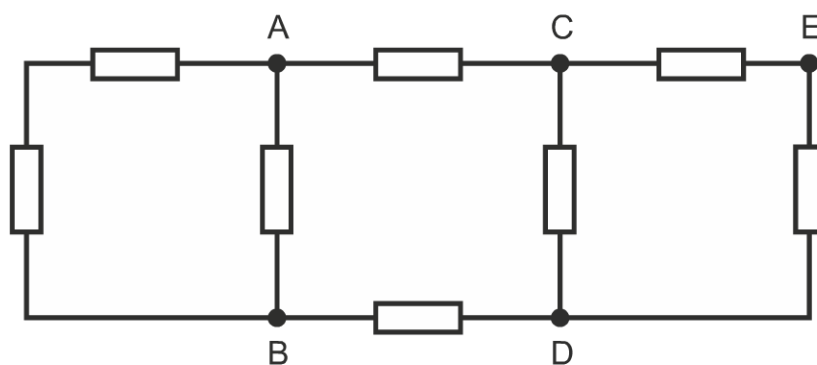
Nous proposons de simplifier le problème en mettant en ligne le réseau de résistances, comme reporté sur la seconde partie de la figure 1.26. On voit alors clairement qu'entre les points A et B le réseau est constitué d'une série de trois résistances  $10\ \Omega + (20\ \Omega // 20\ \Omega) + 10\ \Omega$ , soit une résistance équivalente de  $30\ \Omega$ .



**Figure 1.26** – Correction de l'exercice 1.6.

**Exercice 1.7**

On souhaite brancher un générateur de tension  $U = 10\ \text{V}$  aux bornes du réseau de résistances représenté sur la figure 1.27.



**Figure 1.27** – Réseau de résistances de l'exercice 1.7.

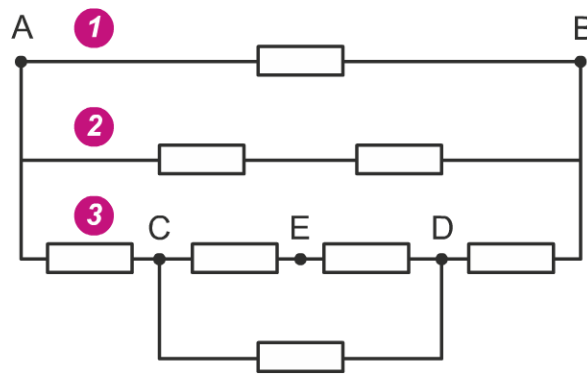
Calculer la résistance équivalente et le courant débité par le générateur de tension lorsqu'il est connecté :

1. aux nœuds A et B ;
2. aux nœuds C et D ;
3. aux nœuds E et D.

Toutes les résistances sont identiques et égales à  $10\ \Omega$ .

**Solution 1.7**

1. Comme dans l'exercice précédent, le problème se simplifie en redessinant en ligne le réseau de résistances, comme reporté sur la figure 1.28. Pour ce faire, on recense tous les chemins que le courant peut emprunter pour se rendre du point A au point B, en ne perdant pas de vue que le courant ne peut pas revenir en arrière : on considère par exemple que le point A est le point haut, le courant se dirigeant alors de A vers B. Dans notre cas, il y a trois chemins qui partent de A, et trois chemins qui arrivent en B. Le troisième chemin se subdivise en C, d'où deux chemins sont possibles pour arriver en D.



**Figure 1.28** – Correction de l'exercice 1.7.

Par la suite, il s'agit de déterminer la résistance de chaque branche, en remontant progressivement vers les points A et B pour évaluer la résistance équivalente des trois chemins. On commence alors par regarder ce qui se passe entre les points C et D : on calcule

$$R_{CD} = 10 \, \Omega // 20 \, \Omega = \frac{20 \times 10}{20 + 10} \simeq 6,67 \, \Omega$$

Le chemin 3 a donc une résistance

$$R_3 = 10 \, \Omega + 6,67 \, \Omega + 10 \, \Omega$$

que l'on arrondit à trois chiffres significatifs à  $R_3 = 26,7 \, \Omega$ . Les chemins 1 et 2 ont des résistances respectives  $R_1 = 10 \, \Omega$  et  $R_2 = 20 \, \Omega$ . Finalement, la résistance entre A et B vaut

$$R_{AB} = 10 \, \Omega // 20 \, \Omega // 26,7 \, \Omega$$

Le calcul nous donne, en remarquant que  $10 \, \Omega // 20 \, \Omega = 6,67 \, \Omega$ ,

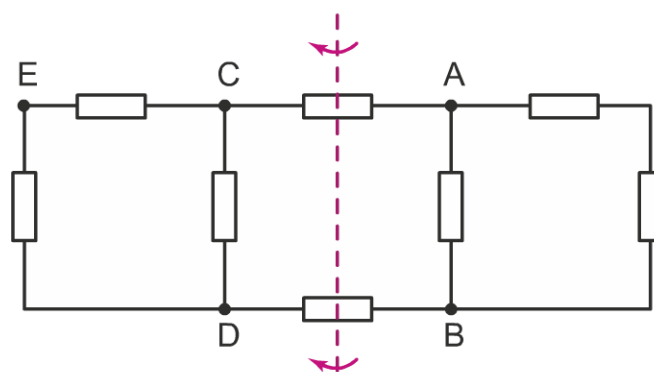
$$R_{AB} = 6,67 \, \Omega // 26,7 \, \Omega = \frac{6,67 \times 26,7}{6,67 + 26,7} = 5,33 \, \Omega$$

## Chapitre 1 – Électricité en régime continu

Ainsi, le générateur connecté aux bornes A et B voit une résistance de  $5,33 \Omega$ . Il délivre alors un courant

$$I = \frac{10 \text{ V}}{5,34 \Omega} = 1,88 \text{ A}$$

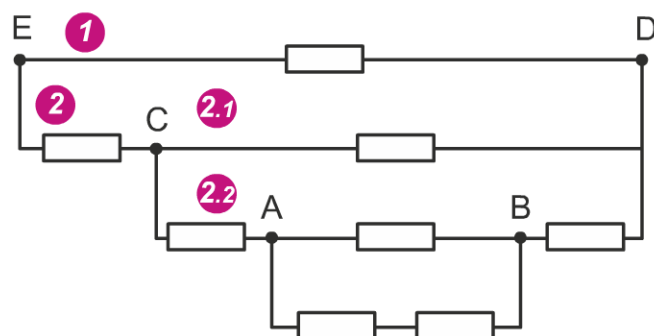
2. On peut gagner beaucoup de temps en utilisant pour cette seconde partie le principe de symétrie. En effet, si l'on faisait subir au circuit la rotation autour de son axe transversal permettant de transformer A et B en C et D, comme indiqué sur la figure 1.29, le circuit resterait inchangé. Ainsi, la résistance du



**Figure 1.29** – Mise en évidence du principe de symétrie.

circuit vu des bornes C et D est la même que celle du circuit vu des bornes A et B, que nous avons traitée dans la question précédente. On a donc  $R_{CD} = 5,33 \Omega$  et un courant délivré par le générateur  $I = 1,88 \text{ A}$ .

3. Supposons que le courant aille de E à D. Il y a au départ de E deux chemins, et trois qui se rejoignent en D. Comme le montre la figure 1.30, le second chemin se subdivise en effet au niveau du point C.



**Figure 1.30** – Correction de l'exercice 1.7.

Dans un premier temps, il faut évaluer la résistance équivalente des branches contournées entre les points A et B. On obtient alors

$$R_{AB} = 10 \, \Omega // 20 \, \Omega = 6,67 \, \Omega$$

Le chemin 2.2 a donc une résistance de 26,7  $\Omega$ . La branche CD a donc une résistance

$$R_{CD} = 10 \, \Omega // 26,7 \, \Omega = 7,27 \, \Omega$$

La résistance du chemin 2 vaut donc

$$R_2 = 10 \, \Omega + 7,27 \, \Omega = 17,3 \, \Omega$$

avec trois chiffres significatifs. Ainsi,

$$R_{ED} = 10 \, \Omega // 17,3 \, \Omega = 6,34 \, \Omega$$

Le générateur, connecté aux bornes E et D du circuit, voit cette fois une résistance de 6,34  $\Omega$  et fournit donc un courant  $I = \frac{10}{6,34} = 1,58 \, \text{A}$ .

## 1.7 PONTS DIVISEURS

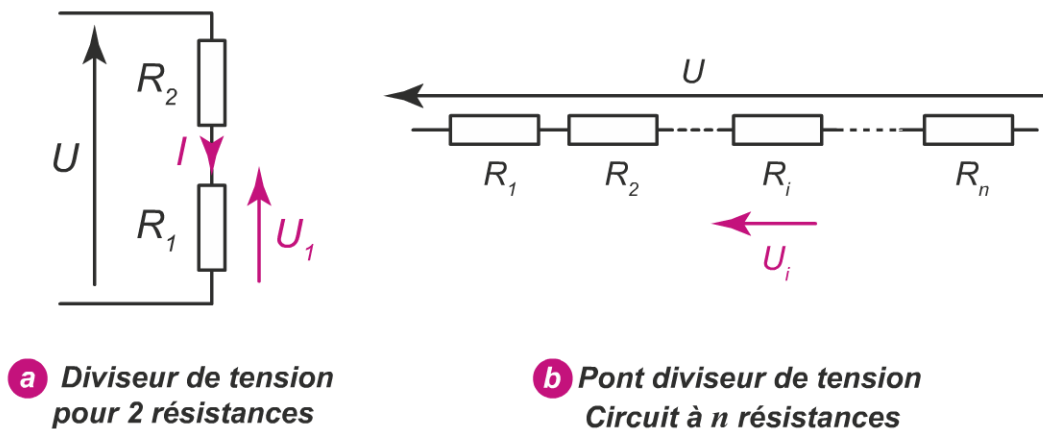
Nous allons à présent mettre en place deux formules dérivant des lois des nœuds, des mailles et d'Ohm qui permettent de quantifier les divisions de tension et de courant dans des circuits constitués de plusieurs résistances placées respectivement en série et en parallèle. Il s'agit des formules des ponts diviseurs de tension et de courant : même s'il est relativement facile de les démontrer, il sera utile pour la suite de les retenir.

### 1.7.1 Pont diviseur de tension

La formule du pont diviseur de tension s'applique dans le cas de circuits séries tels que ceux présentés dans la figure 1.31. Dans le volet (a), il s'agit d'exprimer la tension  $U_1$  aux bornes de la résistance  $R_1$  en fonction de la tension  $U$  et des valeurs des résistances  $R_1$  et  $R_2$ . Pour ce faire, on exprime le courant  $I$  en appliquant la loi d'Ohm de deux façons différentes :

— tout d'abord, aux bornes de  $R_1$ , en établissant que

$$I = \frac{U_1}{R_1} \tag{1.18}$$



**Figure 1.31** – Circuit série (a) à deux résistances et (b) à  $n$  résistances dans lesquels l'application de la formule du pont diviseur permet d'exprimer les proportions de tension en fonction des proportions de résistance. Les grandeurs connues sont reportées en noir. Remarquons que les relations (1.20) et (1.21) sont valables pour des flèches de tension orientées dans le même sens.

— et, ensuite, aux bornes du groupe de résistances, en écrivant que

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (1.19)$$

L'identification de  $I$  dans les deux dernières relations permet de donner la formule du **pont diviseur de tension** :

$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_2 + R_1} \quad (1.20)$$

Cette relation se généralise au cas de  $n$  résistances : dans la situation reportée sur le volet (b) de la figure 1.31, les tensions se distribuent proportionnellement sur chacune des résistances.

**Pont diviseur de tension** : lorsque une association de  $n$  résistances est soumise à une tension  $U$ , la tension aux bornes de la  $i^{\text{ème}}$  résistance  $R_i$  s'écrit

$$U_i = U \cdot \frac{R_i}{R_1 + R_2 + \dots + R_i + \dots + R_n} = U \cdot \frac{R_i}{\sum_{i=1}^n R_i} \quad (1.21)$$

Remarquons que nous pouvons relever dans la formule (1.20) plusieurs cas limites :

- dans le cas où la résistance  $R_1$  est nulle, la tension à ses bornes est celle d'un court-circuit, c'est-à-dire  $U_1 = 0$  ;
- dans le cas où la résistance  $R_1$  est infinie, le courant ne circule plus dans  $R_2$ , et  $U_1$  est mesurée aux bornes d'un circuit ouvert et l'on a  $U_1 = U$  ;
- dans le cas où la résistance  $R_2$  est infinie, le courant ne circule plus dans  $R_1$ , de sorte que la tension à ses bornes devient nulle  $U_1 = 0$ .

### Exercice 1.8

Dans le circuit de la figure 1.31(a), déterminer les tensions  $U_1$  et  $U_2$  pour  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$  et  $U = 6 \text{ V}$ .

### Solution 1.8

On applique la formule du pont diviseur de tension (1.20) successivement sur les deux résistances, de sorte que

$$U_1 = 6 \cdot \frac{100}{100 + 200} = 2 \text{ V}$$

et

$$U_2 = 6 \cdot \frac{200}{100 + 200} = 4 \text{ V}$$

Notons que l'on retrouve bien, conformément à la loi des mailles,  $U = U_1 + U_2$ .

### 1.7.2 Pont diviseur de courant

La formule du pont diviseur de courant s'applique dans le cas de circuits contenant deux résistances en parallèle tels que celui reporté sur la figure 1.32. Il s'agit ici d'exprimer la tension  $U$  de deux façons différentes, en remarquant que

$$U = I_1 \cdot R_1 \tag{1.22}$$

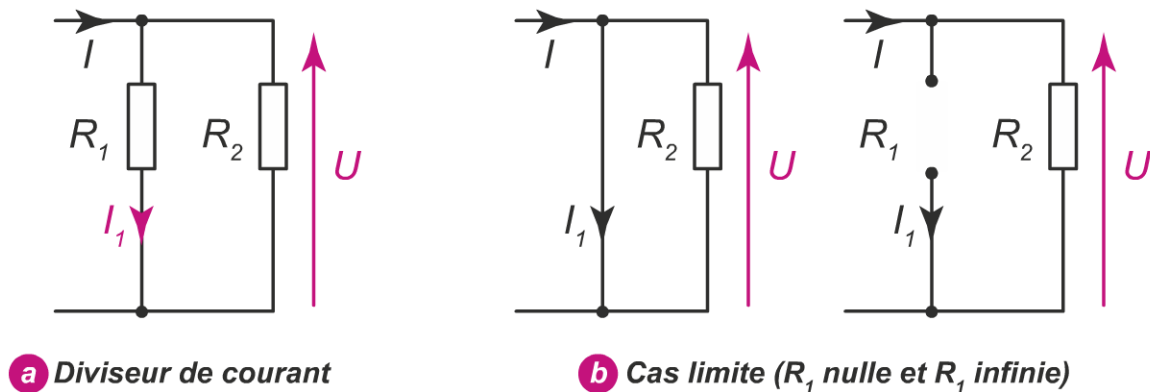
aux bornes de  $R_1$ , et que

$$U = I \cdot (R_1 // R_2) = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{1.23}$$

aux bornes de la dérivation. En identifiant  $U$  dans les deux dernières relations, on obtient la formule du pont diviseur de courant.

**Pont diviseur de courant :** lorsque deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  associées en parallèle sont traversées par un courant  $I$ , le courant qui traverse  $R_1$  vaut

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.24)$$



**Figure 1.32** – Circuit (a) à deux résistances parallèles pour l’application de la formule du pont diviseur (1.24) de courant et (b) mise en évidence de deux cas limite. Les grandeurs connues sont reportées en noir. Remarquons que la formule est énoncée pour des flèches de courant dirigées dans le même sens.

Cette dernière relation est source de confusions, étant donné qu’elle fait intervenir la résistance de la branche opposée au numérateur, contrairement à la formule (1.20). Pour ne pas faire d’erreur, on peut identifier les cas limites reportés sur le volet (b) de la figure 1.32 :

- lorsque  $R_1$  est nulle, elle court-circuite la résistance  $R_2$ , de sorte que tout le courant circule dans  $R_1$ . On retrouve ceci dans la relation (1.24) puisque

$$R_1 = 0 \implies I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_2} = I \quad (1.25)$$

- lorsque l’on ouvre le circuit en  $R_1$ , le courant  $I_1$  ne peut plus circuler et devient nul. On retrouve ceci dans la relation (1.24) puisque

$$R_1 \rightarrow \infty \implies I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow 0 \quad (1.26)$$

Pour finir, nous remarquons que, contrairement au cas de la division de tension, la formule du pont diviseur de courant ne se généralise pas simplement au cas de  $n$  résistances : il n’existe pas pour la division de courant de formule équivalente à la relation (1.21).

**Exercice 1.9**

Dans le circuit de la figure 1.32(a), déterminer les courants  $I_1$  et  $I_2$  traversant les deux résistances pour  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$  et  $U = 12 \text{ mA}$ .

**Solution 1.9**

On détermine les courants en appliquant successivement dans les deux résistances la formule (1.24). Ainsi,

$$I_1 = 12 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{200}{100 + 200} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 8 \text{ mA}$$

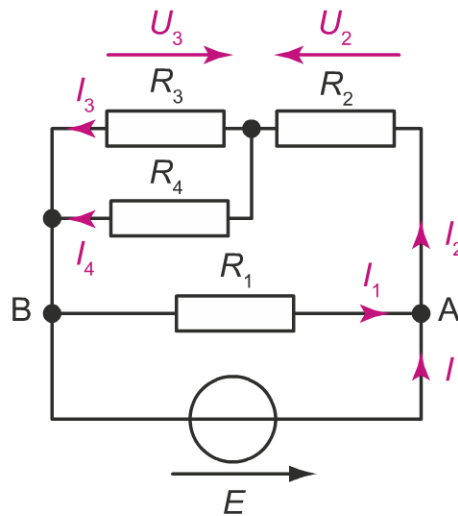
et

$$I_2 = 12 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{100}{100 + 200} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 4 \text{ mA}$$

Notons que l'on retrouve bien, conformément à la loi des nœuds,  $I = I_1 + I_2$ .

**Exercice 1.10**

On considère le circuit de la figure 1.33. On donne  $E = 3 \text{ V}$ ,  $R_1 = 15 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$  et  $R_4 = 5 \Omega$ .



**Figure 1.33** – Circuit de l'exercice 1.10 avec  $E = 3 \text{ V}$ ,  $R_1 = 15 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$  et  $R_4 = 5 \Omega$ .

1. Déterminer, en utilisant la loi d'Ohm, le courant  $I$ .
2. En utilisant les ponts diviseurs, déterminer :
  - (a) les courants  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$ ;
  - (b) les tensions  $U_2$  et  $U_3$ .

**Solution 1.10**

1. Afin de calculer  $I$ , nous devons déterminer la résistance équivalente comprise entre les points A et B. On observe sans avoir besoin de redessiner le circuit que

$$R_{AB} = R_1 // [R_2 + (R_3 // R_4)]$$

de sorte que

$$\begin{aligned} R_{AB} &= 15 \, \Omega // [6 \, \Omega + (20 \, \Omega // 5 \, \Omega)] \\ &= 15 \, \Omega // \left[ 6 \, \Omega + \underbrace{\frac{20 \times 5}{20 + 5}}_{4 \, \Omega} \right] = 15 \, \Omega // 10 \, \Omega = \frac{15 \times 10}{15 + 10} = 6 \, \Omega \end{aligned}$$

La résistance  $R_{AB}$  soumise à la tension  $E$  et traversée par le courant  $I$  est en convention récepteur, tout comme la source de tension est en convention générateur. Aussi,

$$I = \frac{E}{R_{AB}} = \frac{3 \, \text{V}}{6 \, \Omega} = 0,5 \, \text{A} = 500 \, \text{mA}$$

2. (a) Pour déterminer les courants  $I_1$  et  $I_2$ , nous remarquons que la branche traversée par  $I_2$  a une résistance équivalente  $R_{eq} = 10 \, \Omega$ . Le courant  $I_1$  étant repéré dans le sens opposé à  $I$ , la formule (1.24) doit être opposée, de sorte que

$$I_1 = -I \cdot \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} = -0,5 \cdot \frac{10}{15 + 10} = -0,2 \, \text{A} = -200 \, \text{mA}$$

Le courant  $I_2$  est repéré dans le même sens que  $I$ , la formule du pont diviseur de courant s'applique donc directement et l'on a

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{eq}} = 0,5 \cdot \frac{15}{15 + 10} = 0,3 \, \text{A} = 300 \, \text{mA}$$

On vérifie nos résultats à l'aide de la loi des nœuds, puisque  $I + I_1 = I_2$ . On procède de la même manière pour déterminer  $I_3$  et  $I_4$ , en partant de la valeur de  $I_2$ . On établit alors que

$$I_3 = I_2 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 0,3 \cdot \frac{5}{20 + 5} = 0,06 \, \text{A} = 60 \, \text{mA}$$

et

$$I_4 = I_2 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 0,3 \cdot \frac{20}{20 + 5} = 0,24 \, \text{A} = 240 \, \text{mA}$$

Là aussi, les résultats obtenus se vérifient à l'aide de la loi des nœuds puisque  $I_2 = I_3 + I_4$ .

- (b) Les tensions  $U_2$  et  $U_3$  sont établies à l'aide de la formule du pont diviseur de tension (1.20), étant donné que l'ensemble des résistances est soumis à la tension totale  $E$ . Pour ce faire, nous remarquons dans un premier temps que  $U_2$  est orientée dans le sens opposé à  $E$ , et devra donc porter un signe moins (-). Dans un second temps, nous observons que la tension  $U_3$  est prise aux bornes du groupe de résistances  $R_3 // R_4$ , de valeur équivalente  $4 \Omega$ . Ainsi,

$$U_2 = -E \cdot \frac{R_2}{R_2 + (R_3 // R_4)} = -3 \cdot \frac{6}{6 + 4} = -1,8 \text{ V}$$

et

$$U_3 = E \cdot \frac{(R_3 // R_4)}{R_2 + (R_3 // R_4)} = 3 \cdot \frac{4}{6 + 4} = 1,2 \text{ V}$$

Les résultats obtenus pour les tensions se vérifient avec la loi des mailles, puisque  $E + U_2 - U_3 = 0$ .

## 1.8 PUISSANCE ÉLECTRIQUE EN RÉGIME CONTINU

En physique, et de fait en électricité, la puissance est une grandeur mesurée en watts (W) qui décrit une **variation d'énergie par unité de temps**.

On s'intéresse dans un premier temps au cas d'une résistance alimentée par une pile. Étant donné que la résistance convertit l'énergie électrique qui lui est donnée en chaleur, l'énergie électrique disponible pour l'alimenter diminue à mesure que la température, c'est-à-dire l'énergie thermique, augmente dans son environnement : c'est le principe du chauffage électrique. Ainsi, une résistance consomme une puissance électrique.

Plaçons-nous ensuite dans le cas d'un récepteur actif et prenons pour cela l'exemple d'un moteur. Si l'on omet les pertes thermiques, on observe que l'énergie électrique apportée au moteur est convertie en énergie mécanique, de sorte que l'énergie électrique disponible pour faire fonctionner le moteur diminue à mesure que le temps passe. Un récepteur actif consomme donc lui aussi une puissance électrique.

Si l'on s'intéresse enfin à un générateur, qui par définition est actif, on remarque que le processus de conversion est l'opposé de celui que nous venons de décrire dans le cas du moteur. Dans le cas d'une pile, par exemple, l'énergie chimique qu'elle stocke est convertie en énergie électrique, de sorte que la pile produit une puissance électrique.

Selon que l'on regardera l'énergie  $\epsilon$  consommée ou produite par un dipôle, la puissance  $P$  s'écrivant comme

$$P = \frac{d\epsilon}{dt} \quad (1.27)$$

sera une puissance consommée ou produite. Remarquons que l'énergie  $\epsilon$  est mesurée en joules (J).

Les grandeurs électriques étant continues, la conversion énergétique se fait de façon constante, de sorte que la grandeur  $P$  est une grandeur elle aussi continue. Établissons maintenant les expressions permettant de quantifier la puissance électrique consommée et la puissance électrique produite en régime continu.

### 1.8.1 Puissance consommée

Afin d'évaluer la puissance électrique consommée par un dipôle quelconque, plaçons-nous à nouveau dans le cadre de l'analogie hydraulique (dans la limite des liquides incompressibles et des écoulements laminaires). Nous avons reporté sur la figure 1.34 différentes situations où dans un tuyau horizontal est injecté de l'eau qui fait tourner une petite turbine.

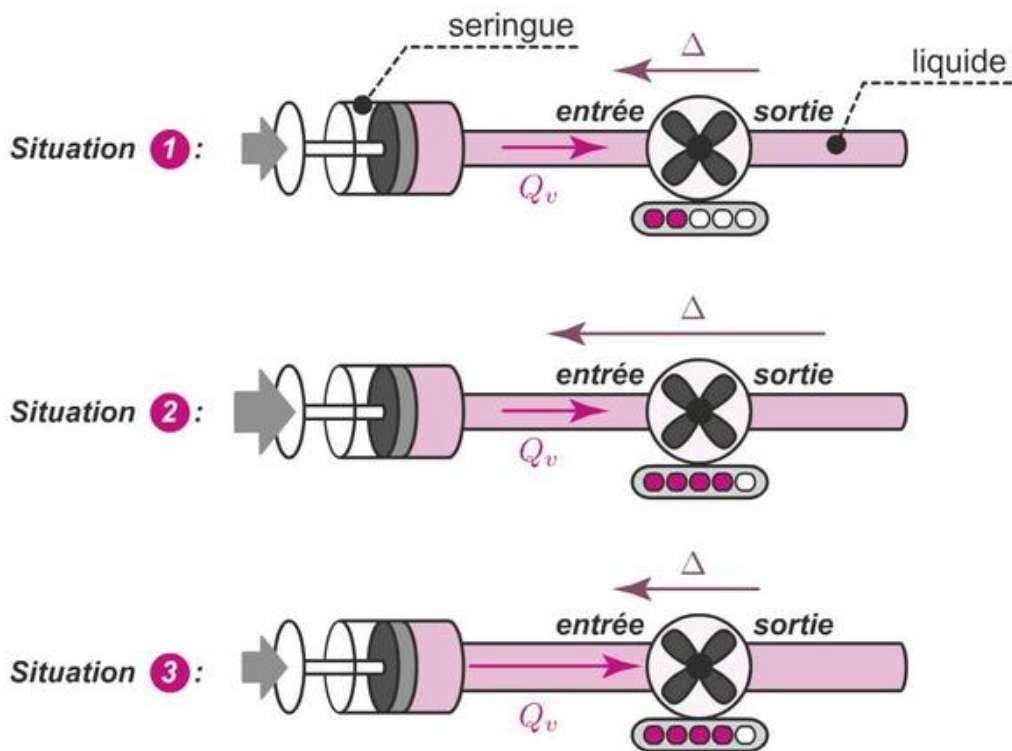
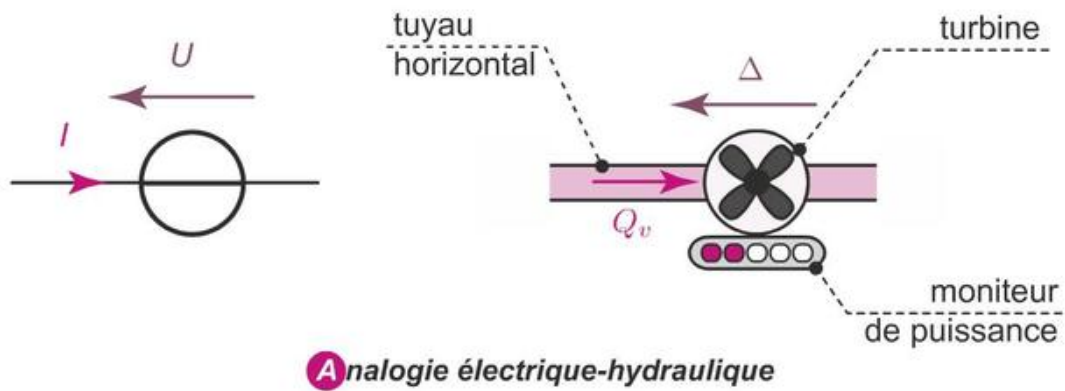
- La situation 1 nous sert d'étalon. La différence de pressions entre l'entrée et la sortie de la turbine est, comme nous l'avons dit précédemment, l'équivalent électrique de la différence de potentiels  $U$ . De même, le débit volumique de l'eau  $Q_v$  est l'équivalent hydraulique du courant électrique  $I$ .
- Dans la situation 2, la pression sur la seringue est doublée par rapport à la situation 1. Ainsi, la différence de pressions entre l'entrée et la sortie de la turbine  $\Delta p$  augmente. Le débit volumique  $Q_v$ , lui, est maintenu constant. Dans ces conditions, la puissance hydraulique consommée par la turbine double.
- Dans la situation 3, la pression exercée sur le piston de la seringue est la même que dans la situation 1, mais la section du tuyau est deux fois plus grande, de sorte que le débit est doublé. Ici, comme dans la situation 2, la puissance hydraulique convertie est multipliée par deux par rapport à la situation 1.

L'analogie électrique-hydraulique permet de faire un parallèle entre la puissance hydraulique convertie par la turbine

$$P_{\text{hydraulique}} = \Delta p \cdot Q_v \quad (1.28)$$

## 1.8 Puissance électrique en régime continu

et la puissance électrique consommée par le dipôle actif représenté à gauche de la figure.



**Figure 1.34** – Analogie électrique-hydraulique pour déterminer la puissance électrique consommée. Dans les situations 1 à 3, l'eau injectée dans un tuyau horizontal permet de faire tourner une turbine. La puissance mécanique produite par la turbine permet d'évaluer la puissance hydraulique consommée par celle-ci. La différence de potentiels  $U$  est assimilable à la différence de pressions entre l'entrée et la sortie de la turbine  $\Delta p$ . Le courant est assimilable au débit volumique d'eau  $Q_v$  dans le tuyau horizontal. Cette analogie est valable en régime continu, pour un tuyau horizontal et de section constante.

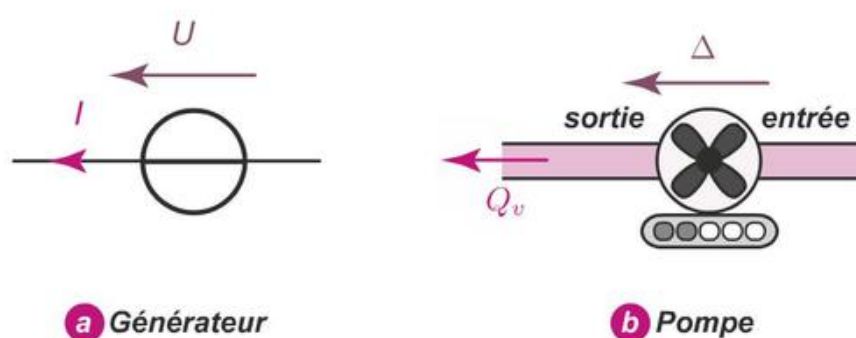
La puissance électrique **consommée** par un dipôle électrique se calcule en convention **récepteur**. Un dipôle soumis à une tension  $U$  et traversé par un courant  $I$  consomme alors la puissance

$$P = U \cdot I \quad (1.29)$$

Si la puissance  $P$  calculée se révèle négative, alors la puissance électrique est générée.

### 1.8.2 Puissance générée

Pour établir la puissance électrique générée par un dipôle, on considère l'analogie reportée sur la figure 1.35. Le volet (a) représente un dipôle générateur, les grandeurs étant repérées en convention générateur. Le volet (b) représente une pompe : par rapport à l'analogie de la figure 1.34, l'entrée et la sortie sont inversées. La pression en sortie de la turbine est supérieure à celle en entrée, de sorte que la direction de la flèche associée à  $\Delta p$  ne change pas. En revanche, le débit  $Q_v$  est inversé, de sorte que l'on convertit cette fois-ci de la puissance mécanique en puissance hydraulique. Aussi, à condition de repérer les flèches décrivant  $\Delta p$  et  $Q_v$  dans le même sens, l'expression de la puissance hydraulique produite reste celle donnée par la relation (1.28). Comme précédemment, nous établissons la puissance électrique générée par un dipôle au travers de cette analogie, en remarquant l'importance du choix de la convention.



**Figure 1.35** – Analogie électrique-hydraulique pour déterminer la puissance électrique produite. (a) Dipôle actif générateur et (b) pompe hydraulique. L'analogie est valable en régime continu, et pour un tuyau horizontal et de section constante.

## 1.8 Puissance électrique en régime continu

La puissance électrique **générée** par un dipôle électrique se calcule en convention **générateur**. Un dipôle soumis à une tension  $U$  et traversé par un courant  $I$  génère alors la puissance

$$P = U \cdot I \quad (1.30)$$

Si la puissance  $P$  calculée se révèle négative, alors la puissance électrique est consommée.

### 1.8.3 Cas de la résistance

Dans une résistance, la tension  $U$  et le courant  $I$  sont liés par la loi d'Ohm. En se plaçant en convention récepteur, on exprime la puissance électrique consommée comme

$$P = \frac{U^2}{R} = RI^2 \quad (1.31)$$

et on établit ce faisant la **loi de Joule**.

### 1.8.4 Théorème de Boucherot en régime continu

Pour finir notre description de la puissance en régime continu, nous abordons le théorème de Boucherot. Eu égard à l'expression de la puissance électrique et aux lois des nœuds et des mailles, celui-ci nous indique que la puissance consommée par un circuit électrique est la somme des puissances consommées par chacun des composants du circuit. Il en va de même des puissances générées.

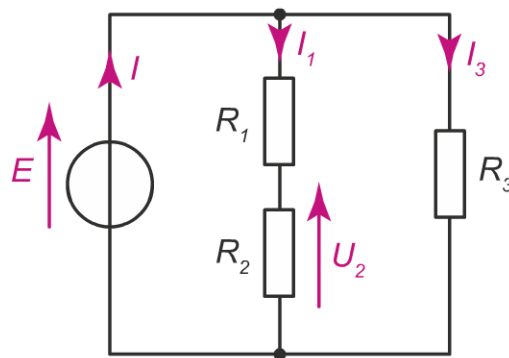
Soit un réseau électrique de  $n$  composants, le  $i^{\text{ème}}$  composant consommant la puissance  $P_i$ . Le réseau consomme la puissance

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_i + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i \quad (1.32)$$

La relation reste la même pour les puissances générées.

#### Exercice 1.11

On considère le circuit de la figure 1.36 avec  $I_1 = 10 \text{ mA}$ ,  $U_2 = 2 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$  et  $R_3 = 600 \Omega$ .



**Figure 1.36** – Schéma de l'exercice 1.11. On donne  $I_1 = 10 \text{ mA}$ ,  $U_2 = 2 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$  et  $R_3 = 600 \Omega$ .

1. Calculer la puissance consommée par chacune des résistances.
2. Calculer la puissance  $P_R$  consommée par l'ensemble des résistances :
  - (a) à l'aide du théorème de Boucherot ;
  - (b) en utilisant la résistance équivalente du groupement de résistances.
3. Comparer  $P_R$  à la puissance  $P_G$  produite par le générateur.

**Solution 1.11**

1. Nous calculons dans un premier temps la puissance  $P_1$  aux bornes de la résistance  $R_1$ . Celle-ci étant traversée par le courant  $I$ , on a

$$P_1 = R_1 \cdot I_1^2 = 100 \cdot (10^{-2})^2 = 0,01 \text{ W} = 10 \text{ mW}$$

La résistance  $R_2$  est soumise à la tension  $U_2$  et est traversée par le courant  $I_1$ . Connaissant les valeurs de ces grandeurs, on écrit

$$P_2 = U_2 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^{-3} = 0,02 \text{ W} = 20 \text{ mW}$$

Le calcul de  $P_3$  se fait avec la tension  $U_3 = E = U_2 + R_1 I_1 = 3 \text{ V}$  aux bornes de  $R_3$  et la valeur de la résistance, de sorte que

$$P_3 = \frac{(U_2 + R_1 \cdot I_1)^2}{R_3} = \frac{(3)^2}{600} = 0,015 \text{ W} = 15 \text{ mW}$$

2. (a) Le théorème de Boucherot permet d'établir que

$$P_R = P_1 + P_2 + P_3 = 0,045 \text{ W} = 45 \text{ mW}$$

## 1.8 Puissance électrique en régime continu

- (b) Afin d'établir la valeur du groupement de résistances, nous calculons la résistance  $R_2$  à l'aide de la loi d'Ohm :

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{2}{10^{-2}} = 200 \Omega$$

La résistance équivalente  $R$  s'exprime

$$R = (R_1 + R_2) // R_3 = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{300 \cdot 600}{300 + 600} = 200 \Omega$$

Le groupement étant soumis à la tension  $E = 3 \text{ V}$ , on a

$$P_R = \frac{E^2}{R} = \frac{3^2}{200} = 0,045 \text{ W} = 45 \text{ mW}$$

3. La puissance produite par le générateur se calcule en multipliant  $E$  et  $I$ . Or

$$I = I_1 + I_3 = I_1 + \frac{U_3}{R_3} = 0,01 + \frac{3}{600} = 0,015 \text{ A}$$

Aussi,

$$P_G = E \cdot I = 3 \times 0,015 = 0,045 \text{ W} = 45 \text{ mW}$$

On trouve, de manière cohérente, que la puissance produite par le générateur est égale à celle consommée par les résistances. Toute l'énergie apportée par le générateur est convertie en chaleur.



# 2

## Réseaux linéaires en régime continu

Nous avons introduit dans le chapitre précédent l'ensemble des notions permettant de décrire les grandeurs électriques en régime continu et de résoudre des problèmes simples. Le présent chapitre constitue un approfondissement dans la mesure où il aborde des problèmes d'électricité plus complexes que ceux déjà évoqués. Pour cela, différentes méthodes sont décrites qui, même si elles sont toutes dérivées des lois de Kirchhoff, présentent des différences en termes de difficulté de mise en œuvre et ne sont pas toutes adaptées aux mêmes types de problèmes.

Ce chapitre est aussi consacré à la définition de la notion de réseaux et de dipôle actifs linéaires. En particulier, les modèles équivalents de Thévenin et de Norton sont introduits. Associés aux théorèmes portant les mêmes noms, ils permettent de décrire et de caractériser à l'aide d'instruments de mesure n'importe quel dipôle linéaire, ce qui leur confère un intérêt particulier.

### 2.1 DÉFINITIONS GÉNÉRALES

#### 2.1.1 Réseau électrique

Un réseau électrique est un ensemble de connexions conductrices reliant des composants entre eux :

- les composants peuvent être des générateurs ou des récepteurs, et ont vocation à générer ou convertir la puissance électrique ;
- les connexions ont quant à elle vocation à transporter la puissance électrique en imposant des équipotentielles. Elles sont représentées sur un schéma électrique par de simples traits.

Les réseaux électriques sont organisés en nœuds, en branches et en mailles.

### 2.1.2 Nœuds, branches, mailles

- *Un nœud*

Un nœud est un point reliant entre eux au moins trois composants. C'est par conséquent **un point du réseau où le courant se partage**. À noter que, si deux nœuds sont directement liés par une connexion électrique équipotentielle, ils constituent un seul et même nœud.

Un nœud n'est jamais connecté à un autre nœud que lui-même.

- *Une branche*

Une branche est une portion de circuit comprise entre deux nœuds, ne comprenant elle-même aucun nœud. De plus, du fait de la définition des nœuds, une branche ne peut pas être constituée d'une simple connexion. Dans la pratique, pour déterminer le nombre de branches reliant deux nœuds, il suffit de compter le nombre de chemins directs (c'est-à-dire ne passant pas par un autre nœud) reliant les deux nœuds considérés.

- *Une maille*

Une maille est une boucle de circuit fermée. Il n'y a pas de règle concernant sa taille : elle peut être constituée de deux branches tout comme elle peut encercler un réseau.

#### Exercice 2.1

Déterminer le nombre de nœuds et de branches du circuit de la figure 2.1.

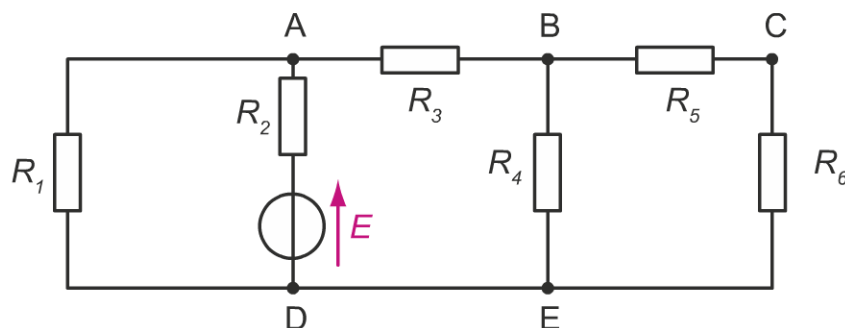


Figure 2.1 – Circuit de l'exercice 2.1.

### Solution 2.1

Pour déterminer le nombre de nœuds, nous considérons les cinq points A, B, C, D et E. On remarque pour commencer que les points A et B constituent des nœuds, car ils relient chacun trois dipôles différents :

- le nœud A relie les dipôles  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  ;
- le nœud B relie les dipôles  $R_3$ ,  $R_4$  et  $R_5$ .

Le point C ne constitue pas un nœud puisqu'il ne relie que les deux dipôles  $R_5$  et  $R_6$  et que le courant ne peut pas se partager. Les points D et E sont liés par un contact électrique : ils sont donc au même potentiel et, si l'un des deux constitue un nœud, alors tous deux constituent le même nœud. On voit que le nœud constitué par les points D-E relie les dipôles  $R_1$ ,  $R_4$  et  $R_6$ .

Le circuit contient donc trois nœuds : A, B et D-E. Nous pouvons à présent comptabiliser les branches :

- il y a deux chemins possibles pour aller des nœuds A à D-E, l'un passant par  $R_1$  et l'autre par  $R_2$  ;
- il n'y a qu'une seule façon pour aller directement de A à B ;
- il y a deux chemins possibles pour aller des nœuds B à D-E, l'un passant par  $R_4$  et l'autre par  $R_5$ .

On dénombre finalement cinq branches.

### 2.1.3 Problème d'électricité

Le problème d'électricité consiste à déterminer le courant traversant chaque branche et le potentiel de chacun des nœuds d'un réseau électrique dont on connaît :

- la géométrie ;
- les valeurs des d.d.p imposées par les sources de tension ;
- les valeurs des intensités imposées par les sources de courant ;
- les valeurs des résistances.

Dans la pratique, les différences de potentiels entre les nœuds et les intensités des différents courants étant liés par la loi d'Ohm, le problème d'électricité peut se ramener à la détermination des courants.

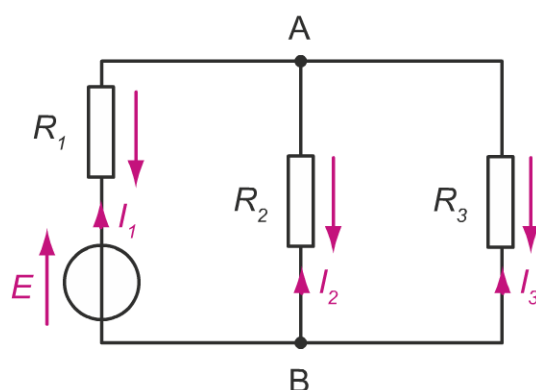
Afin de résoudre des problèmes d'électricité dans des réseaux plus ou moins complexes, nous allons nous doter d'outils dérivant des lois élémentaires présentées au chapitre précédent. Nous aborderons :

- la méthode de Kirchhoff, utilisée lors de l'application des lois du même nom ;
- le principe de superposition ;
- le théorème de Millmann ;
- la méthode du dipôle linéaire.

## 2.2 MÉTHODE DE KIRCHHOFF

### 2.2.1 Problématique

Les lois de Kirchhoff ont déjà été présentées au chapitre précédent : il s'agit des lois des nœuds et des mailles que nous avons utilisées pour calculer les valeurs des courants et des tensions dans des réseaux de résistances soumis à des sources de tension idéales. Toutefois, lorsque la complexité du réseau se fait plus importante (présence d'une résistance en série avec la source, augmentation du nombre de nœuds) la quantité d'inconnues à déterminer augmente, et avec elle le nombre d'équations disponibles.



**Figure 2.2** – L'application des lois de Kirchhoff dans un circuit simple peut aboutir à des équations linéairement dépendantes. Un mauvais choix du système d'équations ne permet pas de trouver de solution.

À l'aide du circuit de la figure 2.2, nous allons montrer qu'il existe des systèmes d'équations qui, bien qu'établis avec les lois de Kirchhoff, n'admettent aucune solution. Afin de déterminer les courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , nous commençons par appliquer la loi des nœuds. On établit alors les deux équations suivantes :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (2.1)$$

en se plaçant au nœud A, et

$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (2.2)$$

en se plaçant au nœud B. La loi des mailles permet quant à elle d'écrire :

$$E - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0 \quad (2.3)$$

pour la maille de gauche,

$$E - R_1 I_1 + R_3 I_3 = 0 \quad (2.4)$$

et

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \quad (2.5)$$

pour la maille de droite. S'il est évident que les équations (2.1) et (2.2) sont les mêmes, l'utilisation des équations (2.3) à (2.5) ne permet pas non plus de trouver la solution. En effet, en procédant à la soustraction (2.3)-(2.4), on obtient l'équation (2.5). Nous venons de mettre en évidence que, dans un réseau électrique, de nombreuses équations déterminées par les lois de Kirchhoff sont **linéairement dépendantes**.

Si l'on applique les lois de Kirchhoff sans sélectionner les équations à résoudre, on peut ne pas trouver de solution au problème d'électricité.

### 2.2.2 Choix des équations indépendantes

Pour pouvoir déterminer les valeurs des différents courants, il faut en premier lieu poser le problème mathématique correctement en choisissant judicieusement les équations à résoudre. Dans cet objectif, nous présentons une méthode en trois étapes permettant de sélectionner, parmi les relations issues des lois de Kirchhoff, un système d'équations linéairement indépendantes.

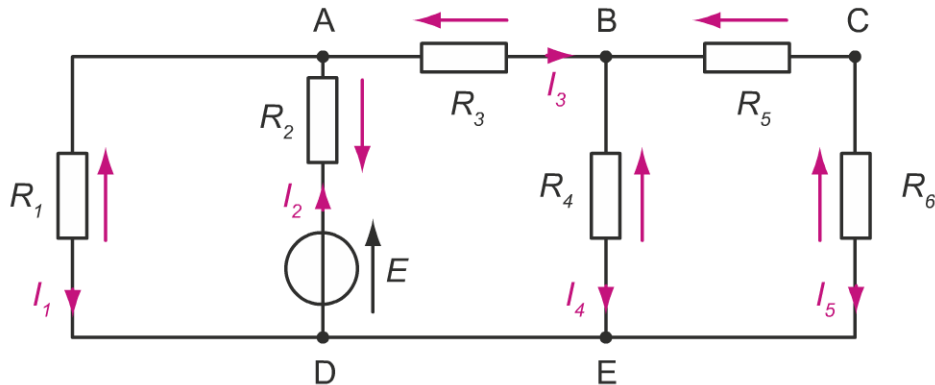
1. La première étape consiste à déterminer le nombre  $n$  de nœuds du circuit. Cette étape est très importante, car elle va indirectement conditionner le nombre d'inconnues à déterminer. Pour établir le système, on conservera  $n - 1$  équations issues de la loi des nœuds.
2. Dans un second temps, il faut comptabiliser le nombre  $b$  de branches. Le problème consistant à extraire les intensités circulant dans chaque branche, le nombre d'inconnues à déterminer est égal à  $b$ .
3. S'il y a  $b$  inconnues, il nous faut  $b$  équations. La dernière étape consiste donc à établir  $m$  équations en appliquant la loi des mailles, avec  $m = b - (n - 1) = b - n + 1$ .

#### Exercice 2.2

Établir les équations permettant de déterminer, à l'aide des lois de Kirchhoff, l'ensemble des courants circulant dans le réseau de la figure 2.1.

**Solution 2.2**

Nous avons déjà établi qu'il y avait dans ce circuit trois nœuds et cinq branches. Aussi, le nombre d'inconnues est de cinq (un courant inconnu par branche). Il faut donc cinq équations pour les déterminer. Afin de résoudre le problème, nous orientons les flèches de tension et de courant comme présenté sur la figure 2.3.



**Figure 2.3** – Correction de l'exercice 2.2 avec  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_3 = R_4 = 20 \Omega$  et  $R_2 = R_5 = R_6 = 10 \Omega$ .

- Étant donné qu'il y a trois nœuds, on établit deux équations à partir de la loi des nœuds ;
  - il reste donc trois équations à déterminer à l'aide de la loi des mailles.
- En appliquant la loi des nœuds en A puis en B, on obtient les équations

$$I_2 = I_1 + I_3 \tag{2.6}$$

et

$$I_3 = I_4 + I_5 \tag{2.7}$$

L'application de la loi des mailles permet d'obtenir différentes équations, et nous retenons les trois suivantes :

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - E = 0 \tag{2.8}$$

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0 \tag{2.9}$$

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_5 (R_5 + R_6) = 0 \tag{2.10}$$

**Exercice 2.3**

Résoudre les équations de l'exercice précédent en prenant  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_3 = R_4 = 20 \Omega$  et  $R_2 = R_5 = R_6 = 10 \Omega$ .

**Solution 2.3**

Différentes techniques mathématiques peuvent être utilisées pour résoudre les équations (2.6) à (2.10). Nous proposons de recourir à une méthode matricielle qui peut être mise en œuvre en utilisant une calculatrice adaptée (type calculatrices graphiques) ou bien encore des logiciels de calcul tels que MatLab ou son équivalent libre Octave. Ce faisant, nous nous affranchissons des difficultés mathématiques et simplifions considérablement le travail de résolution du système d'équations.

La technique consiste à isoler tous les courants d'un côté et les constantes de l'autre dans les équations (2.6) à (2.10). On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 & = 0 \\ -I_3 + I_4 + I_5 & = 0 \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 & = E \\ I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_4 R_4 & = 0 \\ I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_5(R_5 + R_6) & = 0 \end{cases}$$

qui s'écrit, avec des matrices, sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & -R_3 & -R_4 & 0 \\ R_1 & 0 & -R_3 & 0 & -(R_5 + R_6) \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_B$$

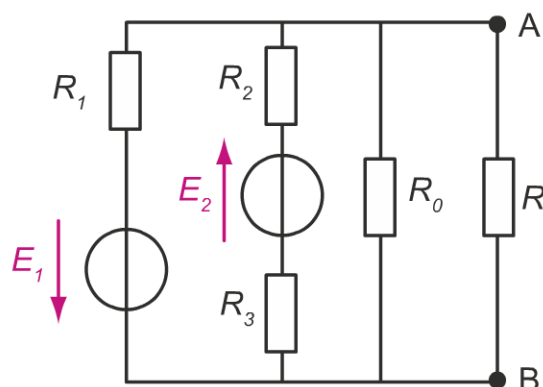
La matrice inconnue X se détermine par un produit matriciel après inversion de la matrice M, au travers du calcul

$$X = M^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0,273 \\ 0,455 \\ 0,182 \\ 0,0910 \\ 0,0910 \end{pmatrix}$$

de sorte que  $I_1 = 0,273 \text{ A}$ ,  $I_2 = 0,455 \text{ A}$ ,  $I_3 = 0,182 \text{ A}$  et  $I_4 = I_5 = 0,0910 \text{ A}$ .

**Exercice 2.4**

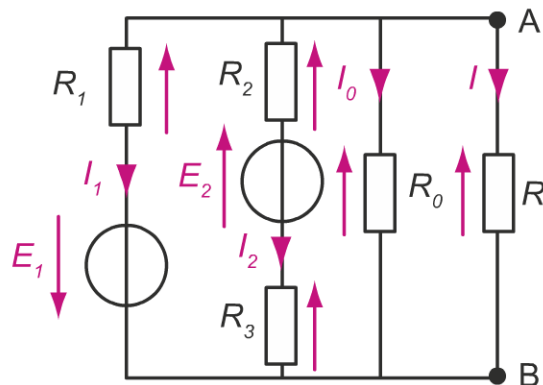
On considère le réseau de la figure 2.4, en régime continu, avec  $E_1 = 12 \text{ V}$ ;  $E_2 = 6 \text{ V}$ ;  $R_0 = 20 \text{ } \Omega$ ;  $R_1 = 10 \text{ } \Omega$ ;  $R_2 = 4 \text{ } \Omega$ ;  $R_3 = 16 \text{ } \Omega$  et  $R = 20 \text{ } \Omega$ . Calculer l'intensité des courants qui circulent dans chaque branche du circuit en utilisant les lois de Kirchhoff.



**Figure 2.4** – Circuit de l'exercice 2.4. On donne  $E_1 = 12 \text{ V}$  ;  $E_2 = 6 \text{ V}$  ;  $R_0 = 20 \Omega$  ;  $R_1 = 10 \Omega$  ;  $R_2 = 4 \Omega$  ;  $R_3 = 16 \Omega$  et  $R = 20 \Omega$ .

### Solution 2.4

Le circuit est constitué de deux nœuds et de quatre branches. Il y a donc quatre courants inconnus, que nous fléchons comme représenté sur la figure 2.5. Nous devons donc résoudre quatre équations.



**Figure 2.5** – Correction de l'exercice 2.4.

Le nombre de nœuds étant égal à deux, seule la première équation est déduite de la loi des nœuds, que nous appliquons en A :

$$I_1 + I_2 + I_0 + I = 0 \quad (2.11)$$

Les trois autres équations sont déduites de la loi des mailles que nous appliquons en passant trois fois dans la même branche, afin de simplifier les calculs mathématiques. On a alors :

$$I_0 R_0 - IR = 0, \quad (2.12)$$

$$I_2(R_2 + R_3) + E_2 - IR = 0 \quad (2.13)$$

et

$$I_1 R_1 - IR - E_1 = 0 \quad (2.14)$$

Pour résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues, nous pouvons recourir aux matrices comme dans l'exercice précédent, ou bien travailler par substitution. C'est cette seconde méthode que nous utilisons en exprimant les trois courants  $I$ ,  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de  $I_0$  dans les équations (2.12), (2.13) et (2.14) puis en injectant les expressions en  $I_0$  dans l'équation (2.11).

— L'équation (2.12) permet d'exprimer

$$I = I_0 \frac{R_0}{R} \quad (2.15)$$

— La relation (2.13) permet d'écrire

$$I_2 = \frac{-E_2 + IR}{R_2 + R_3} = \frac{I_0 R_0 - E_2}{R_2 + R_3} \quad (2.16)$$

— L'expression (2.14) se reformule

$$I_1 = \frac{E_1 + IR}{R_1} = \frac{I_0 R_0 + E_1}{R_1} \quad (2.17)$$

— Lorsque l'on injecte toutes ces expressions dans (2.11) nous obtenons

$$\begin{aligned} I_0 \frac{R_0}{R} + \frac{I_0 R_0 - E_2}{R_2 + R_3} + I_0 + \frac{I_0 R_0 + E_1}{R_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow I_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R_1} + \frac{R_0}{R_2 + R_3} + 1 + \frac{R_0}{R} \right) + \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2 + R_3} &= 0 \\ \Leftrightarrow I_0 \cdot \left( \frac{20}{10} + \frac{20}{20} + 1 + \frac{20}{20} \right) + \frac{12}{10} - \frac{6}{20} &= 0 \\ I_0 \cdot (5) + 1,2 - 0,3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I_0 = \frac{-0,9}{5} = -0,180 \text{ A} = -180 \text{ mA} \end{aligned}$$

Le courant  $I_0$  étant déterminé, nous pouvons déduire les autres courants des relations (2.15) à (2.17). Ainsi,

$$I_1 = \frac{-0,180 \cdot 20 + 12}{10} = 0,840 \text{ A} = 840 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{-0,180 \cdot 20 - 6}{4 + 16} = -0,480 \text{ A} = -480 \text{ mA}$$

et

$$I = I_0 = -0,180 \text{ A} = -180 \text{ mA}$$

Suite aux exercices que nous avons résolus avec la méthode de Kirchhoff, force est de constater qu'elle implique des calculs mathématiques pouvant se révéler fastidieux dans les circuits les plus complexes. En effet, puisqu'elle permet de déterminer en même temps tous les courants d'un circuit, le nombre d'équations à résoudre augmente avec le nombre de branches. Nous allons voir par la suite qu'il existe plusieurs méthodes permettant d'avoir accès à ces grandeurs mais mettant en œuvre des calculs plus simples.

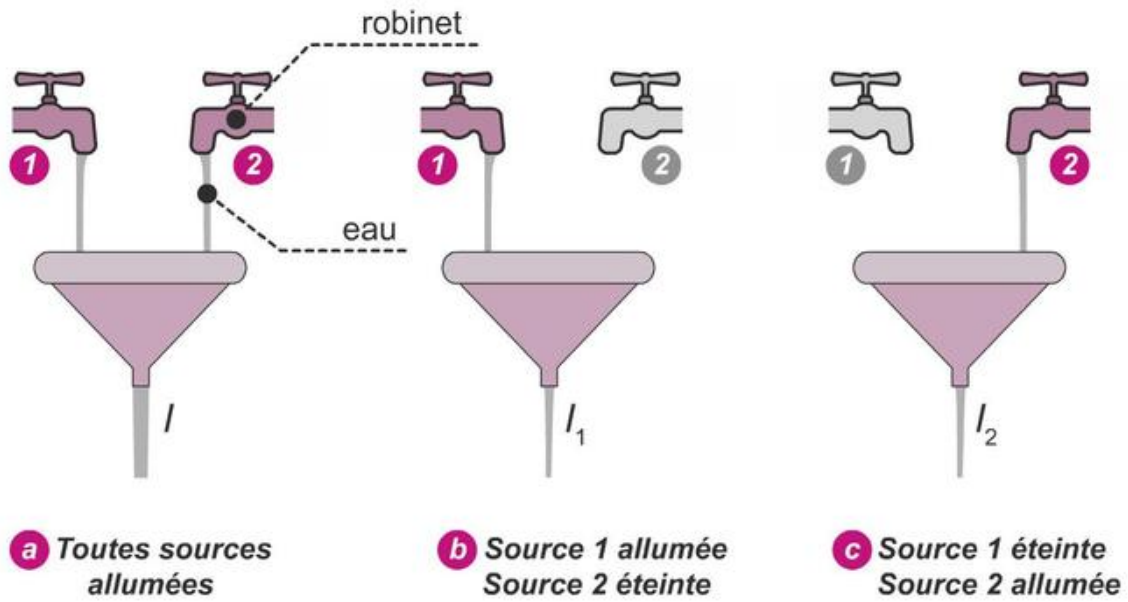
### 2.3 PRINCIPE DE SUPERPOSITION

#### 2.3.1 Principe physique

Le principe de superposition est un principe général en physique qui s'applique lorsque différents événements, indépendants les uns des autres, viennent perturber un système dont la réponse est proportionnelle à l'excitation. Il s'agit alors de traiter les perturbations indépendamment les unes des autres puis d'ajouter leurs effets. En électricité, il est utilisé dans le cas de circuits contenant plusieurs sources : afin de simplifier les calculs, on ne considère alors qu'une seule source à la fois.

Afin d'illustrer le principe de superposition, nous faisons l'analogie hydraulique représentée sur la figure 2.6.

- Dans le volet (a), tous les robinets sont ouverts, ce qui est assimilable en électricité à des sources allumées. On suppose que l'eau ne s'accumule pas dans l'entonnoir : c'est la condition de linéarité (ou de réponse proportionnelle à l'excitation). On suppose de plus que l'ouverture ou la fermeture de l'un des robinets ne modifie en rien le débit d'eau de l'autre : c'est la condition d'indépendance des sources. Dans ce cas, la totalité de l'eau versée par les deux robinets se retrouve à la sortie de l'entonnoir et forme un filet d'eau que l'on peut assimiler à un courant total  $I$ .
- Lorsque l'on éteint la seconde source en laissant allumer la première, c'est-à-dire lorsque l'on laisse couler uniquement le robinet (1) comme indiqué dans le volet (b), la quantité d'eau disponible à la sortie de l'entonnoir n'est plus assimilable au courant total  $I$  mais seulement au courant délivré par la source fonctionnelle  $I_1$ .
- Enfin, si c'est la première source qui est éteinte et que seul le robinet (2) débite, la quantité d'eau à la sortie de l'entonnoir est assimilable au courant  $I_2$ .



**Figure 2.6** – Mise en évidence du principe de superposition électrique au travers d'une analogie hydraulique. Les sources 1 et 2 sont représentées par des robinets et sont indépendantes : le débit de l'un des deux robinets n'influence pas celui de l'autre. L'entonnoir ne fait pas office de réservoir : l'eau ne s'y accumule pas. Dans ces conditions,  $I = I_1 + I_2$ .

Ainsi, de façon intuitive, on établit qu'à condition de respecter les conditions de linéarité et d'indépendance des sources, le courant  $I$  est la somme du courant  $I_1$  et du courant  $I_2$  : c'est le principe de superposition.

En régime continu, la condition de linéarité sera vérifiée à condition de n'utiliser que des sources et des résistances. La condition d'indépendance sera précisée.

### 2.3.2 Énoncé du principe de superposition en électricité

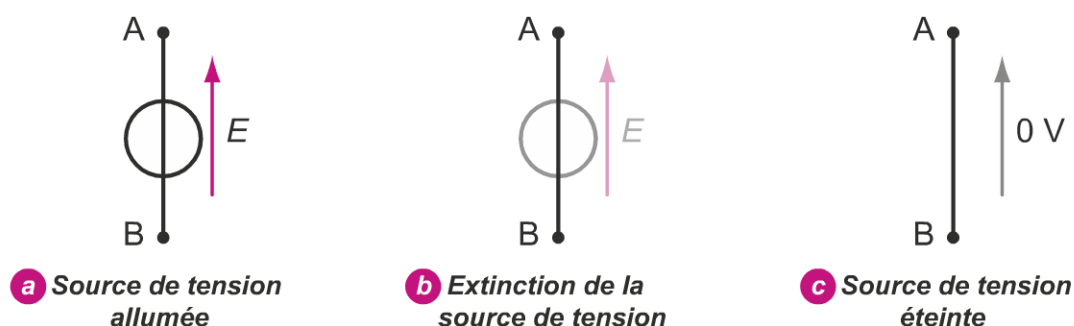
Le principe de superposition permet de résoudre un problème électrique dans un réseau contenant plusieurs sources de tension ou de courant indépendantes les unes des autres. Cette condition d'indépendance des sources est par exemple réalisée dans le cas d'un montage électrique contenant deux piles. Dans ce cas, le problème est résolu en plusieurs étapes, en déterminant les contributions de chacune des sources lorsque toutes les autres sont désactivées, et en sommant l'ensemble des contributions respectives.

**Principe de superposition** : si une branche est alimentée par plusieurs sources indépendantes, le courant traversant cette branche est la somme algébrique des courants dus à la contribution de chacune des sources lorsque les autres sont éteintes.

### 2.3.3 Extinction d'une source

Le principe de superposition ne faisant intervenir qu'une source à la fois, il nous faut définir la signification électrique de l'extinction d'une source. Pour ce faire, il faut préciser les définitions électriques des sources de tension et de courant.

**Une source de tension** impose entre ses bornes une force électromotrice  $E$  quel que soit le courant qui la traverse. Ainsi, éteindre une source de tension revient à imposer une force électromotrice nulle : la source peut donc être remplacée par une connexion électrique équipotentielle. Par abus de langage, on pourra dire qu'éteindre une source de tension revient à la remplacer par un court-circuit parfait.



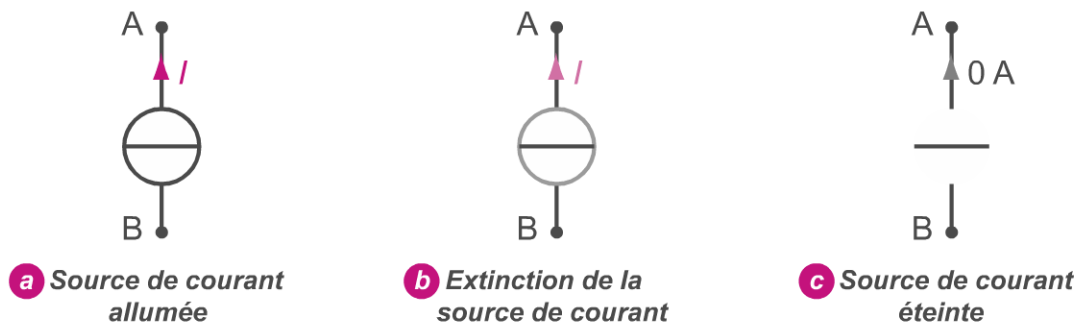
**Figure 2.7** – L'extinction d'une source de tension revient à imposer une tension nulle entre ses deux bornes. On retiendra qu'il suffit d'enlever le cercle de la source de tension pour l'éteindre : celle-ci se transforme alors en connexion équipotentielle (court-circuit parfait).

Nous illustrons l'extinction d'une source de tension sur la figure 2.7. Un moyen mnémotechnique consiste à dire que, pour éteindre une source de tension, il suffit d'enlever le cercle de son symbole (volet (b)) : il ne reste alors que la connexion (volet (c)).

**Une source de courant** impose le courant  $I$  qui la traverse quelle que soit la tension à ses bornes. Par conséquent, éteindre une source de courant revient à imposer dans la branche où elle se trouve un courant nul, c'est-à-

dire à ouvrir la branche. L'extinction de la source de courant correspond par conséquent à son remplacement par un circuit ouvert.

Nous illustrons l'extinction d'une source de courant sur la figure 2.8. Comme pour la source de tension, on pourra retenir qu'il suffit d'enlever le cercle de son symbole (volet (b)) pour éteindre une source de courant : le circuit est alors ouvert et le courant ne peut plus circuler (volet (c)). La branche entière peut alors être supprimée.



**Figure 2.8** – L'extinction d'une source de courant revient à imposer un courant nul entre ses deux bornes. On retiendra qu'il suffit d'enlever le cercle de la source de courant pour l'éteindre : celle-ci se transforme alors en circuit ouvert.

Pour éteindre une source de tension ou de courant, il suffit de supprimer le cercle constituant son symbole électrique.

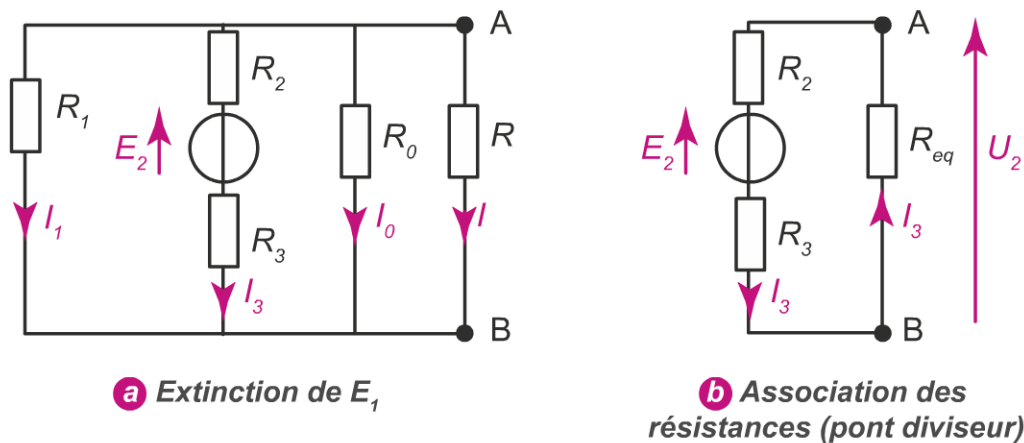
### Exercice 2.5

Refaire l'exercice associé à la figure 2.4 page 58, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des courants du circuit représenté, en appliquant le principe de superposition. Comparer les deux méthodes utilisées.

### Solution 2.5

En appliquant le principe de superposition, nous allons calculer la tension  $U_{AB}$  aux bornes du circuit avant d'appliquer la loi des mailles dans chaque branche. La tension  $U_{AB}$  est la somme des tensions  $U_1$  et  $U_2$  calculées respectivement lorsque seules les sources  $E_1$  et  $E_2$  sont allumées.

**Étape 1 :** Le calcul le plus simple est celui de  $U_2$ . On éteint donc la source  $E_1$  et l'on allume  $E_2$ . Le circuit devient celui de la figure 2.9(a).



**Figure 2.9** – Étape 1 de l’application du principe de superposition dans le circuit de l’exercice 2.5. (a) Extinction de la source  $E_1$ , qui est remplacée par une connexion équipotentielle. (b) Association des résistances  $R_1$ ,  $R_0$  et  $R$ , qui sont initialement couplées en parallèle.

L’association des résistances  $R_1$ ,  $R_0$  et  $R$  permet d’établir

$$R_{eq} = R_1 // R_0 // R = 10 \Omega // 20 \Omega // 20 \Omega = 10 \Omega // 10 \Omega = 5 \Omega$$

L’application du pont diviseur de tension donne

$$U_2 = E_2 \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_2 + R_3} = 6 \frac{5}{5 + 4 + 16} = 1,2 \text{ V}$$

**Étape 2 :** Vient ensuite le calcul de  $U_1$ , obtenu lorsque seule la source  $E_1$  est allumée. Nous considérons alors le circuit de la figure 2.10. L’association des résistances  $R_2 + R_3$  en parallèle avec  $R_0$  puis  $R$  permet d’établir

$$\begin{aligned} R_{eq} &= (R_2 + R_3) // R_0 // R \\ &= 20 \Omega // 20 \Omega // 20 \Omega = 20 \Omega // 10 \Omega = \frac{20 \cdot 10}{20 + 10} = 6,67 \Omega \end{aligned}$$

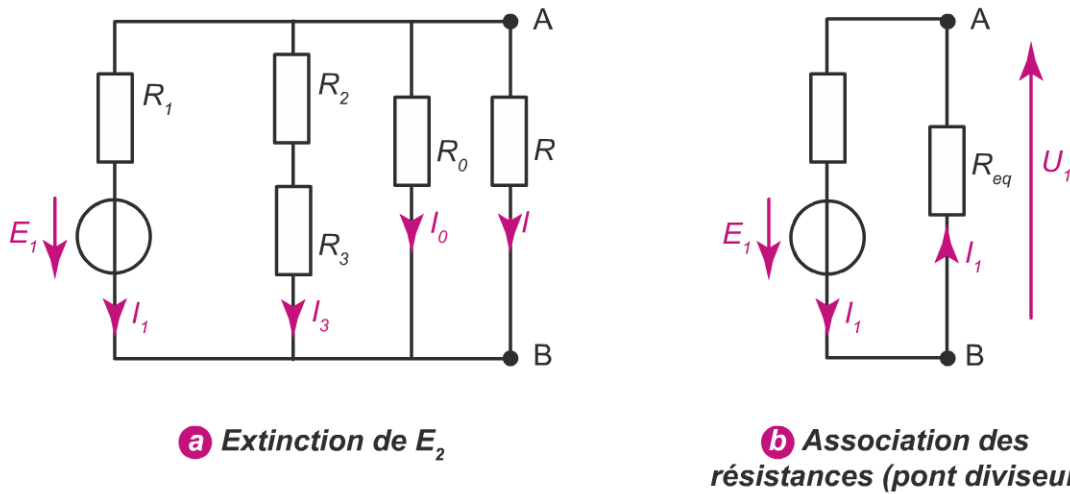
Comme précédemment, nous appliquons la formule du pont diviseur en remarquant toutefois que les flèches de  $E_1$  et de  $U_1$  ne sont pas toutes les deux orientées dans la même direction (l’une est vers B et l’autre vers A) et qu’il faut donc ajouter un signe moins (-) à la formule. Aussi

$$U_1 = -E_1 \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_1} = -12 \frac{6,67}{6,67 + 10} = -4,8 \text{ V}$$

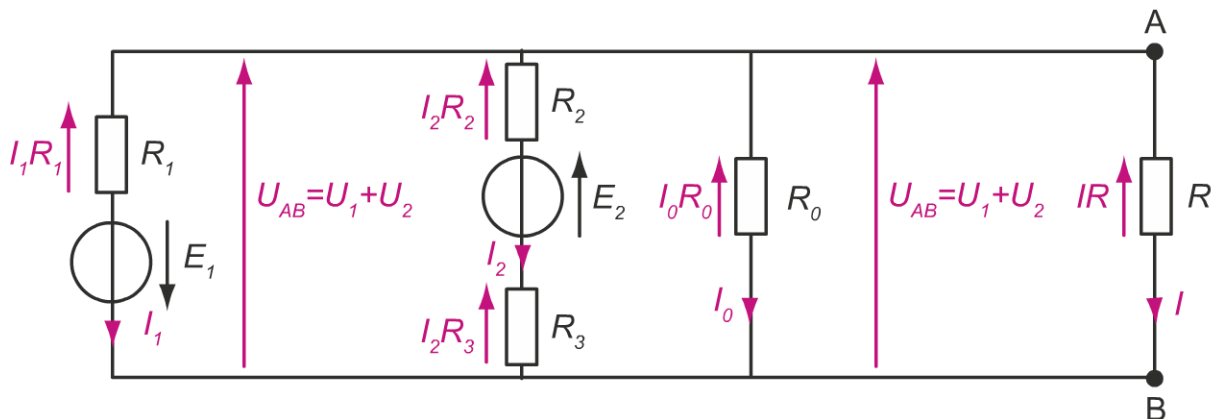
**Étape 3 :** On superpose enfin, pour trouver

$$U_{AB} = U_1 + U_2 = 1,2 - 4,8 = -3,6 \text{ V}$$

## 2.3 Principe de superposition



**Figure 2.10** – Étape 2 de l'application du principe de superposition dans le circuit de l'exercice 2.5. (a) Extinction de la source  $E_2$ , qui est remplacée par une connexion équipotentielle. (b) Association des résistances  $R_2 + R_3$ ,  $R_0$  et  $R$  qui sont initialement couplées en parallèle.



**Figure 2.11** – Correction de l'exercice 2.5. Le calcul de la tension  $U_{AB}$  par le principe de superposition permet de déterminer les courants dans les différentes branches.

Le calcul des différents courants se fait en utilisant les lois d'Ohm et des mailles. Les flèches de courant sont repérées comme indiqué sur la figure 2.11.

En utilisant la loi d'Ohm, nous obtenons

$$I = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{-3,6}{20} = -0,180 \text{ A} = -180 \text{ mA}$$

## Chapitre 2 – Réseaux linéaires en régime continu

aux bornes de  $R$  et

$$I_0 = \frac{U_{AB}}{R_0} = \frac{-3,6}{20} = -0,180 \text{ A} = -180 \text{ mA}$$

aux bornes de  $R_0$ . En appliquant la loi des mailles dans la branche de  $E_1$ , on écrit

$$-E_1 + I_1 R_1 - U_{AB} = 0$$

ce qui donne

$$I_1 = \frac{E_1 + U_{AB}}{R_1} = \frac{12 - 3,6}{10} = 0,840 \text{ A} = 840 \text{ mA}$$

Dans la branche de  $E_2$ , la relation

$$I_2(R_2 + R_3) + E_2 - U_{AB} = 0$$

permet de calculer

$$I_2 = \frac{U_{AB} - E_2}{R_2 + R_3} = \frac{-3,6 - 6}{4 + 16} = -0,480 \text{ A} = -480 \text{ mA}$$

Nous retrouvons les mêmes résultats que ceux obtenus avec la méthode de Kirchhoff. La mise en œuvre est toutefois plus simple dans le cas de la superposition. En effet, il n'est pas nécessaire de compter les nœuds et les branches avant de faire les calculs. De plus, puisqu'il s'agit d'appliquer successivement les formules des ponts diviseurs au lieu de résoudre des systèmes d'équations, la difficulté mathématique associée à cette dernière méthode est moindre.

### Exercice 2.6

On considère le circuit de la figure 2.12, en régime continu. Calculer la valeur de la tension  $U_{AB}$  en appliquant le principe de superposition avec  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_0 = 6 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_2 = 5 \Omega$  et  $R_3 = 10 \Omega$ .

### Solution 2.6

L'application du principe de superposition nous renvoie aux formules des ponts diviseurs.

**Étape 1 :** On éteint le générateur de courant afin de ramener le circuit à celui de la figure 2.13(a). On a donc

$$U_1 = E \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 10 \cdot \frac{10}{5 + 5 + 10} = 4 \text{ V}$$

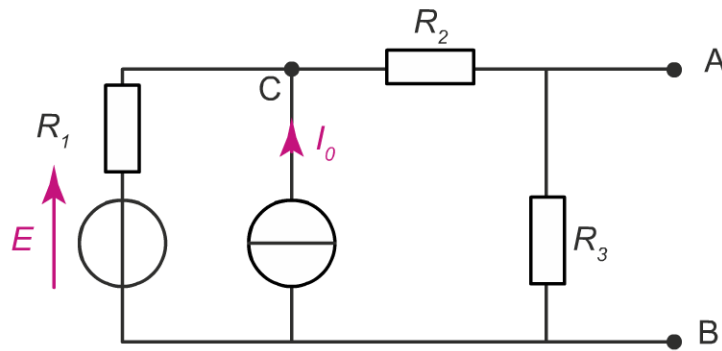


Figure 2.12 – Circuit de l'exercice 2.6. On donne  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_0 = 6 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_2 = 5 \Omega$  et  $R_3 = 10 \Omega$ .

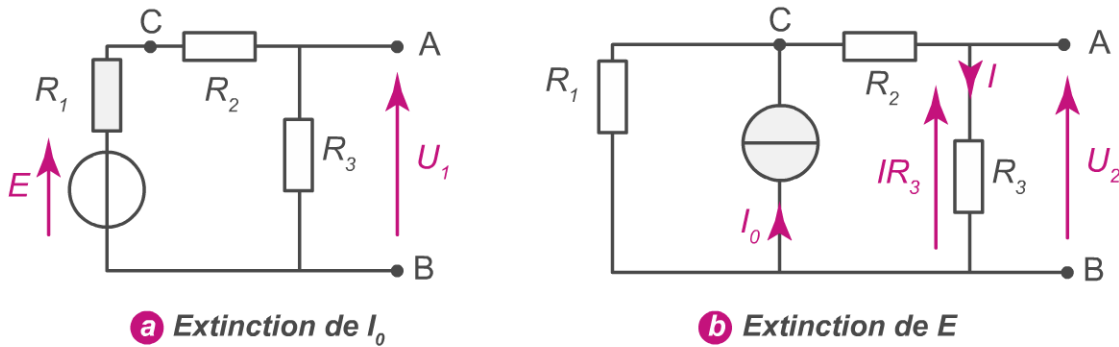


Figure 2.13 – Correction de l'exercice 2.6. (a) L'extinction de la source de courant permet de supprimer une branche. (b) Extinction de la source de tension.

Étape 2 : On éteint ensuite le générateur de tension pour se ramener au circuit de la figure 2.13(b). L'application de la formule du pont diviseur de courant permet d'obtenir

$$I = I_0 \cdot \frac{R_1}{(R_2 + R_3) + R_1} = 6 \times \frac{5}{5 + 10 + 5} = 1,5 \text{ A} \quad (2.18)$$

On en déduit alors la valeur de la tension  $U_2$  avec la loi d'Ohm :

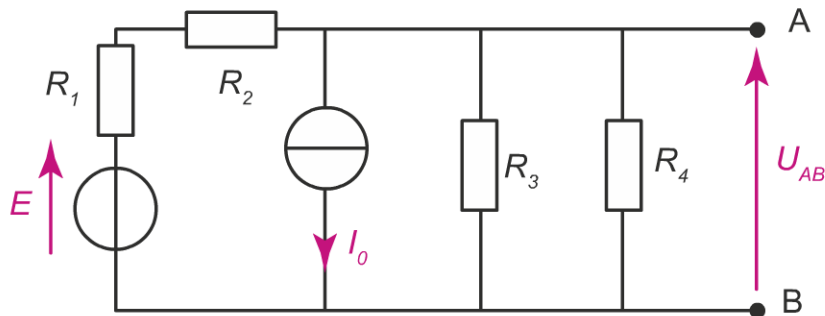
$$U_2 = R_3 \cdot I = 10 \cdot 1,5 = 15 \text{ V}$$

**Superposition :** Finalement, la tension  $U_{AB}$  s'obtient en additionnant

$$U_{AB} = U_1 + U_2 = 5 + 15 = 20 \text{ V} = U_{AB}$$

**Exercice 2.7**

On considère le circuit de la figure 2.14, en régime continu, avec  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_0 = 100 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \ \Omega$  et  $R_3 = R_4 = 40 \ \Omega$ . Calculer la valeur de la tension  $U_{AB}$  en utilisant le principe de superposition.



**Figure 2.14** – Circuit de l'exercice 2.7. On donne  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_0 = 100 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \ \Omega$  et  $R_3 = R_4 = 40 \ \Omega$

**Solution 2.7**

**Étape 1 :** On éteint dans un premier temps la source de courant de façon à obtenir le circuit de la figure 2.15(a). On calcule alors les résistances équivalentes

$$R_s = R_1 + R_2 = 20 \ \Omega$$

et

$$R_{//} = R_3 // R_4 = 40 \ \Omega // 40 \ \Omega = 20 \ \Omega$$

Une simple application de la formule du pont diviseur de tension permet d'obtenir

$$U_1 = 10 \cdot \frac{20}{20 + 20} = 5 \text{ V}$$

**Étape 2 :** L'extinction de la seule source de tension et l'association des résistances permet de se ramener au circuit de la figure 2.15(b). La formule du pont diviseur permet d'écrire que

$$I = I_0 \cdot \frac{R_s}{R_s + R_{//}} = 0,100 \cdot \frac{20}{20 + 20} = 0,050 \text{ A}$$

Finalement,

$$U_2 = -I \cdot R_{//} = -0,050 \cdot 20 = -1 \text{ V}$$

**Superposition :** Finalement, en superposant les deux valeurs obtenues, on écrit que

$$U_{AB} = U_1 + U_2 = 5 - 1 = 4 \text{ V}$$

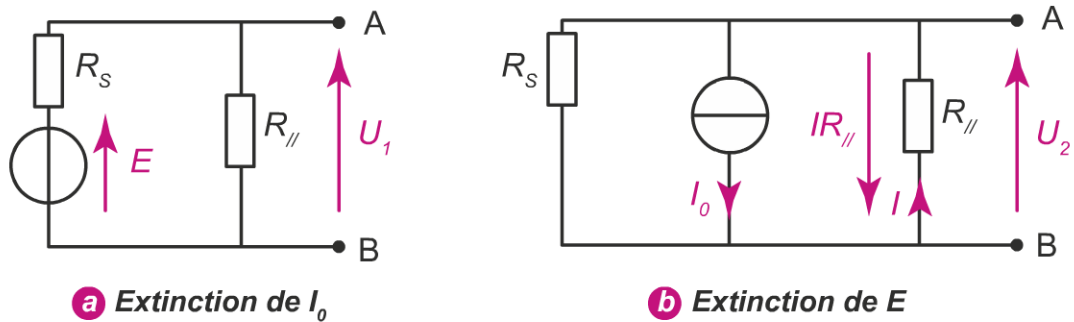


Figure 2.15 – Correction de l'exercice 2.7.

## 2.4 THÉORÈME DE MILLMAN

Le théorème de Millman est dérivé de la loi des nœuds et de la loi d'Ohm. Son utilisation permet de simplifier les calculs, en particulier dans les circuits ne contenant que deux nœuds.

### 2.4.1 Énoncé général

Le théorème de Millman s'énonce en réécrivant la loi des nœuds, non pas avec des courants, mais avec des potentiels. Prenons l'exemple de la figure 2.16.

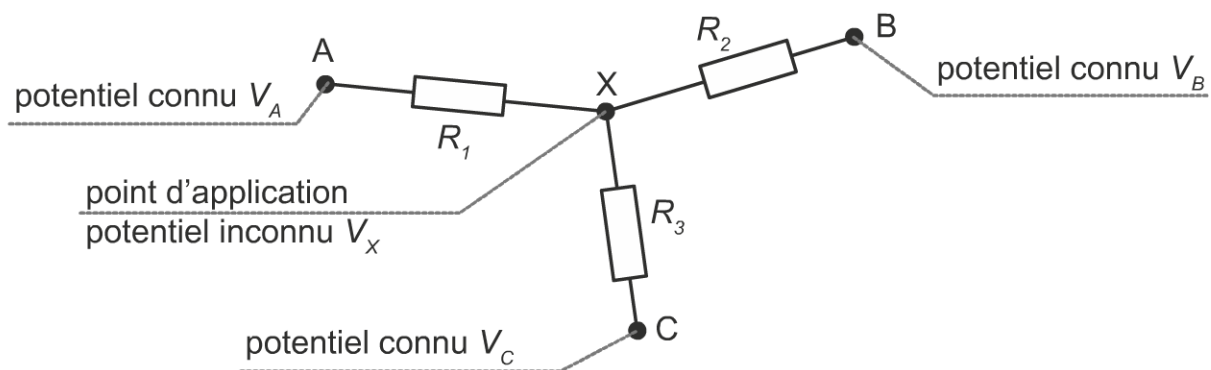


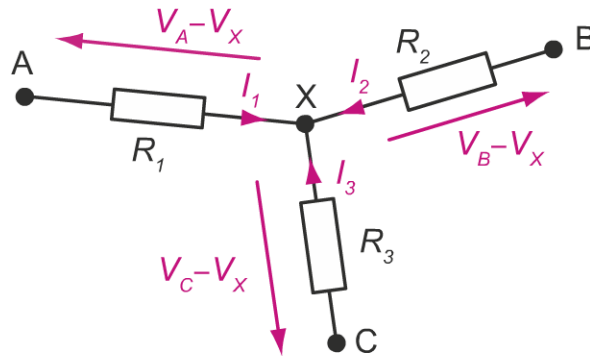
Figure 2.16 – Énoncé du théorème de Millman : les potentiels des points A, B et C sont connus. L'inconnue à déterminer est le potentiel du point X.

Il s'agit dans ce cas d'exprimer  $V_X$ , le potentiel du point X dont la valeur n'est pas connue, en fonction des potentiels connus ou facilement déterminables

## Chapitre 2 – Réseaux linéaires en régime continu

$V_A$ ,  $V_B$  et  $V_C$  des points A, B et C. Pour ce faire, on applique la loi des nœuds au point X en utilisant les notations définies dans la figure 2.17, ce qui permet d'écrire que

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (2.19)$$



**Figure 2.17** – Énoncé du théorème de Millman : la loi des nœuds est appliquée en association avec la loi d'Ohm. Les résistances sont connues, et les grandeurs électriques sont fléchées en convention récepteur.

Les valeurs des résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  étant connues, on peut appliquer la loi d'Ohm aux bornes de chacune d'entre elles, en prenant bien soin de flécher les tensions et les courants en convention récepteur. Les courants s'expriment alors en fonction des potentiels comme

$$\begin{cases} I_1 = \frac{V_A - V_X}{R_1} \\ I_2 = \frac{V_B - V_X}{R_2} \\ \text{et} \\ I_3 = \frac{V_C - V_X}{R_3} \end{cases} \quad (2.20)$$

de sorte que l'équation (2.19) devient

$$\frac{V_A - V_X}{R_1} + \frac{V_B - V_X}{R_2} + \frac{V_C - V_X}{R_3} = 0 \quad (2.21)$$

ce qui permet d'établir

$$\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_C}{R_3} = V_X \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (2.22)$$

Cette dernière relation constitue le **théorème de Millman**. On peut remarquer que la partie entre parenthèses du terme de droite de l'équation précédente correspond au calcul d'une résistance équivalente en parallèle, de sorte que le théorème peut être réécrit avec une expression plus facile à mémoriser :

$$\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_C}{R_3} = V_X \cdot \frac{1}{R_{//}} \quad (2.23)$$

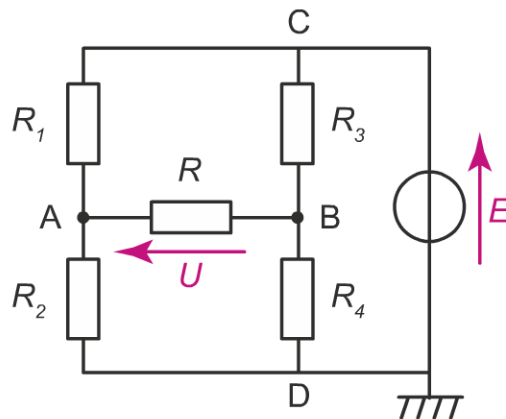
où  $R_{//}$  représente la résistance équivalente des résistances 1, 2 et 3 vues les unes en parallèle avec les autres.

Nous avons pris l'exemple de trois branches arrivant au nœud X, mais le théorème se généralise au cas de  $n$  branches concourantes au point X, de sorte que

$$\underbrace{\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} + \dots + \frac{V_C}{R_n}}_{n \text{ branches}} = V_X \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)}_{n \text{ branches}} = V_X \cdot \frac{1}{R_{//}} \quad (2.24)$$

**Exercice 2.8**

Déterminer, en appliquant le théorème de Millman aux points A et B, la tension  $U$  mesurée aux bornes de la résistance  $R$  du circuit de la figure 2.18. On donne  $E = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 400 \Omega$ ,  $R_3 = 50 \Omega$ ,  $R_4 = 100 \Omega$  et  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .



**Figure 2.18** – Circuit de l'exercice 2.8 avec  $E = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 400 \Omega$ ,  $R_3 = 50 \Omega$ ,  $R_4 = 100 \Omega$  et  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .

**Solution 2.8**

La tension  $U$  est la différence de potentiels aux bornes  $U = V_A - V_B$  aux bornes de  $R$ . Nous devons donc déterminer les valeurs de  $V_A$  et de  $V_B$  et, pour ce faire, dresser un système de deux équations à deux inconnues. L'application du théorème de Millman en A permet d'établir que

$$\frac{V_A - V_C}{R_1} + \frac{V_A - V_D}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R} = 0$$

La masse étant placée en D, on a  $V_D = 0$  et  $V_A = E$ , de sorte que

$$\frac{V_A - E}{R_1} + \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R} = 0$$

La première équation est donc

$$V_A \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} \right) - \frac{V_B}{R} = \frac{E}{R_1}$$

ou bien, avec les valeurs numériques,

$$0,0135 \cdot V_A - 0,001 \cdot V_B = 0,01 \tag{2.25}$$

En appliquant la même méthode au point B, on a

$$-\frac{V_A}{R} + V_B \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R} \right) = \frac{E}{R_3}$$

ou bien avec les valeurs numériques,

$$-0,001 \cdot V_A + 0,031 \cdot V_B = 0,02 \tag{2.26}$$

Le système composé des équations (2.25) et (2.26) peut se résoudre de différentes manières. La méthode matricielle permet d'écrire que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0,0135 & -0,001 \\ -0,001 & 0,031 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,02 \end{pmatrix}}_B$$

et la relation  $M^{-1}B$  permet d'établir que

$$X = \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,791 \\ 0,671 \end{pmatrix}$$

de sorte que la tension

$$U = V_A - V_B = 0,120 \text{ V}$$

### 2.4.2 Cas particulier : le circuit à deux nœuds

Nous venons d'énoncer le théorème de Millman dans le cas général, mais il peut arriver que nous soyons confrontés à des circuits spécifiques pour lesquels l'application du théorème se révèle particulièrement efficace. Il s'agit du cas des circuits à deux nœuds, tels que celui représenté sur la figure 2.19. Nous allons appliquer le théorème tel que nous l'avons défini précédemment, puis nous le réécrivons sous une forme plus simple à retenir et strictement réservée au cas des circuits à deux nœuds.

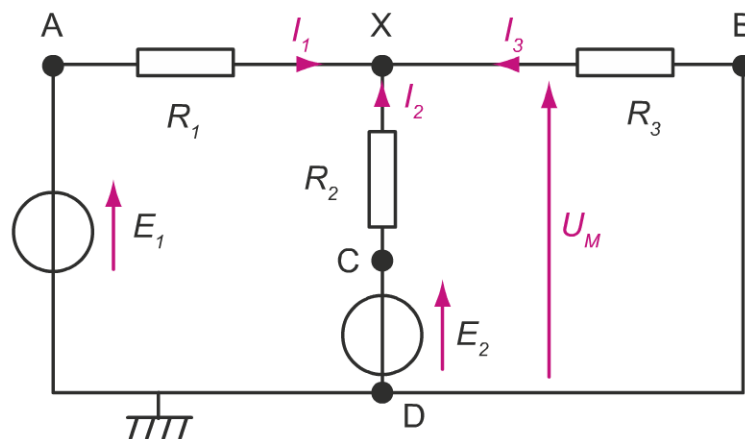


Figure 2.19 – Application du théorème de Millman dans le cas d'un circuit à deux nœuds.

### 2.4.3 Énoncé du théorème de Millman dans les circuits à deux nœuds

En appliquant au point X du circuit à deux nœuds le raisonnement fait à la section 2.4.1, nous arrivons à l'équation (2.23). Grâce au choix de la masse, nous pouvons exprimer les potentiels inconnus en fonction des tensions des sources. Ainsi,

$$V_A = V_D + E_1 = E_1 \quad (2.27)$$

et

$$V_C = V_D + E_2 = E_2 \quad (2.28)$$

La connexion électrique de B et C indique que

$$V_B = V_D = 0 \quad (2.29)$$

## Chapitre 2 – Réseaux linéaires en régime continu

Enfin, on définit la tension de Millman  $U_M$  en lieu et place du potentiel inconnu  $V_X$  au travers de la relation

$$V_X = V_D + U_M = U_M \quad (2.30)$$

Finalement, dans le cas du circuit à deux nœuds de la figure 2.19, on établit que

$$\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = U_M \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = U_M \cdot \left( \frac{1}{R_{//}} \right) \quad (2.31)$$

- Chaque branche contenant une source de tension  $E_i$  et une résistance  $R_i$  participe au terme de gauche au travers du rapport  $E_i/R_i$ ;
- Toutes les branches participent au terme de gauche au travers du rapport  $1/R_i$ .

### a) Avec une source de tension opposée à $U_M$

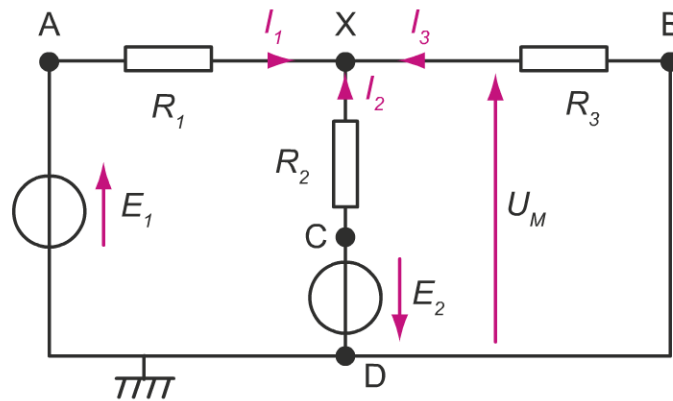
Dans le circuit à deux nœuds précédent, nous avons choisi des tensions repérées dans le même sens que la tension de Millman. Avant de généraliser ce corollaire du théorème au cas à  $n$ -branches, nous devons étudier ce qui se passe si l'une des sources de tension est repérée dans le sens opposé à celui de  $U_M$ , comme représenté dans la figure 2.20. En repartant de la formulation générale du théorème de Millman appliquée au nœud  $X$ , on retrouve la relation (2.23). Les expressions de  $U_M$ , de  $V_A$  et de  $V_B$  restent les mêmes que dans le circuit précédent. En revanche, on note une différence au point C puisque la relation (2.28) est remplacée par

$$V_C = V_D - E_2 = -E_2 \quad (2.32)$$

On note l'apparition d'un signe moins ( $-$ ) devant  $E_2$  associé au fait que cette tension est fléchée dans le sens inverse à  $U_M$ . Dans ces conditions, le corollaire du théorème de Millman dans le circuit à deux nœuds permet d'écrire

$$\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} = U_M \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = U_M \cdot \left( \frac{1}{R_{//}} \right) \quad (2.33)$$

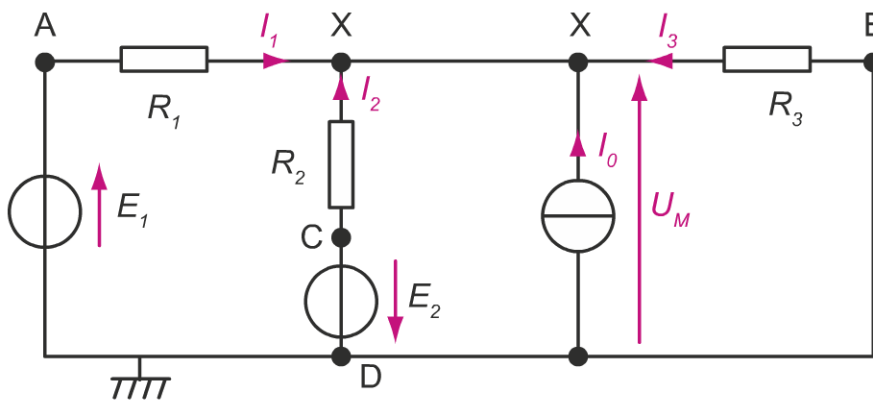
Quand, dans une branche d'un circuit à deux nœuds, une source de tension est repérée dans le sens opposé à la flèche de  $U_M$ , il faut compatibiliser sa f.é.m avec un signe moins ( $-$ ) dans le terme de gauche de l'équation de Millman.



**Figure 2.20** – Théorème de Millman dans le cas d'un circuit à deux nœuds. L'une des sources de tension délivre une tension repérée dans le sens opposé à celui de la tension de Millman.

b) Prise en compte d'une source de courant

Voyons maintenant, dans le cas d'un circuit à deux nœuds, quelle est l'influence de la présence d'une source de courant dans une branche. Pour cela, prenons l'exemple de la figure 2.21. Ce circuit correspond au circuit de la figure 2.19 auquel a été ajoutée une branche asservie en courant.



**Figure 2.21** – Théorème de Millman dans le cas d'un circuit à deux nœuds avec une source de tension repérée dans le sens opposé à celui de la tension de Millman et une source de courant repérée dans le sens de la tension de Millman.

Comme nous l'avons fait lors de l'énoncé général du théorème, nous écrivons la loi des nœuds au point X

$$I_1 + I_2 + I_0 + I_3 = 0 \tag{2.34}$$

## Chapitre 2 – Réseaux linéaires en régime continu

et nous utilisons la loi d'Ohm afin de lier ces courants aux potentiels, de sorte que

$$\frac{V_X - V_A}{R_1} + \frac{V_X - V_C}{R_2} + I_0 + \frac{V_X - V_B}{R_3} = 0 \quad (2.35)$$

Nous avons déjà montré que, en plaçant la masse en D, on a  $V_A = E_1$ ,  $V_C = -E_2$ ,  $V_B = 0$  et  $V_X = U_M$ . La relation précédente peut donc s'écrire :

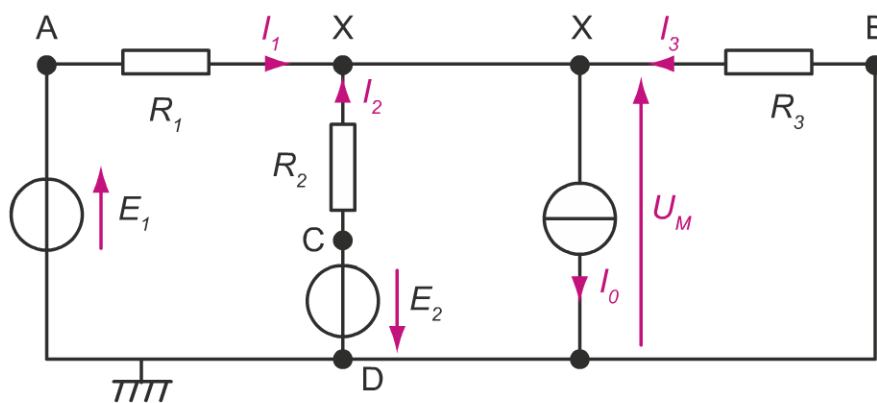
$$\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_0 = U_M \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = U_M \cdot \left( \frac{1}{R_{//}} \right) \quad (2.36)$$

Quand, dans une branche d'un circuit à deux nœuds, apparaît une source de courant, celle-ci n'est comptabilisée que dans le terme de gauche de l'équation de Millman.

Nous verrons en effet qu'une source de courant a une résistance interne infinie et que, par conséquent, le terme  $1/R_i$  qui pourrait être reporté dans le terme de droite tend vers zéro.

### c) Influence du repérage du courant de la source

Pour finir, nous considérons un circuit similaire au précédent mais dans lequel l'intensité de la source de courant est repérée dans le sens inverse à la tension de Millman. Nous nous reportons pour cela au schéma de la figure 2.22.



**Figure 2.22** – Théorème de Millman dans le cas d'un circuit à deux nœuds avec une source de tension et une source de courant repérées dans le sens opposé à celui de la tension de Millman.

L'application de la loi des nœuds au point X donne une équation différente du cas précédent, puisque

$$I_1 + I_2 - I_0 + I_3 = 0 \quad (2.37)$$

L'application des simplifications déjà définies plus haut permet d'écrire

$$\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - I_0 = U_M \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = U_M \cdot \left( \frac{1}{R_{//}} \right) \quad (2.38)$$

Quand, dans une branche d'un circuit à deux nœuds, une source de courant est repérée dans le sens opposé à la flèche de  $U_M$ , celle-ci doit être comptabilisée uniquement dans le terme de gauche de l'équation de Millman et avec un signe moins (-).

#### d) La méthode à appliquer dans un circuit à deux nœuds

Eu égard aux différents cas abordés dans cette section, nous donnons la méthode générale permettant d'écrire l'équation de Millman dans un circuit à deux nœuds : les deux premières étapes permettent d'écrire le terme de droite et les deux dernières le terme de gauche.

1. Tout d'abord, repérer la tension de Millman  $U_M$  dans le sens de son choix, et écrire  $U_M$  dans le terme de droite.
2. Identifier le nombre  $k$  de branches contenant une résistance équivalente à  $R_i$ , et comptabiliser chacune d'entre elles dans le terme de droite au travers du rapport  $1/R_i$ .
3. Identifier ensuite le nombre  $m$  de branches contenant des sources de tension  $E_i$  associées à des résistances  $R_i$  et les comptabiliser dans le terme de gauche avec un terme  $E_i/R_i$  en ajoutant un signe (-) à celles dont les flèches sont repérées dans le sens opposé à celui de  $U_M$ .
4. Identifier enfin le nombre  $n$  de branches contenant des sources de courant  $I_i$ . Ne comptabiliser ces branches que dans le terme de gauche et ajouter un signe moins (-) à celles qui sont repérées dans le sens opposé à la flèche de  $U_M$ .

On obtient en suivant cette méthode la relation

$$\sum_{i=1}^m \pm \frac{E_i}{R_i} + \sum_{i=1}^n \pm I_i = U_M \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{R_i} \quad (2.39)$$

## Chapitre 2 – Réseaux linéaires en régime continu

Même si les dipôles actifs linéaires ne seront abordés qu'à la section 2.5, nous remarquons que :

- c'est le courant de Norton équivalent de chaque branche qui intervient dans le terme de gauche de l'équation de Millman ;
- c'est l'inverse de la résistance équivalente de chaque branche, toutes sources éteintes, qui intervient dans le terme de droite.

### e) Exercices

#### Exercice 2.9

1. Refaire l'exercice associé à la figure 2.4 page 58, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des courants du circuit représenté, en appliquant le théorème de Millman.
2. Discuter du mode de fonctionnement des sources.
3. Comparer les différentes méthodes utilisées (Kirchhoff, superposition et Millman).

#### Solution 2.9

On utilise le fléchage de la figure 2.23, dans laquelle nous plaçons la masse et repérons la tension  $U_M$ .

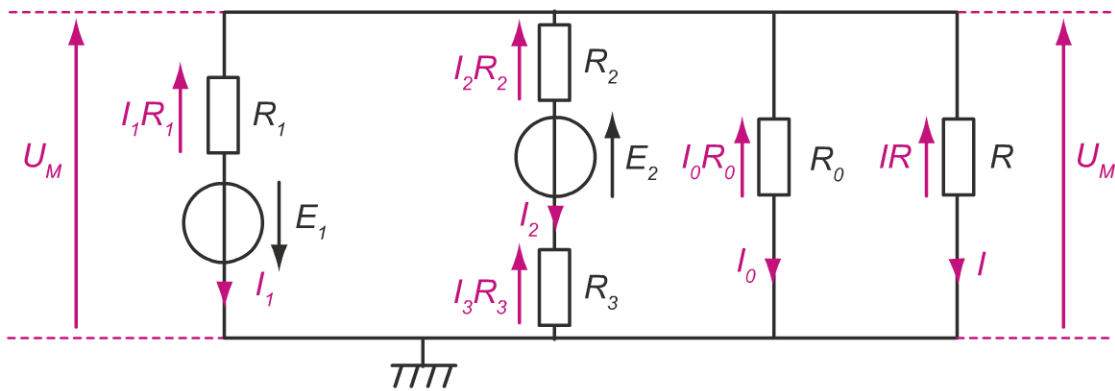


Figure 2.23 – Correction de l'exercice 2.9.

1. L'application du théorème dans le cas à deux nœuds permet d'écrire

$$-\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_{eq}} = U_M \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)$$

puisque  $E_1$  est repéré dans le sens opposé à  $U_M$ . La valeur  $R_{eq} = R_2 + R_3$  représente la résistance équivalente aux résistances 2 et 3 en série, c'est-à-dire la résistance de la seconde branche. On obtient alors

$$U_M = \frac{\frac{-12}{10} + \frac{6}{20}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = -3,6 \text{ V}$$

En utilisant la loi d'Ohm aux bornes de  $R$  et de  $R_0$ , nous obtenons

$$I = \frac{U_M}{R} = \frac{-3,6}{20} = -0,180 \text{ A} = -180 \text{ mA}$$

et

$$I_0 = \frac{U_M}{R_0} = \frac{-3,6}{20} = -0,180 \text{ A} = -180 \text{ mA}$$

Le sens réel des courants  $I$  et  $I_0$  est donc l'inverse de celui indiqué sur la figure 2.23.

Les courants  $I_1$  et  $I_2$  se calculent en appliquant la loi des mailles :

$$-E_1 + I_1 R_1 - U_M = 0$$

de sorte que

$$I_1 = \frac{E_1 + U_M}{R_1} = \frac{12 - 3,6}{10} = 0,84 \text{ A} = 840 \text{ mA}$$

d'une part, et

$$I_2(R_2 + R_3) + E_2 - U_M = 0$$

ce qui implique que

$$I_2 = \frac{U_M - E_2}{R_2 + R_3} = \frac{-3,6 - 6}{4 + 16} = -0,48 \text{ A} = -480 \text{ mA}$$

d'autre part.

2. La source  $E_1$  est en convention générateur avec un courant et une tension positives : elle fonctionne donc en mode générateur. La source  $E_2$  est quant à elle en convention récepteur avec une tension positive et un courant négatif. Elle fonctionne donc, elle aussi, en mode générateur.
3. Dans ce circuit, la méthode de Millman demande moins de calculs que la méthode de Kirchhoff, ou le principe de superposition, alors que nous obtenons les mêmes résultats. En effet, le circuit ne contient que deux nœuds, ce qui permet d'appliquer le théorème de Millman sous une forme simplifiée.

### Exercice 2.10

Refaire l'exercice de la figure 2.14 page 68, c'est-à-dire calculer la tension  $U_{AB}$ , en appliquant le théorème de Millman.

**Solution 2.10**

On repère la tension de Millman en posant la masse en B, comme indiqué sur la figure 2.24. On applique ensuite le théorème de Millman au circuit à deux nœuds. La source de courant étant repérée dans le sens opposé à la flèche de  $U_M$ , il faut la comptabiliser avec un signe moins (-), de sorte que

$$\frac{10}{20} - 0,100 = U_M \cdot \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} \right) \Rightarrow U_{AB} = U_M = 4 \text{ V}$$

On retrouve le même résultat qu'en utilisant la superposition, mais le calcul est bien plus rapide.

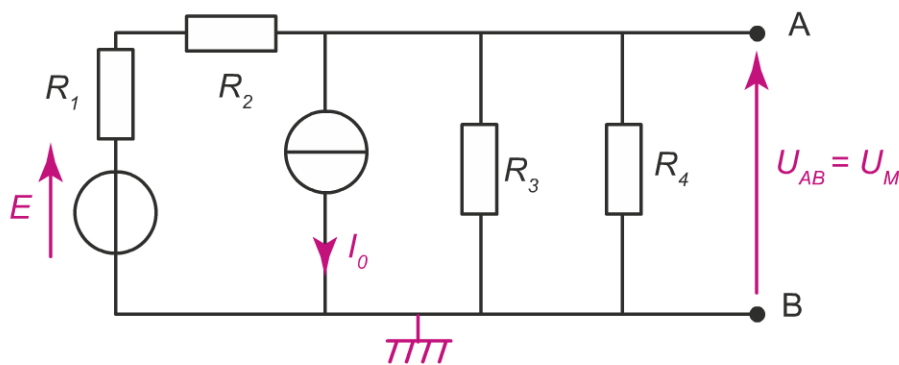


Figure 2.24 – Correction de l'exercice 2.10.

**Exercice 2.11**

On considère le circuit de la figure 2.25, en régime continu. Calculer la valeur de la tension  $U_{AB}$  en utilisant le théorème de Millman.

**Solution 2.11**

On simplifie le schéma initial en regroupant les résistances de façon à faire apparaître les résistances équivalentes. La masse et la tension de Millman sont définies sur la figure 2.26. Les deux résistances de  $200 \Omega$  en parallèle donnent une résistance équivalente  $R_{eq1} = 100 \Omega$  et les deux résistances de  $50 \Omega$  donnent une résistance équivalente  $R_{eq2} = 25 \Omega$ . On applique le théorème de Millman dans le cas à deux nœuds, de sorte que les sources de courant sont comptabilisées dans le terme de gauche,  $I_1$  et  $I_3$  prenant un signe moins (-). Aussi,

$$-0,1 + 0,2 + 0,2 = U_M \left( \frac{1}{100} + \frac{1}{25} \right) \Rightarrow U_M = U_{AB} = 10 \text{ V}$$

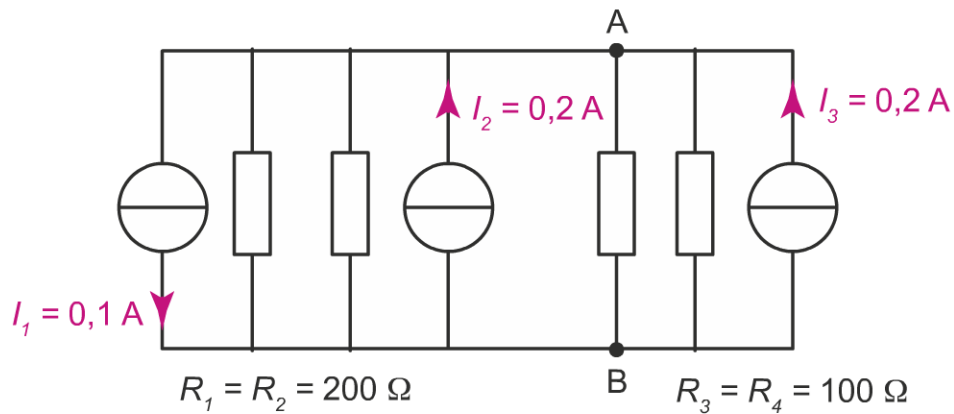


Figure 2.25 – Circuit de l'exercice 2.11.

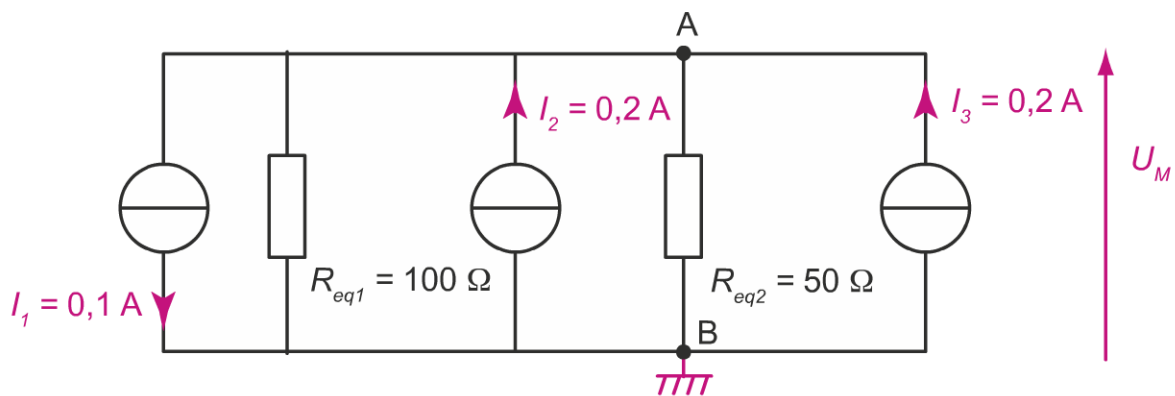


Figure 2.26 – Correction de l'exercice 2.11.

**Exercice 2.12**

En appliquant le théorème de Millman, calculer la tension  $U_{AB}$  et l'ensemble des courants du circuit de la figure 2.27 avec  $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $E = 3 \text{ V}$  et  $I_0 = 2 \text{ mA}$ .

**Solution 2.12**

Le théorème de Millman s'applique au point A. Nous plaçons la masse, et nous repérons les courants et la tension  $U_M$  comme représenté sur la figure 2.28.

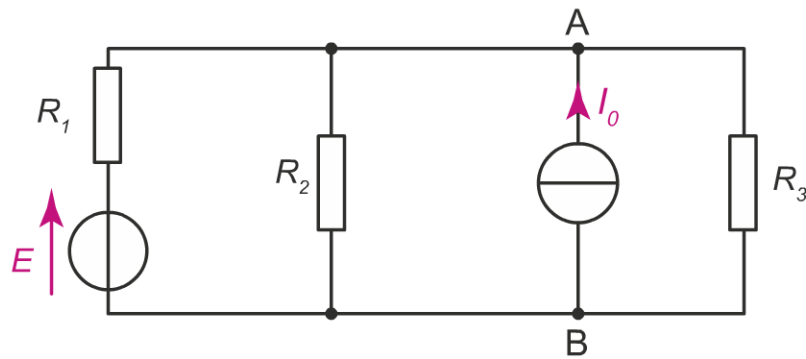


Figure 2.27 – Circuit de l'exercice 2.12.

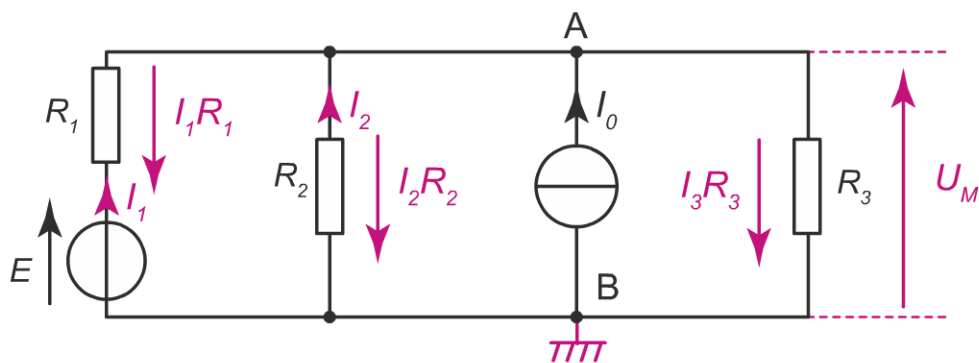


Figure 2.28 – Correction de l'exercice 2.12.

Eu égard au sens des flèches, les deux sources sont comptabilisées sans ajout de signe, de sorte que

$$\frac{E}{R_1} + I_0 = U_M \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

ce qui implique que

$$U_{AB} = U_M = \frac{\frac{E}{R_1} + I_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{3/2000 + 2 \cdot 10^{-3}}{1/2000 + 1/2000 + 1/4000} = 2,8 \text{ V} = U_{AB}$$

Les différents courants sont déterminés en appliquant la loi des mailles faisant intervenir  $U_M$ . Aussi,

$$E - I_1 R_1 - U_M = 0 \implies I_1 = \frac{E - U_M}{R_1} = \frac{3 - 2,8}{2000} = 10^{-4} \text{ A} = 0,100 \text{ mA}$$

dans la première branche,

$$I_2 R_2 + U_M = 0 \implies I_2 = \frac{-U_M}{R_2} = \frac{-2,8}{2000} = -1,4 \cdot 10^{-3} \text{ A} = -1,40 \text{ mA}$$

dans la seconde, et

$$I_3 R_3 + U_M = 0 \implies I_3 = \frac{-U_M}{R_3} = \frac{-2,8}{4000} = -7 \cdot 10^{-4} \text{ A} = -0,700 \text{ mA}$$

dans la dernière. On vérifie bien la loi des nœuds :

$$I_1 + I_2 + I_0 + I_3 = 0,100 \text{ mA} - 1,40 \text{ mA} - 0,700 \text{ mA} + 2 \text{ mA} = 0$$

### Exercice 2.13

Refaire l'exercice de la figure 2.12 page 67, c'est-à-dire calculer la tension  $U_{AB}$ , en appliquant le théorème de Millman.

### Solution 2.13

Dans cet exercice, il n'y a pas deux mais trois nœuds : A, B et C. Nous allons toutefois nous ramener au cas simple du circuit à deux nœuds, dans lequel l'application du théorème se trouve grandement simplifiée.

Nous considérons donc les deux nœuds C et B, et appliquons le théorème en C. Le circuit considéré se redessine alors comme sur la figure 2.29. Les deux sources sont orientées dans le sens de  $U_M$ . Aussi, on les comptabilise sans ajouter de signe, pour écrire

$$\frac{E}{R_1} + I_0 = U_M \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} \right)$$

ce qui donne

$$U_{CB} = U_M = \frac{\frac{10}{5} + 6}{\frac{1}{5} + \frac{1}{15}} = 30 \text{ V}$$

Une simple application de la formule du pont diviseur de tensions permet d'écrire :

$$U_{AB} = U_{CB} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 30 \cdot \frac{10}{15} = 20 \text{ V}$$

La tension  $U_{AB}$  est donc égale à 20 V.

## 2.5 THÉORÈMES DU DIPÔLE LINÉAIRE

Les théorèmes du dipôle linéaire sont les théorèmes de Thévenin et de Norton. Nous avons déjà dressé au premier chapitre le modèle de Thévenin d'une pile, d'un moteur, ou encore d'un câble. Ce modèle, et le modèle de Norton qui lui est associé, se généralisent à tous les dipôles actifs linéaires.

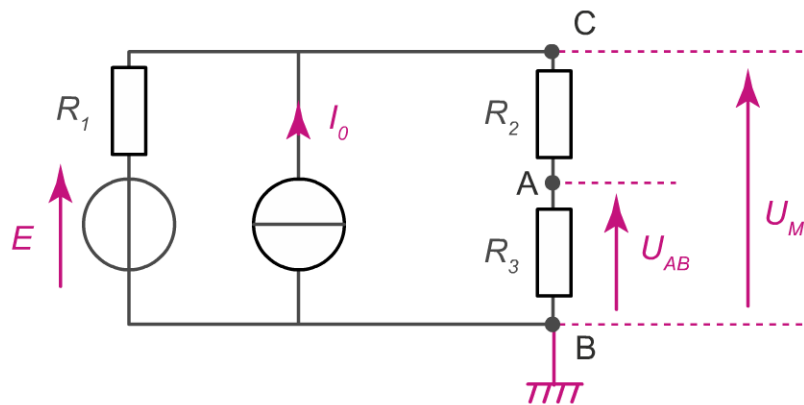


Figure 2.29 – Correction de l'exercice 2.13.

Nous allons dans un premier temps donner la définition de tels dipôles, puis nous présenterons (ou représenterons) les modèles de Thévenin et de Norton ainsi que les théorèmes qui leurs sont associés.

### 2.5.1 Dipôles

Un dipôle est, en électricité, un réseau électrique plus ou moins grand offrant deux bornes de connexion. Différents exemples de dipôles sont reportés dans la figure 2.30.

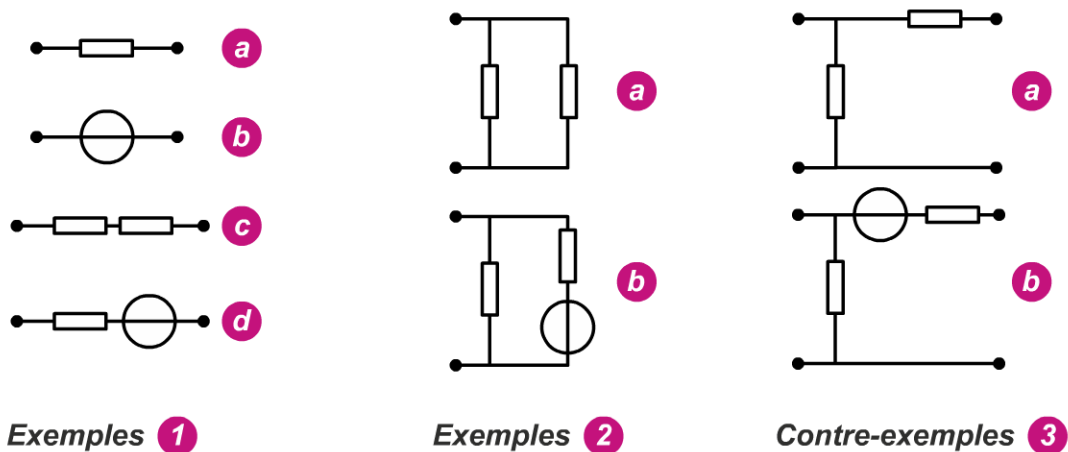


Figure 2.30 – Les associations de dipôles donnent naissance à de nouveaux dipôles dans les exemples 1 et 2. En revanche, dans le contre-exemple 3, les associations présentent quatre bornes au lieu de deux et ne sont pas des dipôles, par conséquent.

- Les dipôles les plus simples que l'on puisse rencontrer, dans une salle de travaux pratiques par exemple, sont les résistances et les générateurs (ou encore, si l'on s'intéresse aux régimes variables dans le temps, les bobines et les condensateurs), comme reporté dans le groupe d'exemples 1. En associant deux résistances ensemble ou bien en connectant une résistance et une source de tension tout en offrant deux bornes de connexion, on forme un nouveau dipôle.
- On peut envisager des constructions plus complexes, en plaçant des branches en parallèle, comme dans les cas constituant le groupe d'exemples 2. Dans la mesure où l'on dispose de deux bornes de connexion, on forme là encore un dipôle. Cela reste vrai quel que soit le nombre de branches et de composants : ce qui compte est qu'il n'y ait que deux bornes de connexion disponibles.
- Dans l'exemple 3, en revanche, les mêmes composants que ceux utilisés pour former les dipôles de l'exemple 2 ne présentent plus deux mais quatre bornes de connexion : ce ne sont donc pas des dipôles (il s'agit en fait de quadripôles).

Remarquons qu'il existe des composants qui ne sont pas naturellement des dipôles : c'est le cas par exemple des transistors, qui ont trois bornes de connexion et ne seront pas abordés dans cet ouvrage.

### 2.5.2 Dipôles actifs et dipôles passifs

Nous venons de voir dans les groupes d'exemples 1 et 2 de la figure 2.30 que les dipôles peuvent être constitués de différents composants. Nous distinguerons alors les dipôles actifs et les dipôles passifs.

#### • Les dipôles actifs

Les dipôles actifs sont le siège d'au moins une conversion énergétique autre que la production de chaleur. Ils sont actifs car ils peuvent présenter une différence de potentiels à leurs bornes même lorsque celles-ci sont laissées à vide (c'est-à-dire lorsqu'elles ne sont pas connectées).

Les dipôles actifs contiennent au moins une source de tension ou de courant.

Ainsi, les dipôles 1(b), 1(d) et 2(b) de la figure 2.30 sont des dipôles actifs.

### • Les dipôles passifs

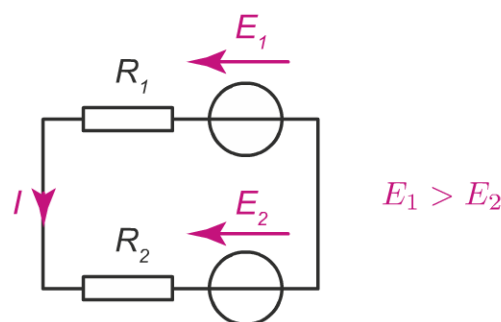
Les dipôles passifs ne sont le siège d'aucune conversion énergétique autre que la production de chaleur. En régime dépendant du temps, ils peuvent aussi être le siège d'un stockage énergétique, menant tôt ou tard à une restitution de l'énergie sous forme électrique (c'est le cas lorsque des condensateurs ou des bobines sont présents). Laisées à vide et sans excitation extérieure, leurs bornes ne présentent aucune différence de potentiels : ces dipôles ne font que subir ou répondre à l'action des dispositifs actifs.

Les dipôles passifs sont des dipôles qui ne contiennent aucune source de tension ni de courant.

Ainsi, les dipôles 1(a), 1(c) et 2(a) de la figure 2.30 sont des dipôles passifs.

### a) Dipôles actifs réversibles et non réversibles

Une attention particulière peut être portée aux dipôles actifs lorsque ceux-ci sont connectés à d'autres dipôles actifs. Nous considérons par exemple la situation reportée sur la figure 2.31, où deux dipôles générateurs de f.é.m différentes sont directement connectés.



**Figure 2.31** – Connexion directe de deux générateurs, avec  $E_1 > E_2$ . Cette connexion n'est possible que si le générateur de f.é.m  $E_2$  est réversible.

Dans ces conditions, deux éventualités se présentent :

- soit le dipôle 2 est réversible, c'est-à-dire qu'il peut basculer du fonctionnement générateur au fonctionnement récepteur, et ce basculement se fait naturellement par le biais de la circulation du courant  $I$ . C'est le cas des alternateurs et des dynamos qui basculent en fonctionnement moteur, ou encore des accumulateurs qui entrent dans le mode de charge ;

- soit le dipôle 2 n'est pas réversible, le basculement en mode récepteur n'est pas possible et la circulation du courant  $I$ , si elle se fait, endommage le dipôle de f.é.m  $E_2$ . C'est le cas, par exemple, des panneaux photovoltaïques ou des piles non rechargeables.

Un dipôle actif réversible peut fonctionner soit en générateur soit en récepteur.

### 2.5.3 Dipôles linéaires

Un dipôle est dit linéaire lorsque la tension à ses bornes et le courant le traversant ont une relation affine. Cela se traduit par une caractéristique  $I(U)$  ou  $U(I)$  en forme de droite.

#### a) Caractéristiques des sources

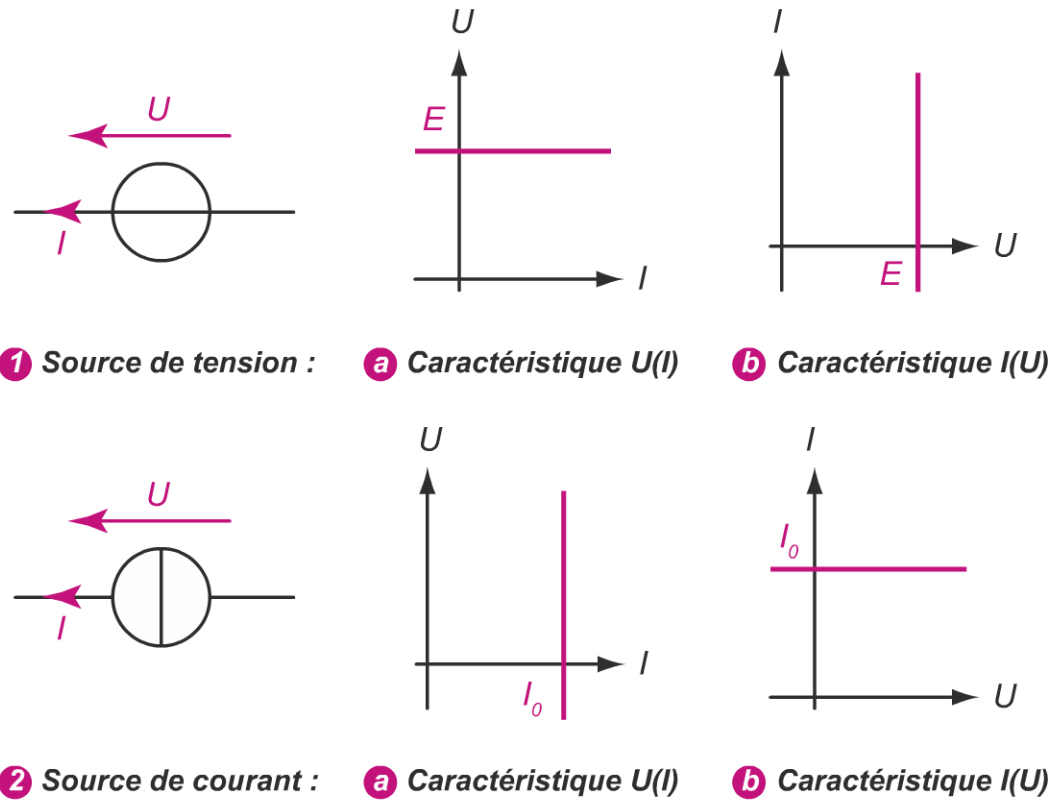
Les sources de tension et de courant telles que nous les avons définies sont linéaires par nature. Nous avons reporté sur la figure 2.32 ce que l'on appelle les **caractéristiques**  $U(I)$  et  $I(U)$  de ces dipôles. Il s'agit des courbes représentant les liens entre les grandeurs tension et courant aux bornes d'un dipôle.

1. La source de tension impose une différence de potentiels égale à  $E$  quelle que soit la valeur et le signe du courant qui la traverse. Sur la caractéristique  $U(I)$  reportée en 1(a), on observe une droite horizontale signifiant une valeur constante de la tension. Sur la caractéristique  $I(U)$ , c'est une droite verticale qui représente cette valeur de d.d.p. constante. Remarquons que la source de tension est aussi appelée **générateur de tension idéal** ou **parfait**, parce qu'un générateur qui aurait cette caractéristique pourrait générer autant de puissance que souhaité ( $P = U \cdot I \rightarrow \infty$  quand  $I \rightarrow \infty$ ).
2. La source de tension impose dans la branche où elle se trouve un courant constamment égal à  $I_0$  quelle que soit la valeur et le signe de la tension à ses bornes. Sur la caractéristique  $U(I)$  reportée en 1(a), on observe une droite verticale signifiant une valeur constante du courant. Sur la caractéristique  $I(U)$ , la constance du courant est représentée par une horizontale.

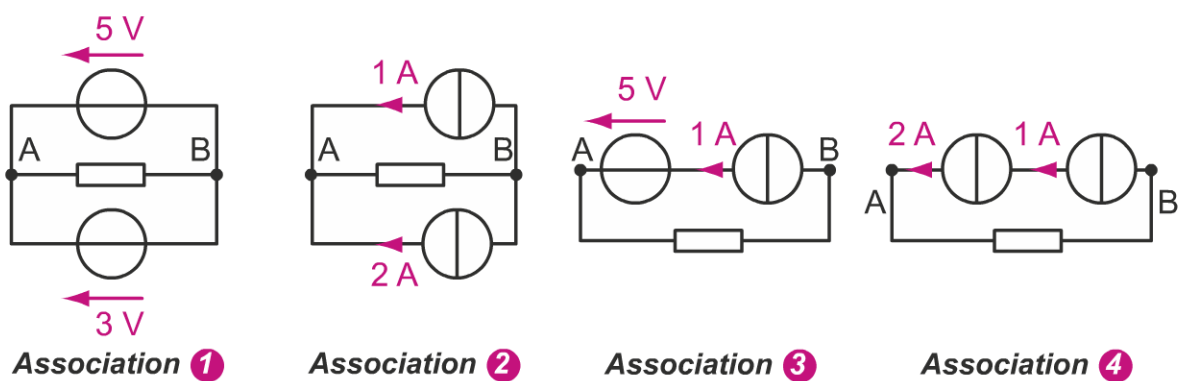
Remarquons que la source de courant est aussi appelée **générateur de courant idéal** ou **parfait**, parce qu'un générateur qui aurait sa caracté-

## Chapitre 2 – Réseaux linéaires en régime continu

ristique pourrait générer autant de puissance que souhaité ( $P = U \cdot I \rightarrow \infty$  quand  $U \rightarrow \infty$ ).



**Figure 2.32** – Caractéristiques tension-courant  $U(I)$  et courant-tension  $I(U)$  des sources (1) de tension et (2) de courant idéales.



**Figure 2.33** – Associations de sources pour l'exercice 2.13.

**Exercice 2.14 : Associations de sources**

Indiquer si les associations de sources représentées dans la figure 2.33 sont possibles ou interdites.

**Solution 2.14**

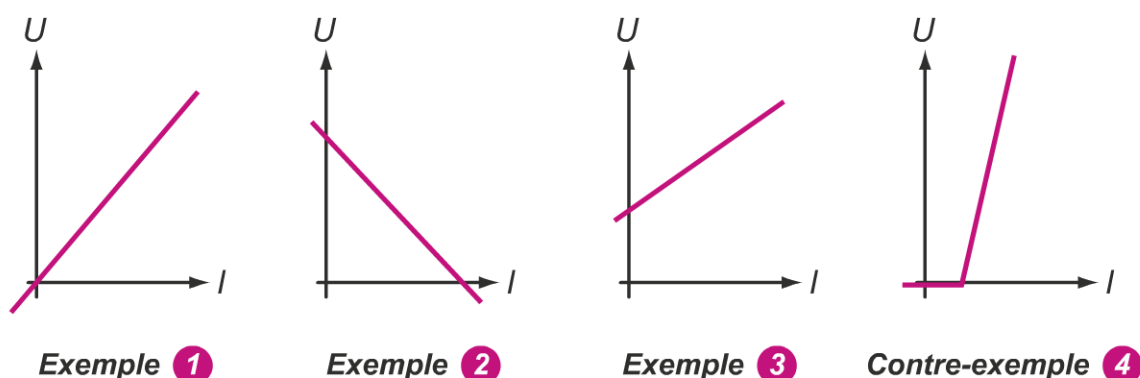
1. L'association 1 indique que la tension entre les points A et B est à la fois de 5 V (source du haut) et de 3 V (source du bas). Cette association n'a donc pas de sens : elle est interdite.
2. L'association 2 n'est pas contradictoire : les deux sources de courant débitent dans la résistance. Leurs courants s'ajoutent en vertu de la loi des nœuds.
3. L'association 3 n'est pas contradictoire, mais l'application du théorème de superposition permet de voir que seule la source de courant agit sur la résistance (elle ouvre le circuit quand on l'éteint). La différence de potentiels entre la source de tension et la résistance se retrouve aux bornes de la source de courant puisque celle-ci accepte n'importe quelle valeur de tension (voir les caractéristiques 2(a) et 2(b) de la figure 2.32). Cette association est donc possible, même si elle ne présente pas vraiment d'intérêt.
4. Enfin, l'association 4 est, au même titre que l'association 1, interdite. En effet, elle indique que, dans la résistance, doit circuler un courant valant à la fois 1 A et 2 A.

**b) Caractéristique  $U(I)$  d'un dipôle linéaire quelconque**

Il va de soit que, dans la réalité, les sources idéales, telles que celles dont nous avons décrit les caractéristiques dans la figure 2.32, n'existent pas. En effet, le simple échauffement dû au déplacement du courant dans les conducteurs résistifs implique une chute de tension à leurs bornes. Toutefois, on les utilise presque tout le temps car elles sont essentielles pour dresser des modèles électriques.

Nous avons reporté sur la figure 2.34 trois exemples de caractéristiques  $U(I)$  de dipôles linéaires réels ainsi qu'un contre-exemple.

- Le premier de ces exemples représente la caractéristique d'une résistance, reconnaissable au fait que la droite passe par l'origine. Les grandeurs sont dans ce cas repérées en convention générateur.
- Le second exemple représente une tension qui chute au fur et à mesure que le courant traversant le dipôle augmente. Il s'agit de la caractéristique d'un dipôle générateur dont les grandeurs sont repérées en convention générateur.



**Figure 2.34** – Caractéristiques de dipôles. Les exemples 1 à 3 correspondent à des dipôles linéaires (une résistance, un générateur actif et un récepteur actif, respectivement) et le contre-exemple 4 donne la caractéristique, non-linéaire, d'une diode.

- Le troisième exemple représente une tension qui augmente avec le courant. Ce que nous avons dit à propos des générateurs idéaux permet d'identifier la caractéristique d'un récepteur. Les grandeurs sont repérées en convention récepteur.
- Le contre-exemple ne présente pas une caractéristique linéaire, car la courbe représentative de  $U(I)$  n'est pas une simple droite. Il s'agit en réalité d'une caractéristique simplifiée de diode.

### 2.5.4 Théorème de Thévenin

Énoncer le théorème de Thévenin revient à établir le modèle équivalent de Thévenin et à indiquer la méthode permettant de calculer les différentes grandeurs le composant.

#### a) Modèle équivalent de Thévenin

Nous avons introduit le modèle de Thévenin dès le premier chapitre (voir page 18) en menant une réflexion basée sur l'analyse des phénomènes physiques mis en jeu dans une pile, un câble et un récepteur actif tel un moteur. Il est aussi possible de dresser ce modèle à partir de l'observation de la caractéristique  $U(I)$  d'un dipôle actif linéaire. Nous nous reportons aux différents encarts de la figure 2.35, qui décrit le cas des dipôles générateurs (volet 2) et récepteurs (volet 1). Les caractéristiques de ces deux volets, si l'on se place en convention générateur, n'en forment qu'une seule : elles se rejoignent en  $I = 0$ , comme montré dans l'encart central. C'est la raison pour

laquelle nous avons dirigé l'axe des abscisses vers la gauche dans le volet (1) en nous plaçant en convention récepteur.

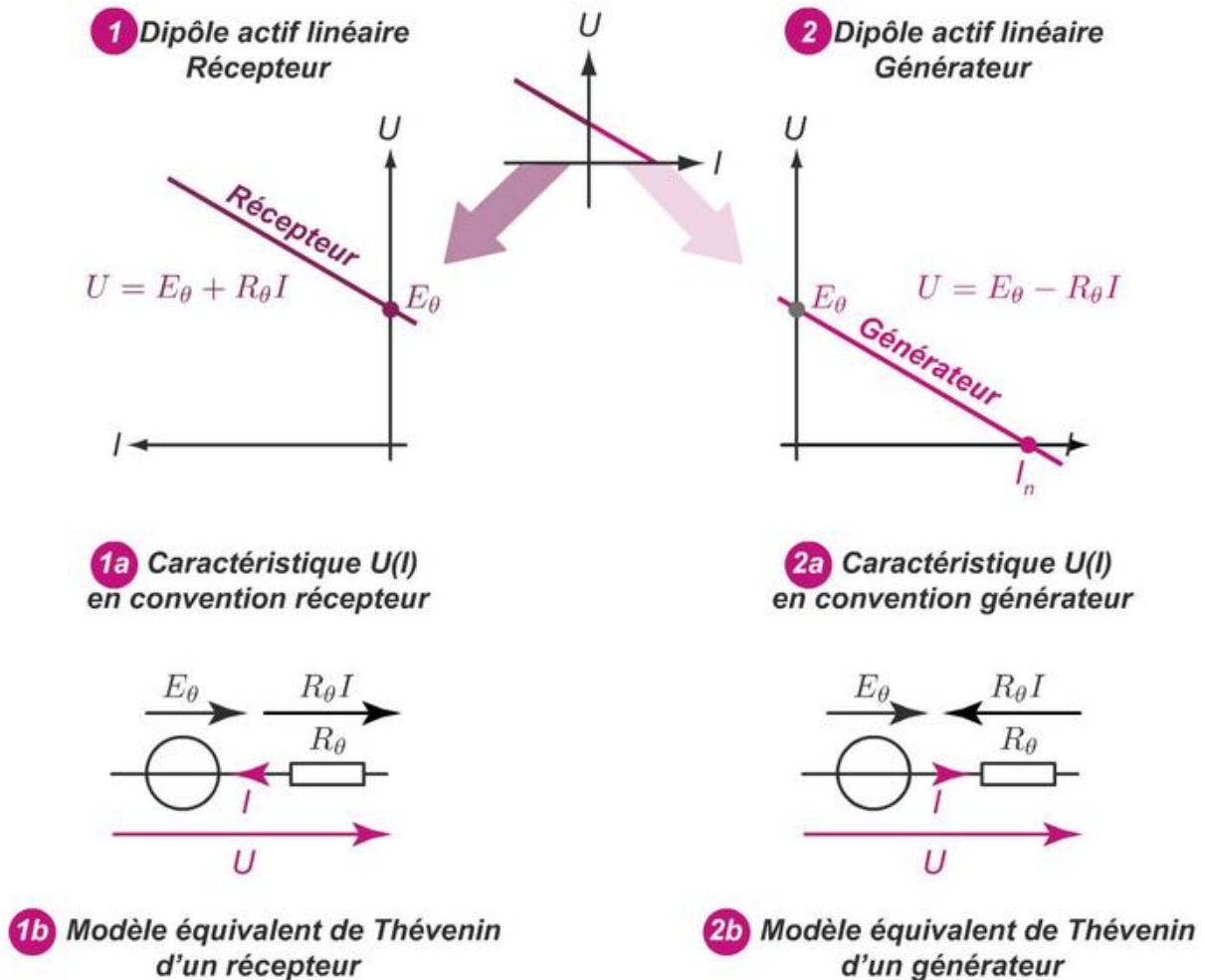


Figure 2.35 – Mise en évidence du modèle équivalent de Thévenin dans le cas d'un dipôle actif linéaire (1) récepteur et (2) générateur.

- Nous commençons par analyser le volet de droite, et plus particulièrement l'encart (2a) où est reportée l'allure de la tension  $U$  mesurée aux bornes d'un dipôle actif linéaire générateur en fonction du courant  $I$ . Il s'agit d'une droite, qui coupe l'axe des ordonnées en  $U = E_\theta$  et l'axe des abscisses en  $I = I_n$ . Nous définissons ainsi les deux premières grandeurs caractéristiques du dipôle, qui sont la **tension à vide**  $E_\theta$ , c'est-à-dire la tension aux bornes du dipôle quand celui-ci ne débite aucun courant, et le **courant de court-circuit**  $I_n$ , qui correspond au courant débité par le générateur lorsque la diffé-

rence de potentiels à ses bornes est nulle. On exprime ensuite l'équation de la droite  $U(I)$  au travers de la relation

$$U = E_\theta - R_\theta I \quad (2.40)$$

en introduisant la quantité  $R_\theta$ . Celle-ci est homogène à une résistance étant donné qu'elle est égale au rapport

$$R_\theta = \frac{E_\theta}{I_n} \quad (2.41)$$

En se plaçant en convention générateur, et en positionnant la source de f.é.m  $E_\theta$  et la résistance  $R_\theta$  comme indiqué dans l'encart 2(b) de la figure 2.35, les grandeurs  $U$  et  $I$  vérifient la relation (2.41). La tension à vide  $E_\theta$  est alors appelée la **tension de Thévenin**, et la résistance  $R_\theta$  est la **résistance de Thévenin**. En quelque sorte, ces deux grandeurs représentent la f.é.m et la résistance internes du dipôle générateur.

- L'analyse du volet de gauche (1) est à peu près similaire à celle du volet (2), si ce n'est que l'on se place dans ce cas en convention récepteur afin que le modèle équivalent de Thévenin reporté en (1a) vérifie la relation affine

$$U = E_\theta + R_\theta I \quad (2.42)$$

Les grandeurs de Thévenin  $E_\theta$  et  $R_\theta$  sont les mêmes que précédemment.

En régime continu, tout dipôle linéaire peut être représenté par son modèle équivalent de Thévenin constitué d'une source de tension de force électromotrice  $E_\theta$  en série avec une résistance  $R_\theta$ .

### Exercice 2.15

Une pile délivre une tension à vide de 1,5 V et un courant de court-circuit de 2,5 A.

1. Déterminer son modèle équivalent de Thévenin.
2. Quelle tension sera disponible aux bornes de la pile si celle-ci délivre un courant de 1 A ?

**Solution 2.15**

1. La pile se modélise comme une source de tension de f.é.m  $E_\theta = 1,5 \text{ V}$  en série avec une résistance  $R_\theta$ . Cette dernière se calcule à l'aide des mesures effectuées :

$$R_\theta = \frac{E_\theta}{I_n} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6 \Omega$$

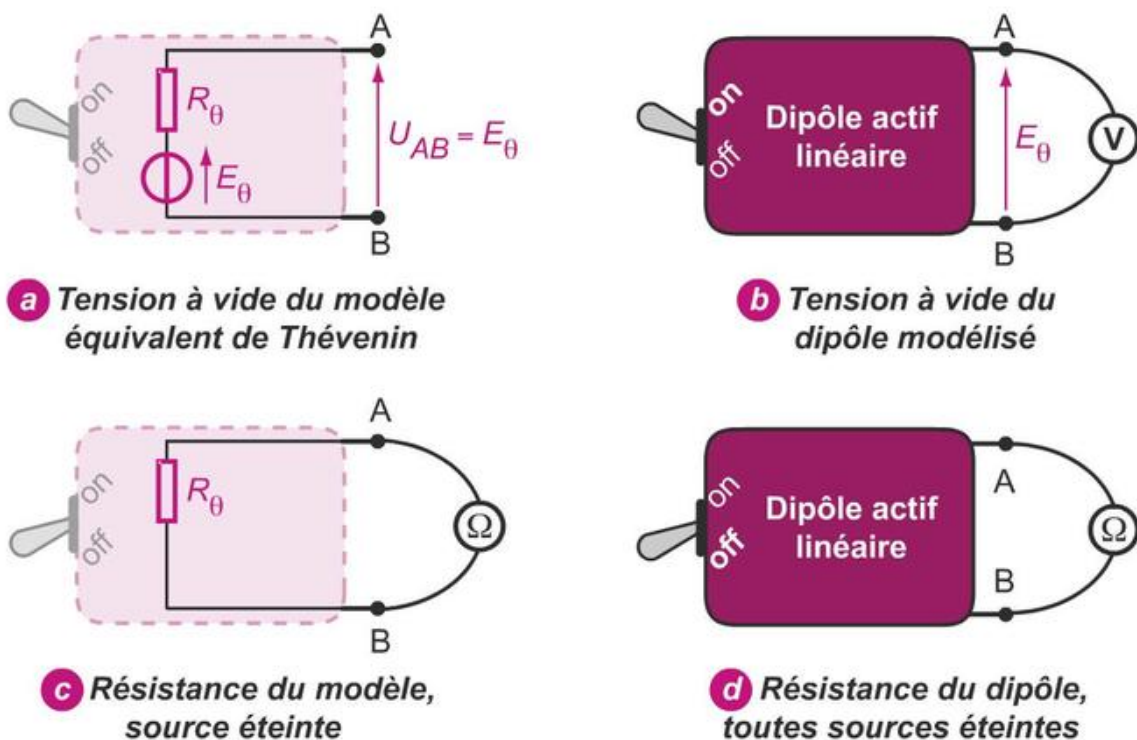
2. Si la pile débite 1 A, la tension à ses bornes devient

$$U = E_\theta - R_\theta I = 1,5 - 0,6 \cdot 1 = 0,9 \text{ V}$$

La pile, lorsqu'elle délivre un courant de 1 A, présente une tension à ses bornes de 0,9 V.

**b) Détermination des grandeurs de Thévenin**

Afin de déterminer les grandeurs  $E_\theta$  et  $R_\theta$ , nous avons reporté sur la figure 2.36 un dipôle actif linéaire dont la géométrie exacte n'est pas connue. Celui-ci est caché dans une boîte, de sorte que seules ses bornes A et B sont accessibles.



**Figure 2.36** – Détermination de la tension et de la résistance de Thévenin  $E_\theta$  et  $R_\theta$ .

- Dans le volet (a), le dipôle est représenté par son modèle équivalent de Thévenin. Si les bornes A et B sont laissées en circuit ouvert alors que la source est allumée, le courant ne peut pas circuler : la chute de tension sur  $R_\theta$  est donc nulle et, en vertu de la loi des mailles, la tension mesurée entre les bornes est égale à la tension de Thévenin. Ceci étant vrai quel que soit le dipôle actif linéaire caché dans la boîte, la tension de Thévenin se détermine toujours, que ce soit par la mesure ou par le calcul, en laissant toutes les sources constituant le dipôle allumées et en déterminant sa tension à vide. C'est ce que montre le volet (b) de la figure.

La tension de Thévenin d'un dipôle actif linéaire est égale à la tension à vide régnant entre ses bornes lorsque toutes les sources sont allumées.

$$E_\theta = U_{AB} \text{ à vide}$$

- Nous faisons, pour les volets (c) et (d), une analyse similaire. Lorsque la source de Thévenin est éteinte, la résistance du dipôle vue des ses bornes A et B est égale à la résistance  $R_\theta$ . Aussi, la résistance de Thévenin se détermine toutes sources éteintes, avec un ohmmètre dans le cas d'une mesure, et en faisant des associations de résistances dans le cas d'un calcul.

La résistance de Thévenin  $R_\theta$  d'un dipôle actif linéaire est égale à la résistance du dipôle vue de ses bornes A et B lorsque toutes les sources sont éteintes.

$$R_\theta = R_{AB} \text{ toutes sources éteintes}$$

### Exercice 2.16

Déterminer le modèle équivalent de Thévenin du circuit de la figure 2.37.

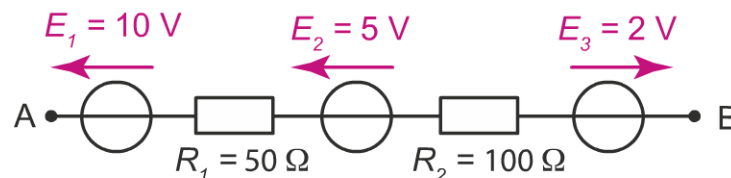


Figure 2.37 – Circuit de l'exercice 2.16.

## Solution 2.16

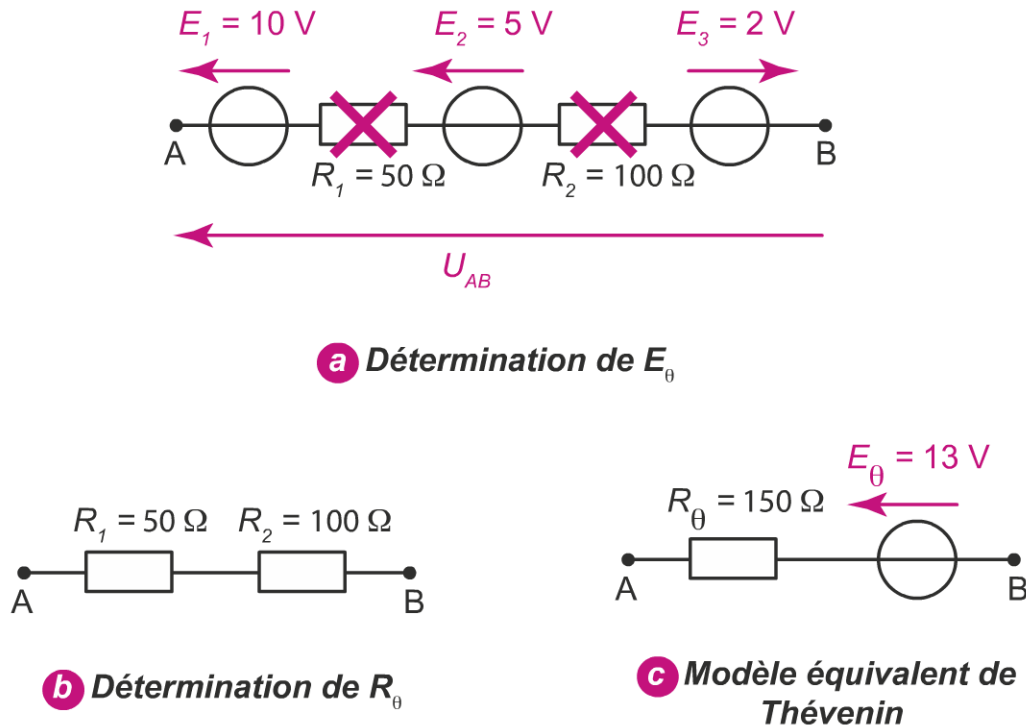


Figure 2.38 – Correction de l'exercice 2.16.

- Nous déterminons tout d'abord la tension de Thévenin  $E_\theta$ . Pour ce faire, nous plaçons le dipôle en circuit ouvert, comme représenté sur le volet (a) de la figure 2.38. En repérant le courant  $I$  de B vers A, la loi des mailles indique que

$$U_{AB} = E_1 - R_1 I + E_2 - R_2 I - E_3$$

Mais, le circuit étant ouvert, le courant ne peut pas circuler, de sorte que  $I = 0$  : les chutes de tension sur les deux résistances  $R_1 I$  et  $R_2 I$  sont nulles. Aussi

$$E_\theta = E_1 + E_2 - E_3 = 10 + 5 - 2 = 13 \text{ V}$$

- La résistance  $R_\theta$  se détermine en éteignant toutes les sources. Dans ces conditions, la résistance à déterminer est celle du volet (b) de la figure, soit

$$R_\theta = R_{AB} = R_1 + R_2 = 150 \text{ } \Omega$$

Une règle d'association des sources de tension se trouvant dans une même branche de circuit en présence de résistances peut être déduite de cet exercice.

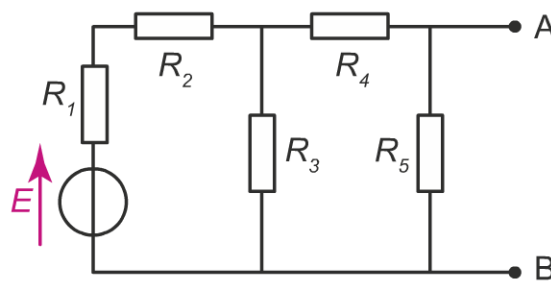
Lorsque plusieurs dipôles de Thévenin se trouvent dans une même branche, on peut les associer en faisant la somme arithmétique de leurs résistances et la somme algébrique de leurs forces électromotrices.

**Exercice 2.17**

On considère le circuit représenté sur la figure 2.39.

1. Déterminer le modèle équivalent du circuit vu des points A et B en appliquant le théorème de Thévenin.
2. Déterminer la tension aux bornes d'une résistance de  $5 \Omega$  connectée entre les points A et B.

On donne  $E = 40 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 8 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 5 \Omega$  et  $R_5 = 10 \Omega$ .



**Figure 2.39** – Figure de l'exercice 2.17. On donne  $E = 40 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 8 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 5 \Omega$  et  $R_5 = 10 \Omega$ .

**Solution 2.17**

1. Le circuit représenté sur la figure est un dipôle actif linéaire, car il n'est composé que de sources et de résistances. On peut donc appliquer le théorème de Thévenin. Déterminons les grandeurs  $R_\theta$  et  $E_\theta$ .

**Étape 1 :** La résistance de Thévenin  $R_\theta$  s'obtient en éteignant la source de tension et en calculant la résistance équivalente vue des points A et B, comme indiqué sur la figure 2.40.

Après avoir associé les résistances et redessiné le circuit en ligne, on observe que

$$R_{AB} = R_5 // [R_4 + R_3 // (R_1 + R_2)]$$

avec

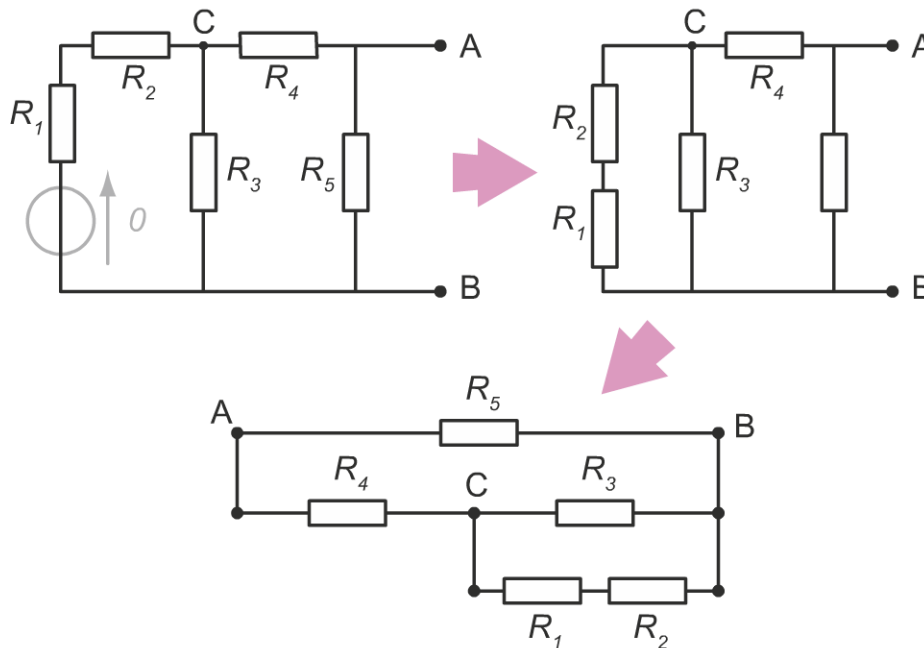
$$R_3 // (R_1 + R_2) = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(2 + 8) \cdot 10}{2 + 8 + 10} = 5 \Omega$$

et

$$R_4 + R_3 // (R_1 + R_2) = 5 \Omega + R_4 = 5 + 5 = 10 \Omega \quad (2.43)$$

de sorte que

$$R_\theta = \frac{10 \Omega \cdot R_5}{10 \Omega + R_5} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \Omega \quad (2.44)$$



**Figure 2.40** – Exercice 2.17 : détermination de la résistance de Thévenin  $R_\theta$ .

**Étape 2 :** Pour établir la tension de Thévenin vue des points A et B, le plus simple est de procéder par étapes en calculant d'abord la tension  $U_{CB}$  reportée sur la figure 2.41.

Cette tension est mesurée aux bornes de la résistance

$$R_3 // (R_4 + R_5) = 10 \Omega // (5 \Omega + 10 \Omega) = \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 6 \Omega$$

et l'application du pont diviseur permet d'obtenir

$$U_{CD} = E \frac{6 \Omega}{6 \Omega + R_1 + R_2} = 40 \frac{6}{16} = 15 \text{ V}$$

En appliquant une seconde fois la formule du pont diviseur sur les résistances  $R_4$  et  $R_5$ , on obtient

$$E_\theta = U_{AB} = U_{CB} \cdot \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 15 \cdot \frac{10}{5 + 10} = 10 \text{ V} \quad (2.45)$$

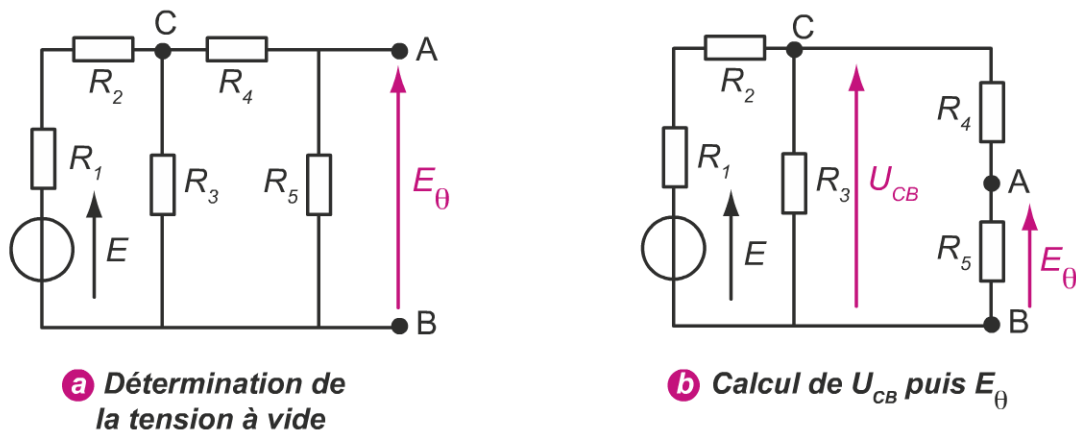


Figure 2.41 – Exercice 2.17 : détermination de la tension de Thévenin  $E_\theta$ .

On obtient alors le modèle équivalent de Thévenin vu des points A et B tel que représenté sur le panel (a) de la figure 2.42 avec

$$\begin{cases} E_\theta = 10 \text{ V} \\ R_\theta = 5 \Omega \end{cases}$$

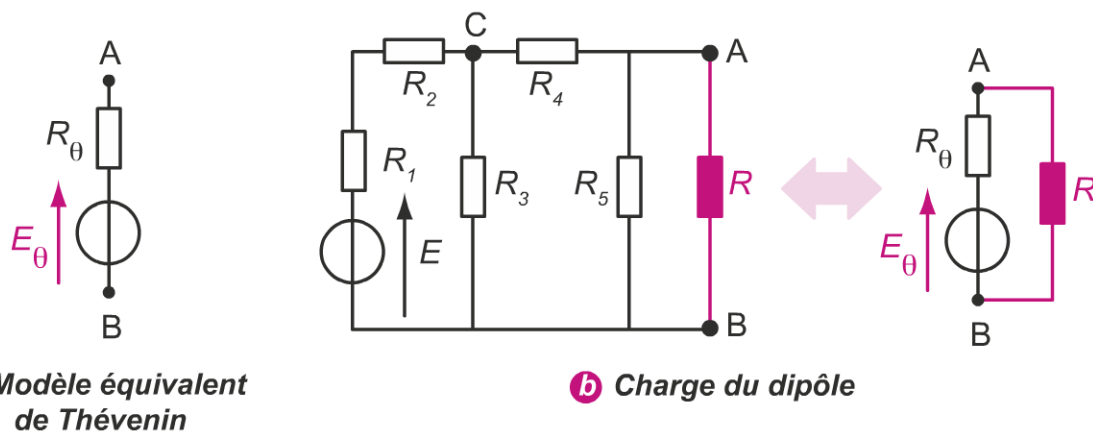


Figure 2.42 – Exercice 2.17 : (a) modèle équivalent de Thévenin et (b) mise en place de la résistance de charge  $R$ .

- On connecte entre A et B une résistance de charge  $R = 5 \Omega$ . Comme le montre le volet (b) de la figure, il est équivalent de procéder à cette connexion sur le circuit initial ou sur le modèle équivalent de Thévenin. Le problème se ramène alors à une application supplémentaire de la formule du pont diviseur de tension. On écrit alors

$$U_R = E_\theta \cdot \frac{R}{R + R_\theta} = 10 \cdot \frac{5}{5 + 5} = 5 \text{ V} \quad (2.46)$$

**Exercice 2.18**

On considère le circuit de l'exercice 2.14. On connecte entre A et B une résistance  $R$ . Déterminer  $R$  sachant qu'elle est traversée par un courant de 0,1 A.

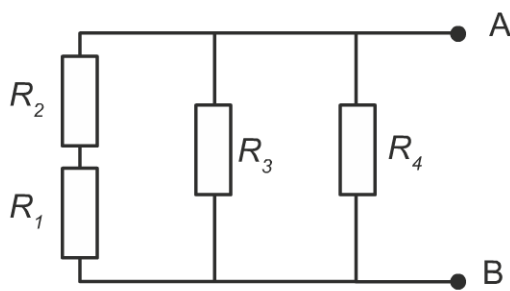
**Solution 2.18**

Nous allons dans un premier temps déterminer le modèle équivalent de Thévenin du dipôle AB (c'est-à-dire du circuit avant que la résistance  $R$  soit connectée).

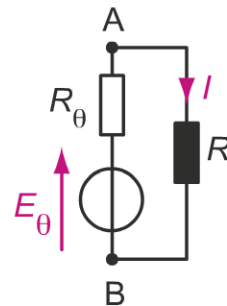
**Étape 1 :** La méthode la plus simple pour déterminer la tension de Thévenin  $E_\theta$  est d'appliquer le théorème de Millman, étant donné que le circuit considéré est un circuit à deux nœuds. Ceci a déjà été fait à la page 80, puisque  $E_\theta$  est la tension à vide du circuit, et nous avons déterminé  $E_\theta = 4$  V.

**Étape 2 :** L'extinction de toutes les sources revient à considérer le circuit reporté sur la figure 2.43(a). Aussi,

$$R_\theta = (R_1 + R_2) // R_3 // R_4 = (10 + 10) // 40 // 40 = 20 // 20 = 10 \Omega$$



**a** Résistance de Thévenin



**b** Charge du dipôle

**Figure 2.43** – Correction de l'exercice 2.18. (a) Détermination de la résistance de Thévenin et (b) charge du dipôle AB.

Connaissant le modèle équivalent de Thévenin, la charge du dipôle reportée sur le volet (b) permet d'établir que

$$I = \frac{E_\theta}{R_\theta + R} = 0,1 \text{ A} \implies R = \frac{E_\theta}{I} - R_\theta = \frac{4}{0,1} - 10 = 30 \Omega$$

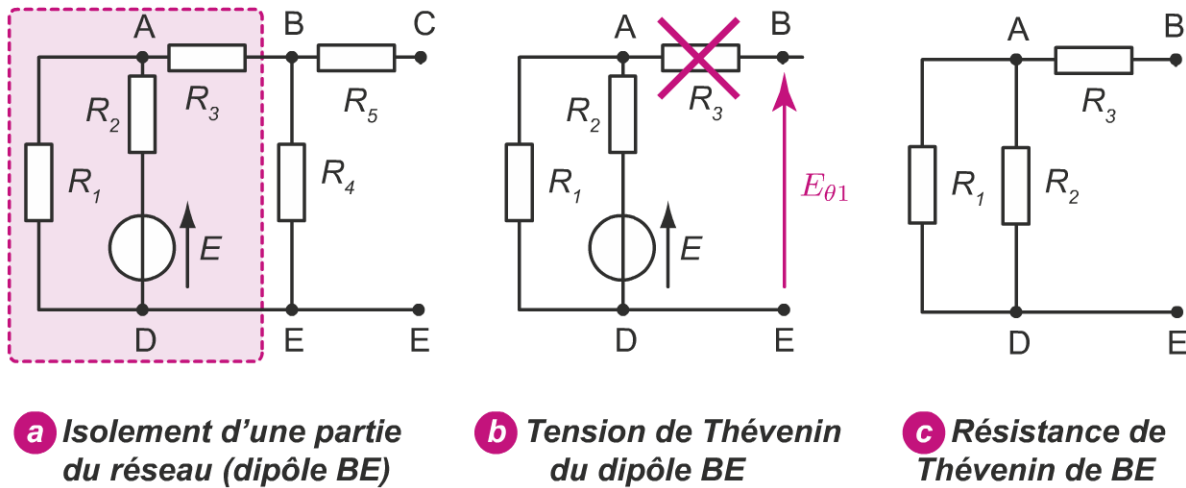
La résistance de charge du circuit vaut 30  $\Omega$ .

**Exercice 2.19**

À l'aide du théorème de Thévenin, déterminer le courant circulant dans la résistance  $R_6$  du circuit de la figure 2.3 page 56.

**Solution 2.19**

Nous allons déterminer le modèle équivalent de Thévenin du circuit privé de la résistance  $R_6$ , reporté dans le volet (a) de la figure 2.44, puis calculer la valeur du courant circulant dans  $R_6$  en appliquant la loi d’Ohm.



**Figure 2.44** – Correction de l'exercice 2.19. (a) Circuit initial. Détermination du modèle équivalent du dipôle BE, encadré dans le volet (a). Calcul de (b) la tension et (c) la résistance de Thévenin.

Pour déterminer le modèle équivalent de Thévenin du dipôle CE, nous allons procéder par étape en déterminant dans un premier temps celui de la partie de réseau que nous avons encadrée.

**Détermination du modèle équivalent de Thévenin du dipôle BE.** La partie encadrée dans le volet (a) est le dipôle BE, hormis  $R_4$ . Nous l'isolons donc complètement du reste du circuit afin d'en déterminer les paramètres de Thévenin :

- La tension, que nous appelons  $E_{\theta 1}$ , est la tension de circuit ouvert du réseau représenté sur le volet (b) de la figure 2.44. Étant donné que le circuit est ouvert entre A et E, il n'y a pas de courant qui circule : la résistance  $R_3$  n'est pas alimentée et n'est responsable d'aucune chute de tension. De fait,  $E_{\theta 1}$  est la tension aux bornes de  $R_1$  et se calcule comme

$$E_{\theta 1} = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10 \cdot \frac{20}{20 + 10} = 6,67 \text{ V}$$

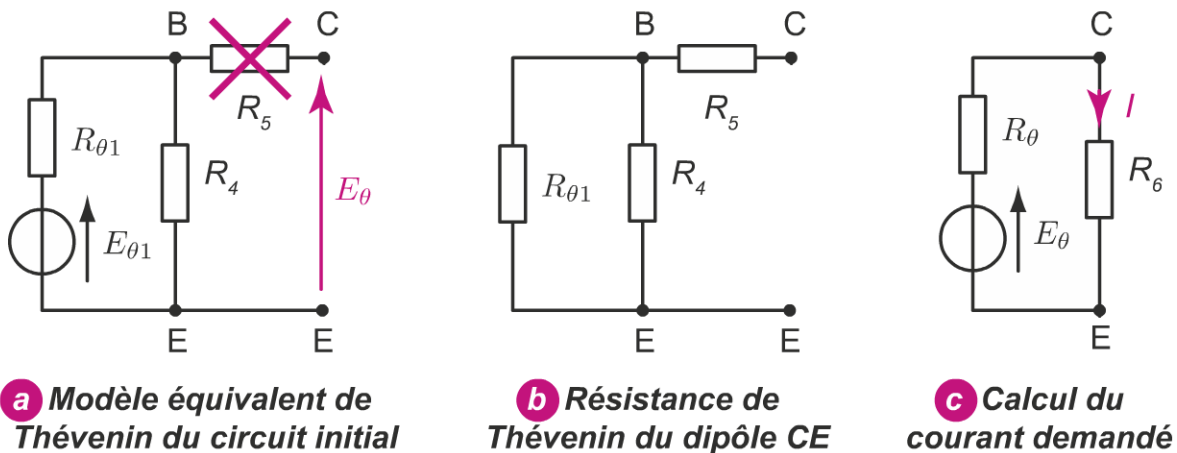
- La résistance de Thévenin  $R_{\theta 1}$  est calculée à l'aide du volet (c). On a

$$R_{\theta 1} = R_3 + (R_1 // R_2) = 20 + \left( \frac{20 \cdot 10}{20 + 10} \right) = 26,7 \Omega$$

**Détermination du modèle équivalent de Thévenin du dipôle CE.** Nous nous reportons à la figure 2.45 pour déterminer le modèle de Thévenin du circuit initial. La partie encadrée dans la figure 2.44(a), c'est-à-dire le dipôle BE, est remplacée par son modèle équivalent (déterminé précédemment).

— La tension de Thévenin  $E_\theta$  est déterminée comme indiqué dans la figure 2.45(a). La résistance  $R_5$  n'étant pas alimentée du fait de l'ouverture du circuit entre C et E,  $E_\theta$  se mesure directement sur  $R_4$ , de sorte que

$$E_\theta = E_{\theta 1} \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_{\theta 1}} = 6,67 \cdot \frac{20}{20 + 26,7} = 2,86 \text{ V}$$



**Figure 2.45** – Correction de l'exercice 2.19. (a), (b) Détermination du modèle équivalent de Thévenin du dipôle CE. (c) Calcul du courant circulant dans  $R_6$ .

— La résistance de Thévenin  $R_\theta$  s'écrit, comme le montre le volet (b),

$$R_\theta = R_5 + (R_4 // R_{\theta 1}) = 10 + \frac{20 \cdot 26,7}{20 + 26,7} = 21,4 \Omega$$

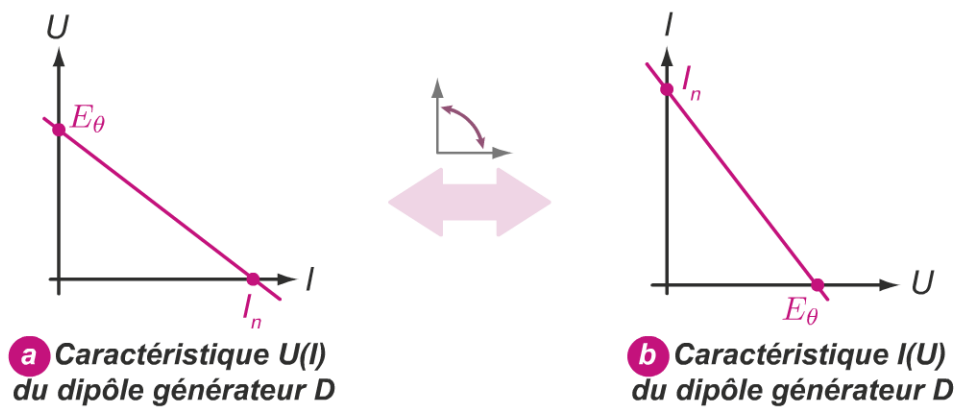
**Résolution du problème.** Connaissant le modèle équivalent de Thévenin du dipôle CE, nous connectons la résistance  $R_6$  comme indiqué sur le volet (c) de la figure 2.45. Le courant  $I$  se calcule alors au travers de la loi d'Ohm :

$$I = \frac{E_\theta}{R_\theta + R_6} = \frac{2,86}{21,4 + 10} = 0,0910 \text{ A}$$

## 2.5.5 Théorème de Norton

### a) Modèle de Norton

Nous avons vu à la page 90 que le modèle de Thévenin consiste en l'association d'une source de tension et d'une résistance formant un dipôle dont la caractéristique  $U(I)$  est reportée sur le volet (a) de la figure 2.46.



**Figure 2.46** – (a) Caractéristique  $U(I)$  d'un dipôle générateur  $D$ , utilisée pour dresser le modèle équivalent de Thévenin. (b) Caractéristique  $I(U)$  de ce même dipôle  $D$ , utilisée pour dresser le modèle équivalent de Norton. Les deux courbes représentent la même équation, mais abscisses et ordonnées sont permutées.

Nous allons faire un raisonnement analogue pour dresser le modèle de Norton, en partant cette fois de la caractéristique  $I(U)$ , reportée sur le volet (b). Il est important de noter que ces deux courbes représentent un même dipôle  $D$ , et que le passage de l'une à l'autre se fait en permutant les axes des abscisses et des ordonnées. Le modèle de Norton que nous allons donner sera donc équivalent à celui de Thévenin.

Les modèles de Thévenin et de Norton sont deux manières de représenter le même circuit.

On retrouve les grandeurs  $E_\theta$  et  $I_n$ , respectivement la tension à vide et le courant de court-circuit. À condition d'introduire une grandeur  $R_n$  avec

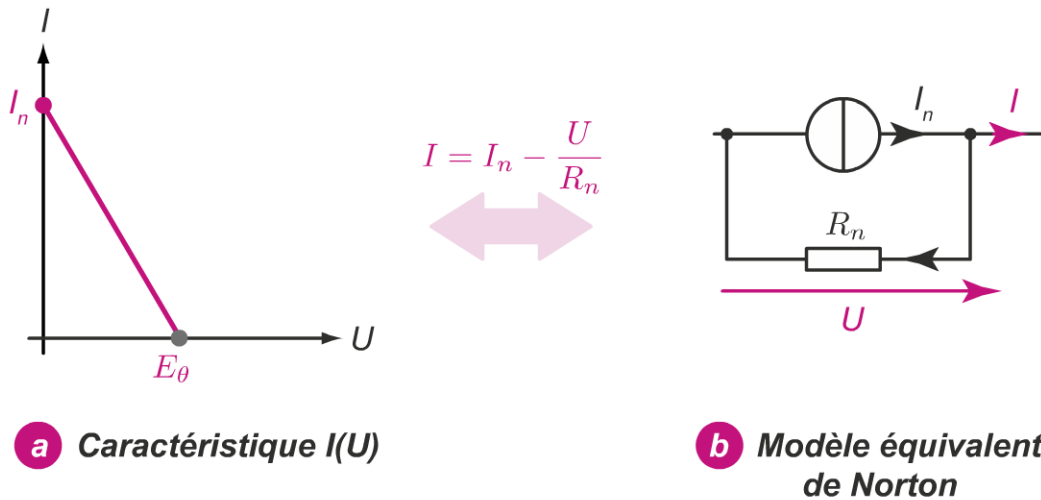
$$R_n = \frac{E_\theta}{I_n} \quad (2.47)$$

on décrit la caractéristique du volet (b) au travers de l'équation de Norton

$$I = I_n - \frac{U}{R_n} \quad (2.48)$$

On appelle  $I_n$  et  $R_n$  le courant et la résistance de Norton, respectivement. Le courant du dipôle, maximal quand il est court-circuité ( $U = 0$ ), perd de son intensité à mesure que la tension à ses bornes augmente, et devient nul pour une tension égale à  $E_\theta$ . La relation (2.48) décrit la séparation du courant dans

un nœud, le terme  $U/R_n$  quantifiant le courant traversant la résistance  $R_n$  soumise à la d.d.p  $U$ . Le modèle équivalent de Norton est reporté, en même temps que la caractéristique à laquelle il correspond, sur la figure 2.47.



**Figure 2.47** – La caractéristique  $I(U)$  (volet (a)) et le modèle équivalent de Norton (volet (b)) sont décrits par la même équation.

En régime continu, tout dipôle actif linéaire peut être représenté par son modèle équivalent de Norton constitué d'une source de courant  $I_n$  en parallèle avec une résistance  $R_n$ .

### b) Détermination des grandeurs de Norton

Afin de déterminer les grandeurs  $I_n$  et  $R_n$ , nous avons reporté sur la figure 2.48 un dipôle actif linéaire dont la géométrie exacte n'est pas connue. Celui-ci est caché dans une boîte, de sorte que seules ses bornes A et B sont accessibles.

- Dans le volet (a), le dipôle est représenté par son modèle équivalent de Norton. Si les bornes A et B sont mises en court-circuit alors que la source est allumée, l'intensité du courant circulant dans la résistance  $R_n$  est nulle. Dans ces conditions, le courant  $I$  circulant entre les bornes A et B est égal à la totalité du courant de Norton  $I_n$ . Ce que nous venons de dire reste vrai quel que soit le dipôle actif linéaire caché dans la boîte. Aussi, le courant de Norton d'un dipôle se détermine toujours, que ce soit par la mesure ou par le calcul, en laissant toutes les sources qu'il contient allumées et en déterminant

son courant de court-circuit. C'est ce que montre le volet (b) de la figure.

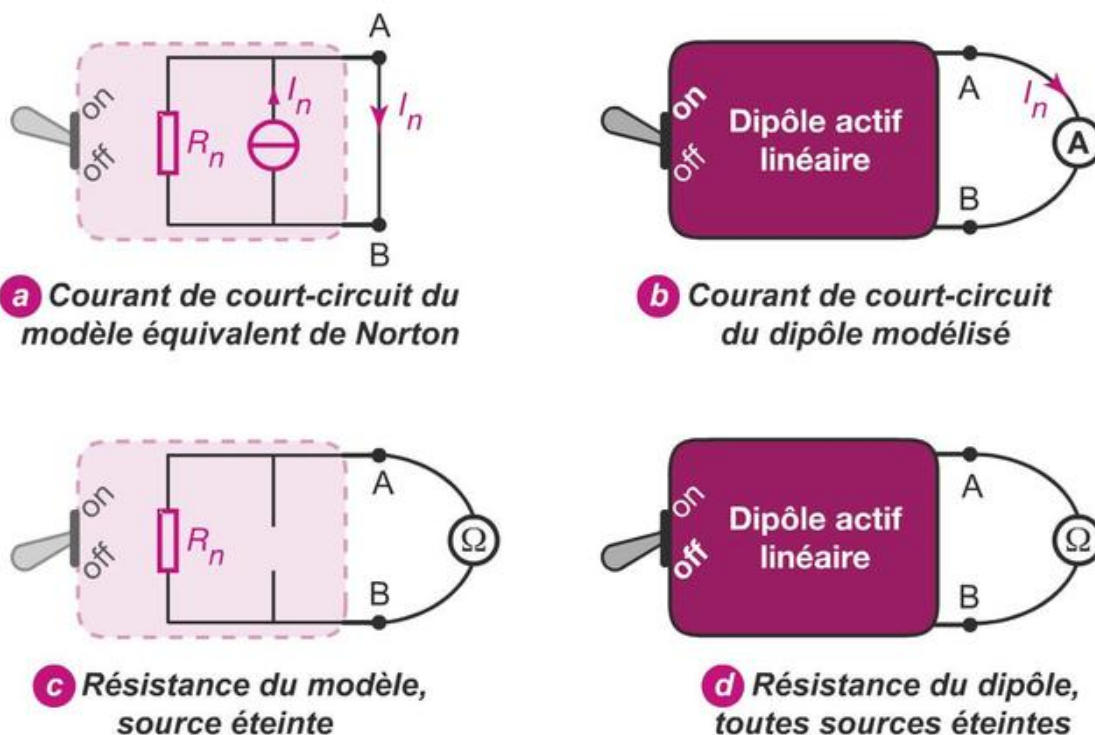


Figure 2.48 – Détermination du courant et de la résistance de Norton  $I_n$  et  $R_n$ .

Le courant de Norton d'un dipôle actif linéaire est égal au courant circulant entre ses bornes lorsque celles-ci sont mises en court-circuit, toutes sources allumées.

$$I_n = I_{AB} \text{ en court circuit}$$

- Nous faisons, pour les volets (c) et (d), une analyse similaire. Lorsque la source de Norton est éteinte, la résistance du dipôle vue de ses bornes A et B est égale à la résistance  $R_n$ . Aussi, la résistance de Norton se détermine toutes sources éteintes, avec un ohmmètre dans le cas d'une mesure, et en faisant des associations de résistances dans le cas d'un calcul.

La résistance de Norton  $R_n$  d'un dipôle actif linéaire est égale à la résistance du dipôle vue de ses bornes A et B lorsque toutes les sources sont éteintes.

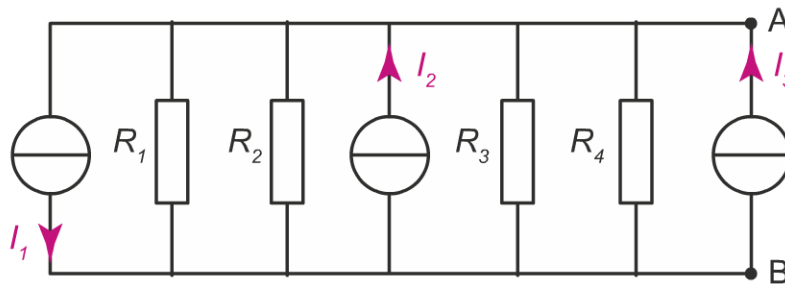
$$R_n = R_{AB} \text{ toutes sources éteintes}$$

Remarquons que la résistance de Norton et la résistance de Thévenin sont définies et se déterminent exactement de la même façon :

$$R_n = R_\theta \quad (2.49)$$

### Exercice 2.20

Déterminer le modèle équivalent de Norton du circuit représenté sur la figure 2.49 avec  $I_1 = 100 \text{ mA}$ ,  $I_2 = I_3 = 200 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = 150 \Omega$  et  $R_3 = R_4 = 100 \Omega$ .



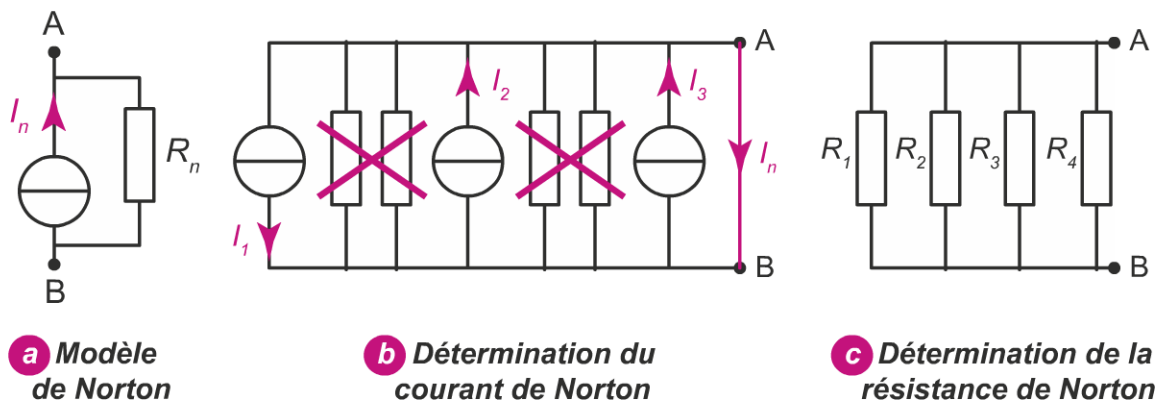
**Figure 2.49** – Circuit électrique de l'exercice 2.20. On donne  $I_1 = 100 \text{ mA}$ ,  $I_2 = I_3 = 200 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = 150 \Omega$  et  $R_3 = R_4 = 100 \Omega$ .

### Solution 2.20

Déterminons les éléments du modèle équivalent de Norton de la figure 2.50(a).

**Étape 1 :** Nous commençons par déterminer le courant de Norton  $I_n$ , comme indiqué sur le volet (b) : le court-circuit placé entre A et B draine tout le courant, de sorte que les quatre résistances ne reçoivent plus aucune intensité. Elle peuvent donc être supprimées du réseau dans cette configuration. Le courant se calcule en faisant la loi des nœuds :

$$I_n = -I_1 + I_2 + I_3 = -0,100 + 0,200 + 0,200 = 0,300 \text{ A} = 300 \text{ mA}$$



**Figure 2.50** – Correction de l'exercice 2.20. (a) Modèle équivalent de Norton. Détermination (b) du courant de Norton et (c) de la résistance de Norton.

**Étape 2 :** La résistance de Norton  $R_n$  se détermine en éteignant les trois sources. Comme ce sont des sources de courant, on les remplace par des circuits ouverts, ce qui revient à les enlever du réseau. On obtient alors le circuit représenté dans le volet (c) :

$$\begin{aligned}
 R_n &= R_1 // R_2 // R_3 // R_4 = 150 \, \Omega // 150 \, \Omega // 100 \, \Omega // 100 \, \Omega \\
 &= 75 \, \Omega // 50 \, \Omega = \frac{75 \cdot 50}{75 + 50} = 30 \, \Omega
 \end{aligned}$$

Les éléments du modèle de Norton sont donc  $I_n = 0,3 \text{ A}$  et  $R_n = 30 \, \Omega$ .

Une règle d'association des sources de courant connectées en parallèle entre elles et en parallèle avec des résistances peut être déduite de cet exercice.

Lorsque plusieurs dipôles de Norton sont connectés en parallèle, on peut les associer en déterminant la résistance parallèle équivalente et en faisant la somme algébrique des courants de Norton.

### Exercice 2.21

On considère le réseau de la figure 2.4 page 58.

1. Établir le modèle équivalent de Norton du circuit vu des points A et B lorsque l'on retire la résistance  $R$ .
2. En déduire l'intensité du courant qui circule dans la résistance  $R$ .

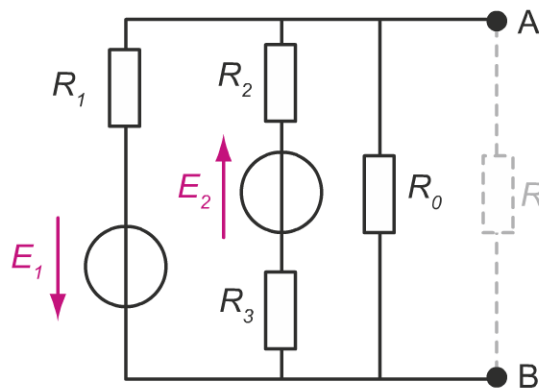


Figure 2.51 – Circuit de l'exercice 2.21, privé de la résistance  $R$ .

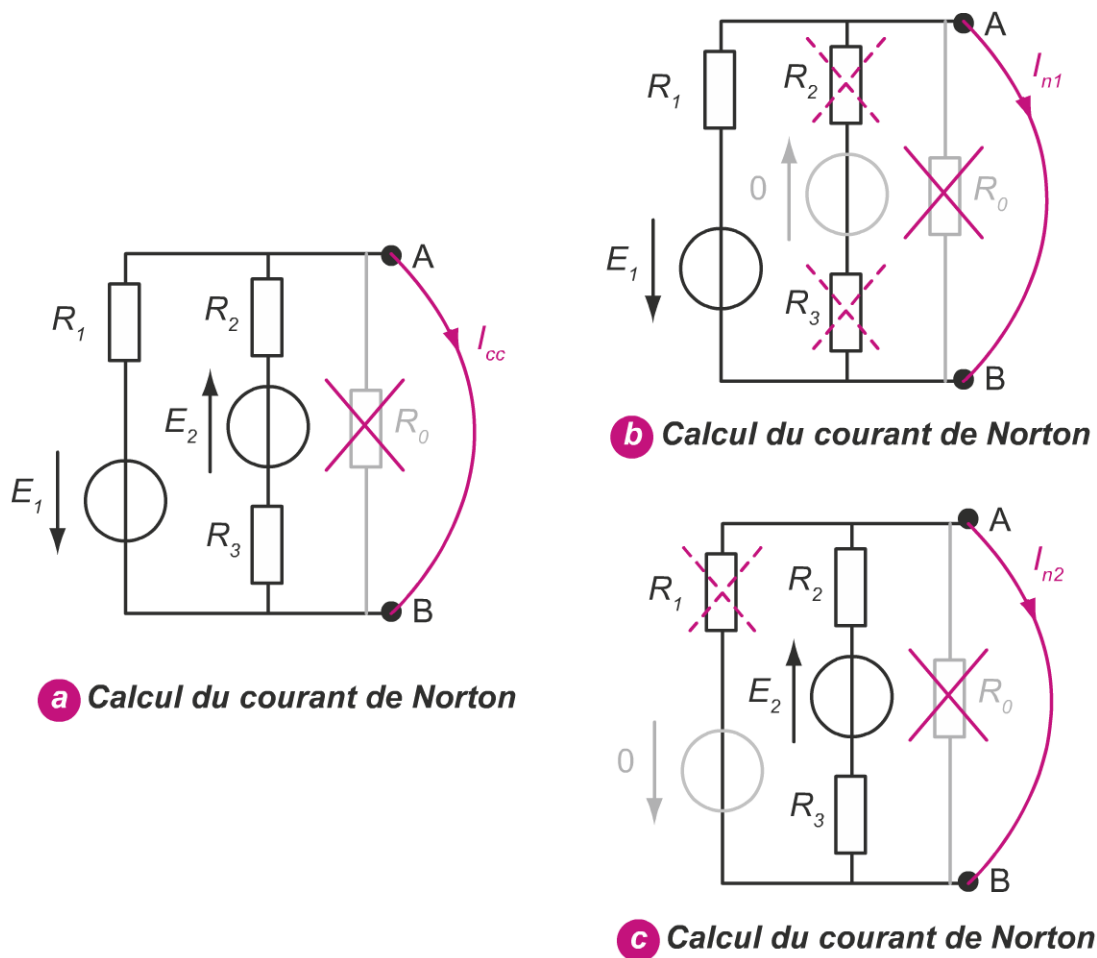
### Solution 2.21

1. Nous avons représenté le circuit privé de la résistance  $R$  sur la figure 2.51.
  - (a) Pour déterminer le modèle équivalent de Norton vu des points A et B lorsque l'on retire la résistance  $R$ , on commence, comme cela est représenté sur le panel (a) de la figure 2.52, par calculer le courant de court-circuit entre le point A et le point B. Pour cela on place entre ces deux points un ampèremètre idéal qui mesure le courant qui circule entre A et B. Comme cet ampèremètre est idéal (c'est-à-dire qu'il ne présente aucune résistance interne), il court-circuite toutes les branches entre A et B qui ne présentent aucune source ; et en particulier la résistance  $R_0$ . Calculons le courant de court-circuit en utilisant le principe de superposition.
    - Le courant  $I_{n1}$  est calculé comme décrit par le volet (b) de la figure 2.52. On éteint la source  $E_2$ , qui est donc remplacée par une connexion équipotentielle. Les résistances  $R_2$  et  $R_3$  se retrouvent alors court-circuitées par le fil placé entre A et B, au même titre que  $R_0$ . La loi d'Ohm permet alors d'exprimer  $I_{n1}$ , en remarquant que  $I_{n1}R_1 = -E_1$  :

$$I_{n1} = \frac{-E_1}{R_1} = \frac{-12}{10} = -1,2 \text{ A}$$

- Nous calculons  $I_{n2}$  comme indiqué sur le volet (c) de la figure 2.52. On éteint la source  $E_1$ , c'est-à-dire qu'on la remplace par une connexion équipotentielle. La résistance  $R_1$  se retrouve à son tour court-circuitée par l'équipotentielle placée entre A et B. La loi d'Ohm permet alors d'exprimer  $I_{n2}$  :

$$I_{n2} = \frac{E_2}{R_2 + R_3} = \frac{6}{20} = 0,3 \text{ A}$$



**Figure 2.52** – Correction de l'exercice 2.21. (a) Détermination du courant de Norton par le principe de superposition : (b) extinction de la source  $E_2$  et (c) extinction de la source  $E_1$ .

— Finalement, le courant de court-circuit, c'est-à-dire le courant de Norton du dipôle équivalent, s'obtient par l'addition

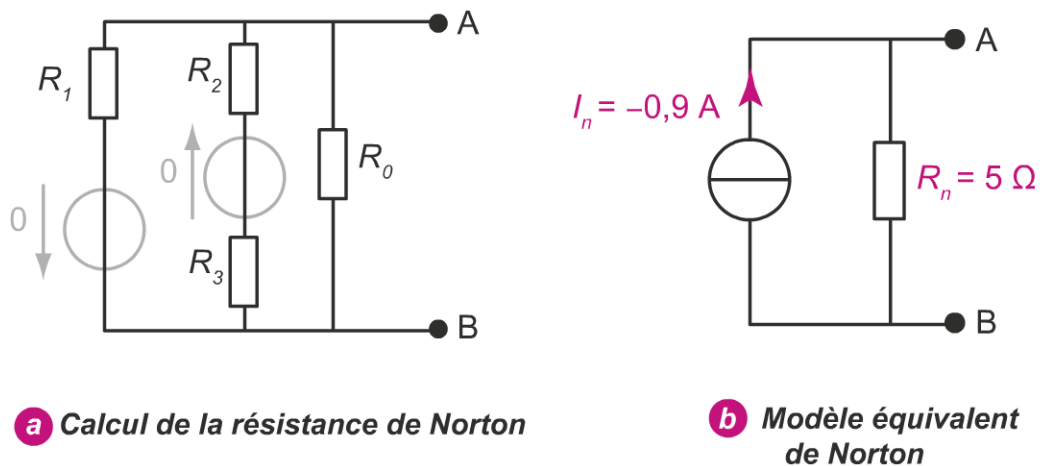
$$I_n = I_{n1} + I_{n2} = -0,9 \text{ A}$$

- (b) On calcule maintenant la résistance équivalente de Norton  $R_n$  vue des points A et B lorsque toutes les sources de courant ou de tension présentes dans le circuit sont éteintes (figure 2.53). La résistance  $R_1$  est en parallèle avec les résistances  $R_2 + R_3$  et avec la résistance  $R_0$ . Il vient alors

$$R_N = R_1 // (R_2 + R_3) // R_0 = 10 // 20 // 20 \Rightarrow R_N = 5 \Omega$$

- (c) On a alors le modèle équivalent de Norton (figure 2.53(b)) avec

$$\begin{cases} I_n &= -0,9 \text{ A} \\ R_n &= 5 \Omega \end{cases}$$



**Figure 2.53** – Correction de l'exercice 2.21. (a) Calcul de la résistance de Norton  $R_n$ . (b) Modèle équivalent de Norton.

2. Le courant qui circule dans la résistance  $R$  se calcule en connectant celle-ci entre les points A et B de la figure 2.53(b). La formule du pont diviseur de courant donne, en orientant  $I$  dans le même sens que  $I_n$ , c'est-à-dire de A vers B,

$$I = I_n \cdot \frac{R_n}{R_n + R} = -0,9 \cdot \frac{5}{5 + 20} = -0,180 \text{ A} = -180 \text{ mA}$$

Il circule dans la résistance  $R$  un courant de 180 mA orienté de B vers A. Ceci est en accord avec le résultat trouvé en appliquant les lois de Kirchhoff dans l'exercice de la page 57.

### Exercice 2.22

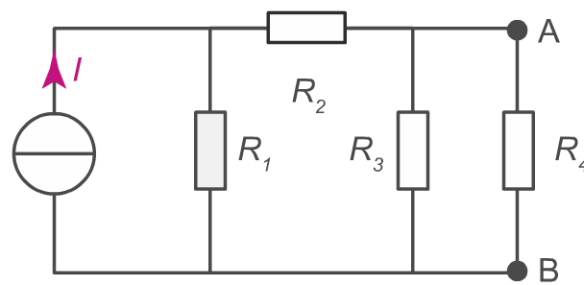
Déterminer la valeur du courant qui circule dans la résistance  $R_4$  du circuit représenté dans la figure 2.54 en appliquant le théorème de Norton. On donne  $I = 1 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ .

### Solution 2.22

On veut déterminer le courant  $I_4$  qui circule dans la résistance  $R_4$  en appliquant le théorème de Norton. On va donc déterminer le modèle équivalent de Norton vu des points A et B lorsque l'on a retiré la résistance  $R_4$ , comme décrit par le volet (a) de la figure 2.55. Ensuite, une simple formule de pont diviseur de courant appliquée en réinsérant  $R_4$  nous donnera  $I_4$ .

- Détermination du modèle de Norton :

- On calcule le courant de court-circuit entre A et B en plaçant une connexion entre ces deux points, comme représenté sur la figure 2.55(b).



**Figure 2.54** – Circuit de l'exercice 2.22. On donne  $I = 1 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ .

La résistance  $R_3$  est alors court-circuitée et le courant  $I_n$  s'obtient en appliquant la formule du pont diviseur de courant :

$$I_n = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1000}{1000 + 1000} = 0,5 \text{ mA}$$

- (b) On retire ensuite la connexion court-circuitant les bornes, et l'on éteint la source de courant, c'est-à-dire qu'on la remplace par un circuit ouvert, comme montré sur la figure 2.55 (c). On a donc  $R_1$  et  $R_2$  en série, le tout en parallèle avec  $R_3$ . La résistance de Norton  $R_n$  est donc

$$\begin{aligned} R_N &= (R_1 + R_2) // R_3 = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ &= \frac{(1000 + 1000) \cdot 2000}{4000} = 1000 \Omega \end{aligned}$$

- (c) Nous obtenons finalement le modèle équivalent de Norton représenté sur le panel (d) de la figure 2.55, avec

$$\begin{cases} I_N &= 0,5 \text{ mA} \\ R_N &= 1 \text{ k}\Omega \end{cases}$$

2. On déduit finalement le courant  $I_4$  circulant dans  $R_4 = 1000 \Omega$  en l'orientant de A vers B, c'est-à-dire dans le sens de  $I$ , et en appliquant la formule du pont diviseur de courant :

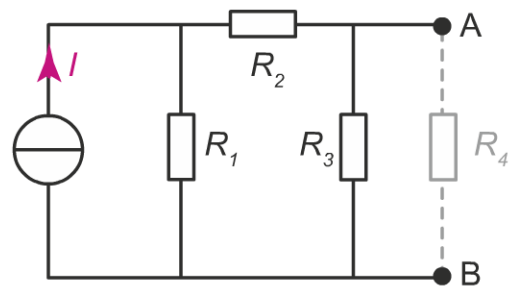
$$I_4 = I_n \cdot \frac{R_N}{R_N + R_4} = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1000}{1000 + 1000} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0,25 \text{ mA}$$

Le courant qui circule dans la résistance  $R_4$  vaut 0,25 mA.

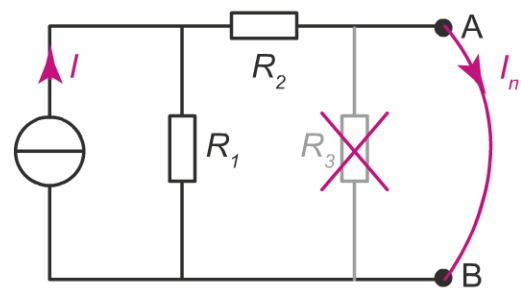
### Exercice 2.23

En appliquant le théorème de Norton, déterminer le courant circulant dans la résistance  $R_2$  du circuit de la figure 2.56. On donne  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_0 = 10 \text{ mA}$ ,

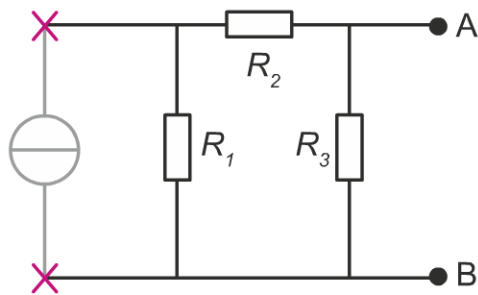
## 2.5 Théorèmes du dipôle linéaire



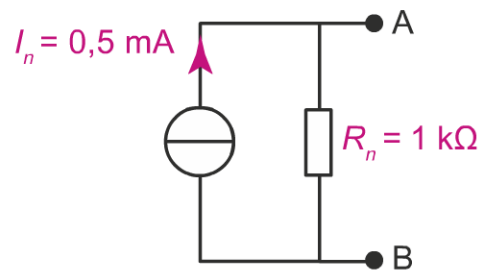
**a** Circuit initial lorsque l'on retire  $R$



**b** Calcul du courant de Norton



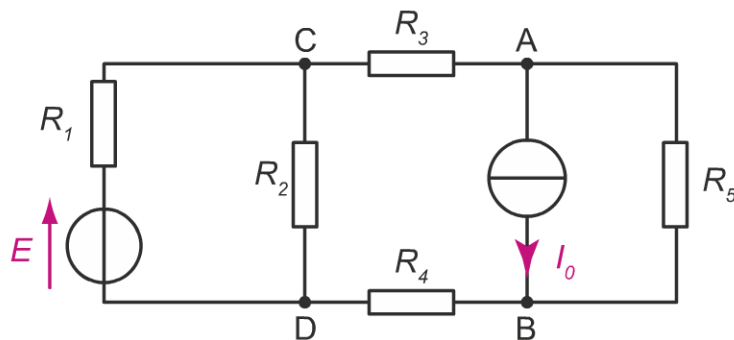
**c** Calcul de la résistance de Norton



**d** Modèle équivalent de Norton

**Figure 2.55** – Correction de l'exercice 2.22.

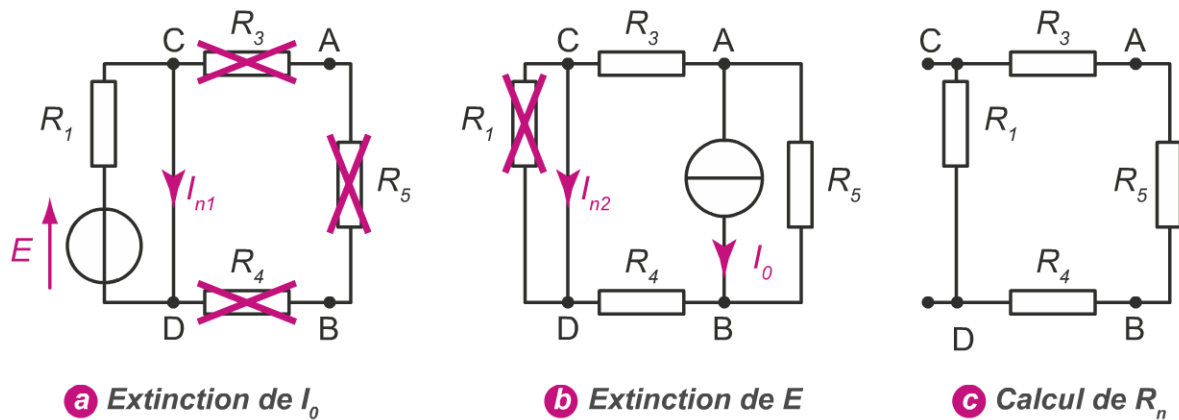
$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1,2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 500 \Omega$ ,  $R_4 = 1,5 \text{ k}\Omega$  et  $R_5 = 2 \text{ k}\Omega$  et  $R_6 = 1,2 \text{ k}\Omega$ .



**Figure 2.56** – Circuit de l'exercice 2.23. On donne  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_0 = 10 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1,2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 500 \Omega$ ,  $R_4 = 1,5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 2 \text{ k}\Omega$ .

### Solution 2.23

Nous appliquons le théorème de Norton au dipôle CD, constitué du circuit privé de  $R_2$ . La détermination du modèle équivalent de Norton de CD revient à remplacer  $R_2$  par un court-circuit. Pour déterminer le courant de court-circuit  $I_n$ , nous appliquons le principe de superposition, comme décrit sur la figure 2.57.



**Figure 2.57** – Correction de l'exercice 2.23. (a) Extinction de la source de courant et (b) extinction de la source de tension. (c) Détermination de  $R_n$ .

- L'extinction de la source de courant laisse la résistance  $R_1$  seule avec la source de tension (volet (a)). En effet,  $R_3$ ,  $R_4$  et  $R_5$  sont court-circuitées. Aussi, on a

$$I_{n1} = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{1000} = 10^{-2} \text{ A} = 10 \text{ mA}$$

- L'extinction de la source de tension mène au court-circuit de  $R_1$  (volet (b)). Le courant  $I_{n2}$  traverse  $R_3$  et  $R_4$ , et se calcule avec le pont diviseur de tension. On remarquera que, les flèches des courants étant en sens opposés, un signe moins (-) doit être rajouté.

$$\begin{aligned} I_{n2} &= -I_0 \cdot \frac{R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = -10^{-2} \cdot \frac{2000}{2000 + 500 + 1500} \\ &= -5 \cdot 10^{-3} \text{ A} = -5 \text{ mA} \end{aligned}$$

Le courant de court-circuit  $I_n$  vaut donc

$$I_n = I_{n1} + I_{n2} = 5 \text{ mA}$$

La résistance de Norton se calcule en éteignant les deux sources et en regardant le circuit privé de  $R_2$  depuis les bornes C et D, ce qui revient à considérer le circuit du volet (c) de la figure 2.57. Ce faisant, on obtient

$$\begin{aligned} R_n &= R_1 // (R_3 + R_4 + R_5) = 1 \text{ k}\Omega // (0,5 \text{ k}\Omega + 1,5 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \\ &= \frac{1000 \cdot 4000}{1000 + 4000} = 800 \Omega \end{aligned}$$

Finalement, le courant  $I$  traversant  $R_2$  se déduit d'un pont diviseur de courant, celle-ci étant, dans le cadre du modèle de Norton, placée en parallèle avec  $R_n = 800 \Omega$  et la source de 5 mA. Ainsi,

$$I = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{R_n}{R_n + R_2} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{800}{800 + 1200} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 2 \text{ mA}$$

La résistance  $R_2$  est traversée par un courant  $I$  d'intensité 2 mA. Précisons, même si cela n'est pas demandé par l'énoncé, que  $I$  va de C vers D.

### 2.5.6 Transformation Thévenin-Norton

#### a) Mise en évidence

Les modèles de Thévenin et de Norton, comme nous l'avons dit plus haut, sont deux représentations différentes d'un même dipôle. Ainsi, si l'on connaît le modèle équivalent de Thévenin d'un dipôle donné, il est possible de déterminer son modèle équivalent de Norton en posant

$$\begin{cases} R_n = R_\theta \\ I_n = \frac{E_\theta}{R_\theta} \end{cases} \quad (2.50)$$

comme reporté sur la figure 2.58.

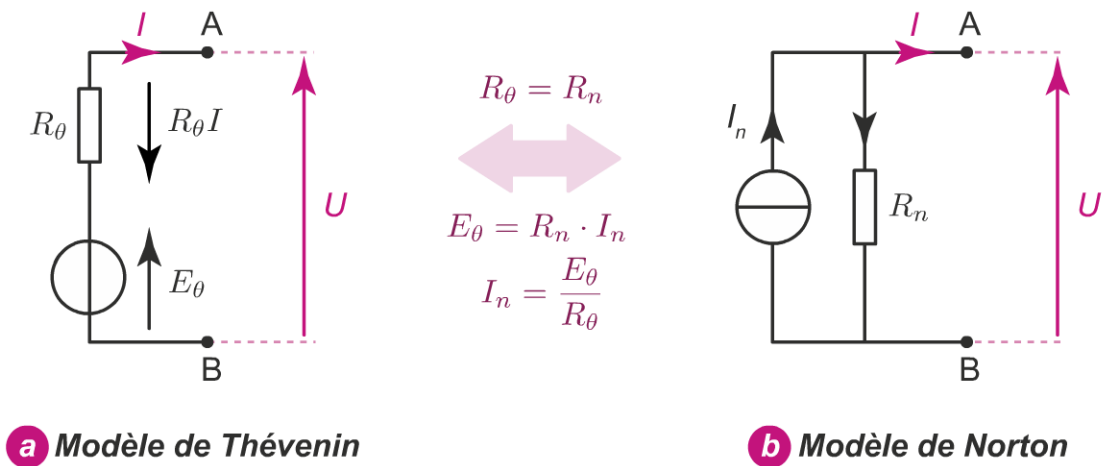


Figure 2.58 – Équivalence entre (a) le modèle de Thévenin et (b) le modèle de Norton.

À l'inverse, le modèle équivalent de Thévenin d'un dipôle se déduit de son modèle équivalent de Norton en appliquant

$$\begin{cases} R_\theta = R_n \\ E_\theta = R_n \cdot I_n \end{cases} \quad (2.51)$$

## Chapitre 2 – Réseaux linéaires en régime continu

On dit que l'on peut transformer un modèle en un autre : c'est la transformation de Thévenin-Norton (ou de Norton-Thévenin).

### Exercice 2.24

Donner les modèles équivalents de Norton des circuits

1. de la figure 2.39 page 96 ;
2. de la figure 2.14 page 68.

### Solution 2.24

1. Nous avons déterminé le modèle équivalent de Thévenin de ce premier circuit à la page 98, et l'avons reporté sur le volet (a) de la figure 2.59. La transformation de Thévenin-Norton donne  $R_n = R_\theta = 5 \Omega$  et

$$I_n = \frac{E_\theta}{R_\theta} = \frac{10 \text{ V}}{5 \Omega} = 2 \text{ A}$$

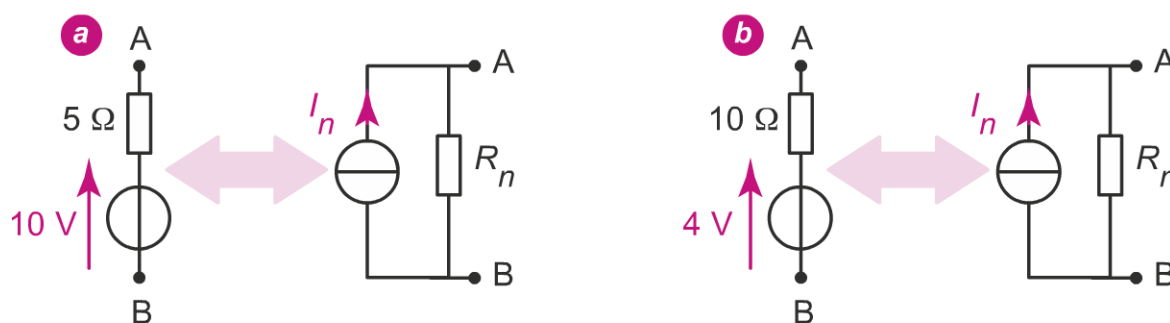


Figure 2.59 – Correction de l'exercice 2.24.

2. Nous avons déterminé le modèle équivalent de Thévenin de ce second circuit à la page 99 et l'avons reporté sur le volet (b) de la figure 2.59. La transformation de Thévenin-Norton donne  $R_n = R_\theta = 10 \Omega$  et

$$I_n = \frac{E_\theta}{R_\theta} = \frac{4 \text{ V}}{10 \Omega} = 0,4 \text{ A} = 400 \text{ mA}$$

### Exercice 2.25

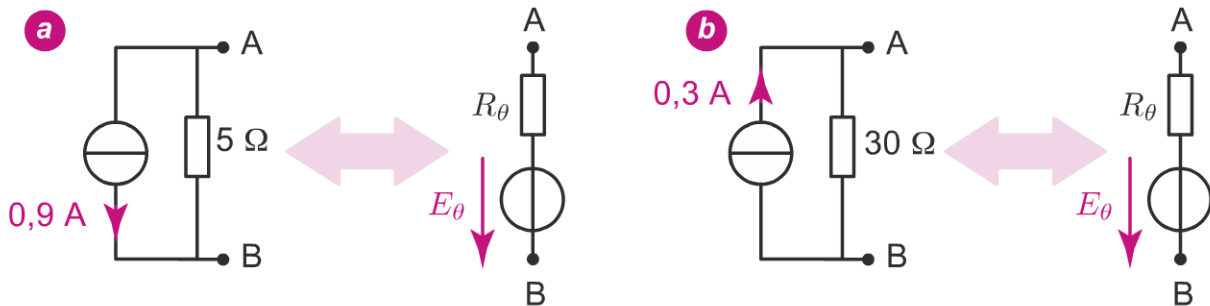
Déterminer les modèles équivalent de Thévenin des circuits :

1. de la figure 2.51 page 107 ;
2. de la figure 2.49 page 105.

**Solution 2.25**

1. Nous avons déterminé le modèle équivalent de Norton du circuit considéré à la page 109 et l'avons reporté sur le volet (a) de la figure 2.60 en repérant le courant de Norton de façon à ce que son intensité soit positive. La transformation en modèle de Thévenin nous donne  $R_\theta = R_n = 5 \Omega$  et

$$E_\theta = R_n \cdot I_n = 5 \cdot 0,9 = 4,5 \text{ V}$$



**Figure 2.60** – Correction de l'exercice 2.25.

2. Nous avons déterminé le modèle équivalent de Norton du circuit considéré à la page 106 et l'avons reporté sur le volet (b) de la figure 2.60. La transformation en modèle de Thévenin nous donne  $R_\theta = R_n = 30 \Omega$  et

$$E_\theta = R_n \cdot I_n = 30 \cdot 0,3 = 9 \text{ V}$$

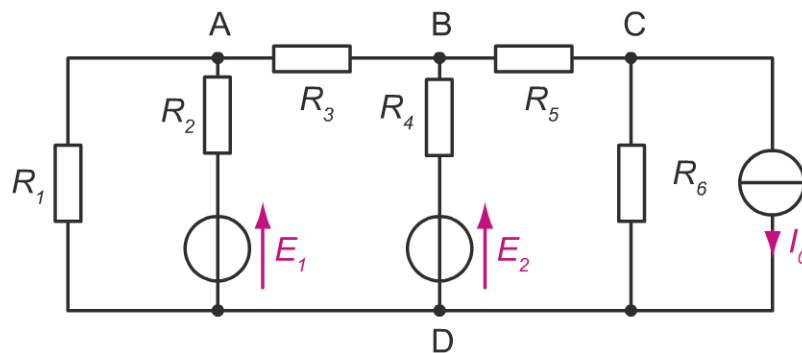
**b) La méthode des transformation successives**

La transformation de Thévenin-Norton peut être mise à profit pour résoudre des problèmes électriques. Elle consiste à opérer des transformations successives afin d'associer les sources et les résistances, dans le but de ramener la résolution du problème à l'application d'un simple pont diviseur ou d'une simple loi d'Ohm.

L'avantage de cette méthode est que, même si elle peut se révéler relativement répétitive dans sa mise en œuvre, elle ne demande que très peu de calculs. De plus, étant donné que chaque transformation ne concerne qu'une petite partie du réseau, le risque d'erreurs est considérablement limité.

**Exercice 2.26**

Déterminer, par la méthode des transformations successives, le courant circulant dans la résistance  $R_6$  de la figure 2.61. On donne  $E_1 = 5 \text{ V}$ ,  $E_2 = 3 \text{ V}$ ,  $I_0 = 0,1 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 500 \Omega$ ,  $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 2 \text{ k}\Omega$  et  $R_6 = 1,5 \text{ k}\Omega$ .



**Figure 2.61** – Circuit de l'exercice 2.26. On donne  $E_1 = 5 \text{ V}$ ,  $E_2 = 3 \text{ V}$ ,  $I_0 = 0,1 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 500 \Omega$ ,  $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 2 \text{ k}\Omega$  et  $R_6 = 1,5 \text{ k}\Omega$ .

### Solution 2.26

Les différentes étapes de la transformation successive sont reportées dans la figure 2.62. Nous les détaillons ci-après. Attention : puisque l'on cherche le courant traversant  $R_6$ , toute transformation la faisant disparaître est interdite.

**Étape 1.** Nous choisissons de transformer en dipôle de Norton le dipôle encadré. Puisque  $E_1 = 5 \text{ V}$  et  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ , alors le courant de Norton du nouveau dipôle est de  $5 \text{ mA}$ . La résistance parallèle reste égale à  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ .

**Étape 2.** Nous allons transformer la partie encadrée en dipôle de Thévenin. Nous pouvons coupler les deux résistances en parallèle pour obtenir une résistance de  $1 \text{ k}\Omega // 1 \text{ k}\Omega = 500 \Omega$ . La source de Thévenin associée a donc une force électromotrice de  $500 \times 5 \cdot 10^{-3} = 2,5 \text{ V}$ . La résistance utilisée pour la transformation est ensuite couplée à  $R_3$ , puisqu'elles sont en série, pour donner une résistance équivalente de  $1 \text{ k}\Omega$ . On aboutit alors à l'étape 3.

**Étape 3.** Les deux générateurs de Thévenin encadrés sont transformés :

- à celui de gauche correspond une source de courant de  $2,5/1000 = 2,5 \text{ mA}$  vers le nœud B, en parallèle avec une résistance de  $1 \text{ k}\Omega$  ;
- à celui de droite correspond une source de courant de  $3/1000 = 3 \text{ mA}$ , également vers le nœud B, en parallèle avec une résistance de  $1 \text{ k}\Omega$ .
- L'association de ces deux générateurs est possible en parallèle et l'on obtient un générateur de courant de  $5,5 \text{ mA}$  en parallèle avec une résistance de  $500 \Omega$ .

**Étape 4.** La partie encadrée dans le volet (4) est transformée en un générateur de Thévenin de f.é.m  $500 \times 5,5 \cdot 10^{-3} = 2,75 \text{ V}$  et de résistance  $500 \Omega$ . Cette dernière est associée à  $R_5$ , de sorte que l'on obtient au début de l'étape 5 une résistance équivalente de  $2,5 \text{ k}\Omega$ .

**Étape 5.** Le dipôle de Thévenin encadré est transformé en dipôle de Norton dont le courant vaut  $2,75/2500 = 1,1 \text{ mA}$ . La résistance parallèle reste celle de  $2,5 \text{ k}\Omega$ .

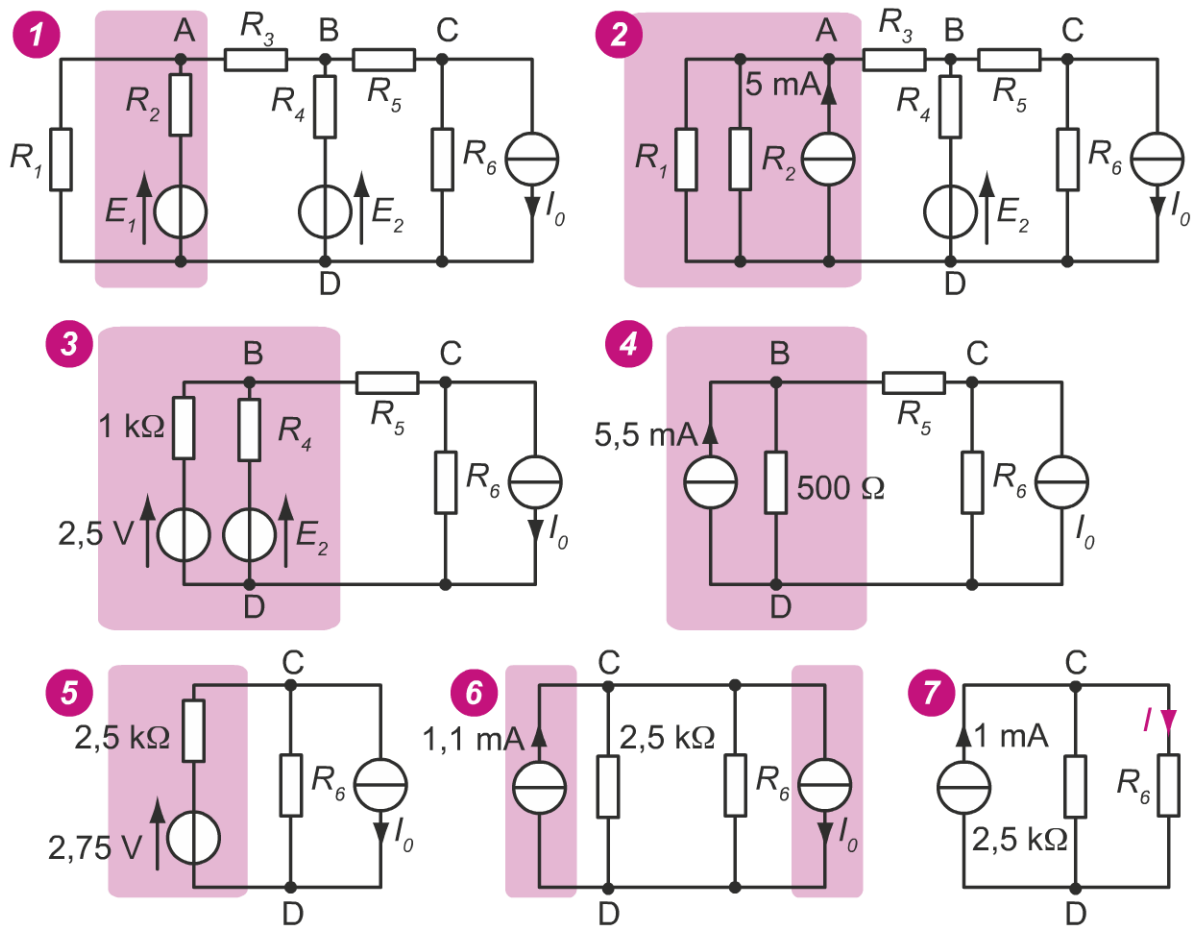


Figure 2.62 – Correction de l'exercice 2.26. Différentes étapes de transformations Thévenin-Norton successives.

**Étape 6.** Nous ne pouvons pas faire disparaître  $R_6$  dans les transformations. Nous associons donc uniquement les deux sources encadrées. Comme l'une pointe vers C et l'autre vers D, nous choisissons de repérer la source somme vers C et comptons  $I_0$  avec un signe moins (-). Le courant au début de la dernière étape sera donc de 1 mA.

**Étape 7.** La dernière étape consiste en l'application de la formule du pont diviseur de courant :

$$I = 10^{-3} \cdot \frac{2500}{1500 + 2500} = 0,635 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0,635 \text{ mA}$$

Le courant circulant dans la résistance  $R_6$  est de 0,635 mA.

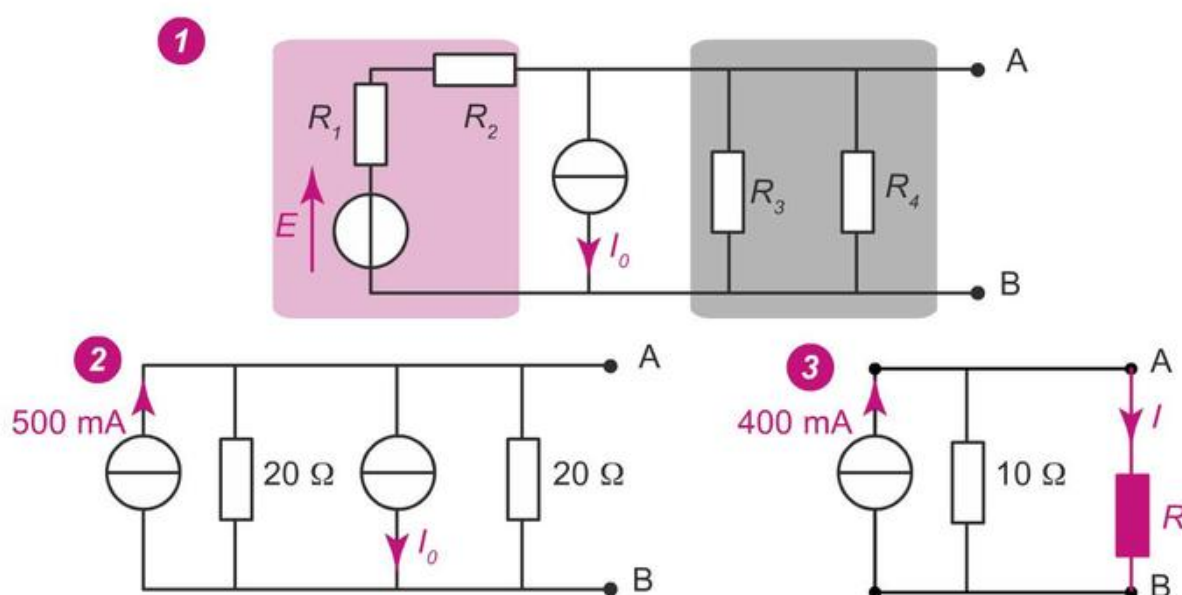
Nous remarquons que cette méthode demande un nombre important de schémas. Ceci étant, elle nous a permis de résoudre le problème posé d'une manière systématique et laissant peu de place à l'erreur.

**Exercice 2.27**

On souhaite brancher une résistance  $R = 10 \Omega$  entre les points A et B du circuit de la figure 2.14, page 68. Déterminer le courant  $I$  qui circulera dans cette résistance par la méthode des transformations successives.

**Solution 2.27**

Les différentes étapes de résolution sont reportées sur la figure 2.63. Nous les détaillons ci-après.



**Figure 2.63** – Correction de l'exercice 2.27.

1. Nous regroupons  $R_1$  et  $R_2$  en une résistance de  $R_1 + R_2 = 20 \Omega$ , après quoi nous transformons le dipôle encadré en magenta en dipôle de Norton. Celui-ci a un courant de

$$\frac{10 \text{ V}}{20 \Omega} = 0,5 \text{ A} = 500 \text{ mA}$$

associé à une résistance de  $20 \Omega$ . Par ailleurs, les deux résistances en parallèle  $R_3$  et  $R_4$  sont regroupées en une résistance de  $40 \Omega // 40 \Omega = 20 \Omega$ .

2. Nous procédons à l'association des générateurs de Norton. Attention, les flèches de courant sont en sens opposées, on choisit de référencer le courant sortant en A. Le nouveau dipôle de Norton a donc un courant de

$$0,5 - I_0 = 0,4 \text{ A} = 400 \text{ mA}$$

associé à une résistance de  $20 \Omega // 20 \Omega = 10 \Omega$

## 2.5 Théorèmes du dipôle linéaire

3. Le courant traversant  $R$  se calcule en appliquant la formule du pont diviseur de courant :

$$I = 0,4 \cdot 10 \Omega R + 10 \Omega = 0,2 \text{ A} = 200 \text{ mA}$$

La résistance  $R$  est donc traversée par un courant de 200 mA.



# 3

## Du régime variable au régime alternatif sinusoïdal

Les chapitres précédents ont été consacrés à la description des grandeurs, des modèles et des lois de l'électricité en régime continu. Nous allons à présent effectuer le même travail mais pour le régime alternatif sinusoïdal. Ce régime revêt en effet une importance particulière dans la mesure où la production mondiale d'électricité, et par conséquent son transport et son utilisation, se font sous cette forme.

Afin de le décrire complètement, nous allons dans un premier temps nous intéresser à la représentation temporelle des signaux. Nous définirons alors les différents types de régimes variables et verrons quelles sont les grandeurs électriques qui peuvent leur être associées.

Nous reviendrons ensuite sur la notion de puissance électrique. En régime alternatif sinusoïdal, nous définirons la puissance active et la puissance fluctuante et introduirons des grandeurs très utiles au dimensionnement que sont la puissance réactive et la puissance apparente.

Enfin, nous aborderons les composants réactifs : l'inductance et la capacité. Après avoir analysé les phénomènes physiques auxquels ils sont liés et donné leurs symboles électriques, nous décrirons les déphasages qu'ils entraînent.

### 3.1 REPRÉSENTATION TEMPORELLE ET GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux régimes dépendants du temps dans leur ensemble, c'est-à-dire aux régimes pour lesquels les grandeurs électriques courant et tension ne présentent plus des valeurs constantes mais qui varient en fonction du temps. Nous adoptons pour ce faire la convention suivante : nous notons en minuscule les grandeurs électriques qui dépendent du temps et en majuscules celles qui n'en dépendent

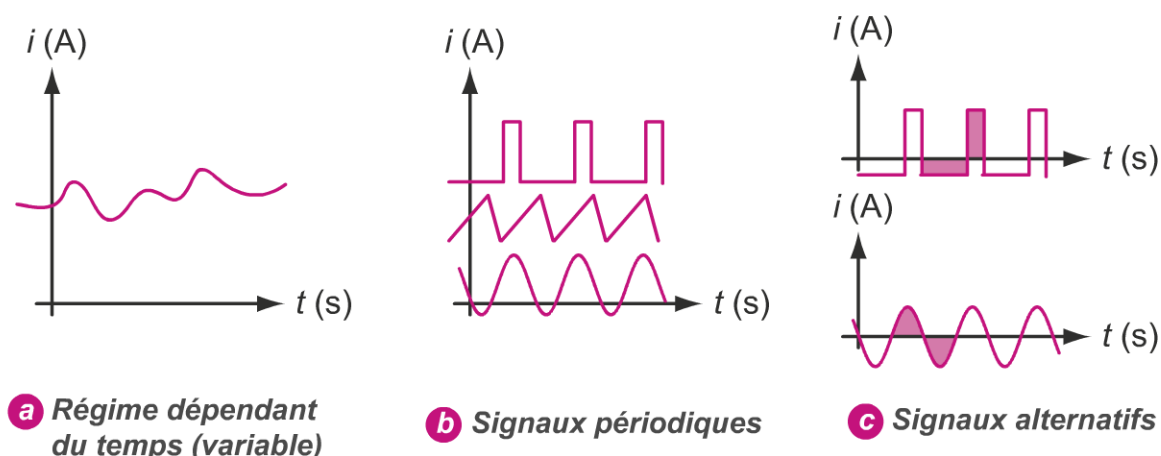
pas, c'est-à-dire les composantes continues, les valeurs moyennes et les valeurs efficaces, que nous définissons dans ce chapitre.

Un exemple de courant dépendant du temps est reporté sur le volet (a) de la figure 3.1. Nous remarquons qu'un tel signal est difficile à décrire autrement qu'en présentant sa courbe : il n'est pas possible de définir des grandeurs électriques permettant de le caractériser.

### 3.1.1 Régime périodique

#### a) Définition

Lorsqu'une grandeur électrique dépendant du temps revêt un caractère périodique, c'est-à-dire lorsqu'il existe une période temporelle  $T$  au bout de laquelle la grandeur reprend les mêmes valeurs, alors le régime est dit périodique. Les fonctions créneaux, triangles et sinusoïdales sont des signaux périodiques : nous avons représenté des courants présentant ces formes sur le volet (b) de la figure 3.1.

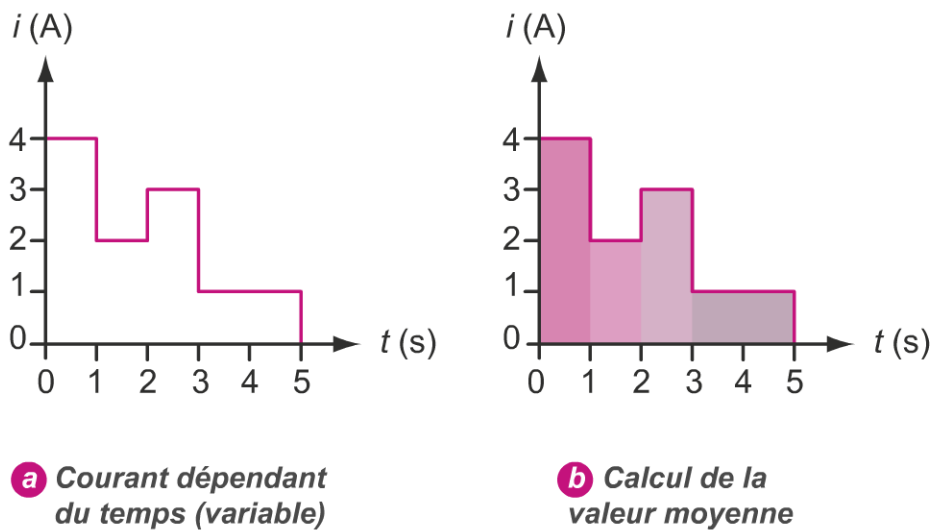


**Figure 3.1** – Illustration de plusieurs types de courants dépendant du temps. (a) Régime variable et (b) régime périodique. Le régime alternatif reporté en (c) est abordé à la section 3.1.2.

#### b) Valeur moyenne

Le caractère périodique du signal permet de le décrire en quelques mots, en utilisant des grandeurs qui le caractérisent. L'une d'entre elles est la **valeur moyenne** (aussi appelée **composante continue**) du signal périodique.

### 3.1 Représentation temporelle et grandeurs caractéristiques



**Figure 3.2** – Méthode de calcul de la valeur moyenne d'un courant en régime périodique.

Afin de donner l'expression de la valeur moyenne d'une grandeur en régime périodique, nous proposons de considérer le courant dépendant du temps reporté sur le panel (a) de la figure 3.2. Ce courant prend les valeurs successives suivantes : 4 A pendant 1 s, 2 A pendant 1 s, 3 A pendant 1 s et 1 A pendant 2 s. Le calcul de la valeur moyenne se fait alors en multipliant chaque valeur prise par sa durée, puis en divisant le tout par la durée totale du signal, c'est-à-dire 5 s :

$$I_{moy} = \frac{4 \text{ A} \cdot 1 \text{ s} + 2 \text{ A} \cdot 1 \text{ s} + 3 \text{ A} \cdot 1 \text{ s} + 1 \text{ A} \cdot 2 \text{ s}}{5 \text{ s}} = 2,20 \text{ A} \quad (3.1)$$

Ce faisant, on calcule en fait la surface située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative du courant, chaque produit correspondant à l'aire d'un rectangle représenté sur le volet (b) de la figure 3.2.

On peut généraliser cette approche aux courants reportés dans la figure 3.3. Celui du volet (a) est à échantillons discrets, c'est-à-dire qu'une certaine durée  $\Delta t$  sépare deux valeurs successives du courant. S'étalant sur une durée totale  $T$ , il contient  $n$  échantillons. Comme précédemment, il s'agit de calculer l'aire contenue sous le signal en additionnant la surface de chacun des rectangles magenta. Pour dresser la formule, considérons le rectangle le plus foncé qui correspond au  $k^{\text{ème}}$  échantillon : sa surface vaut  $S_k = i_k \cdot \Delta t$ , de

sorte que la valeur moyenne du courant se calcule comme

$$I_{moy} = \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{T} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n i_k \cdot \Delta t \quad (3.2)$$

Le signe  $\sum_{k=1}^n$  décrit la somme de tous les rectangles en faisant varier  $k$  de l'échantillon numéro 1 à l'échantillon numéro  $n$ .

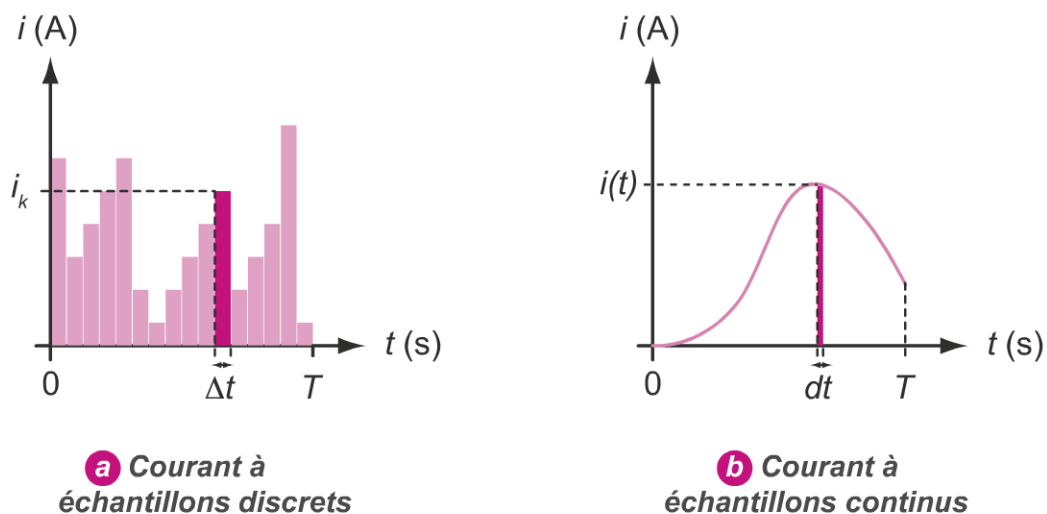
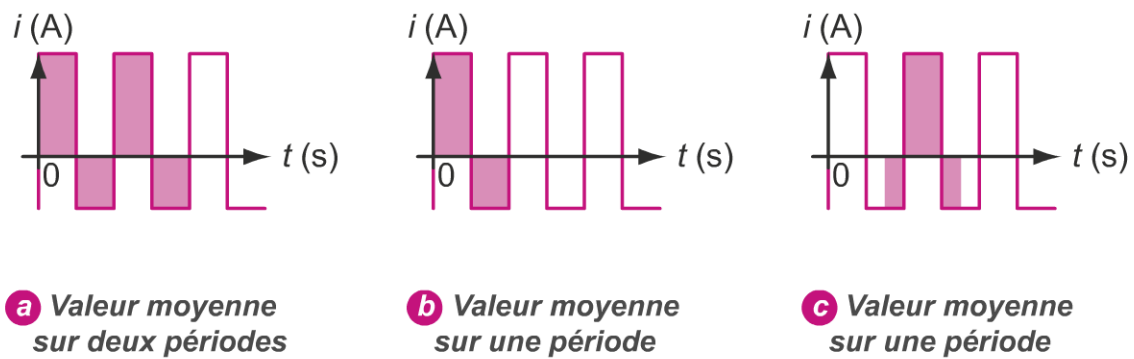


Figure 3.3 – Méthode de calcul de la valeur moyenne d'un courant à échantillons discrets (a) et continus (b).

Plaçons-nous à présent dans le cas d'un échantillonnage continu, comme représenté sur la figure 3.3(b). On calcule alors, comme dans les exemples précédents, la surface située entre la courbe et l'axe des abscisses. À l'instant  $t$ , on peut déterminer la surface du rectangle représenté : celle-ci vaut  $i(t) \cdot dt$ . À condition de choisir un intervalle de temps  $dt$  suffisamment petit pour que les différents rectangles épousent les contours de la courbe, la surface totale se calcule en faisant la somme de tous les aires  $i(t) \cdot dt$  pour des valeurs de  $t$  variant entre 0 et  $T$ . Dans ces conditions, on réalise une somme continue, et le symbole  $\sum$  utilisé dans l'équation (3.2) est remplacé par une intégrale. Ainsi, la valeur moyenne du courant sur l'intervalle de temps compris entre  $t = 0$  et  $t = T$  vaut

$$I_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cdot dt \quad (3.3)$$

### 3.1 Représentation temporelle et grandeurs caractéristiques



**Figure 3.4** – Influence de la durée considérée sur le calcul de la valeur moyenne d'un courant en régime périodique.

Pour finir, considérons un signal périodique, tel que celui reporté sur la figure 3.4. En considérant plusieurs périodes, comme nous le faisons sur le volet (a) de la figure, nous calculons le rapport entre la surface colorée et la durée considérée. Les motifs se répétant, cette valeur sera la même pour la surface représentée dans le volet (b) et se révèle donc indépendante du nombre de périodes considérées. Par conséquent, il suffit de travailler sur **une seule période** pour déterminer la valeur moyenne d'un signal périodique. De plus, comme nous pouvons le remarquer en observant le volet (c), le fait de décaler l'intervalle de temps considéré pour effectuer le calcul ne modifie en rien la valeur moyenne obtenue.

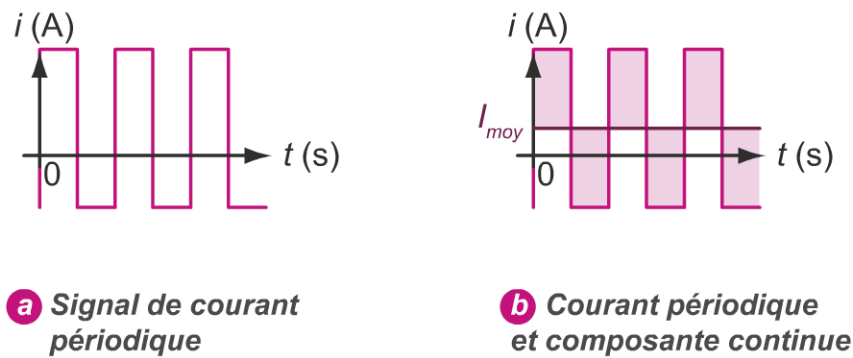
La **valeur moyenne** d'un signal périodique  $i(t)$  s'exprime comme

$$I_{moy} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} i(t) \cdot dt \quad (3.4)$$

où  $T$  est la période du signal et  $\tau$  une valeur de temps arbitraire.

#### c) Composante continue

Nous avons reporté sur la figure 3.5 un signal de courant périodique. Dans le volet (a), nous avons tracé la valeur moyenne du signal comme une fonction constante du temps. On remarque que tout se passe comme si le signal périodique oscillait autour de sa valeur moyenne : les cinq surfaces représentées dans le volet (b) sont les mêmes.



**Figure 3.5** – Composante continue d'un signal périodique.

La valeur moyenne d'un signal périodique est aussi sa **composante continue**. C'est l'une des grandeurs permettant de le caractériser.

### 3.1.2 Régime alternatif

#### a) Définition

Un signal alternatif est un signal périodique dont la valeur moyenne et, par conséquent, la composante continue sont nulles. Nous avons représenté des signaux alternatifs sur le volet (c) de la figure 3.1 (page 122).

#### b) Valeur efficace

La valeur moyenne d'un signal alternatif est, par définition, nulle : ce n'est donc pas une grandeur permettant de le caractériser correctement. En effet, une valeur moyenne nulle signifie que le signal est aussi souvent positif que négatif, mais cela ne veut pas dire que celui-ci ne transporte aucune puissance. Par exemple, le réseau électrique européen distribue une tension et un courant alternatifs et qui ont, par conséquent, des valeurs moyennes nulles. Il permet toutefois de transporter la puissance électrique nécessaire au fonctionnement des installations.

Pour caractériser un signal alternatif, il est nécessaire d'introduire une nouvelle grandeur appelée **valeur efficace**. Pour la décrire, prenons l'exemple d'un courant alternatif  $i(t)$  traversant une résistance  $R$ . La résistance ainsi alimentée consomme à l'instant  $t$  une puissance électrique  $p(t)$  qu'elle convertit en chaleur. Cette puissance peut être chiffrée puisque, dans la mesure où l'ex-

### 3.1 Représentation temporelle et grandeurs caractéristiques

pression du courant  $i(t)$  est connue, elle vaut

$$p(t) = R \cdot i(t)^2 \quad (3.5)$$

La puissance électrique moyenne consommée par la résistance s'évalue ensuite sur une période  $T$  de courant alternatif, de sorte que

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} Ri(t)^2 dt = \frac{1}{T} R \int_{\tau}^{\tau+T} i(t)^2 dt \quad (3.6)$$

La valeur efficace du courant  $i$ , c'est l'intensité  $I$  que devrait avoir un courant continu pour dissiper, dans la résistance  $R$ , la même puissance thermique que le courant alternatif  $i(t)$ . La puissance moyenne en continu est plus facile à évaluer étant donné qu'elle est constante, et donc égale à la puissance instantanée. Elle vaut donc

$$P_{moy} = RI^2 \quad (3.7)$$

En écrivant l'égalité des relations (3.6) et (3.7), on décrit le fait que le signal alternatif  $i(t)$  et le courant continu équivalent  $I$  dissipent dans la résistance la même puissance. En simplifiant par  $R$ , on aboutit à la relation

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} i(t)^2 dt \quad (3.8)$$

La valeur efficace ne dépend pas de la résistance considérée. Elle est choisie comme étant positive, de sorte qu'elle se définit pour un courant alternatif  $i(t)$  au travers de l'expression

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} i(t)^2 dt} \quad (3.9)$$

Évidemment, la valeur efficace est aussi définie pour une tension alternative  $v(t)$  sur le même principe. On donne

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} v(t)^2 dt} \quad (3.10)$$

#### • Valeurs RMS

En lisant l'équation (3.10), on remarque que la valeur efficace de la tension est la racine carrée de la moyenne du carré de la tension  $v(t)$ . C'est la raison pour laquelle les anglo-saxons appellent ces valeurs efficaces RMS pour

## Chapitre 3 – Du régime variable au régime alternatif sinusoïdal

*Root Mean Square*. Se souvenir du sens de RMS est donc un excellent moyen mnémotechnique.

La valeur efficace  $I$  d'un signal alternatif  $i(t)$ , aussi appelée valeur efficace RMS, s'exprime comme

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} i(t)^2 dt}$$

où  $T$  est la période du signal et  $\tau$  une valeur de temps arbitraire.

### 3.1.3 Régime alternatif sinusoïdal

#### a) Définition

Un signal alternatif sinusoïdal est un signal sinusoïdal dont la valeur moyenne et, par conséquent, la composante continue sont nulles. Le régime alternatif sinusoïdal est aussi appelé **régime harmonique**.

#### b) Intérêt

Le régime sinusoïdal alternatif revêt un intérêt particulier parce que la production d'énergie électrique à l'aide d'alternateurs (telle qu'elle est faite dans les barrages et les centrales thermiques) aboutit naturellement à des tensions et des courants alternatifs sinusoïdaux.

#### c) Expression d'un signal alternatif

Un courant alternatif tel que celui représenté par la courbe colorée de la figure 3.6 s'exprime sous la forme

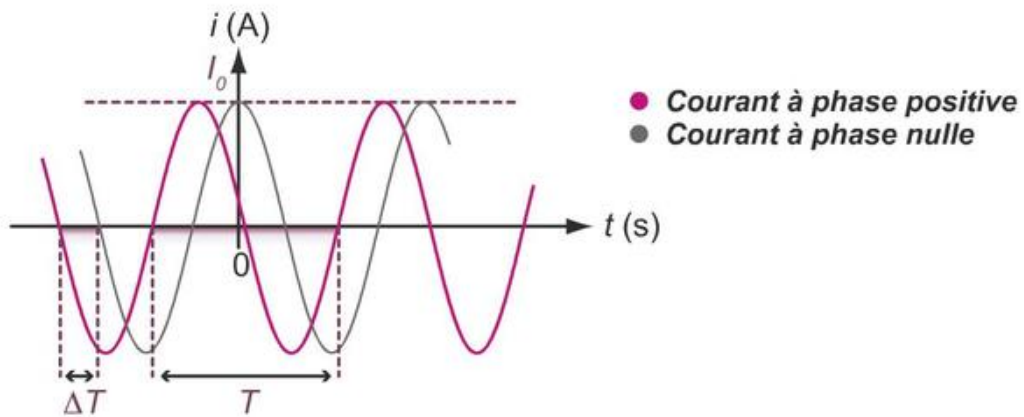
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (3.11)$$

où  $I_0$  est l'amplitude du courant,  $\omega$  sa pulsation, et  $\varphi_I$  sa phase.

#### • L'amplitude

L'amplitude  $I_0$  est la valeur maximale prise par le signal sinusoïdal alternatif. Son unité est celle du signal : volts pour une tension, ampères pour un courant. C'est une grandeur toujours positive qu'il ne faut pas confondre avec la valeur crête-à-crête qui vaut pour sa part deux fois l'amplitude.

### 3.1 Représentation temporelle et grandeurs caractéristiques



**Figure 3.6** – Courant alternatif sinusoïdal. La courbe colorée est un tracé de la relation (3.11) pour une phase  $\varphi_I > 0$ . La courbe grise représente un signal à phase nulle permettant d'évaluer le retard temporel  $\Delta T$ .

#### • La pulsation

La pulsation  $\omega$  est une fréquence angulaire donnée en rad/s. Elle permet de décrire la fréquence temporelle  $f$  du signal dans une fonction sinus ou cosinus. La fréquence étant quant à elle l'inverse de la période  $T$ , on définit

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (3.12)$$

#### • La phase

La phase  $\varphi_I$  décrit une avance temporelle du signal par rapport à l'origine des temps. Cette avance est ramenée à un angle après avoir été comparée à la période  $T$  du signal. Sur la figure 3.6, nous avons reporté en gris un courant sinusoïdal vérifiant la relation (3.11), mais avec une phase  $\varphi = 0$ . En mesurant le retard  $\Delta T$  du signal coloré par rapport au signal gris, et en faisant le rapport avec la période, on détermine la phase du signal coloré :

$$\varphi = \frac{\Delta T}{T} \cdot 2\pi \text{ rad} = \frac{\Delta T}{T} \cdot 360^\circ \quad (3.13)$$

Pour ne pas faire d'erreur sur le **signe de la phase**, on retiendra que :

- la phase d'un signal est positive lorsque celui-ci est en avance sur le signal de référence (on parle d'avance de phase) ;
- la phase d'un signal est négative lorsque celui-ci est en retard sur le signal de référence (on parle de retard de phase).

### Chapitre 3 – Du régime variable au régime alternatif sinusoïdal

Remarquons que la phase n'est pas en soi une grandeur pertinente dans la mesure où, sur un oscilloscope, on peut choisir l'origine des temps, et donc le signal de référence, comme on le souhaite. En revanche, le déphasage, c'est-à-dire la différence de phases entre deux signaux, est une grandeur qui ne peut pas être influencée par le réglage de l'oscilloscope. En quelque sorte, le déphasage est à la phase ce que la tension est au potentiel.

#### d) Valeur efficace

Nous avons défini la notion de valeur efficace dans le cas d'un signal alternatif quelconque. Exprimons à présent la valeur efficace  $I$  du courant exprimé par la relation (3.11). On établit que

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} i(t)^2 dt} = I_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \cos^2(\omega t) dt} \quad (3.14)$$

L'intégration de cette expression se fait au travers de la linéarisation du  $\cos^2$  en remarquant que, quelle que soit la variable  $X$ ,

$$\cos^2(X) = \frac{1 + \cos(2X)}{2} \quad (3.15)$$

La fonction cosinus ayant une valeur moyenne nulle, son intégration sur deux périodes est égale à 0. Ce faisant, on établit qu'en régime sinusoïdal alternatif, la valeur efficace  $I$  du signal  $i(t)$  est liée à son amplitude  $I_0$  par l'expression

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (3.16)$$

La valeur efficace ou valeur *RMS* d'un courant **alternatif sinusoïdal** d'amplitude  $I_0$  vaut  $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ . De même, pour une tension alternative sinusoïdale d'amplitude  $V_0$ , la valeur efficace vaut  $V = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ .

Dans la pratique, plutôt que de décrire un signal sinusoïdal alternatif au travers de son amplitude, comme nous l'avons fait avec la relation (3.11), on utilisera sa valeur efficace.

### 3.1 Représentation temporelle et grandeurs caractéristiques

Un courant alternatif sinusoïdal s'écrit

$$i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (3.17)$$

et une tension alternative sinusoïdale

$$v(t) = V \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_V) \quad (3.18)$$

Les grandeurs  $I$  et  $V$  sont les valeurs efficaces et  $\varphi_I$  et  $\varphi_V$  les phases du courant et de la tension, respectivement.

#### 3.1.4 Caractérisation d'un signal périodique

##### a) Décomposition du signal

La valeur moyenne d'un signal périodique est l'une des grandeurs permettant de le caractériser. Nous avons vu qu'un tel signal oscille autour de sa composante continue, et que, lorsque celle-ci est nulle, le signal est qualifié d'alternatif. Nous avons reporté sur le volet (a) de la figure 3.7 un signal périodique.

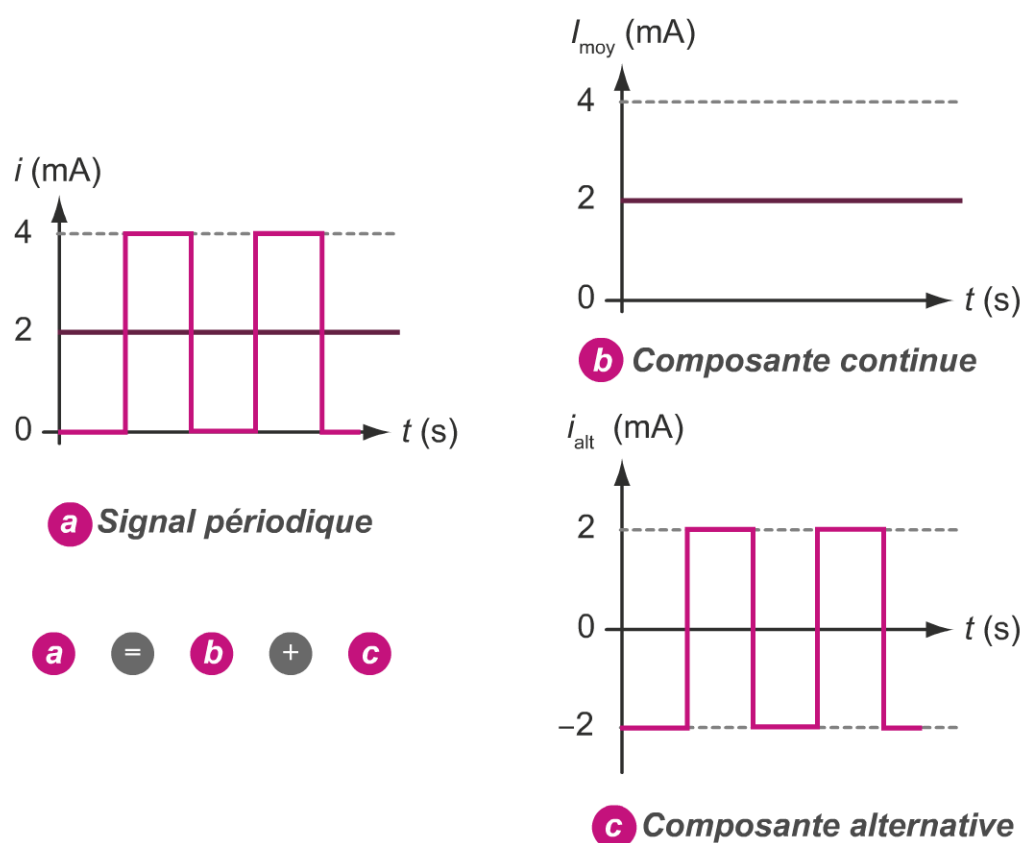
On remarque que celui-ci peut se décomposer sous la forme d'une somme : celle de sa composante continue et de sa composante alternative. Ces deux composantes sont liées à deux grandeurs caractéristiques :

- la composante continue est la valeur moyenne du signal périodique ;
- la composante alternative, de valeur moyenne nulle, est décrite par sa valeur efficace.

Un signal périodique  $i(t)$  est la somme d'un signal continu  $I_{moy}$  et d'un signal alternatif  $i_{alt}(t)$  de valeur efficace  $I$  :

$$i(t) = I_{moy} + i_{alt}(t) \quad (3.19)$$

Lorsque le signal périodique est sinusoïdal, la même décomposition s'opère. On obtient alors deux signaux tels que ceux représentés dans l'exemple de la figure 3.8. Dans ce cas, le signal alternatif est la somme d'une composante continue et d'un signal alternatif sinusoïdal de valeur efficace  $I$ .



**Figure 3.7** – Décomposition d'un signal périodique comme la somme d'une composante continue et d'une composante alternative.

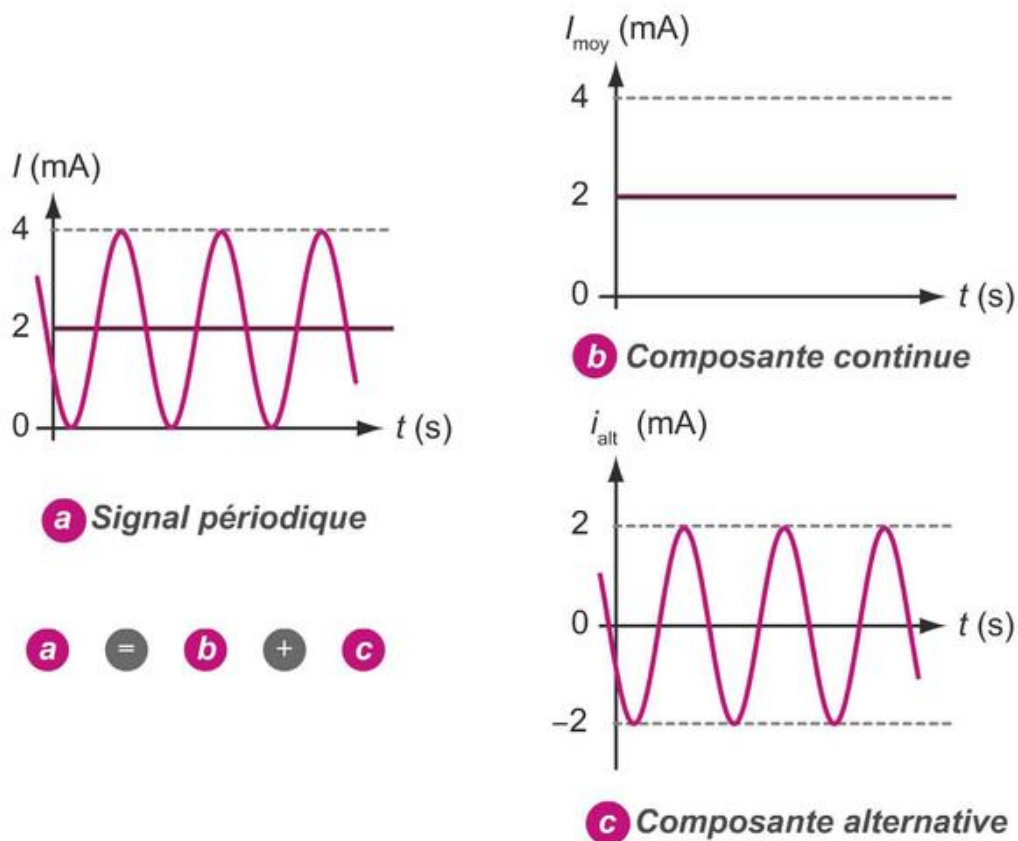
Un signal sinusoïdal quelconque  $i(t)$  est la somme d'un signal continu  $I_{moy}$  et d'un signal sinusoïdal alternatif de valeur efficace  $I$  :

$$i(t) = I_{moy} + I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (3.20)$$

L'approche consistant à décomposer un signal sinusoïdal quelconque en une composante continue et une composante harmonique est intéressante, essentiellement pour deux raisons :

- d'une part, de nombreux appareils de mesure sont capables de fonctionner soit en alternatif, soit en continu, soit successivement dans les deux modes, mais pas dans les deux modes simultanément. Ils ne sont donc pas en mesure de considérer le signal périodique dans son ensemble, et la caractérisation de celui-ci doit donc se faire au travers de deux mesures successives ;

### 3.1 Représentation temporelle et grandeurs caractéristiques



**Figure 3.8** – Décomposition d'un signal périodique sinusoïdal comme la somme d'une composante continue et d'un signal harmonique.

- d'autre part, en électronique, la composante continue apporte souvent la puissance nécessaire au fonctionnement du composant quand la composante alternative constitue le signal à traiter.

#### b) Valeur efficace vraie ou *TRMS*

Nous avons défini la valeur efficace  $I$  d'un courant alternatif  $i(t)$  comme l'intensité de courant continu qui dissiperait la même puissance que  $i(t)$  dans une résistance  $R$ . De la même manière, on peut définir la valeur efficace d'un signal périodique à composante continue non-nulle. Cette grandeur est utile dans la mesure où les multimètres modernes sont capables de la mesurer.

Dans cette approche, il ne s'agit plus de décomposer le signal mais de le considérer dans sa totalité. La valeur efficace ainsi définie ne décrit plus la seule composante alternative mais bien le signal réel, c'est la raison pour

laquelle nous l'appelons la valeur efficace vraie, et les anglo-saxons la valeur *TRMS*, pour *True Root Mean Square*. Nous la noterons  $I_{TRMS}$  pour un courant et  $V_{TRMS}$  pour une tension.

Un moyen mnémotechnique consiste à remplacer le *T* de *True* par celui de *Total* et à dire que la valeur efficace *TRMS* est celle du signal périodique dans sa totalité.

### c) Lien entre les grandeurs caractéristiques

Nous avons vu qu'un signal périodique, par exemple un courant  $i(t)$ , peut être caractérisé à l'aide de sa valeur moyenne  $I_{moy}$ , de la valeur efficace de sa composante alternative  $I$ , et de sa valeur efficace vraie  $I_{TRMS}$ . Établissons à présent le lien entre ces trois grandeurs électriques et considérons pour cela le courant périodique décrit par la relation (3.19) page 131. Le calcul de la valeur efficace vraie s'écrit

$$\begin{aligned}
 I_{TRMS} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} (I_{moy} + i_{alt}(t))^2 dt} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} I_{moy}^2 dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} i_{alt}(t)^2 dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} 2I_{moy}i_{alt}(t) dt} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

La dernière ligne contient, sous la racine carrée, trois termes additionnés :

- le premier,  $\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} I_{moy}^2 dt$ , est la valeur moyenne d'une grandeur continue, et vaut par conséquent  $I_{moy}^2$  ;
- le second,  $\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} i_{alt}(t)^2 dt$ , est par définition le carré de la valeur efficace de la composante alternative du signal périodique. Il vaut donc  $I^2$ .
- le troisième,  $\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} 2I_{moy}i_{alt}(t) dt$ , est la valeur moyenne de la composante alternative multipliée par une constante. Il est égal à zéro.

On établit ainsi que

$$I_{TRMS} = \sqrt{I_{moy}^2 + I^2} \quad (3.22)$$

### 3.1 Représentation temporelle et grandeurs caractéristiques

La valeur efficace vraie  $I_{TRMS}$  d'un courant périodique quelconque est liée à sa valeur moyenne  $I_{moy}$  et à la valeur efficace de sa composante alternative  $I$  par l'expression

$$I_{TRMS}^2 = I_{moy}^2 + I^2 \quad (3.23)$$

Pour une tension périodique, cette expression devient

$$V_{TRMS}^2 = V_{moy}^2 + V^2 \quad (3.24)$$

#### Exercice 3.1

On considère les courants périodiques présentés dans la figure 3.9.

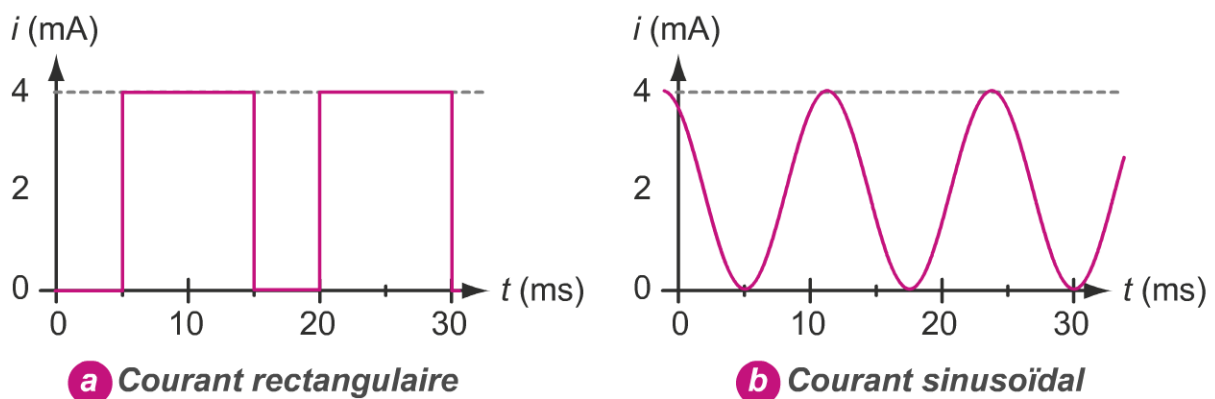


Figure 3.9 – Courants (a) rectangulaire et (b) sinusoïdal de l'exercice 3.1.

1. Déterminer la période, la fréquence et le rapport cyclique du signal rectangulaire.
2. Déterminer la période, la fréquence et la phase du signal sinusoïdal (on exprimera pour cela le signal avec un cosinus).
3. Calculer la valeur moyenne, la valeur efficace RMS et la valeur efficace vraie TRMS des deux signaux.
4. Donner l'expression mathématique du signal sinusoïdal.

### Solution 3.1

1. Le courant rectangulaire est reporté dans le volet (a). Le motif initié à  $t = 0$  réapparaît à  $t = 15$  ms, de sorte que la période du signal est  $T = 15$  ms. La fréquence vaut par conséquent

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 66,7 \text{ Hz}$$

Le rapport cyclique  $\alpha_c$  du signal est un nombre sans unité. Il s'agit du rapport entre l'intervalle de temps  $T_h$  au cours duquel le signal rectangulaire prend sa valeur haute, et la période  $T$ . Ici,  $T_h = 10$  ms, de sorte que

$$\alpha_c = \frac{T_h}{T} = \frac{10}{15} = 0,667$$

2. En observant dans le volet (b) les instants auxquels le signal sinusoïdal prend ses valeurs minimales, on remarque que deux périodes séparent les instants  $t = 5$  ms et  $t = 30$  ms. Aussi, la période du signal sinusoïdal vaut

$$T = \frac{30 \text{ ms} - 5 \text{ ms}}{2} = 12,5 \text{ ms}$$

La fréquence du signal vaut par conséquent

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{12,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 80 \text{ Hz}$$

Pour déterminer la phase  $\varphi$ , on exprime le courant  $i(t)$  sous la forme  $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_I)$ . Si le signal avait une phase  $\varphi_I = 0$ , le courant prendrait sa première valeur minimale à la demi-période, c'est-à-dire en  $t = 6,25$  ms. Or,  $i$  est en avance, puisqu'il prend cette première valeur minimale en  $t = 5$  ms.

Pour déterminer la phase de  $i$ , on évalue donc le déphasage entre  $i$  et le signal de référence à phase nulle, en procédant comme sur la figure 3.6 page 129. Le signal  $i(t)$  étant en avance sur sa référence, on a  $\varphi_I > 0$ . La valeur algébrique de  $\varphi_I$  se détermine en utilisant la relation (3.13) avec

$$\Delta T = 6,25 - 5 = 1,25 \text{ ms}$$

On a donc

$$\varphi_I = \frac{1,25}{12,5} \cdot 360^\circ = 36^\circ$$

ou, en radians,

$$\varphi_I = \frac{1,25}{12,5} \cdot 2\pi = \pi/5$$

### 3.1 Représentation temporelle et grandeurs caractéristiques

3. (a) Considérons dans un premier temps le signal rectangulaire reporté dans le volet (a) de la figure 3.9. La valeur moyenne  $I_{moy}$  se calcule, en appliquant la relation de Chasles, comme

$$\begin{aligned} I_{moy} &= \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{15 \cdot 10^{-3}} \left[ \int_0^{5 \cdot 10^{-3}} 0 dt + \int_{5 \cdot 10^{-3}}^{15 \cdot 10^{-3}} 4 \cdot 10^{-3} dt \right] \\ &= \frac{1}{15 \cdot 10^{-3}} \times 4 \cdot 10^{-3} \times 10 \cdot 10^{-3} = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 2,67 \text{ mA} \end{aligned}$$

La valeur efficace vraie TRMS est, dans le cas du signal rectangulaire, plus aisée à calculer que la valeur efficace RMS. Comme précédemment, on sépare la période en deux parties, de sorte que

$$\begin{aligned} I_{TRMS} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{15 \cdot 10^{-3}} \left[ \int_0^{5 \cdot 10^{-3}} 0^2 dt + \int_{5 \cdot 10^{-3}}^{15 \cdot 10^{-3}} (4 \cdot 10^{-3})^2 dt \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{15 \cdot 10^{-3}} \times 16 \cdot 10^{-6} \times 10 \cdot 10^{-3}} = 3,27 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 3,27 \text{ mA} \end{aligned}$$

Enfin, la valeur efficace de la composante alternative se calcule à l'aide de la relation (3.23) page 135, et  $I_{RMS}$  vaut

$$I = I_{RMS} = \sqrt{I_{TRMS}^2 - I_{moy}^2} = 1,88 \text{ mA}$$

Remarquons que cette dernière relation peut être vérifiée en calculant directement la valeur efficace de la composante alternative (RMS). Il suffit pour cela de remarquer que  $i_{alt}(t) = i(t) - I_{moy}$  et de procéder à un calcul similaire à celui qui a permis d'obtenir  $I_{TRMS}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} I_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{15 \cdot 10^{-3}} \left[ \int_0^{5 \cdot 10^{-3}} [(0 - 2,67)10^{-3}]^2 dt + \int_{5 \cdot 10^{-3}}^{15 \cdot 10^{-3}} [(4 - 2,67)10^{-3}]^2 dt \right]} \\ &= \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{15 \cdot 10^{-3}} \times 7,13 \cdot 10^{-6} + \frac{10 \cdot 10^{-3}}{15 \cdot 10^{-3}} \times 1,77 \cdot 10^{-6}} \\ &= 1,88 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1,88 \text{ mA} \end{aligned}$$

- (b) Considérons maintenant le signal sinusoïdal du volet (b) de la figure 3.9. Étant donné que la valeur moyenne  $I_{moy}$  est la composante continue, le

## Chapitre 3 – Du régime variable au régime alternatif sinusoïdal

calcul est inutile : on observe sur la courbe que  $I_{moy} = 2 \text{ mA}$ , de sorte que, en unités du système international,

$$i(t) = 2 \cdot 10^{-3} + I \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{5} \right)$$

Le signal oscillant entre 0 et 4 mA, l'amplitude de la composante alternative vaut

$$I \sqrt{2} = \frac{4 \cdot 10^{-3} - 0}{2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 2 \text{ mA}$$

de sorte que la valeur efficace (RMS) est égale à

$$I = I_{RMS} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}} = 1,41 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1,41 \text{ mA}$$

Enfin, la valeur efficace vraie se calcule en appliquant directement la relation (3.23) page 135, et l'on obtient  $I_{TRMS} = 2,45 \text{ mA}$ .

Remarquons que cette dernière relation peut être vérifiée en calculant directement la valeur efficace vraie TRMS selon sa définition.

### 3.2 PUISSANCES ÉLECTRIQUES EN RÉGIME ALTERNATIF

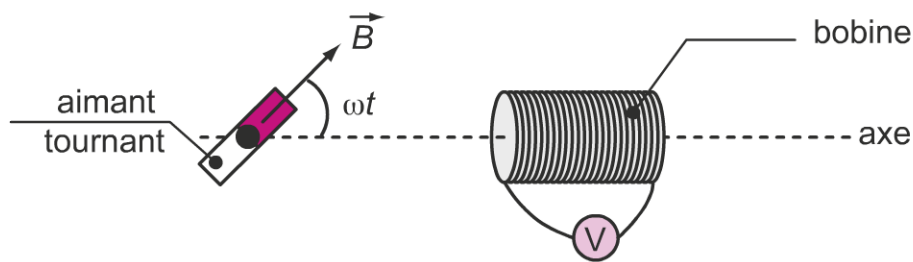
Nous venons de voir qu'un signal périodique peut être considéré comme la somme d'un signal continu et d'un signal alternatif. Les premiers chapitres de cet ouvrage ont été consacrés à la description des lois de l'électricité et à la mise en place d'outils permettant d'appréhender le régime continu. Nous nous intéressons à présent au régime alternatif.

Parmi la multitude de formes que peuvent revêtir une tension ou un courant alternatif, les fonctions sinusoïdales présentent un intérêt particulier.

- D'une part, la plupart de la production d'énergie électrique se fait par le biais d'une conversion mécano-électrique : il s'agit de faire tourner un champ magnétique autour d'un axe fixe de manière à induire une force électro-motrice dans une bobine, comme indiqué sur la figure 3.10. Dans ces conditions, la bobine est traversée par un flux magnétique  $\phi$  qui est dû au champ magnétique  $\vec{B}$  porté par l'aimant. Ce flux est proportionnel à la projection du vecteur  $\vec{B}$  sur l'axe de la bobine. La vitesse angulaire de rotation est notée  $\omega$ , de sorte que le flux magnétique  $\phi$  est directement proportionnel à  $\cos(\omega t)$ . En vertu de la loi de Faraday, une force électromotrice mesurable par un voltmètre est induite dans la bobine. Cette f.é.m étant proportionnelle à la dérivée temporelle du flux elle a aussi la

## 3.2 Puissances électriques en régime alternatif

forme d'un cosinus. Si un dipôle récepteur est connecté aux bornes de la bobine, à la place du voltmètre, un courant s'établit. La nature du dipôle déterminera la valeur du déphasage entre la tension et le courant, mais ce dernier sera à son tour sinusoïdal. En présence de courant et de tension, une puissance électrique instantanée apparaît : l'énergie mécanique nécessaire à la rotation de l'aimant est convertie en énergie électrique sinusoïdale.



**Figure 3.10** – Induction d'une force électromotrice alternative sinusoïdale dans une bobine par un aimant tournant (principe de fonctionnement d'un alternateur). L'axe de rotation de l'aimant est au centre de celui-ci, perpendiculaire au plan de la figure.

- D'autre part, si l'on souhaite s'intéresser à des formes différentes des fonctions sinusoïdales, le développement de n'importe quel signal périodique en séries de Fourier permet de se ramener à des fonctions sinusoïdales.

Par conséquent, dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons exclusivement au régime alternatif sinusoïdal, aussi appelé **régime harmonique**.

### 3.2.1 Puissance et grandeurs associées

#### a) La puissance instantanée

Plaçons-nous en régime dépendant du temps et évaluons la puissance électrique consommée par un dipôle  $D$  soumis à une tension  $v(t)$  et traversé par un courant  $i(t)$ . Fixons le temps pour nous placer à l'instant  $t$  : dans ces conditions, la puissance se calcule de la même manière qu'en régime continu, c'est-à-dire par le produit des valeurs prises par la tension et le courant à l'instant considéré. On écrit qu'à l'instant  $t$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (3.25)$$

Laissons à présent le temps varier, la puissance  $p(t)$  devient une **puissance instantanée** : à la différence du régime continu, la grandeur  $p$  devient une fonction de  $t$  et sa valeur change au cours du temps.

D'un point de vue physique, la puissance instantanée décrit un échange énergétique entre le système considéré et son environnement. Concrètement, si ce système est décrit à l'instant  $t$  par son énergie  $\epsilon(t)$ , et si cette-dernière augmente de la valeur  $d\epsilon$  pendant un court intervalle de temps  $dt$ , la puissance qu'il consomme s'écrit littéralement

$$p(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \quad (3.26)$$

L'unité de la puissance est le watt (W). Dans une résistance, la puissance électrique consommée est convertie en chaleur ; dans un moteur, elle est convertie en puissance mécanique ; dans un accumulateur, elle décrit l'augmentation du stock d'énergie chimique.

Plaçons-nous à présent en régime alternatif sinusoïdal. Dans ces conditions, nous pouvons exprimer le courant et la tension de  $D$  au travers de leurs expressions respectives (3.17) et (3.18), ce qui permet d'écrire

$$p(t) = 2VI \cos(\omega t + \varphi_I) \times \cos(\omega t + \varphi_V) \quad (3.27)$$

Nous utilisons alors la relation de développement trigonométrique

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2} \quad (3.28)$$

pour écrire

$$p(t) = VI [\cos(2\omega t + \varphi_I + \varphi_V) + \cos(\varphi_V - \varphi_I)] \quad (3.29)$$

On introduit alors le **déphasage**  $\varphi$ , défini comme la différence de phases entre la tension et le courant

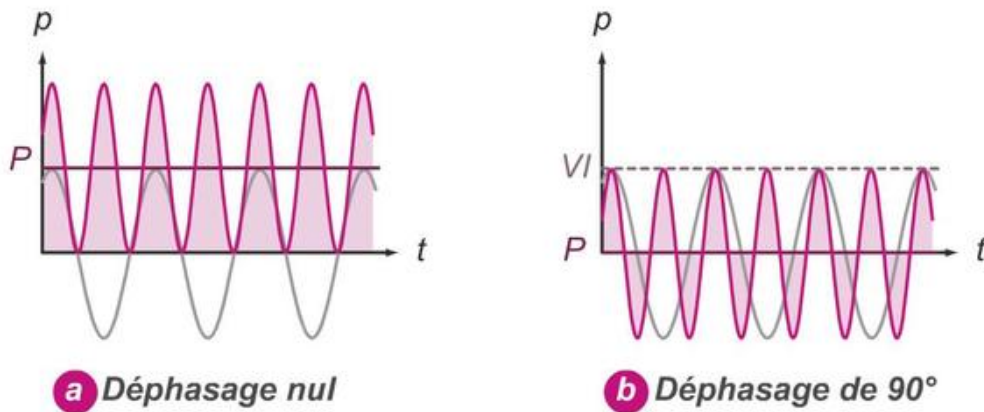
$$\varphi = \varphi_V - \varphi_I \quad (3.30)$$

Ainsi, la puissance instantanée consommée par le dipôle  $D$  s'écrit sous la forme d'une somme faisant apparaître une partie continue et une partie alternative

$$p(t) = VI \cos \varphi + VI \cos(2\omega t + 2\varphi_I + \varphi) \quad (3.31)$$

Nous avons reporté cette dernière expression pour des déphasages  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi/2 = 90^\circ$  dans la figure 3.11.

### 3.2 Puissances électriques en régime alternatif



**Figure 3.11** – Puissance électrique instantanée consommée par un dipôle  $D$  en régime alternatif sinusoïdal pour des déphasages (a)  $\varphi = 0$  et (b)  $\varphi = \pi/2 = 90^\circ$ . La valeur moyenne  $P$  est la puissance active. La puissance fluctue autour de sa composante continue à la fréquence double des signaux de courant et de tension (représentée par la courbe grisée).

On observe que la puissance instantanée en régime sinusoïdal fluctue autour de sa valeur moyenne  $P$ . Ainsi, on décompose la puissance sous la forme

$$p(t) = P + p_f(t) \quad (3.32)$$

où  $P$  est la composante continue appelée **puissance active** et  $p_f(t)$  une fonction alternative du temps oscillant à la fréquence double des signaux de courant et de tension, appelée **puissance fluctuante**.

#### b) Puissance active et facteur de puissance

La puissance active  $P$  est la puissance moyenne consommée par le dipôle  $D$  pendant un temps donné  $T$ . En régime alternatif,  $T$  est la période commune aux signaux de tension et de courant, et  $P$  est la partie continue de la puissance instantanée (3.31). Cette dernière peut être explicitée sur la période  $T$  par la relation

$$P = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} p(t) dt \quad (3.33)$$

où  $\tau$  est une valeur temporelle arbitraire en régime périodique, et nulle en régime dépendant du temps. La partie alternative ayant par définition une moyenne nulle, on retrouve l'expression

$$P = VI \cos \varphi \quad (3.34)$$

Cette expression met en évidence les trois grandeurs pertinentes pour évaluer les transferts énergétiques, qui sont les valeurs efficaces des grandeurs électriques et leur déphasage. Le déphasage agit sur la puissance active par le biais de son cosinus, ce qui veut dire que la conversion énergétique ne dépend pas du signe du déphasage, mais uniquement de sa valeur algébrique. Du fait de l'influence de la grandeur  $\cos \varphi$  sur la puissance active, celui-ci est appelé le **facteur de puissance**.

On remarque que, lorsque le déphasage vaut  $\pm 90^\circ$ , la puissance active est nulle puisque le facteur de puissance vaut  $\cos(\pm\pi/2) = 0$ . Ainsi, lorsqu'un composant induit un tel déphasage, le transfert énergétique est en moyenne nul.

### c) Puissance fluctuante

La puissance fluctuante  $p_f$  décrit un échange énergétique variable entre le dipôle électrique et son environnement. Si l'on observe la figure 3.11, on remarque que l'effet prépondérant du déphasage sur la puissance active n'implique qu'un décalage temporel sur la puissance fluctuante : il n'est donc pas possible de la supprimer. Or, l'amplitude de cette dernière, qui peut être appréhendée sur le volet (b), est égale au produit des valeurs efficaces  $V \cdot I$ , ce qui en fait un paramètre non négligeable.

La puissance fluctuante revêt un intérêt particulier lorsque l'on étudie la conversion mécano-électrique, dans les alternateurs et les moteurs par exemple. En effet, le fait que la conversion fluctue implique des à-coups sur les arbres de transmission qui peuvent se révéler rédhibitoires. On préférera dans ce cas conditionner l'énergie électrique sous forme triphasée<sup>1</sup>.

À partir de nos observations sur la puissance fluctuante, nous allons introduire deux nouvelles grandeurs qui sont la puissance apparente  $S$  et la puissance réactive  $Q$ . Si ces dernières n'ont pas à proprement parler de signification physique, elles vont se révéler des outils très utiles pour la description et la compréhension des phénomènes électriques et le dimensionnement des systèmes.

---

1. Les systèmes triphasés sont traités dans l'ouvrage *Précis d'électrotechnique*, par Christophe Palermo, Dunod, Collection Sciences Sup, 2012.

### d) La puissance apparente $S$

La puissance apparente  $S$  est un outil de dimensionnement qui cherche à rendre compte du courant traversant le circuit alimentant le dipôle électrique  $D$ . En effet, même lorsque la puissance active est nulle (dans le cas où  $\cos \varphi = 0$ ), les échanges énergétiques fluctuent et impliquent une circulation de courant électrique. On donne

$$S = VI \quad (3.35)$$

où  $V$  et  $I$  sont les valeurs efficaces des tensions et des courants mesurés aux bornes de  $D$ .

La puissance apparente n'est pas une puissance au sens physique du terme, mais elle peut être vue comme le majorant de la puissance fluctuante. À ce titre, elle est exprimée en volts-ampères (VA). Elle peut aussi être considérée comme la puissance consommée par un dipôle purement résistif ( $\cos \varphi = 1$ ) soumis à des tension et courant de valeurs efficaces respectives  $V$  et  $I$ . Dans ces conditions, la puissance active  $P$  peut être exprimée en fonction de  $S$  comme

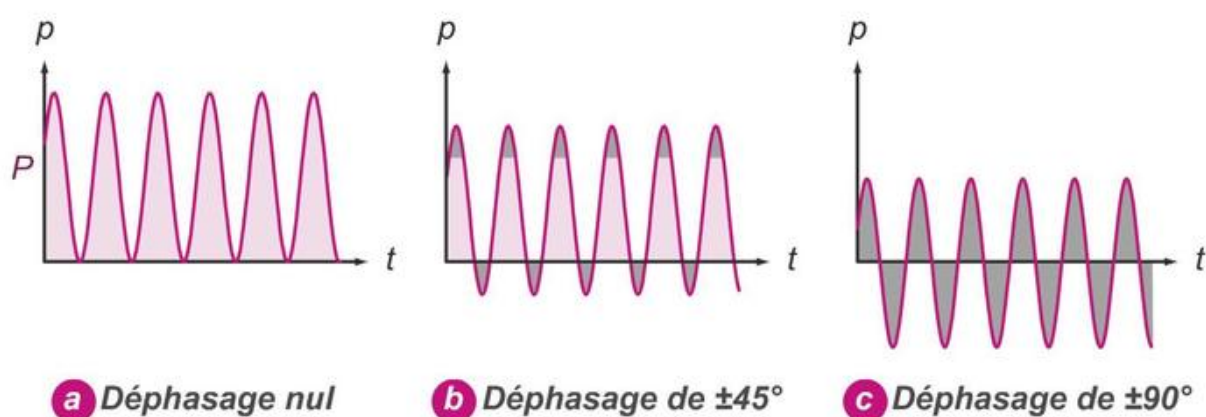
$$P = S \cos \varphi \quad (3.36)$$

### e) La puissance réactive $Q$

Nous définissons à présent la puissance réactive  $Q$ . Les puissances instantanées consommées par des dipôles de facteurs de puissance égaux à 1, à 0,7 et à 0 sont reportées en fonction du temps dans les volets (a) à (c) de la figure 3.12, respectivement. Nous grisons sur ces courbes les aires qui, lors de l'intégration, se compensent. En considérant qu'une puissance positive est consommée par le dipôle, il va de soi qu'une puissance négative est produite par celui-ci.

On distingue trois cas de figure :

1. lorsque le déphasage est nul, le facteur de puissance est égal à 1, et il n'y a aucune partie de la courbe qui se situe en dessous de 0. Ainsi, toute la puissance est consommée par le dipôle. C'est ce qui se passe concrètement dans une résistance ;
2. lorsque le déphasage est égal à  $\pm 90^\circ$ , c'est-à-dire quand  $\cos \varphi = 0$ , toute surface positive est compensée par une surface négative. En somme, le dipôle réalise du stockage énergétique mais ne procède à aucune conversion. C'est ce qui se passe concrètement dans une capacité ou une inductance ;



**Figure 3.12** – Puissance instantanée en fonction du temps pour des déphasages de (a)  $0^\circ$ , (b)  $\pm 45^\circ$  et (c)  $\pm 90^\circ$ . Les surfaces grisées ont, pour un déphasage donné, la même aire. Les valeurs positives représentent une puissance consommée, et les valeurs négatives une puissance produite.

- lorsque le déphasage est de  $\pm 45^\circ$ , dans le cas où  $\cos \varphi \simeq 0,7$ , une partie de la puissance est convertie tandis que l'autre partie est stockée.

On introduit donc une grandeur permettant de rendre compte du stockage énergétique réalisé par le dipôle, prenant sa valeur maximale en  $\varphi = \pi/2$ , nulle pour  $\varphi = 0$ , et dont le signe est identique à celui du déphasage  $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$ . La puissance réactive  $Q$  s'exprime comme

$$Q = VI \sin \varphi \quad (3.37)$$

en fonction des valeurs efficaces, et comme

$$Q = S \sin \varphi \quad (3.38)$$

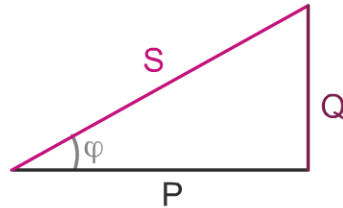
en fonction de la puissance apparente.

Ne représentant pas une conversion énergétique,  $Q$  est exprimée en volt-ampères réactifs (VAr). Son signe indique le comportement réactif du dipôle récepteur.

- Si  $Q > 0$ , on dit que le récepteur consomme de la puissance réactive. Cela se produit lorsque le déphasage est positif, c'est-à-dire lorsque la tension est en avance de phase sur le courant. Le récepteur est alors inductif.
- Si  $Q < 0$ , on dit que le récepteur produit de la puissance réactive. Dans ce cas le déphasage est négatif, c'est-à-dire que la tension est en retard de phase sur le courant. Le récepteur est alors capacitif.

### f) Triangle des puissances

Les relations (3.35), (3.36) et (3.38) permettent de représenter les grandeurs  $S$ ,  $P$  et  $Q$  dans le plan sous la forme d'un triangle rectangle. Celui-ci est appelé triangle des puissances, et nous l'avons reporté sur la figure 3.13.



**Figure 3.13** – Triangle (rectangle) des puissances apparente ( $S$ ), active ( $P$ ) et réactive  $Q$ .  
Seule la puissance active  $P$  est une puissance au sens physique du terme.

Le lien entre les trois grandeurs est alors établi en appliquant le théorème de Pythagore :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3.39)$$

Un dipôle récepteur en régime alternatif sinusoïdal, soumis à une tension et un courant de valeurs efficaces respectives  $V$  et  $I$  et déphasés de  $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$ , consomme :

- une **puissance active**  $P = VI \cos \varphi$  mesurée en W ;
- une **puissance réactive**  $Q = VI \sin \varphi$  donnée en VAR ;
- et une **puissance apparente**  $S = VI$  donnée en VA.

La grandeur  $\cos \varphi$  est appelée **facteur de puissance**. De plus,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

### Exercice 3.2

Un sèche-cheveux branché sur le réseau 230 V consomme une puissance de 1800 W et un courant de 10 A. Sachant qu'il s'agit d'un appareil inductif, déterminer :

1. la puissance apparente ;
2. le facteur de puissance ;
3. la puissance réactive du sèche-cheveux.

### Solution 3.2

1. La puissance apparente est définie par  $S = V \times I = 230 \times 10 = 2300$  VA.
2. Le facteur de puissance est le rapport

$$\cos \varphi = \frac{P}{VI} = \frac{1800}{230 \times 10} = 0,783$$

Le sèche-cheveux est un appareil inductif, donc  $\varphi = 0,672$  rad =  $38,5^\circ$ .

3. La puissance réactive est positive et est définie par le produit

$$Q = VI \sin \varphi \approx 1430 \text{ VAR}$$

### 3.2.2 Théorème de Boucherot

Le théorème de Boucherot permet d'exprimer les puissances active, réactive et apparente d'un circuit électrique constitué de plusieurs dipôles à partir de la consommation de chacun d'entre eux.

Appelons  $P$ ,  $Q$  et  $S$  les puissances active, réactive et apparente du circuit dans sa totalité, et supposons que celui-ci soit constitué de  $n$  dipôles. Supposons de plus que le  $i^{\text{ème}}$  dipôle consomme les puissances active, réactive et apparente  $P_i$ ,  $Q_i$  et  $S_i$ . Dans ces conditions :

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i \quad (3.40)$$

et

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (3.41)$$

De plus, les grandeurs du circuit vérifient la relation

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3.42)$$

Il est important de remarquer que le théorème de Boucherot n'établit **aucun lien** entre les puissances apparentes  $S_i$  et la grandeur  $S$ .

### Exercice 3.3

On souhaite faire fonctionner :

- un lave-linge qui consomme une puissance de 2 kW ;
- un sèche-linge consommant 2,5 kW ;

### 3.2 Puissances électriques en régime alternatif

- un lave-vaisselle de 2 kW ;
- un réfrigérateur et un congélateur de 150 W chacun.

On évalue le facteur de puissance des appareils de lavage à 0,85 et celui des appareils réfrigérants à 0,6. Les appareils sont tous inductifs.

1. Si l'on fait fonctionner tous ces appareils en même temps, quelle sera la puissance totale consommée par l'installation ?
2. L'utilisateur dispose d'un abonnement lui permettant de consommer 30 A. Pourra-t-il utiliser tous les appareils en même temps ?

#### Solution 3.3

1. D'après le théorème de Boucherot, la puissance totale  $P$  consommée par l'installation est la somme des puissances de chacun des appareils. Aussi

$$P = 2000 + 2500 + 2000 + 150 + 150 = 6800 \text{ W}$$

Les appareils, s'ils fonctionnent en même temps, consommeront une puissance électrique active de 6800 W.

2. Déterminons le courant  $I$  consommé par l'installation. Nous calculons tout d'abord sa puissance réactive  $Q$  en sommant les puissances réactives des différents appareils. Nous nous aidons pour cela de la puissance apparente.
  - Le lave-linge consomme une puissance de 2000 W, et son facteur de puissance est de 0,85. Aussi, la puissance apparente  $S_1$  se calcule à l'aide de la relation (3.36), ce qui permet d'écrire

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos \varphi_1} = \frac{2000}{0,85} = 2353 \text{ VA}$$

On trouve alors, d'après la relation (3.42),

$$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = \sqrt{2353^2 - 2000^2} = 1240 \text{ VAR}$$

- On procède de la même façon pour le sèche-linge, qui consomme 2500 W. On trouve  $S_2 = 2941 \text{ VA}$  et  $Q_2 = 1549 \text{ VAR}$ .
- Pour le lave-vaisselle,  $S_3 = 2353 \text{ VA}$  et  $Q_3 = 1240 \text{ VAR}$ .
- Les appareils réfrigérants ont un facteur de puissance de 0,6. Aussi, pour le réfrigérateur et le congélateur, on a

$$S_4 = S_5 = \frac{150}{0,6} = 250 \text{ VA}$$

et

$$Q_4 = Q_5 = \sqrt{250^2 - 150^2} = 200 \text{ VAR}$$

## Chapitre 3 – Du régime variable au régime alternatif sinusoïdal

Finalement, la puissance réactive totale de l'installation  $Q$  se calcule à l'aide du théorème de Boucherot. On obtient

$$Q = 1240 + 1549 + 1240 + 200 + 200 = 4429 \text{ VAR}$$

Le courant s'obtient au travers de la puissance apparente. Celle-ci vaut

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{6800^2 + 4429^2} = 8115 \text{ VA}$$

de sorte que

$$I = \frac{S}{V} = \frac{8115}{230} = 35 \text{ A}$$

Le courant consommé est de 35 A, ce qui est supérieur aux 30 A dont dispose l'utilisateur. Il ne pourra donc pas faire fonctionner tous ces appareils en même temps.

### 3.3 COMPOSANTS RÉACTIFS

Nous avons vu que le déphasage entre la tension et le courant avait des conséquences en terme de conversion énergétique. À présent, intéressons-nous aux causes de l'existence d'un déphasage entre les grandeurs électriques.

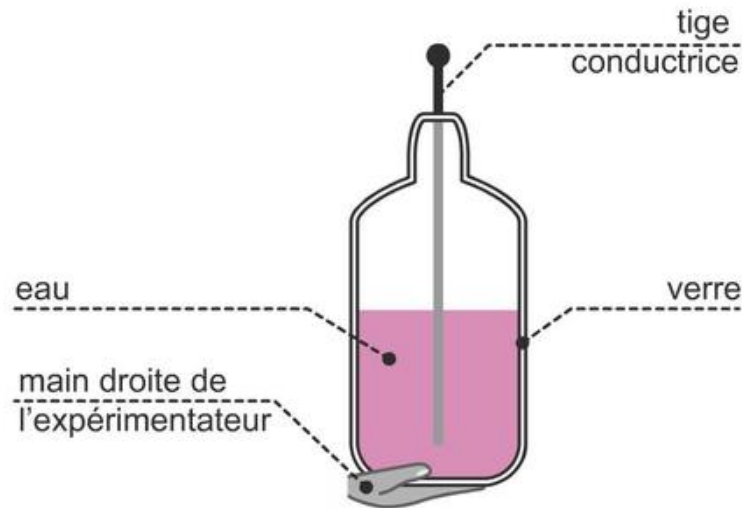
#### 3.3.1 Capacité

##### a) Description de la capacité

Les effets capacitifs de l'électricité ont été découverts au XVIII<sup>e</sup> siècle à l'université de Leyde alors que l'on cherchait à stocker l'électricité dans de l'eau contenue dans une bouteille de verre. Dans le protocole que nous décrivons sur la figure 3.14, l'expérimentateur tient la bouteille avec la main droite et connecte la tige conductrice à une source de charges électriques. Une fois la charge terminée, alors qu'il pose sa main gauche sur la tige tout en maintenant sa main droite à la même position, l'expérimentateur reçoit une décharge électrique pouvant se révéler importante. Si c'est une autre personne que l'expérimentateur qui entre en contact avec la tige, celle-ci ne reçoit aucune décharge.

Ainsi, l'électricité est bien stockée lors de l'expérimentation, mais pas par l'eau de la bouteille. C'est en réalité l'interaction électrique de la main de l'utilisateur et de la solution au travers du verre isolant qui constitue l'effet capacitif permettant ce que l'on appelle la condensation de l'électricité. Cette

expérience a permis la fabrication de la bouteille de Leyde dans laquelle la solution et la main droite de l'utilisateur sont remplacées par des conducteurs métalliques, et qui constitue le premier condensateur.



**Figure 3.14** – La bouteille de Leyde et le protocole expérimental mis en œuvre à l'université de Leyde au XVIII<sup>e</sup> siècle pour mettre en évidence l'effet capacitif.

Le point de départ de la compréhension du phénomène de condensation et de l'effet capacitif est le suivant :

- les charges de même signe se repoussent et celles de signes opposés s'attirent ;
- cette interaction peut se faire à distance, au travers de ce que l'on appelle le champ électrique mais plus la distance croît, plus l'interaction faiblit ;
- le potentiel et la charge d'un conducteur sont liés par une relation de proportionnalité.

En électricité, pour qu'il y ait un effet capacitif, il faut avoir affaire à deux conducteurs isolés l'un de l'autre, comme reporté sur la partie gauche de la figure 3.15. Considérons la situation 1 : si pour une raison quelconque une charge positive apparaît sur la plaque de gauche, les effets d'attraction-répulsion conduiront une charge négative à se positionner sur la plaque de droite. Il en va de même si plusieurs charges de même signe sont présentes sur une plaque : la plaque en regard portera alors une quantité de charge opposée. C'est ce qu'il se produit en situation 2.

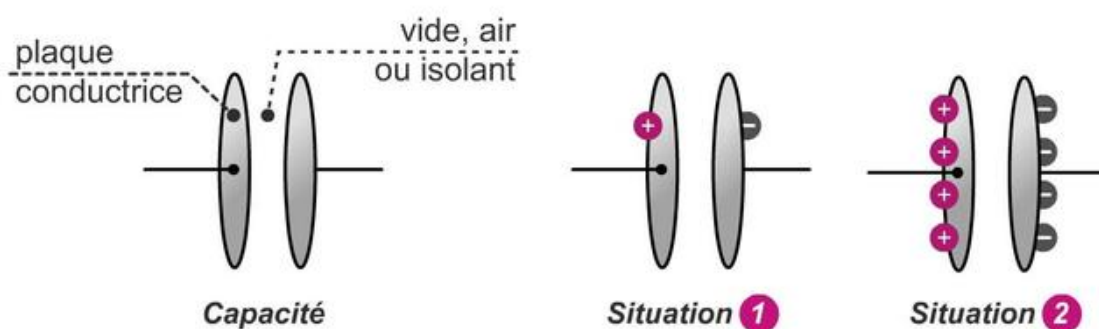


Figure 3.15 – Illustration de l'effet capacitif entre les plaques d'un condensateur.

Le potentiel de chacune des plaques étant proportionnel à la quantité de charge portées, il en va de même pour la différence de potentiels  $U$  entre les deux plaques. À l'inverse, si une différence de potentiels  $U$  est appliquée aux deux plaques initialement neutres, celles-ci se chargent. Si l'on appelle  $q$  la charge de la plaque chargée positivement, on a

$$q = CU \quad (3.43)$$

où  $C$  est une constante de proportionnalité, appelée **capacité** du condensateur et rendant compte de l'aptitude de ce dernier à se charger sous l'effet d'une tension.

Essayons de comprendre le comportement de la capacité en régime alternatif. Pour ce faire, imaginons que nous passions successivement d'une situation à l'autre par l'effet d'une tension  $u(t)$ . La charge varie dans le temps sur les deux plaques. On mesure donc un courant  $i(t)$ , celui-ci étant défini comme la variation de charge par unité de temps

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (3.44)$$

La relation (3.43) se formule par conséquent en régime alternatif sinusoïdal

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (3.45)$$

Tout se passe comme si le courant  $i$  traversait la capacité. Ce n'est pourtant pas le cas, car il n'y a pas de contact électrique entre les deux plaques (le circuit est ouvert). En fait, le courant  $i$  est en quelque sorte transmis d'une plaque à l'autre par le biais de l'interaction à distance des charges : c'est ce que l'on appelle un **courant de déplacement**.

Si l'on applique une tension continue, une fois la capacité totalement chargée, le nombre de charges stockées sur chaque plaque ne varie plus. Il n'y a donc plus de mouvement de charges, et le courant est alors nul.

En régime continu, une capacité se comporte comme un circuit ouvert.

C'est la raison pour laquelle nous ne l'avons pas abordée dans les deux premiers chapitres.

La puissance réactive d'une capacité est négative  $Q_c < 0$ . Elle produit de la puissance réactive. Elle stocke et restitue l'énergie électrique par le biais de l'interaction des charges présentes sur les plaques. C'est ce que l'on appelle un **stockage électrostatique**.

#### b) Déphasage associé à la capacité

Le courant et la tension aux bornes de la capacité sont liés. Toutefois, à la différence de la résistance où une différence de potentiels implique une circulation immédiate de charges électriques, on devine l'existence d'un certain décalage temporel associé au temps nécessaire aux charges pour peupler ou dépeupler les plaques.

Pour évaluer le déphasage, nous allons nous aider des mathématiques et considérer une tension alternative sinusoïdale  $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$  appliquée aux bornes de la capacité. Celle-ci entraîne la circulation d'un courant  $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ . L'application de la relation (3.45) associée à la formule trigonométrique

$$\sin(X) = \cos(X - \pi/2) \quad (3.46)$$

permet d'écrire que

$$i(t) = C\omega I\sqrt{2}\sin(\omega t) = C\omega I\sqrt{2}\cos(\omega t - \pi/2) \quad (3.47)$$

Comme la phase du courant est négative et que la tension est prise comme référence des phases, alors  $i$  est en avance de  $\pi/2$  rad sur  $v$ .

En régime alternatif sinusoïdal :

- la tension aux bornes d'une capacité est en retard de phase de  $90^\circ$  sur le courant la traversant ;
- le courant traversant une capacité est en avance de phase de  $90^\circ$  sur la tension à ses bornes.

### c) Symbole électrique de la capacité

En électricité, le composant permettant de profiter des effets capacitifs est le condensateur. Toutefois, le symbole électrique de la capacité, reporté sur le volet (a) de la figure 3.17 page 155, permet une description plus générale de l'effet physique associé à la condensation électrique. Dans un schéma électrique, au même titre que la résistance est utilisée pour représenter un échauffement, le symbole de la capacité permet de décrire l'effet capacitif qui intervient chaque fois que deux conducteurs chargés et séparés par un isolant sont suffisamment proches l'un de l'autre. Par exemple, entre deux câbles isolés d'une même ligne et parcourus par un courant électrique (et donc par des charges), il existe un effet capacitif descriptible sur un schéma par une capacité. Le modèle électrique associé à une ligne est proposé à la page 158.

### 3.3.2 Inductance

#### a) Description de l'inductance

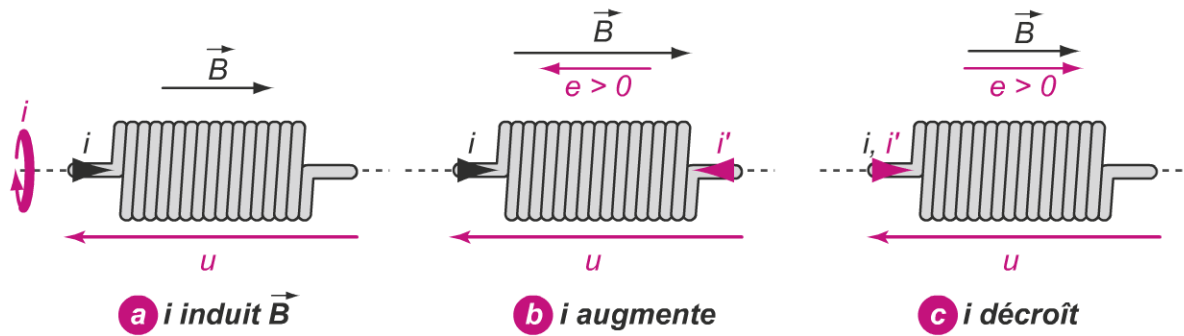
Au même titre que les effets capacitifs, les effets d'auto-induction de certains dipôles sont responsables d'un déphasage de la tension et du courant. Pour comprendre l'auto-induction, il faut prendre en considération les lois d'Ampère, de Faraday et de Lenz, qui s'énoncent respectivement comme suit :

- un conducteur traversé par un courant crée dans son environnement un champ magnétique. Les intensités de ces deux grandeurs sont proportionnelles. Il s'agit de la loi d'Ampère et de Biot et Savart. Lorsque le conducteur est une bobine, le champ magnétique est créé dans l'axe de celle-ci, et sa direction dépend du sens de rotation du courant ;
- un conducteur soumis à un flux magnétique  $\phi$  variable est le siège d'une force électromotrice induite, c'est la loi de Faraday. Dans le cas d'un bobinage, pour chaque spire de conducteur, la force électromotrice induite  $e$  vaut

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (3.48)$$

- les phénomènes induits s'opposent par leurs effets à ce qui leur donne naissance, c'est la loi de Lenz.

Considérons pour décrire l'auto-induction la figure 3.16. Le courant  $i$  indique le sens conventionnel du courant dans les trois volets, c'est-à-dire que pour les trois instants considérés  $i > 0$ . Le volet (a) indique que le courant  $i$  induit



**Figure 3.16** – Illustration de l'effet d'auto-induction provoqué par un courant alternatif sinusoïdal dans une bobine.

un champ magnétique  $\vec{B}$  orienté dans l'axe de l'enroulement. En régime variable, et en particulier en régime sinusoïdal,  $\vec{B}$  varie dans le temps. Aussi, il induit dans la bobine une force électromotrice. S'opposant aux phénomènes qui la créent, la force électromotrice engendre un courant  $i'$  dont les caractéristiques dépendent de la variation de  $i$ . Reportons-nous aux volets (b) et (c) dans lesquels nous avons indiqué par  $i'$  le sens conventionnel du courant induit (par conséquent,  $i' > 0$ ).

- Dans le cas où le courant  $i$  est croissant, le champ magnétique, et par conséquent le flux associé, sont croissants. La force électromotrice induite lutte donc contre l'augmentation de  $i$  et le courant  $i'$  vient s'opposer au courant  $i$ . C'est le que l'on observe dans le volet (b) où tout se passe comme si la bobine résistait au passage du courant.
- Dans le cas où le courant  $i$  est décroissant, le champ magnétique et le flux associés diminuent d'intensité : la force électromotrice va lutter contre la décroissance de  $i$  en délivrant un courant  $i'$  dans le même sens. C'est ce que l'on voit dans le volet (c) où tout se passe comme si la bobine venait accentuer le courant la traversant.

Si la surface de bobine exposée au champ magnétique et la direction de ce dernier ne varient pas, ce qui est le cas pour une bobine, le flux magnétique ne dépend que de  $\vec{B}$ . Ce dernier étant proportionnel au courant inducteur  $i$ , la variation de flux magnétique est proportionnelle à la variation de courant inducteur. De plus,  $u = -e$ , comme on peut le voir dans le volet (c) de la figure 3.16 où les deux tensions sont associées à des courants conventionnels de même sens. On établit alors que

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.49)$$

où  $L$  est une constante de proportionnalité, appelée inductance et mesurée en henrys (H), rendant compte de l'aptitude de la bobine à créer la force électromotrice, c'est-à-dire à s'auto-induire.

Si le courant traversant la bobine est continu, le champ magnétique induit reste constant, de sorte qu'il n'y a pas de force électromotrice induite. L'inductance n'a aucun effet sur le courant et la tension à ses bornes est nulle.

En régime continu, une inductance se comporte comme un court-circuit.

C'est la raison pour laquelle nous ne l'avons pas abordée dans les deux premiers chapitres, dédiés au régime continu.

La puissance réactive d'une inductance est positive  $Q_L > 0$  : elle consomme de la puissance réactive. Elle stocke et restitue l'énergie électrique par le biais du champ magnétique induit par le courant. C'est ce que l'on appelle un **stockage magnétique**.

#### b) Déphasage associé à l'inductance

Comme nous l'avons fait pour le cas de la capacité, aidons-nous des mathématiques pour définir le déphasage qu'entraîne une inductance. Pour cela, considérons un courant  $i$  à l'origine des phases  $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t)$  et une tension  $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$  déphasée de  $\varphi$ . La relation (3.49) permet d'écrire que

$$u(t) = L\omega I\sqrt{2}\sin(\omega t) = L\omega I\sqrt{2}\cos(\omega t - \pi/2) \quad (3.50)$$

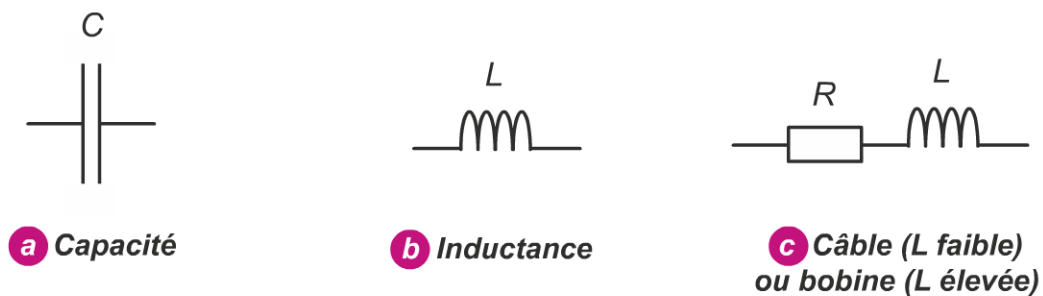
La phase de tension est négative : le courant constituant la référence des phases,  $v$  est donc en avance de  $\pi/2$  rad sur  $i$ .

En régime alternatif sinusoïdal :

- la tension aux bornes d'une capacité est en avance de phase de  $90^\circ$  sur le courant la traversant ;
- le courant traversant une capacité est en retard de phase de  $90^\circ$  sur la tension à ses bornes.

## c) Symbole électrique de l'inductance

Le symbole de l'inductance, reporté dans le volet (b) de la figure 3.17, est introduit dans un schéma électrique équivalent chaque fois que l'on cherche à décrire le phénomène d'auto-induction. Ce sera le cas chaque fois que l'on considérera un conducteur parcouru par un courant alternatif. En effet, même si celui-ci n'est pas bobiné, il sera la source d'un champ magnétique et subira de fait les effets de l'induction électromagnétique.



**Figure 3.17** – Symboles électriques (a) de la capacité et (b) de l'inductance. (c) Schéma électrique équivalent d'un câble (faible inductance) ou d'une bobine (inductance élevée).

Dans un circuit électrique, le composant permettant de profiter des effets d'auto-induction est la bobine. En effet, le fait d'enrouler le conducteur concentre sur celui-ci le flux magnétique, ce qui permet de maximiser ses effets. Remarquons que la bobine ne peut être représentée par une inductance seule puisqu'elle fait nécessairement intervenir un échauffement dû à la circulation du courant dans le bobinage. Le schéma électrique équivalent d'un câble ( $L$  faible), et en particulier d'une bobine ( $L$  élevée) est reporté sur le volet (c).

**Exercice 3.4**

On souhaite déterminer les caractéristiques d'un dipôle  $D$ . Pour ce faire, on procède à la mesure simultanée, à l'oscilloscope :

- de la tension  $v$  aux bornes de  $D$  ;
- de la tension  $u$  aux bornes d'une résistance  $R = 100 \Omega$  connectée en série avec  $D$ .

Après avoir réglé l'oscilloscope et centré verticalement les signaux en 0, on obtient l'oscillogramme reporté sur la figure 3.18. La base de temps est de  $100 \mu\text{s}$  par division.

1. Quelle grandeur cherche-t-on indirectement à mesurer au travers de la tension  $u$  ? Déterminer la valeur efficace de cette grandeur.

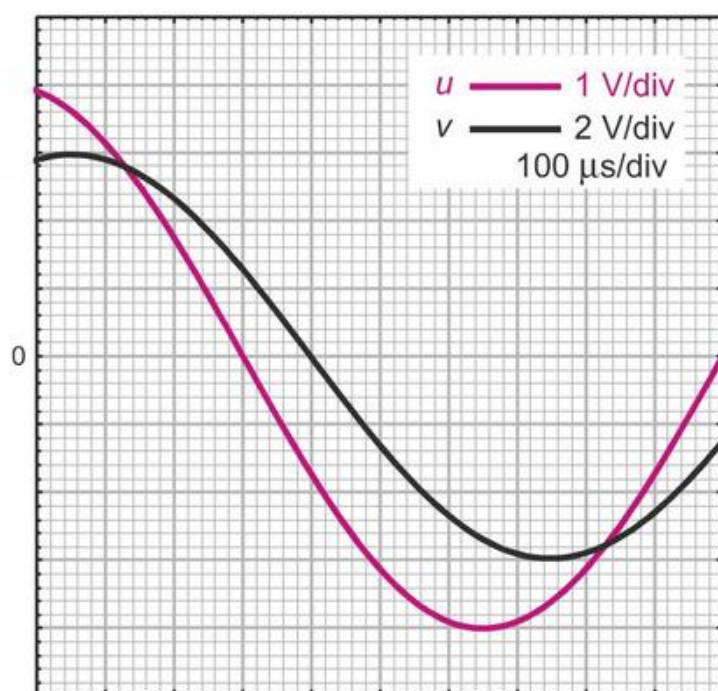


Figure 3.18 – Oscillogramme de l'exercice 3.4.

2. Déterminer la fréquence des différentes grandeurs mesurées.
3. Déterminer la valeur efficace de la tension  $v$ .
4. Déterminer le déphasage dû au dipôle  $D$  et préciser s'il a un comportement capacitif ou inductif.
5. Déterminer l'impédance apparente  $Z = V/I$  du dipôle.
6. Déduire de l'ensemble des mesures les puissances active, réactive et apparente consommées par le dipôle  $D$ .

### Solution 3.4

On cherche à déterminer les caractéristiques du dipôle  $D$ . Sous l'effet de la tension alternative  $v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_V)$ , celui-ci est traversé par un courant  $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_I)$ . Pour caractériser le dipôle, il suffit de déterminer à l'aide de l'oscillogramme :

- le déphasage  $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$  qu'il occasionne ;
- le rapport des valeurs efficaces  $V/I$  qui constitue ce que l'on appelle l'impédance apparente du dipôle  $D$ .

1. Étant donné qu'un oscilloscope ne permet de mesurer que des tensions, une mesure directe du courant est impossible. Le courant instantané étant le même

dans tout le circuit, et puisqu'une résistance n'induit pas de déphasage entre la tension  $u$  à ses bornes et le courant  $i$  la traversant, la mesure de la tension  $u(t)$  aux bornes de  $R$  permet de déterminer les caractéristiques du courant  $i(t)$ . En effet,

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U}{R} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_I)$$

avec  $\varphi_I = \varphi_U$ . La valeur efficace du courant est donc le rapport  $U/R$ . La lecture de l'oscillogramme permet de déterminer l'amplitude de la tension  $u$  : étant donné que le minimum du signal se situe à 4 divisions en dessous de 0, et que chaque division représente 1 V, l'amplitude vaut  $U \sqrt{2} = 4 \text{ V}$ , de sorte que la valeur efficace du courant vaut

$$I = \frac{U}{R \sqrt{2}} = \frac{4}{100 \sqrt{2}} = 2,83 \cdot 10^{-2} \text{ A} = 28,3 \text{ mA}$$

2. Pour déterminer la fréquence des différentes grandeurs, nous déterminons dans un premier temps la période  $T$  en considérant les instants où la tension  $u(t)$  coupe l'axe de tension nulle. Deux instants successifs indiquent une demi-période et sont séparés de sept divisions, soit  $700 \mu\text{s}$  puisque chaque division correspond à  $100 \mu\text{s}$ . Aussi, on a  $T = 1400 \text{ ms}$  et

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1400 \cdot 10^{-6}} = 714 \text{ Hz}$$

Les deux signaux de tension, ainsi que le signal de courant non-représenté mais associé à  $u$ , ont une fréquence de 714 Hz.

3. La valeur efficace de  $v$  se détermine en repérant le maximum de la courbe de  $v$  sur l'oscillogramme : 3 divisions, chaque division représentant 2 V. Aussi,  $V \sqrt{2} = 6 \text{ V}$ , de sorte que la valeur efficace de la tension mesurée aux bornes du dipôle vaut

$$V = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,24 \text{ V}$$

4. Pour mesurer le déphasage, on mesure le temps qui sépare deux passages à valeur nulle des tensions  $v$  et  $u$ . Dans notre cas,  $u$  est en avance sur  $v$ , puisqu'elle coupe l'axe de tension nulle au bout de  $300 \mu\text{s}$ , contre  $400 \mu\text{s}$  pour  $v$ . Sachant que  $u$  et  $i$  sont en phase, on peut d'ores et déjà en déduire que le dipôle, retardant la tension  $v$ , a un comportement capacitif. Le déphasage  $\varphi$  est la différence  $\varphi_V - \varphi_I = \varphi_V - \varphi_U$ , c'est-à-dire l'avance de phase de la tension par rapport au courant. Puisque  $v$  est en retard de phase, le déphasage  $\varphi$  est négatif. Étant donné l'écart temporel absolu  $\Delta T$  et la période  $T$ , on a

$$|\varphi| = \frac{\Delta T}{T} 360^\circ = \frac{100}{1400} 360^\circ = 25,7^\circ$$

de sorte que le déphasage dû au dipôle vaut  $\varphi = -25,7^\circ$ .

Remarquons qu'une autre méthode pour mesurer  $|\varphi|$  consiste à remarquer que (i) une demi-période  $T/2$ , c'est-à-dire  $180^\circ$  de phase, s'étale sur 7 divisions et que (ii) l'écart temporel entre les grandeurs représente une division, c'est-à-dire  $180^\circ/7 = 25,7^\circ$ . Cette méthode n'est possible que si l'on dispose d'un oscilloscope analogique qui permet de régler continûment la base de temps et donc de caler la demi-période sur un nombre entier de divisions.

### 3.3.3 Modélisation d'une ligne électrique

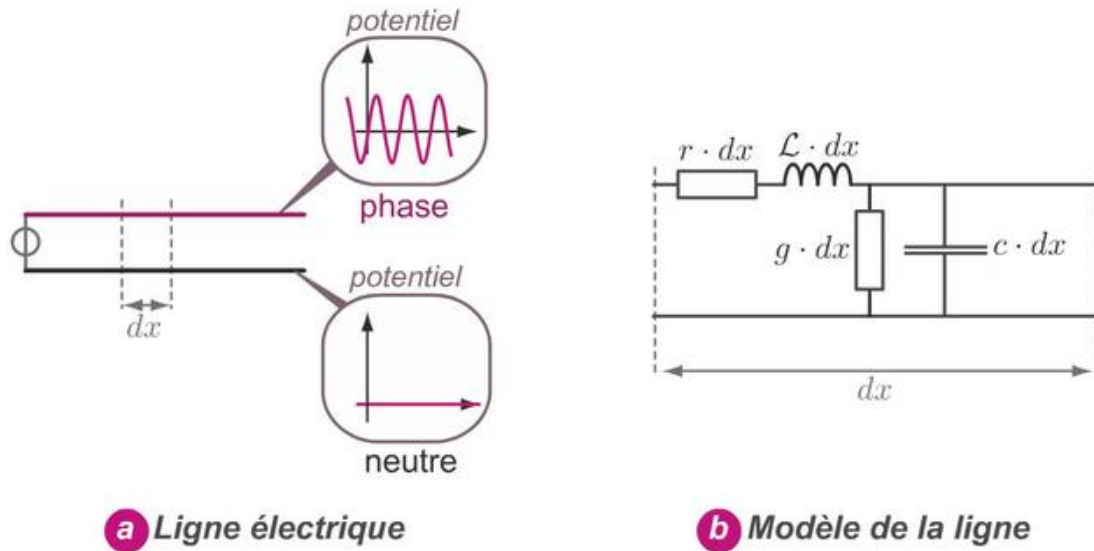
Avant d'aborder les outils mathématiques du régime alternatif sinusoïdal, nous allons utiliser les différents composants que nous avons rencontrés dans le but de modéliser une ligne électrique. Il peut s'agir d'une ligne de transport de puissance ou bien d'une ligne de télécommunications. En régime alternatif sinusoïdal, une ligne est composée de deux câbles, comme reporté sur le volet (a) de la figure 3.19 :

- le premier d'entre eux s'appelle la phase (à ne pas confondre avec la phase du signal), et son potentiel varie dans le temps selon une fonction sinusoïdale ;
- le second s'appelle le neutre, et est maintenu constamment à un potentiel nul. Ainsi, la différence de potentiels entre les deux câbles correspond à une tension sinusoïdale.

Analysons à présent les différents effets physiques impliqués dans un tronçon de ligne de longueur  $dx$  :

- la circulation du courant dans les deux câbles crée d'abord un échauffement, que l'on représente par une résistance. La valeur de celle-ci dépend de la longueur  $dx$  considérée. On introduit donc la résistance linéique  $r$ , donnée en  $\Omega/m$ , qui est une grandeur caractéristique de la ligne. La résistance du tronçon est donc égale à  $r \cdot dx$  ;
- la circulation du courant est par ailleurs responsable d'un effet d'auto-induction. On introduit l'inductance linéique  $\mathcal{L}$  donnée en  $H/m$ , qui est la seconde grandeur caractéristique de la ligne. Le tronçon a donc une inductance égale à  $\mathcal{L} \cdot dx$  ;
- les deux câbles étant isolés, il existe un effet capacitif, qui dépend de la qualité de l'isolant et de la géométrie de la ligne. On introduit alors la capacité linéique  $c$  caractéristique de la ligne, mesurée en  $F/m$ , et le tronçon a une capacité  $c \cdot dx$  ;
- enfin, la qualité de l'isolation entre les deux fils est quantifiée par une résistance. Celle-ci étant nécessairement grande, on préfère utiliser la conductance, qui est l'inverse de la résistance. L'isolation

étant totale lorsque la conductance est nulle. La quatrième et dernière grandeur caractérisant la ligne est donc la conductance linéique  $g$ , donnée en siemens par mètre  $S/m$ , avec  $1 S = 1 \Omega^{-1}$ . Le tronçon a donc une conductance  $g \cdot dx$ .



**Figure 3.19** – (a) Une ligne électrique (pour le transport de puissance ou d'information) est constituée du câble de phase et du câble neutre. Les oscillogrammes représentent les allures des potentiels de chacun des câbles dans le temps. (b) Modèle électrique équivalent d'un tronçon de ligne de longueur  $dx$ . Les grandeurs  $r$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $g$  et  $c$  sont des grandeurs linéiques qui permettent de caractériser la ligne.



# 4

## Réseaux linéaires en régime alternatif sinusoïdal

Nous avons décrit au chapitre précédent le régime alternatif sinusoïdal en précisant l'intérêt de son étude. D'une part, l'énergie du réseau électrique est fournie sous forme alternative sinusoïdale. D'autre part, si l'on sait décrire les grandeurs électriques continues et les signaux harmoniques, il est possible d'analyser la réponse d'un système donné à n'importe quel signal périodique au travers d'une simple décomposition en séries de Fourier.

Cette première approche du régime alternatif sinusoïdal nous a permis de mettre en évidence les deux grandeurs pertinentes pour la description d'un tel signal, qui sont la valeur efficace et la phase. En particulier, nous avons vu que la puissance électrique consommée par un dipôle est directement liée à ces deux grandeurs.

Dans ce chapitre, nous développons dans un premier temps un formalisme adapté à la description des signaux sinusoïdaux. Ainsi, en utilisant des nombres complexes, nous définissons les phaseurs, qui permettent de décrire les signaux considérés tout en simplifiant les calculs. La représentation de Fresnel, fort utile dès lors qu'il s'agit d'appliquer les lois de Kirchhoff, est, elle aussi, abordée.

Dans un second temps, nous généralisons la loi d'Ohm aux bornes des différents dipôles linéaires au travers de la notion d'impédance. L'ensemble des lois et théorèmes du continu est alors généralisé au régime alternatif sinusoïdal : tous s'appliquent sous des formes similaires à celles vues au chapitre 2, à condition d'utiliser les phaseurs et les impédances à la place des grandeurs continues et des résistances.

## 4.1 OUTILS MATHÉMATIQUES DU RÉGIME ALTERNATIF SINUSOÏDAL

À l'usage, la manipulation des grandeurs électriques au travers du formalisme trigonométrique se révèle fastidieuse, et il s'avère nécessaire de développer des outils mathématiques donnant plus de souplesse. Ces outils, s'ils ont pour but de faciliter les calculs, doivent être capables de représenter les grandeurs électriques en respectant les lois fondamentales de l'électricité que sont la loi d'Ohm et les lois de Kirchhoff.

Le formalisme des phaseurs trouve sa source dans l'expression du courant alternatif sinusoïdal sous une forme complexe

$$\underline{i(t)} = I \sqrt{2} \exp(j\omega t + \varphi_I) \quad (4.1)$$

à la place de l'expression réelle  $i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_I)$ , de sorte que

$$i(t) = \mathcal{Re}[\underline{i(t)}] \quad (4.2)$$

Notons que, pour différencier les nombres complexes des nombres réels, nous ajouterons une barre en dessous de la lettre représentant la grandeur. Par ailleurs, nous rappelons que nous notons avec des lettres minuscules les grandeurs dépendant du temps et avec des lettres majuscules celles qui n'en dépendent pas.

Les propriétés de la partie réelle  $\mathcal{Re}$  d'un nombre ou d'une fonction complexe sont telles que, quelle que soit la valeur de  $t$ ,

$$\mathcal{Re}[R \cdot \underline{i(t)}] = R \cdot \mathcal{Re}[\underline{i(t)}] = R \cdot i(t) \quad (4.3)$$

pour une résistance  $R$ ,

$$\mathcal{Re} \left[ \frac{di(t)}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \mathcal{Re}[\underline{i(t)}] = \frac{di(t)}{dt} \quad (4.4)$$

et

$$\mathcal{Re}[\underline{i_1(t)} + \underline{i_2(t)}] = \mathcal{Re}[\underline{i_1(t)}] + \mathcal{Re}[\underline{i_2(t)}] = i_1(t) + i_2(t) \quad (4.5)$$

Si l'on fait le bilan des différentes relations que l'on peut établir entre la tension et le courant aux bornes d'un dipôle donné en appliquant ces lois en régime alternatif sinusoïdal, on ne recense :

- qu'une multiplication par un nombre réel, lors de l'application de la loi d'Ohm à un dipôle résistif ;

## 4.1 Outils mathématiques du régime alternatif sinusoïdal

- qu'une multiplication par un réel associée à une opération de dérivation, dans le cas d'un composant réactif ;
- qu'une somme de courants ou de tension, lors de l'application de la loi des nœuds ou des mailles.

On retrouve des propriétés similaires pour la partie imaginaire. Par conséquent, lors de l'application des lois fondamentales de l'électricité, il est équivalent de faire les calculs :

- en utilisant directement les fonctions sinusoïdales ;
- en utilisant les fonctions complexes puis en extrayant la partie réelle (dans le cas d'une grandeur exprimée par un cosinus) ou la partie imaginaire (dans le cas d'une grandeur exprimée par un sinus).

Le passage du formalisme sinusoïdal au formalisme complexe s'appelle la **transformation complexe**.

### 4.1.1 Les phaseurs

L'expression complexe du courant  $\underline{i}(t)$  peut être simplifiée en utilisant une propriété de la fonction exponentielle. En effet, l'équation (4.1) peut être réécrite

$$\underline{i}(t) = I \sqrt{2} \exp(j\omega t + \varphi_I) = I \sqrt{2} \exp(j\varphi_I) \exp(j\omega t) \quad (4.6)$$

en isolant la partie temporelle  $\exp(j\omega t)$  de l'expression. Étant donné que les grandeurs courant et tension dans un circuit donné ont toutes la même pulsation  $\omega$ , la partie temporelle prend en un moment donné la même valeur pour tous les signaux : elle ne permet pas de les discerner et n'est donc pas pertinente. Ainsi, la description du courant alternatif sinusoïdal avec les outils complexes ne se fait pas au travers de la fonction complexe  $\underline{i}(t)$  mais du **nombre complexe**

$$\underline{I} = I \sqrt{2} \exp(j\varphi_I) \quad (4.7)$$

La grandeur  $\underline{I}$  est appelée **le phaseur** du courant. Elle contient à la fois la valeur efficace et la phase du courant et, pour cette raison, elle porte aussi le nom de **valeur efficace complexe**.

Remarquons que la notion de phaseur s'applique aussi aux tensions, de sorte que le phaseur de la tension alternative  $v(t) = V \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_V)$  s'exprime comme

$$\underline{V} = V \exp(j\varphi_V) \quad (4.8)$$

Les phaseurs sont suffisants pour décrire les grandeurs mesurables du circuit électrique.

### • Comment passer du phaseur aux grandeurs mesurables ?

Par construction, les phaseurs permettent à eux seuls de décrire les différentes grandeurs électriques mesurables aux bornes d'un dipôle. Nous expliquons dans cette section comment on peut extraire d'un phaseur, qui est un nombre complexe, ces grandeurs mesurables, qui sont des nombres réels. Celles-ci sont au nombre de trois : la fréquence  $f$  ou la pulsation  $\omega = 2\pi f$ , la valeur efficace et la phase.

La fréquence étant la même dans tout le circuit, elle ne permet pas de différencier les signaux d'un même circuit entre eux et n'est pas, à ce titre, contenue dans les phaseurs. On la déduit de la connaissance de l'une des grandeurs ou bien en fonction des données du problème.

En revanche, la valeur efficace et la phase sont contenues dans le phaseur : elles permettent de différencier les signaux entre eux. Par exemple, le phaseur  $\underline{I} = I \exp(j\varphi_I)$  décrit le courant sinusoïdal de valeur efficace  $I$  et de phase  $\varphi_I$ . Pour les extraire du phaseur, on procède comme suit :

- La valeur efficace  $I$  est le module de  $\underline{I}$  :  $I = |\underline{I}|$
- La phase  $\varphi_I$  est l'argument de  $\underline{I}$  :  $\varphi_I = \arg(\underline{I})$

La valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale est le module du phaseur qui lui est associé, et la phase d'une grandeur est l'argument de ce même phaseur.

### Exercice 4.1

Déterminer les phaseurs associés aux tensions alternatives suivantes :

1.  $v_1(t) = 2 \cos(100t + \pi/3)$  ;
2.  $v_2(t)$  est une grandeur sinusoïdale de valeur efficace 2V et de phase nulle ;
3.  $v_3(t)$  est un signal en créneau d'amplitude 2 V, de fréquence 100 Hz, de rapport cyclique 0,5 et de phase  $\pi/3$ .

### Solution 4.1

1. Le phaseur d'une grandeur électrique alternative sinusoïdale contient la valeur efficace et la phase de cette grandeur. Le lien entre l'amplitude  $V_0$  et la valeur efficace  $V$  d'une tension harmonique étant  $V = V_0 / \sqrt{2}$ , nous pouvons écrire le phaseur associé à la tension sinusoïdale  $v_1(t)$  :

$$\underline{V}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \exp\left(j\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \exp\left(j\frac{\pi}{3}\right)$$

## 4.1 Outils mathématiques du régime alternatif sinusoïdal

2. La tension  $v_2(t)$  est sinusoïdale. Sa phase étant nulle et sa valeur efficace égale à  $2\text{ V}$ , on écrit son phaseur

$$\underline{V}_2 = 2 \exp(j0) = 2$$

en remarquant que  $\exp(0) = e^0 = 1$ .

3. Le signal  $v_3(t)$  est rectangulaire (créneaux), alors que les phaseurs ne sont définis que pour des grandeurs alternatives sinusoïdales. Aussi, il n'est pas possible de définir un phaseur associé à cette grandeur :  $\underline{V}_3$  n'existe pas.

### 4.1.2 Généralisation de la loi d'Ohm et impédances complexes

L'un des grands intérêts d'utiliser les phaseurs en électricité est qu'ils peuvent être liés par une expression similaire à celle de la loi d'Ohm. Il suffit pour cela de définir, pour les différents types de composant, ce que l'on appelle une **impédance**. Il devient alors possible de décrire les différentes grandeurs électriques du circuit en s'affranchissant de la composante temporelle. L'objectif est de retrouver une approche similaire à celle que l'on a utilisé en régime continu.

Afin d'établir ce que l'on appelle la **loi d'Ohm généralisée** au régime alternatif sinusoïdal, considérons une tension  $v(t) = V \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_V)$  appliquée aux bornes d'un dipôle  $D$  traversé par un courant  $i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_I)$ . Les expressions complexes de ces grandeurs sont  $\underline{v}(t) = \underline{V} \sqrt{2} \exp(j\omega t)$  et  $\underline{i}(t) = \underline{I} \sqrt{2} \exp(j\omega t)$ , où  $\underline{V}$  et  $\underline{I}$  sont les phaseurs respectifs de la tension et du courant.

#### a) Cas d'une résistance $R$

Dans le cas d'une résistance  $R$ , la tension  $v$  et le courant  $i$  sont liés par la relation  $v = Ri$ . Les grandeurs électriques peuvent être remplacées par leurs expressions complexes, de sorte que

$$\underline{v}(t) = R\underline{i}(t) = R\underline{I} \sqrt{2} \exp(j\omega t) = \underline{V} \sqrt{2} \exp(j\omega t) \quad (4.9)$$

Cette dernière relation étant vraie quel que soit le temps  $t$ , cela revient à écrire que

$$\underline{V} = R\underline{I} \quad (4.10)$$

Par conséquent, en régime alternatif sinusoïdal, on peut appliquer la loi d'Ohm aux bornes d'une résistance en utilisant la valeur de la résistance  $R$  et les phaseurs.

### b) Cas d'une inductance $L$

Dans le cas d'une inductance  $L$ , la tension  $v$  et le courant  $i$  sont liés par l'expression

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (4.11)$$

Si l'on remplace  $v$  et  $i$  par leurs expressions complexes, cette dernière relation devient

$$\underline{v}(t) = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = jL\omega \underline{I} \sqrt{2} \exp(j\omega t) = \underline{V} \sqrt{2} \exp(j\omega t) \quad (4.12)$$

ce qui revient à écrire en divisant par  $\sqrt{2} \exp(j\omega t)$  que

$$\underline{V} = jL\omega \underline{I} \quad (4.13)$$

Si l'on appelle  $\underline{Z}_L = jL\omega$  l'impédance de l'inductance, la précédente relation s'écrit comme la loi d'Ohm généralisée au cas des impédances

$$\underline{V} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I} \quad (4.14)$$

Par conséquent, en régime alternatif sinusoïdal, on peut appliquer la loi d'Ohm aux bornes d'une inductance en utilisant la valeur de son impédance  $\underline{Z}_L = jL\omega$  et les phaseurs.

### c) Cas d'une capacité $C$

Dans le cas d'une capacité, la tension  $v$  et le courant  $i$  sont liés par l'expression

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (4.15)$$

Si l'on remplace  $v$  et  $i$  par leurs expressions complexes, cette dernière relation devient

$$\underline{i}(t) = C \frac{d\underline{v}(t)}{dt} = jC\omega \underline{V} \sqrt{2} \exp(j\omega t) = \underline{I} \sqrt{2} \exp(j\omega t) \quad (4.16)$$

ce qui revient à écrire en divisant par  $\sqrt{2} \exp(j\omega t)$  que

$$\underline{V} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I} = \frac{-j}{C\omega} \underline{I} \quad (4.17)$$

On appelle  $\underline{Z}_C = \frac{-j}{C\omega}$  l'impédance de la capacité : en régime alternatif sinusoïdal, on peut appliquer la loi d'Ohm aux bornes d'une capacité en utilisant la valeur de son impédance  $\underline{Z}_C$  et les phaseurs.

En régime alternatif sinusoïdal, la loi d'Ohm se généralise aux bornes des inductances et des capacités au travers de la relation

$$\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad (4.18)$$

où  $\underline{V}$  et  $\underline{I}$  sont les phaseurs de tension et de courant aux bornes du dipôle considéré, et où  $\underline{Z}$  est son impédance, avec

- $\underline{Z} = R$  pour une résistance  $R$  quelle que soit la pulsation ;
- $\underline{Z} = jL\omega$  pour une inductance  $L$  soumise à des signaux de pulsation  $\omega$  ;
- $\underline{Z} = -\frac{j}{C\omega}$  pour une capacité  $C$  soumise à des signaux de pulsation  $\omega$ .

### Exercice 4.2

On considère une tension alternative sinusoïdale  $v(t) = 2\sqrt{2}\cos(200t + \pi/6)$  appliquée aux bornes d'un dipôle. Déterminer, à l'aide des phaseurs, les caractéristiques du courant qui traverse ce dipôle lorsqu'il s'agit :

1. d'une résistance de  $100\ \Omega$  ;
2. d'une capacité de  $100\ \mu\text{F}$  ;
3. d'une bobine de  $100\ \text{mH}$ .

On donnera l'expression sinusoïdale des courants.

### Solution 4.2

Le phaseur de la tension  $v$  s'exprime comme

$$\underline{V} = 2 \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)$$

Nous utilisons la loi d'Ohm généralisée (4.18) pour déterminer les phaseurs correspondant à chaque dipôle.

1. Pour une résistance de  $100\ \Omega$ , le phaseur de courant  $\underline{I}_R$  associé au courant alternatif sinusoïdal  $i_R$  s'écrit

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{V}}{R} = \frac{2}{100} \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right) = 0,02 \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)$$

La résistance est donc traversée par un courant de valeur efficace  $20\ \text{mA}$  et de phase  $\varphi = \pi/6$ , s'exprimant par conséquent comme

$$i_R(t) = 0,02\sqrt{2}\cos(100t + \pi/6)$$

## Chapitre 4 – Réseaux linéaires en régime alternatif sinusoïdal

2. Dans le cas d'une capacité de  $100 \mu\text{F}$ , l'impédance du dipôle est égale à

$$\underline{Z}_C = \frac{-j}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) = 50 \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)$$

de sorte que  $C$  est traversée par un courant  $i_C(t)$  associé à un phaseur  $\underline{I}_C$  s'exprimant comme

$$\underline{I}_C = \frac{V}{\underline{Z}_C} = \frac{2 \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)}{50 \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{50} \exp\left[j\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 4 \cdot 10^{-2} \exp\left(j\frac{2\pi}{3}\right)$$

La capacité est traversée par un courant de valeur efficace 40 mA et de phase  $\varphi = 2\pi/3$ . Ce dernier s'exprime en utilisant le formalisme trigonométrique par

$$i_C(t) = 0,04 \sqrt{2} \cos(100t + 2\pi/3)$$

3. Dans le cas d'une bobine de 100 mH, l'impédance  $\underline{Z}_L$  vaut

$$\underline{Z}_L = jL\omega = L\omega \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) = 20 \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$$

de sorte que le courant  $i_L$  traversant l'inductance est associé au phaseur :

$$\underline{I}_L = \frac{V}{\underline{Z}_L} = \frac{2 \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)}{20 \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{20} \exp\left[j\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0,1 \exp\left(-j\frac{\pi}{3}\right)$$

La capacité est donc traversée par un courant de valeur efficace 100 mA et de phase  $\varphi = -\pi/3$ . Celui-ci peut être exprimé comme

$$i_L(t) = 0,1 \sqrt{2} \cos(100t - \pi/3)$$

### 4.1.3 Propriétés des impédances

#### a) Impédance apparente et déphasage

En liant les phaseurs de tension et de courant aux bornes d'un dipôle donné, la loi d'Ohm généralisée permet de décrire l'influence de celui-ci, à la fois sur les valeurs efficaces et sur les phases, au travers de son impédance. En prenant le module puis l'argument de la relation (4.18), on établit respectivement que

$$|\underline{V}| = |\underline{Z}| \cdot |\underline{I}| \implies V = |\underline{Z}| I \quad (4.19)$$

et que

$$\arg(\underline{V}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{I}) \implies \varphi_V - \varphi_I = \varphi = \arg(\underline{Z}) \quad (4.20)$$

## 4.1 Outils mathématiques du régime alternatif sinusoïdal

La relation (4.19) décrit l'influence du module de l'impédance, appelée **impédance apparente**, sur les valeurs efficaces des grandeurs. On simplifiera les notations en posant  $Z = |\underline{Z}|$ . L'impédance apparente est, d'un point de vue expérimental, directement mesurable à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre fonctionnant tous deux en régime alternatif sinusoïdal. Elle décrit donc l'aptitude du composant à s'opposer au passage du courant, et son unité est l'ohm ( $\Omega$ ).

La relation (4.20) identifie l'argument de l'impédance au déphasage  $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$ . Sa mesure est possible avec un phase-mètre ou en analysant un oscillogramme, comme nous l'avons fait à l'exercice de la page 155.

Dans la pratique, on pourra écrire l'impédance d'un dipôle à l'aide de son impédance apparente  $Z$  et du déphasage  $\varphi$  qu'il induit, c'est-à-dire sous la forme

$$\underline{Z} = Z \exp(j\varphi) \quad (4.21)$$

### b) Influence de la fréquence

La fréquence intervient, par le biais de la pulsation, dans l'expression des impédances. Cela veut dire que, selon la fréquence des signaux, un dipôle électrique donné pourra avoir, en régime harmonique, des effets différents sur les grandeurs électriques.

- *Dans le cas où le dipôle est une résistance  $R$  :*

L'impédance d'une résistance  $R$  est  $\underline{Z} = R$ . On retrouve alors le fait qu'une résistance ne déphase pas le courant et la tension. De plus, on vérifie que son action sur les valeurs efficaces de la tension et du courant ne dépend pas de la fréquence des signaux.

- *Dans le cas où le dipôle est une capacité  $C$  :*

L'impédance d'une capacité  $C$  est  $\underline{Z} = -j/C\omega$ . Dans ces conditions, on retrouve un déphasage  $\varphi$  entre la tension et le courant de  $\arg(\underline{Z}) = -\pi/2$  caractéristique d'une tension de capacité, en retard de phase de  $90^\circ$  sur le courant. De plus, les valeurs efficaces vérifient

$$I = C\omega V \quad (4.22)$$

ce qui indique que la capacité résiste d'autant plus au passage du courant que la fréquence de celui-ci est faible. En faisant tendre  $\omega$  vers ses valeurs limites, on observe que :

- la capacité se comporte comme un circuit ouvert en régime continu ( $I \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow 0$ );
- la capacité se comporte comme un court-circuit en haute fréquence ( $I \rightarrow \infty$  quand  $\omega \rightarrow \infty$ ).

• *Dans le cas où le dipôle est une inductance  $L$  :*

L'impédance d'une inductance  $L$  est  $\underline{Z} = jL\omega$ . Dans ces conditions, on retrouve un déphasage  $\varphi$  entre la tension et le courant de  $\arg(Z) = \pi/2$  caractéristique d'une tension mesurée aux bornes d'une inductance avec une avance de phase de  $90^\circ$  sur le courant. De plus, les valeurs efficaces vérifient

$$I = \frac{V}{L\omega} \quad (4.23)$$

ce qui indique que l'inductance résiste d'autant plus au passage du courant que la fréquence de celui-ci est importante. En faisant tendre  $\omega$  vers ses valeurs limites, on observe que :

- l'inductance se comporte comme un court-circuit en régime continu ( $I \rightarrow \infty$  quand  $\omega \rightarrow 0$ );
- la capacité se comporte comme un circuit ouvert en haute fréquence ( $I \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow \infty$ ).

### Exercice 4.3

On mesure aux bornes d'un dipôle  $D$  en régime harmonique une tension efficace de 1,5 V et un courant efficace de 25 mA. La fréquence des signaux est de 500 Hz. L'oscillogramme, sur lequel une demi-période est ajustée sur neuf divisions temporelles, permet de mesurer une période de  $200 \mu\text{s}$  et de conclure à une avance temporelle de 1,2 division du signal de tension sur le signal de courant.

1. Déterminer l'impédance du dipôle  $D$ .
2. Par l'association de quels dipôles passifs peut-on modéliser  $D$  ?

### Solution 4.3

1. Nous allons calculer l'impédance apparente  $Z$  et le déphasage  $\varphi$  comme définis dans la relation (4.21). L'impédance apparente  $Z$  est déterminée par le rapport

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{1,5}{25 \cdot 10^{-3}} = 60 \Omega$$

## 4.1 Outils mathématiques du régime alternatif sinusoïdal

En ce qui concerne le déphasage, il est déterminé par l'avance de phase de tension. D'après l'énoncé, c'est le signal de tension qui est en avance, de sorte que  $\varphi > 0$ . De plus, le décalage temporel s'étale sur 1,2 division : sachant que l'ajustement d'une demi-période (soit  $180^\circ$ ) sur neuf divisions permet de faire correspondre  $180^\circ/9 = 20^\circ$  de déphasage à chaque division, on en conclue que le dipôle implique un déphasage de

$$\varphi = 1,2 \times 20^\circ = 24^\circ$$

soit 0,418 rad. Finalement, l'impédance du dipôle vaut

$$\underline{Z} = 60 \exp(j \cdot 24^\circ) = 60 \exp(j \cdot 0,418)$$

2. Afin de donner le schéma électrique équivalent du dipôle  $D$ , on exprime son impédance sous forme algébrique :

$$\underline{Z} = 60 \times [\cos(0,418) + j \sin(0,418)] = 54,8 + j \cdot 24,4$$

La partie réelle de  $\underline{Z}$  permet d'identifier une résistance  $R = 54,8 \Omega$ . La partie imaginaire de  $\underline{Z}$  est positive : elle permet d'identifier une inductance  $L$  d'impédance apparente  $L\omega = 24,4 \Omega$  avec  $\omega = 2\pi \times 500$  rad/s. Aussi

$$L = \frac{24,4}{2\pi \times 500} = 7,77 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 7,77 \text{ mH}$$

Finalement, le dipôle  $D$  peut être modélisé comme une résistance  $R = 54,8 \Omega$  placée en série avec une inductance  $L = 7,77$  mH.

### c) Résumé des différentes impédances

Nous faisons dans le tableau 4.1 un bilan des impédances associées aux différents composants linéaires passifs que sont les résistances, les inductances et les capacités. Les différents déphasages induits et les comportements en fréquence des dipôles  $y$  sont précisés.

### d) Associations d'impédances

Nous verrons à la section 4.2.1 que les phaseurs vérifient les lois de Kirchhoff. Cette propriété permet de définir les règles d'association en série et en parallèle des impédances. En procédant à un raisonnement similaire à celui de la section 1.6 page 30, on établit que :

**Tableau 4.1** – Bilan des impédances associées aux différents dipôles en régime alternatif, déphasages et comportements en fréquence.

Dipôle	Impédance	Déphasage	Régime continu	Haute fréquence
Résistance $R$	$\underline{Z} = R$	Aucun	Résistance	Résistance
Inductance $L$	$\underline{Z} = jL\omega$	Avance de tension $90^\circ$	Court-circuit	Circuit ouvert
Capacité $C$	$\underline{Z} = \frac{-j}{C\omega}$	Retard de tension $90^\circ$	Circuit ouvert	Court-circuit

— les impédances couplées en série s’additionnent, de sorte que l’impédance  $Z$  de  $n$  impédances  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$  s’écrit

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i \quad (4.24)$$

— les impédances couplées en parallèle se comportent comme une impédance  $\underline{Z}_p$  telle que

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i} \quad (4.25)$$

### Exercice 4.4

Un dipôle  $D$  est constitué d’un condensateur de capacité  $C = 30 \mu\text{F}$  et d’une résistance  $R = 100 \Omega$ . Celui-ci est soumis à une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace 5 V et de fréquence 100 Hz.

- Déterminer l’impédance de  $D$  et les caractéristiques du courant le traversant lorsque  $R$  et  $C$  sont en série.
- Déterminer l’impédance de  $D$  et les caractéristiques du courant le traversant lorsque  $R$  et  $C$  sont en parallèle.

### Solution 4.4

Quel que soit le montage, le dipôle est soumis à une tension alternative sinusoïdale que nous prenons comme origine des phases. Elle est représentée par le phaseur  $\underline{V} = 5$ .

- Nous considérons le cas où la capacité  $C$  et la résistance  $R$  sont connectées en série. L’impédance  $\underline{Z}$  du dipôle  $D$  s’exprime par conséquent comme

$$\underline{Z} = R + \frac{-j}{C\omega} = 100 - \frac{j}{3 \cdot 10^{-5} \times 2\pi \times 100} = 100 - j \cdot 53,1$$

## 4.1 Outils mathématiques du régime alternatif sinusoïdal

Nous extrayons alors le module et l'argument de l'impédance afin d'exprimer celle-ci conformément à la relation (4.21) page 169. On a alors

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{100^2 + 53,1^2} = 113 \Omega$$

et

$$\arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{-53,1}{100}\right) = -0,488 \text{ rad} = -28,0^\circ$$

où arctan représente la fonction arc-tangente, de sorte que

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{5}{113 \exp(-j \cdot 28,0^\circ)} = 4,42 \cdot 10^{-2} \exp(j \cdot 28,0^\circ)$$

Le courant traversant le dipôle a une valeur efficace  $I = 44,2 \text{ mA}$  et est en avance de phase de  $28,0^\circ$  sur la tension à ses bornes. De plus, sa fréquence est de  $100 \text{ Hz}$ .

2. Nous considérons à présent le cas où la capacité  $C$  et la résistance  $R$  sont connectées en parallèle. L'impédance  $\underline{Z}$  du dipôle  $D$  s'exprime par conséquent au travers de la relation

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + jC\omega = 0,010 + j \cdot 1,89 \cdot 10^{-2}$$

Pour faciliter les calculs, nous extrayons alors le module et l'argument de la grandeur  $1/\underline{Z}$  :

$$\left| \frac{1}{\underline{Z}} \right| = \sqrt{0,010^2 + (1,89 \cot 10^{-2})^2} = 2,13 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}$$

de sorte que

$$Z = \frac{1}{2,13 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}} = 46,9 \Omega$$

On procède de la même façon pour l'argument, en calculant celui de l'inverse :

$$\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right) = \arctan\left(\frac{1,89 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}}\right) = 1,08 \text{ rad} = 62,1^\circ$$

ce qui permet d'établir que

$$\arg(\underline{Z}) = -\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right) = -1,08 \text{ rad} = -62,1^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{5}{46,9 \exp(-j \cdot 62,1^\circ)} = 1,07 \cdot 10^{-1} \exp(-j \cdot 62,1^\circ)$$

Le courant traversant le dipôle a une valeur efficace  $I = 107 \text{ mA}$  et est en avance de phase de  $62,1^\circ$  sur la tension à ses bornes. De plus, sa fréquence est de  $100 \text{ Hz}$ .

### 4.1.4 Phaseurs et les puissances

#### a) Puissance complexe

Nous avons défini en régime alternatif sinusoïdal trois grandeurs  $P$ ,  $Q$  et  $S$  permettant respectivement de quantifier la conversion énergétique, de quantifier le stockage énergétique et de dimensionner le courant maximal appelé par un dipôle. Afin d'établir un lien entre ces quantités et les phaseurs, nous calculons le produit  $\underline{V} \cdot \underline{I}^*$  de deux grandeurs déphasées de  $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$  aux bornes d'un dipôle  $D$ . La quantité  $\underline{I}^*$  est le conjugué de  $\underline{I}$ , qu'il est nécessaire de faire intervenir afin d'introduire le signe moins ( $-$ ) du déphasage. Ce faisant, on obtient

$$\underline{V} \cdot \underline{I}^* = \underline{V} \exp(j\varphi_v) \cdot \underline{I} \exp(-j\varphi_i) = VI \exp(j\varphi) \quad (4.26)$$

Si l'on se réfère aux relations (3.34), (3.35) et (3.37) pages 141 à 144, la puissance active  $P$  est liée aux phaseurs par l'expression

$$P = VI \cos \varphi = \mathcal{R}e(\underline{VI}^*) \quad (4.27)$$

la puissance réactive  $Q$  par

$$Q = VI \sin \varphi = \mathcal{I}m(\underline{VI}^*) \quad (4.28)$$

où  $\mathcal{I}m$  décrit la partie imaginaire, et la puissance apparente  $S$  vérifie

$$S = VI = |\underline{VI}^*| \quad (4.29)$$

La quantité  $\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^*$  est appelée **puissance complexe** et peut être utilisée pour simplifier les calculs. On donne

$$\underline{S} = P + jQ \quad (4.30)$$

#### b) Puissances et résistances

Dans une résistance  $R$ , le déphasage étant nul, la puissance réactive est nulle, et la puissance apparente  $S$  a la même valeur numérique que la puissance active  $P$ . Les valeurs efficaces sont liées par  $R$  de sorte que, dans une résistance,

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (4.31)$$

On retrouve une relation identique à celle obtenue en régime continu, si ce n'est que les grandeurs tension et courant sont remplacées par leurs valeurs efficaces.

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

### c) Puissances et capacités

Dans une capacité, le déphasage est de  $\varphi = -90^\circ$  afin d'indiquer un retard de phase de la tension. Ainsi, la puissance active est nulle et la puissance apparente prend l'opposée de la valeur de la puissance réactive  $Q$ . Les valeurs efficaces étant liées par l'impédance apparente  $1/C\omega$ , on établit que dans une capacité

$$Q = -\frac{I^2}{C\omega} = -V^2C\omega \quad (4.32)$$

### d) Puissances et inductances

Dans une inductance, l'avance de phase de la tension est indiquée par un déphasage  $\varphi = 90^\circ$ . Ainsi, la puissance active est nulle et la puissance apparente prend la même valeur numérique que la puissance réactive  $Q$ . Les valeurs efficaces étant liées par l'impédance apparente  $L\omega$ , on établit que dans une inductance

$$Q = I^2L\omega = \frac{V^2}{L\omega} \quad (4.33)$$

## 4.2 LES LOIS ET THÉORÈMES EN RÉGIME ALTERNATIF SINUSOÏDAL

Nous avons vu dans la section précédente que, à condition de faire intervenir les impédances des dipôles, les phaseurs permettaient de généraliser la loi d'Ohm au régime sinusoïdal alternatif.

Dans cette section, nous nous intéressons aux autres lois de l'électricité, en commençant par les deux plus importantes d'entre elles : les lois de Kirchhoff.

### 4.2.1 Lois de Kirchhoff

#### a) Lois de Kirchhoff et phaseurs

Dans un circuit électrique, quel que soit le régime de fonctionnement, les valeurs instantanées des différents courants et des différentes tensions vérifient les lois de Kirchhoff, c'est-à-dire, respectivement, la loi des nœuds et la loi des mailles.

Par conséquent, si nous prenons l'exemple de deux dipôles connectés en série et soumis respectivement à l'instant  $t$  aux tensions  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$ , alors l'association des deux dipôles est soumise à la tension  $v(t)$  vérifiant

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (4.34)$$

Bien entendu, la relation (4.34) reste valable quelle que soit la valeur du temps  $t$ . Aussi, lorsque le circuit ne fonctionne pas en régime continu, c'est-à-dire lorsque les grandeurs varient dans le temps, elle peut être interprétée comme une relation fonctionnelle : la fonction représentative de la tension totale  $v$  est la somme des fonctions décrivant les tensions instantanées aux bornes des deux composants  $v_1$  et  $v_2$ . S'agissant d'une addition, la relation (4.34) peut être remplacée par

$$\underline{v}(t) = \underline{v}_1(t) + \underline{v}_2(t) \quad (4.35)$$

au travers d'une transformation complexe. En introduisant les phaseurs, il vient que

$$\underline{V} \sqrt{2} \exp(j\omega t) = \underline{V}_1 \sqrt{2} \exp(j\omega t) + \underline{V}_2 \sqrt{2} \exp(j\omega t) \quad (4.36)$$

soit, en simplifiant par  $\sqrt{2} \exp(j\omega t)$ ,

$$\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 \quad (4.37)$$

Ainsi, les lois de Kirchhoff en régime alternatif sinusoïdal se généralisent au cas des phaseurs.

Un raisonnement similaire peut être fait avec les courants, de sorte que la loi des nœuds faisant intervenir les grandeurs sinusoïdales

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (4.38)$$

peut être remplacée par la somme de phaseurs

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad (4.39)$$

Les phaseurs vérifient la loi des nœuds et la loi des mailles de Kirchhoff.

**Attention :** l'une des erreurs classiques en régime alternatif sinusoïdal est de procéder à l'addition des valeurs efficaces des grandeurs. Or, lorsque deux grandeurs sont déphasées, elles ne prennent pas leurs valeurs maximales au même moment. Cela est pris en compte par les phaseurs, nombres complexes qui font intervenir, en plus des valeurs efficaces, les phases des grandeurs. Les lois de Kirchhoff appliquées aux phaseurs ne sont plus des sommes algébriques, comme c'était le cas en régime continu, mais correspondent plutôt, comme nous le verrons à la section suivante, à des sommes vectorielles.

### b) Application des lois de Kirchhoff : représentation de Fresnel

#### • *Intérêt de la représentation de Fresnel*

Nous avons introduit les phaseurs dans le but de faciliter les opérations de multiplication et de division, et afin de nous affranchir des problèmes liés à la dérivation des grandeurs temporelles. En effet, puisqu'il s'exprime au travers de son expression exponentielle, le phaseur hérite de la souplesse de cette fonction vis-à-vis des différentes opérations que nous venons de décrire.

En revanche, lorsque l'on cherche à additionner ou à soustraire des phaseurs, comme c'est le cas lorsque l'on applique les lois de Kirchhoff, l'expression exponentielle n'est plus d'aucun secours. Dans ce cas, il est nécessaire, pour s'affranchir des difficultés de calcul, de transférer les phaseurs dans le plan complexe afin de ramener la somme complexe à un problème de géométrie.

#### • *Mise en œuvre*

Il existe un lien direct entre les nombres complexes et la géométrie : on parle d'ailleurs de plan complexe. Ainsi, on peut associer à tout vecteur du plan un nombre complexe, que l'on appelle son affixe. Inversement, on peut faire correspondre à n'importe quel nombre complexe un vecteur du plan : lorsque le nombre complexe en question est un phaseur, on réalise ainsi sa représentation de Fresnel.

#### • *Le diagramme de Fresnel*

On trace le diagramme de Fresnel associé à une loi électrique lorsque l'on représente chacun des phaseurs qu'elle met en jeu par le vecteur du plan dont il est l'affixe. Chaque phaseur est alors représenté dans le plan complexe par un **vecteur** dont les caractéristiques sont les suivantes :

- la **norme** du vecteur correspond au **module** du phaseur et donc à la **valeur efficace** de la grandeur, et cette dernière est précisée à côté du vecteur ;
- l'**angle** que forme le vecteur par rapport à l'axe des abscisses  $[Ox)$  correspond à l'**argument** du phaseur et donc à la **phase** de la grandeur.

Nous reportons dans le tableau 4.2 la correspondance des grandeurs dans les trois représentations évoquées.

**Tableau 4.2** – Correspondance des grandeurs dans les différentes représentations : fonction trigonométrique, phaseur et représentation de Fresnel.

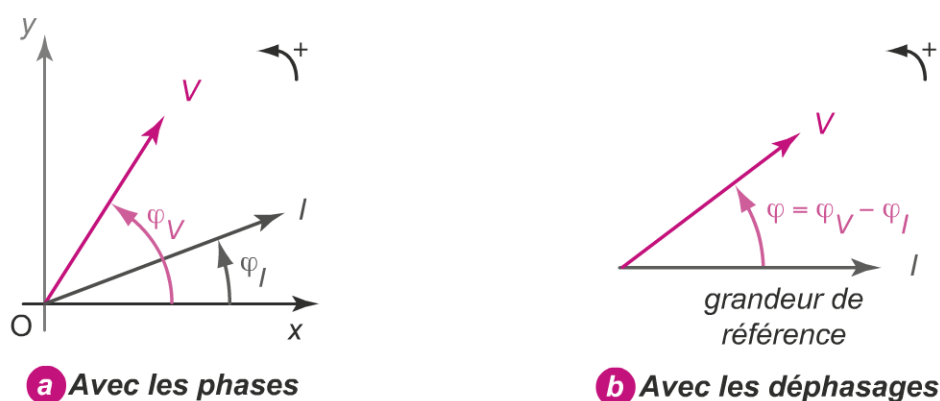
Cosinus	Phaseur	Fresnel
Valeur efficace	Module du phaseur	Norme du vecteur
Phase (ou déphasage)	Argument du phaseur	Angle formé avec $[Ox]$

À titre d'exemple, nous avons reporté sur la figure 4.1 les représentations de Fresnel des grandeurs suivantes :

$$\underline{I} = I \exp(j\varphi_I) \quad (4.40)$$

et

$$\underline{V} = V \exp(j\varphi_V) \quad (4.41)$$



**Figure 4.1** – Représentation de Fresnel (a) avec les phases dans le plan complexe et (b) en utilisant une grandeur de référence et les déphasages. Ces deux représentations sont équivalentes. Les lettres indiquées sur les vecteurs représentent les valeurs efficaces.

• *Diagramme de Fresnel et déphasage*

Étant donné que l'on peut exprimer les phaseurs impliqués dans une loi électrique avec leurs phases respectives ou leurs déphasages, leur représentation de Fresnel peut être faite de deux manières différentes mais équivalentes :

- lorsque l'on considère les phases des grandeurs, on reporte les phaseurs de manière absolue dans le plan complexe, comme indiqué sur la figure 4.1(a). Dans ce cas, le demi-axe des abscisses  $[Ox]$  représente l'origine des phases ;

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

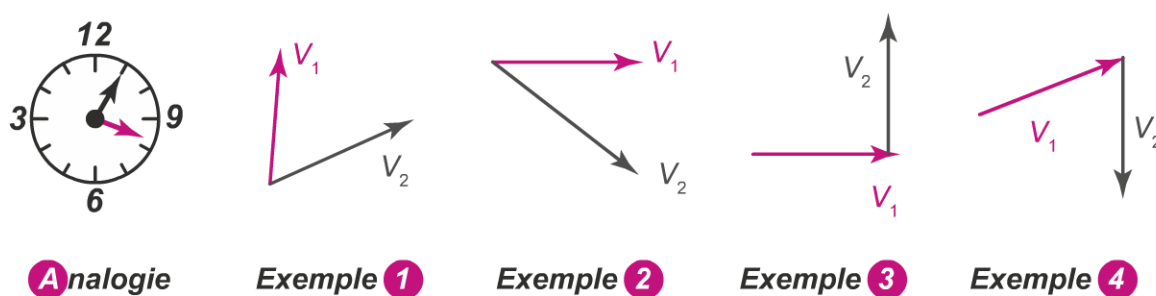
- lorsque l'on considère les déphasages des grandeurs, et c'est souvent le cas en électricité, on reporte les phaseurs de manière relative, comme indiqué sur la figure 4.1(b). Dans cet exemple, le courant est choisi en référence. Le choix de la grandeur de référence est totalement arbitraire même si, en pratique, il est souvent dicté par les données du problème.

C'est très souvent la représentation relative, utilisant les déphasages, qui est utilisée en électricité. Aussi, nous remarquons que, dans cette représentation :

- le demi-axe  $[Ox)$  n'a plus de signification, et l'on n'impose pas nécessairement à la grandeur de référence une phase nulle ;
- le déphasage courant-tension  $\varphi$ , dans la mesure où il détermine l'avance de tension, doit toujours être orienté du courant vers la tension quelle que soit la grandeur de référence.

### • Avance et retard de phase

Dans cet ouvrage, nous considérons comme positif le sens de rotation trigonométrique (anti-horaire ou sens inverse des aiguilles d'une montre  $\curvearrowright$ ). Ainsi, pour déterminer les avances ou les retards relatifs des signaux, il suffit de considérer les vecteurs représentatifs des grandeurs comme les aiguilles d'une même montre, mais qui tourneraient à l'envers, comme l'indique l'analogie de la figure 4.2.



**Figure 4.2** – Analogie anti-horaire et exemples pour déterminer les avances ou les retards relatifs des signaux dans le cadre d'un diagramme de Fresnel orienté dans le sens trigonométrique.

En guise d'exercice, déterminons quels sont les signaux en avance de phase dans les exemples 1 à 4 :

- dans l'exemple 1, c'est  $V_1$  qui est en avance sur  $V_2$  ;

## Chapitre 4 – Réseaux linéaires en régime alternatif sinusoïdal

- dans l'exemple 2, c'est encore  $V_1$  qui est en avance sur  $V_2$  ;
- dans l'exemple 3, c'est  $V_2$  qui est en avance sur  $V_1$  ;
- dans l'exemple 4, enfin, c'est  $V_1$  qui est en avance sur  $V_2$ .

### • Comment tracer un diagramme de Fresnel ?

Nous proposons une méthode en quatre étapes permettant de tracer simplement un diagramme de Fresnel. La méthode est la suivante :

1. **Établir la loi électrique impliquant les grandeurs à tracer.** Dans la pratique, ce sera soit la loi des nœuds, soit la loi des mailles.
2. **Choisir la grandeur de référence.** Le choix de cette grandeur est arbitraire. Mais, pour qu'il soit pertinent, il faut que la référence ait un lien avec toutes les grandeurs qui doivent être représentées. Ce lien est en général établi par la loi d'Ohm généralisée. Le plus souvent, le choix de la référence dépendra directement de la loi électrique déterminée à l'étape 1 : si c'est la loi des nœuds, la référence sera une tension ; si c'est la loi des mailles, la référence sera un courant.
3. **Comparer les grandeurs à représenter avec la référence.** Une fois les différents éléments identifiés, chacune des grandeurs est comparée en phase et en valeur efficace avec la référence. Pour ce faire, on utilise dans les récepteurs la loi d'Ohm généralisée.
4. **Procéder au tracé de la loi électrique** identifiée à l'étape 1. On reporte en premier lieu la référence sur le demi-axe  $[Ox)$ . Les autres grandeurs sont reportées afin d'établir une somme vectorielle, en utilisant les données de l'étape 3. Les valeurs efficaces sont indiquées à côté des vecteurs. Remarquons qu'il est inutile de tracer le diagramme à l'échelle car la référence et les grandeurs représentées n'ont pas la même unité.

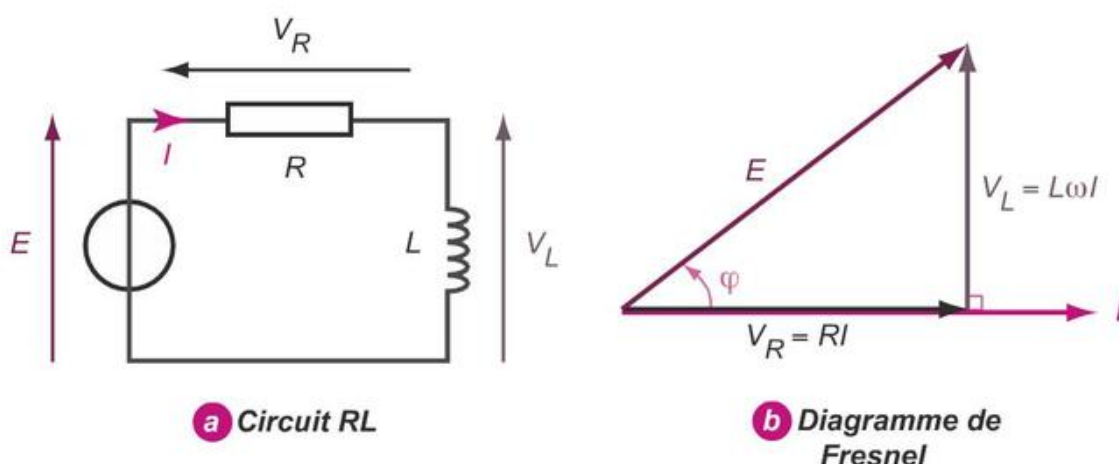
Pour illustrer notre méthode, déterminons le diagramme de Fresnel des tensions mesurées dans le circuit RL reporté sur le volet (a) de la figure 4.3.

1. La loi électrique qui lie les grandeurs électriques est la loi des mailles

$$\underline{E} = \underline{V}_R + \underline{V}_L \quad (4.42)$$

2. La grandeur de référence est le courant  $\underline{I}$  : celui-ci peut être lié aux tensions  $\underline{V}_R$  et  $\underline{V}_L$  par la loi d'Ohm.
3. Nous comparons les phases et les valeurs efficaces des tensions à représenter avec celles de la référence.

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal



**Figure 4.3** – Illustration de la méthode mise en œuvre pour tracer un diagramme de Fresnel. Le volet (b) est le diagramme des tensions du circuit RL du volet (a).

- La loi d'Ohm généralisée aux bornes de la résistance permet d'écrire que

$$\underline{V}_R = R \cdot \underline{I} \quad (4.43)$$

Ainsi, dans la résistance,  $\underline{V}_R$  et  $\underline{I}$  sont en phase, et les valeurs efficaces sont telles que  $V_R = RI$ .

- La loi d'Ohm généralisée aux bornes de l'inductance permet d'écrire que

$$\underline{V}_L = jL\omega \cdot \underline{I} \quad (4.44)$$

En liant les arguments et les modules des grandeurs grâce à cette équation, on établit que le vecteur représentant  $\underline{V}_L$  et celui représentant  $\underline{I}$  sont perpendiculaires, la tension étant en avance sur le courant.

- Enfin, nous ne connaissons pas les liens entre  $\underline{I}$  et  $\underline{E}$ , mais pouvons toutefois nommer  $\varphi$  le déphasage entre  $\underline{I}$  et  $\underline{E}$ .

- Le tracé de la somme vectorielle  $\vec{E} = \vec{V}_R + \vec{V}_L$  associée à la loi des mailles (4.42) est reporté dans le volet (b) de la figure 4.3 à l'aide des différentes informations recueillies à l'étape précédente, et en prenant le courant comme vecteur de référence. En l'absence de données numériques, les valeurs efficaces sont indiquées au travers de leurs expressions littérales.

**Exercice 4.5**

Déterminer le déphasage entre la tension  $e(t)$  et le courant  $i(t)$  du circuit RL reporté sur la figure 4.3 pour  $R = 200 \Omega$ ,  $f = 1 \text{ kHz}$  et  $L = 20 \text{ mH}$ .

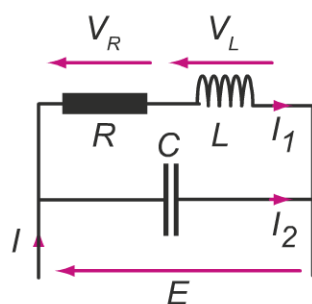
**Solution 4.5**

Le diagramme de Fresnel établi dans la figure 4.3 permet de relier le déphasage  $\varphi$  entre le courant  $i(t)$  et la tension  $e(t)$  aux phaseurs de la tension aux bornes de la résistance  $\underline{V}_R$  et aux bornes de la bobine  $\underline{V}_L$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{V_L}{V_R}\right) = \arctan\left(\frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 1000}{200}\right) = 32,1^\circ$$

**Exercice 4.6**

On considère le circuit électrique reporté sur la figure 4.4. Une tension alternative sinusoïdale  $e(t) = 120 \sqrt{2} \cos(\omega t)$  et de fréquence 50 Hz est appliquée aux bornes de la dérivation par un générateur qui n'est pas représenté sur le schéma. On donne  $L = 0,65 \text{ H}$ ,  $R = 100 \Omega$  et  $C = 60 \mu\text{F}$ .



**Figure 4.4**

1. Calculer les impédances des deux branches de la dérivation. On appellera  $\underline{Z}_1$  l'impédance de l'association résistance-inductance et  $\underline{Z}_2$  celle de la capacité.
2. Déterminer  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$ , les phaseurs des courants traversant les impédances  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$ , respectivement.
3. Tracer le diagramme de Fresnel des courants du circuit et en déduire  $\underline{I}$ , le phaseur du courant délivré par le générateur. On précisera si le circuit a un comportement inductif ou capacitif.
4. Proposer un schéma électrique équivalent pour ce circuit.

### Solution 4.6

1. — L'impédance  $\underline{Z}_1$  associée à la *branche 1* est donnée par l'association d'une résistance d'impédance  $\underline{Z}_R = R = 100 \Omega$  et d'une inductance d'impédance  $\underline{Z}_L = jL\omega = j \cdot 204$ . Le phaseur de l'impédance  $\underline{Z}_1$  de l'association vaut donc :

$$\underline{Z}_1 = R + jL\omega = 100 + j \cdot 204$$

Son argument se détermine par

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{204}{100}\right) = 1,11 \text{ rad}$$

et son module par :

$$Z_1 = |\underline{Z}_1| \sqrt{100^2 + 204^2} = 227 \Omega$$

L'impédance de la *branche 1* est égale à  $\underline{Z}_1 = 100 + 204 \cdot j = 227 \cdot \exp(j1,11)$ .

- L'impédance associée à la *branche 2* est donnée par

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{-j}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{C \times 2\pi \times f} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{60 \cdot 10^{-6} \times 2\pi \times 50} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) = 53 \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

de sorte que l'impédance de la *branche 2* est égale à  $\underline{Z}_2 = -53 \cdot j = 53 \cdot \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)$

2. Nous procédons au tracé du diagramme de Fresnel en quatre étapes, comme décrit à la section précédente.

- Nous souhaitons représenter les courants ; la loi à appliquer est donc la loi des nœuds :

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

- La grandeur de référence est la tension aux bornes de la dérivation représentée par le phaseur  $\underline{E}$ . L'amplitude de la grandeur  $e(t)$  valant  $120\sqrt{2}$  V, sa valeur efficace vaut 120 V, de sorte que le phaseur de  $e$  est  $\underline{E} = 120$ .

- On compare à présent les différents courant à  $\underline{E}$ . On applique tout d'abord la loi d'Ohm dans la *branche 1*

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} = \frac{120}{227 \exp(j1,11)} = 0,53 \cdot 10^{-3} \exp(-j1,11)$$

de sorte que le déphasage entre  $\underline{I}_1$  et  $\underline{E}$  vaut  $-1,11 \text{ rad} = -64^\circ$ , et que la valeur efficace de  $\underline{I}_1$  vaut  $I_1 = 0,53 \text{ mA}$ .

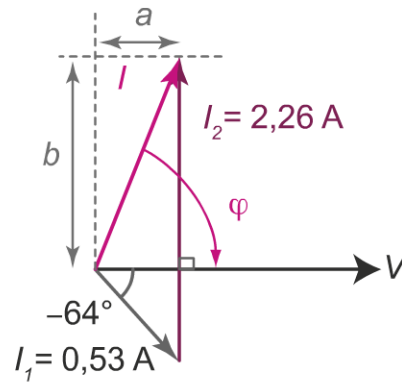
En ce qui concerne la *branche 2*, on a

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_2} = \frac{120}{53 \exp(-j\frac{\pi}{2})} = 2,25 \cdot 1 \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$$

de sorte que  $\underline{I}_2$  est en avance de  $90^\circ$  sur  $\underline{E}$ , et a une valeur efficace  $I_2 = 2,25 \text{ V}$ .

## Chapitre 4 – Réseaux linéaires en régime alternatif sinusoïdal

- La construction de Fresnel est faite sur la figure 4.5. Nous introduisons deux grandeurs  $a$  et  $b$ , qui correspondent à des projections orthogonales de  $\vec{I}$  sur deux axes perpendiculaires afin de faire apparaître un triangle rectangle et de faciliter les calculs.



**Figure 4.5** – Construction de Fresnel du circuit de la figure 4.4. Remarquons que le déphasage est défini comme l’avance de phase de tension sur le courant : il est dirigé de  $I$  vers  $V$  et est négatif dans cet exercice.

Le phasor  $\underline{I}$  se détermine en appliquant le théorème de Pythagore. Ainsi

$$I = \sqrt{a^2 + b^2}$$

avec

$$a = I_1 \cos(1,11) = 0,53 \cdot \cos(1,11) = 0,22 \text{ A}$$

et

$$b = I_2 - I_1 \sin(1,11) = 1,82 \text{ A}$$

de sorte que  $I = 1,82 \text{ mA}$ . L’angle  $\varphi$  se détermine par la relation

$$|\varphi| = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1,81}{0,22}\right) = 1,45 \text{ rad} = 83^\circ$$

Le déphasage étant défini comme l’avance de phase de la tension sur le courant ; il est dirigé de  $I$  vers  $V$  et est négatif dans cet exercice. Au final le phasor du courant s’écrit

$$\underline{I} = 1,82 \cdot 10^{-2} \exp(-j \cdot 1,45) = 1,82 \cdot 10^{-2} \exp(-j \cdot 83^\circ)$$

Le courant étant en avance par rapport à la tension, le circuit a un comportement capacitif.

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

3. Afin de proposer un schéma électrique équivalent, nous remarquons que l'impédance de la dérivation  $\underline{Z}$  permet de lier la tension et le courant au travers de l'expression

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}}$$

de sorte que

$$\underline{Z} = \frac{120}{1,82 \cdot 10^{-2} \exp(j \cdot 1,45)} = 65,9 \exp(-j \cdot 1,45) \quad (4.45)$$

En écrivant  $\underline{Z}$  sous sa forme algébrique, nous faisons apparaître la partie résistive et la partie réactive de l'impédance, respectivement la partie réelle et la partie imaginaire, cette dernière correspondant à une capacité, comme nous l'avons dit précédemment. Aussi

$$\underline{Z} = R' - j \frac{1}{C'\omega}$$

$$\underline{Z} = 65,9 [\cos(-1,45) + j \cdot \sin(-1,45)] = 7,9 - j \cdot 65,4$$

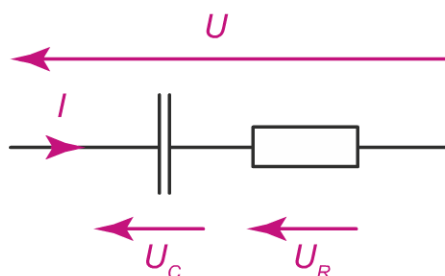
La capacité équivalente de la dérivation se déduit par l'identification de la partie imaginaire au travers de la relation

$$\frac{1}{C'\omega} = 65,4 \implies C' = \frac{1}{65,4 \times 2\pi \times 50} = 4,87 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

Le circuit se ramène donc à une résistance  $R' = 7,9 \Omega$  placé en série avec une capacité  $C' = 48,7 \mu\text{F}$ .

### Exercice 4.7

On considère le circuit reporté sur la figure 4.6.



**Figure 4.6** – Circuit électrique de l'exercice 4.7. On donne  $U = 5 \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$  et  $C = 10 \text{ nF}$ . La fréquence considérée est  $f = 10 \text{ kHz}$ .

## Chapitre 4 – Réseaux linéaires en régime alternatif sinusoïdal

1. Représenter le diagramme de Fresnel de  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_C$  et  $\underline{U}$ . Préciser quelle grandeur électrique est prise comme référence.
2. Donner l'expression de  $\underline{Z}$ , l'impédance équivalente du dipôle soumis au phaseur  $\underline{U}$  en fonction de  $R$ , de  $C$  et de  $\omega$ , et préciser l'expression du déphasage  $\varphi$  de  $\underline{U}$  par rapport à  $\underline{I}$ .
3. Applications numériques.

On donne  $U = 5 \text{ V}$ ,  $f = 10 \text{ kHz}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$  et  $C = 10 \text{ nF}$ .

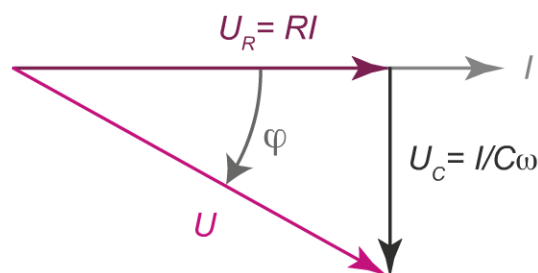
- (a) Calculer  $I$ ,  $\varphi$ ,  $U_R$  et  $U_C$ .
- (b) Comparer  $U$  et  $U_R + U_C$ , puis expliquer la différence.
- (c) Pour quelle fréquence a-t-on  $U_C = U_R$  ?

### Solution 4.7

1. La représentation de Fresnel de ce circuit est montrée en figure 4.7. Elle est obtenue en suivant les différentes étapes décrites à la page 180. En effet, la loi des mailles permet d'écrire la relation entre phaseurs :

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$$

Le courant est commun à tous les éléments du circuit, il est choisi comme référence des phases. La tension  $\underline{U}_R = R\underline{I}$  aux bornes de la résistance est en phase avec le courant. La tension  $\underline{U}_C = -j\underline{I}/C\omega$  accuse un retard de phase de  $\pi/2$  par rapport au courant de référence.



**Figure 4.7** – Construction de Fresnel du circuit de la figure 4.6. Le déphasage est défini comme l'avance de phase de tension sur le courant : il est dirigé de  $\underline{I}$  vers  $\underline{U}$  et est, dans cet exercice, négatif.

2. L'expression algébrique de  $\underline{Z}$  est une fonction de  $R$  et de  $C$ , avec

$$\underline{Z} = R - \frac{j}{C\omega}$$

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

de sorte que l'impédance apparente de  $\underline{Z}$  vaut

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + C^2\omega^2} = \frac{U}{I} \quad (4.46)$$

En ce qui concerne l'argument de  $\underline{Z}$ , c'est-à-dire le déphasage de la tension  $\underline{E}$  par rapport au courant  $\underline{I}$ , on a

$$-\varphi = \arctan\left(\frac{U_C}{U_R}\right) \quad (4.47)$$

en remarquant que le déphasage  $\varphi < 0$ . Aussi,

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

3. Nous allons calculer les différentes valeurs efficaces ainsi que le déphasage. Nous avons  $U = 5 \text{ V}$ ,  $f = 10 \text{ kHz}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$  et  $C = 10 \text{ nF}$ .

(a) Pour calculer  $I$ , on part de l'équation (4.46) et l'on établit que

$$\begin{aligned} I = \frac{U}{Z} &= \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \\ &= \frac{U}{\sqrt{1000^2 + \left(\frac{1}{10^{-8} \times 2\pi \times 10^4}\right)^2}} = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ A} \end{aligned}$$

La valeur du déphasage courant-tension  $\varphi$  se déduit de la formule (4.47) :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1000 \times 10^{-8} \times 2\pi \times 10^4}\right) \\ &= -1,01 \text{ rad} = -57,8^\circ \end{aligned}$$

En ce qui concerne les valeurs efficaces des tensions aux bornes des deux dipôles, on les détermine géométriquement à l'aide du diagramme de Fresnel, de sorte que

$$U_R = U \cos |\varphi| = 5 \cos(1,01) = 2,67 \text{ V}$$

et

$$U_C = U \sin |\varphi| = 5 \sin(1,01) = 4,23 \text{ V}$$

Remarquons que les valeurs absolues sont utilisées car les valeurs efficaces sont définies positives.

- (b) Si l'on additionne les valeurs efficaces des tensions aux bornes des deux dipôles, on obtient  $U_R + U_C = 6,9$  V. Ce calcul, supérieur à la tension du générateur qui a pour valeur efficace  $U = 5$  V, **est faux**. En effet, il ne tient pas compte des déphasages entre les tensions aux bornes des dipôles : celles-ci ne prennent pas leurs valeurs maximales en même temps. Pour faire un calcul exact, il faut faire, comme nous l'avons fait au travers du diagramme de Fresnel, la somme complexe  $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$  ou bien, si l'on reste dans le formalisme sinusoïdal, la somme  $u(t) = u_R(t) + u_C(t)$ .
- (c) Pour avoir  $U_R = U_C$ , il faut que les deux vecteurs  $\vec{U}_R$  et  $\vec{U}_C$  du diagramme de Fresnel 4.7 aient la même norme ou, de manière équivalente, que le déphasage  $\varphi$  soit, en valeur absolue, égal à  $\pi/4$ . Cette condition est réalisée si

$$R = \frac{1}{C\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{RC} = 2\pi \times f \Leftrightarrow f = \frac{1}{2\pi RC} = 15,9 \text{ kHz}$$

On aura la même tension efficace sur les deux dipôles pour une fréquence de 15,9 kHz. Cette fréquence constitue ce que l'on appelle la fréquence de coupure à  $-3$  dB du circuit RC.

### Exercice 4.8

Une bobine idéale d'inductance  $L = 1$  H en parallèle avec une résistance  $R = 314 \Omega$  sont placées aux bornes d'un générateur qui fournit un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz et de valeur efficace 0,5 A. Le circuit est représenté sur la figure 4.8.

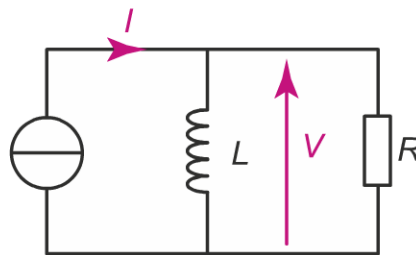


Figure 4.8 – Circuit RL parallèle de l'exercice 4.8.

1. Déterminer l'impédance complexe de la bobine.
2. En utilisant la représentation de Fresnel, calculer :
  - (a) la valeur efficace de la tension aux bornes de la dérivation ;
  - (b) le déphasage entre la tension aux bornes de la dérivation et le courant fourni par le générateur ;
  - (c) la valeur efficace de l'intensité du courant dans  $R$  et dans  $L$ .

### Solution 4.8

1. En utilisant les valeurs  $L = 1 \text{ H}$  et  $\omega = 2\pi f$  avec  $f = 50 \text{ Hz}$ , on calcule l'impédance de la bobine

$$\underline{Z}_L = jL\omega = 1 \times 2\pi \times 50 = j \cdot 314 = 314 \cdot \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Le diagramme de Fresnel du circuit explicite la loi des nœuds entre les phasors de courant

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L$$

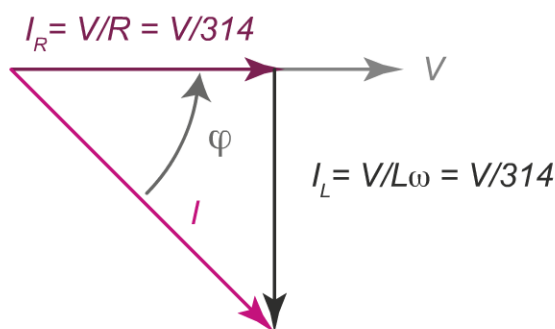
Ayant affaire à un montage en parallèle, la grandeur de référence est la tension aux bornes de la dérivation de phaseur  $\underline{V}$ . Dans une résistance, courant et tension sont en phase, alors que, dans une inductance, le courant a un retard de phase de  $90^\circ$  sur la tension. En utilisant les impédances apparentes (c'est-à-dire le module des lois d'Ohm généralisées aux bornes des deux dipôles récepteurs), on établit que

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{V}{314}$$

aux bornes de la résistance, et que

$$I_L = \frac{V}{L\omega} = \frac{V}{314}$$

aux bornes de l'inductance. On obtient alors le tracé de la figure 4.9.



**Figure 4.9** – Diagramme de Fresnel du circuit de la figure 4.8. Le déphasage  $\varphi$  est, par définition, l'avance de phase de la tension. Il est donc repéré de  $I$  vers  $V$  et prend ici une valeur positive.

- (a) Connaissant la valeur efficace du courant, on utilise le diagramme de Fresnel et le théorème de Pythagore pour établir une relation faisant intervenir les quantités connues et la valeur efficace de la tension aux bornes de la dérivation  $V$  :

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2 = \left(\frac{V}{314}\right)^2 + \left(\frac{V}{314}\right)^2 = \frac{2V^2}{314^2}$$

## Chapitre 4 – Réseaux linéaires en régime alternatif sinusoïdal

Finalement

$$V = \frac{314 \cdot I}{\sqrt{2}} = \frac{314 \times 0,5}{\sqrt{2}} = 111 \text{ V}$$

- (b) On calcule directement le déphasage courant-tension en remarquant que  $\varphi$  est défini comme l'avance de phase de la tension par rapport au courant et que, par conséquent,  $\varphi > 0$ . On a alors

$$\varphi = \arctan\left(\frac{I_L}{I_R}\right) = \arctan\left(\frac{314}{314}\right) = \pi/4 = 45^\circ$$

- (c) Les valeurs efficaces  $I_R$  et  $I_L$  peuvent se calculer de différentes manières. La première façon consiste à utiliser les impédances apparentes et à établir que

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{111}{314} = 0,354 \text{ A}$$

et

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{111}{314} = 0,354 \text{ A}$$

La seconde façon consiste à utiliser le diagramme de Fresnel en remarquant que

$$I_R = I \cos \varphi = 0,5 \cos \frac{\pi}{4} = 0,354 \text{ A}$$

et

$$I_L = I \sin \varphi = 0,5 \sin \frac{\pi}{4} = 0,354 \text{ A}$$

### Exercice 4.9

On soumet un condensateur de  $1 \mu\text{F}$  placé en série avec une résistance de  $100 \Omega$  à une tension sinusoïdale alternative de valeur efficace  $E = 10 \text{ V}$  et de fréquence  $1000 \text{ Hz}$ . Déterminer :

1. la valeur efficace du courant qui circule dans le circuit ;
2. le déphasage entre la tension et le courant aux bornes de ce circuit ;
3. les valeurs efficaces des tensions aux bornes de la résistance et de la capacité.

### Solution 4.9

On a affaire à un circuit série : le circuit est similaire à celui de la figure 4.6 page 185 et la loi à appliquer est la loi des mailles

$$\underline{E} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$$

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

où  $\underline{U}_R$  et  $\underline{U}_C$  sont les phaseurs respectifs des tensions aux bornes de la résistance et de la capacité. La grandeur de référence est le courant de phaseur  $\underline{I}$ . On obtient alors un diagramme de Fresnel similaire à celui de la figure 4.7, page 186. avec

$$U_C = \frac{I}{C\omega} = 159 \cdot I$$

et

$$U_C = RI = 100 \cdot I$$

1. L'application du théorème de Pythagore permet d'exprimer la valeur efficace  $I$  en fonction des grandeurs connues. En effet,

$$E^2 = U_C^2 + U_R^2 = (100^2 + 159^2) \cdot I^2$$

Aussi,

$$I = \frac{E}{\sqrt{100^2 + 159^2}} = \frac{10}{187} = 5,32 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

et le courant circulant dans le circuit a une valeur efficace de 52,3 mA.

2. Pour calculer le déphasage  $\varphi$  du courant par rapport à la tension, on utilise encore le diagramme de Fresnel de la figure 4.7, page 186. Il vient alors que  $\varphi < 0$  et que

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right) = -1,01 \text{ rad} = -57,8^\circ$$

Les valeurs efficaces  $U_R$  et  $U_C$  sont enfin calculées par projection, en utilisant le diagramme de Fresnel. On a

$$U_R = E \cos |\varphi| = 10 \cos(1,01) = 5,32 \text{ V}$$

et

$$U_C = E \sin |\varphi| = 10 \sin(1,01) = 8,46 \text{ V}$$

### 4.2.2 Ponts diviseurs de tension et de courant

Dans les sections précédentes, nous avons établi que les phaseurs :

- vérifient la loi d'Ohm généralisée au travers de l'utilisation des impédances ;
- vérifient les lois de Kirchhoff, l'application des lois des nœuds et des mailles en régime alternatif sinusoïdal étant ramenée à la détermination de sommes vectorielles.

Par conséquent, les phaseurs vérifient toutes les règles, lois et théorèmes découlant de ces lois de base, à commencer par les formules des ponts diviseurs de tension et de courant.

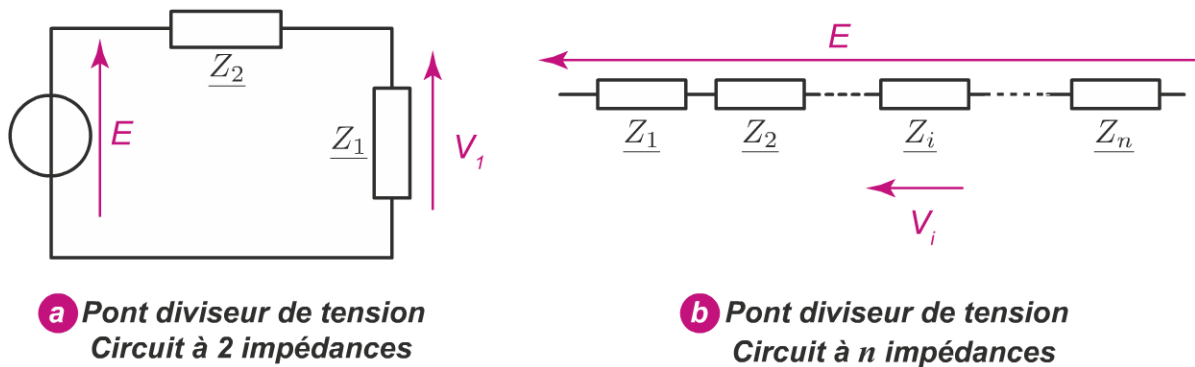
a) Pont diviseur de tension

En utilisant les phaseurs et les impédances en lieu et place des tensions continues et des résistances, la formule du pont diviseur de tension vue pour le régime continu à la page 37 se généralise au cas alternatif sinusoïdal. Considérant le volet (a) de la figure 4.10, on établit que le phaseur de la tension mesurée aux bornes du dipôle d'impédance  $\underline{Z}_1$  vérifie

$$\underline{V}_1 = \underline{E} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \tag{4.48}$$

lorsque deux impédances sont impliquées dans la division de tension. La formule se généralise lorsqu'il y a plusieurs impédances : dans le cas de  $n$  impédances comme représenté dans le volet (b) de la figure 4.10, le phaseur de la tension aux bornes de  $i^{\text{ème}}$  impédance vérifie

$$\underline{V}_i = \underline{E} \cdot \frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_i + \dots + \underline{Z}_n} = \underline{E} \cdot \frac{\underline{Z}_i}{\sum_{i=1}^n \underline{Z}_i} \tag{4.49}$$

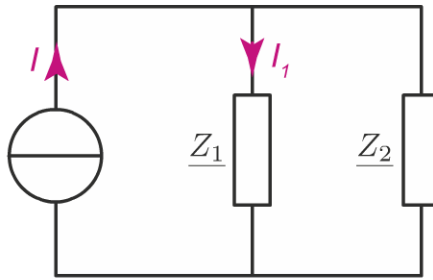


**Figure 4.10** – Illustration du pont diviseur de tension en régime sinusoïdal pour (a) un circuit à deux impédances et (b) un circuit à  $n$  impédances soumis à une tension de valeur efficace  $E$ .

b) Pont diviseur de courant

De la même façon, la formule du pont diviseur de courant en régime alternatif sinusoïdal se généralise en utilisant les phaseurs et les impédances. Nous nous reportons à la figure 4.11.

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal



**Figure 4.11** – Illustration du pont diviseur de courant en régime sinusoïdal.

Le phasor du courant traversant le dipôle d'impédance  $Z_1$  s'écrit

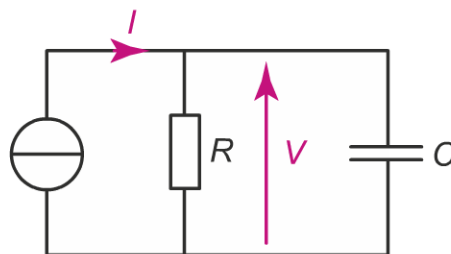
$$\underline{I}_1 = \underline{I} \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (4.50)$$

Remarquons que, contrairement au cas de la division de tension, la formule du pont diviseur de courant ne se généralise pas au cas de plusieurs impédances. Il n'y a donc pas, pour le diviseur de courant, de formule équivalente à la relation (4.49).

### Exercice 4.10

Dans le circuit représenté sur la figure 4.12, le générateur délivre un courant de valeur efficace  $I = 1 \text{ mA}$  et à la fréquence  $f = 159 \text{ Hz}$  dans un montage RC en parallèle. On donne  $C = 1 \mu\text{F}$  et  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Calculer la valeur efficace et la phase du courant qui passe dans le condensateur :

1. en utilisant la représentation de Fresnel ;
2. en utilisant la formule du pont diviseur de courant.



**Figure 4.12** – Circuit RC parallèle de l'exercice 4.10.

**Solution 4.10**

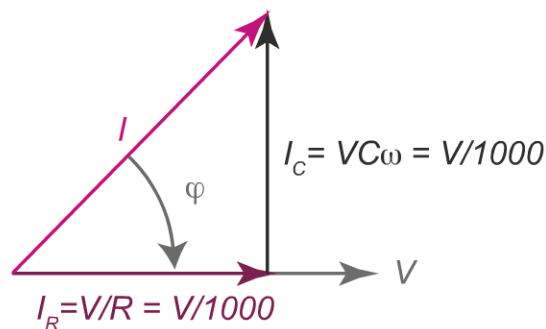
1. Pour mettre en place la représentation de Fresnel, nous devons dans un premier temps exprimer l'impédance du condensateur. En prenant les valeurs  $C = 1 \mu\text{F}$  et  $f = 159 \text{ Hz}$ , on obtient

$$\underline{Z}_C = \frac{-j}{C\omega} = -1000 \cdot j = 1000 \cdot \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)$$

L'application des lois des noeuds et d'Ohm généralisée à ce circuit s'écrit

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \frac{\underline{V}}{R} - jC\omega\underline{V}$$

où  $\underline{I}$ ,  $\underline{I}_R$  et  $\underline{I}_C$  sont respectivement les phaseurs du courant débité par le générateur et de ceux traversant la résistance et le condensateur. Le circuit est en dérivation, et nous prenons de fait la tension de phaseur  $\underline{V}$  comme grandeur de référence. Le diagramme de Fresnel obtenu dans ces conditions est présenté dans la figure 4.13.



**Figure 4.13** – Diagramme de Fresnel de l'exercice 4.10. Le déphasage est défini comme l'avance de phase de tension sur le courant : il est donc dirigé de  $I$  vers  $V$  et est négatif dans cet exercice.

La valeur efficace du courant circulant dans le condensateur est égale à la norme du phaseur  $\underline{I}_C$  qui est déterminée en appliquant le théorème de Pythagore :

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 \Leftrightarrow I_C = \sqrt{I^2 - I_R^2} = \sqrt{I^2 - \left(\frac{V}{R}\right)^2}$$

La difficulté est donc de trouver la valeur efficace  $V$ . Celle-ci s'obtient en écrivant :

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 = \left(\frac{V}{1000}\right)^2 + \left(\frac{V}{1000}\right)^2 = 2V^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}$$

On en déduit alors la valeur de  $V$  :

$$V = \sqrt{\frac{(10^{-3})^2}{2 \cdot 10^{-6}}} = 0,707 \text{ V}$$

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

À partir de  $V$ , nous déduisons  $I_C$ , la valeur efficace du courant qui circule à travers la capacité. On obtient

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 \Leftrightarrow I_C = \sqrt{I^2 - \frac{E^2}{R}} = \sqrt{(1 \cdot 10^{-3})^2 - \left(\frac{0,707}{1000}\right)^2} = 0,707 \text{ mA}$$

Afin de déterminer la phase du courant  $\underline{I}_C$ , il est nécessaire de choisir une origine des phases. Pour faciliter la comparaison entre les différents résultats, nous la conserverons dans la partie (b) de l'exercice. Nous convenons de définir comme nulle la phase du courant total représenté par le phasor  $\underline{I}$ , de sorte que

$$\underline{I} = 1 \cdot 10^{-3}$$

avec  $\arg(\underline{I}) = 0$ . Le phasor  $\underline{I}_C$  se détermine alors en remarquant que le déphasage entre la tension  $\underline{V}$  et le courant  $\underline{I}$  s'écrit

$$\varphi = \varphi_V - \varphi_I = -\arctan(C\omega R) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

Celui-ci établissant l'avance de tension, alors  $\varphi_V = \arg(\underline{V}) = -\pi/4$ , puisque la tension est en retard de  $45^\circ$  sur le courant. Or, dans la capacité, le courant est en avance de phase de  $90^\circ$ , comme on peut le vérifier sur le diagramme de Fresnel. Ainsi, la phase du courant  $\underline{I}_C$  est égale à

$$\arg(\underline{I}_C) - \arg(\underline{V}) = \pi/2 \implies \arg(\underline{I}_C) = \pi/2 + \arg(\underline{V}) = \pi/4$$

Le phasor du courant traversant le condensateur est donc

$$\underline{I}_C = 0,707 \cdot 10^{-3} \exp(j\pi/4)$$

2. Si l'on veut calculer le phasor du courant circulant dans le condensateur en utilisant la formule du pont diviseur de courant, nous devons écrire :

$$\underline{I}_C = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}$$

Puisque nous avons choisi de le prendre comme origine des phases, le phasor du courant  $\underline{I}$  est le même qu'à la question (a). De même,  $\underline{Z}_C = -1000 \cdot j$  et  $Z_R = R = 1000 \Omega$ , de sorte que nous pouvons écrire :

$$\underline{I}_C = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = 10^{-3} \cdot \frac{1000}{1000 - 1000 \cdot j} = 10^{-3} \times \frac{1}{1 - j}$$

Or,

$$1 - j = \sqrt{2} \cdot \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right)$$

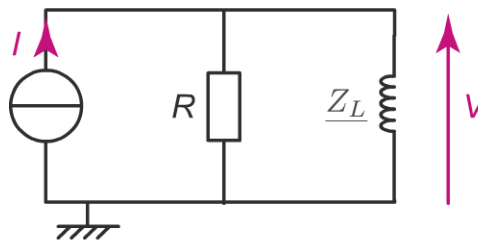
de sorte que

$$\underline{I}_C = 10^{-3} \times \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \exp(-j\frac{\pi}{4})} = 0,707 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(j\frac{\pi}{4})$$

On retrouve donc bien, avec la formule du pont diviseur de courant, le même résultat que celui trouvé en utilisant le diagramme de Fresnel, à savoir un courant traversant le condensateur de valeur efficace 0,707 mA et de phase  $\pi/4$ .

### Exercice 4.11

Dans le schéma électrique représenté sur la figure 4.14, calculer la valeur efficace et la phase du courant qui passe dans la bobine d'inductance  $L = 100$  mH en utilisant la formule du pont diviseur de courant. Le générateur de courant délivre un courant de valeur efficace 10 mA à la fréquence de 500 Hz. La résistance vaut 314  $\Omega$ . En déduire la tension aux bornes de la résistance et de la bobine.



**Figure 4.14** – Circuit de l'exercice 4.11. Le générateur de courant délivre un courant de valeur efficace 10 mA à la fréquence de 500 Hz. La résistance vaut 314  $\Omega$  et l'inductance  $L = 100$  mH.

### Solution 4.11

Pour pouvoir appliquer la formule du pont diviseur de courant, il nous faut tout d'abord connaître les phaseurs des impédances de la bobine et du courant.

— Pour la bobine il s'exprime par la relation :

$$\underline{Z}_L = jL\omega = j \cdot 0,1 \cdot 2\pi \cdot 50 = 314 \cdot \exp^{j\pi/2} = 314 \cdot j$$

— Pour le générateur de courant (pris comme référence des phases) nous pouvons écrire :

$$\underline{I} = 10^{-3}$$

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

Si l'on applique maintenant la formule du pont diviseur de courant à la branche contenant l'inductance, on obtient le phaseur du courant qui la traverse :

$$\begin{aligned}\underline{I_C} &= \underline{I} \times \frac{R}{R + \underline{Z}_L} = 10^{-3} \times \frac{314}{314 + 314 \cdot j} = 10^{-3} \frac{1}{1 + j} = \\ &= 10^{-3} \frac{1}{\sqrt{2} \exp(j\pi/4)} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{2}} \exp(-j\pi/4) = 0,7 \cdot \exp(-j\pi/4)\end{aligned}$$

Le courant dans la bobine a donc une valeur efficace de 0,7 mA et une différence de phase par rapport au courant issu du générateur de  $-\pi/4$ .

Il est alors très utile d'utiliser la loi d'Ohm pour déduire la tension aux bornes de la résistance :

$$\underline{V} = R \cdot \underline{I} = 314 \cdot 10^{-3} = 0,314 \text{ V}$$

La tension aux bornes de la résistance a une valeur efficace de 314 mV. Elle est en phase avec le courant issu du générateur.

En ce qui concerne la tension aux bornes de la bobine, on obtient de la même manière :

$$\underline{V} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I} = 314 \cdot \exp(j\pi/2) \cdot 10^{-3} = 0,314 \cdot \exp(j\pi/2)$$

On remarque que la valeur efficace aux bornes de la bobine est bien identique à la valeur efficace de la tension aux bornes de la résistance. Par contre, le déphasage entre le courant issu du générateur et la tension aux bornes de la bobine vaut  $\pi/2$ .

### 4.2.3 Théorèmes du dipôle actif linéaire

#### a) Avant propos : comportement réactif d'un circuit

Avant de généraliser les théorèmes du dipôle actif linéaire au régime alternatif sinusoïdal, considérons le circuit RLC série reporté sur la figure 4.15.

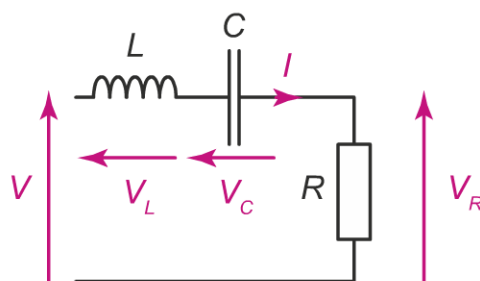


Figure 4.15 – Circuit RLC série en régime alternatif sinusoïdal.

Celui-ci est soumis à une tension alternative sinusoïdale  $v(t)$  de valeur efficace  $V$ . À l'aide d'un diagramme de Fresnel, nous allons montrer que ce cir-

cuit peut avoir trois comportements bien distincts selon les conditions considérées.

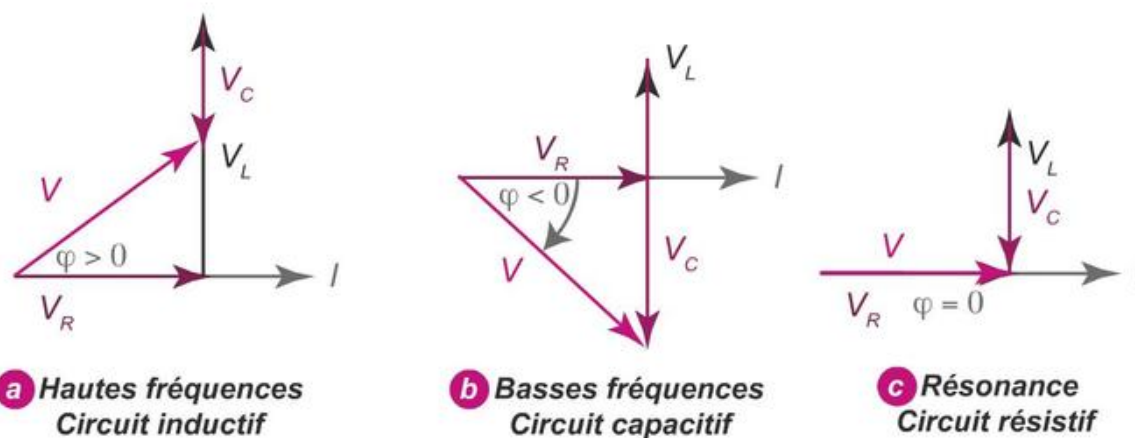
Supposons fixées les trois valeurs  $R$ ,  $L$  et  $C$  et traçons le diagramme de Fresnel : il s'agit d'appliquer la loi des mailles

$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_C + \underline{V}_L \quad (4.51)$$

La grandeur de référence est le courant de phaseur  $\underline{I}$ . On établit alors que, quelles que soient la valeur de la fréquence et les valeurs des différents paramètres des composants,

- $\underline{V}_R$  est en phase avec  $\underline{I}$ ;
- $\underline{V}_C$  est en retard de phase de  $90^\circ$  sur  $\underline{I}$ ;
- et  $\underline{V}_L$  est en avance de phase de  $90^\circ$  sur  $\underline{I}$ .

Les relations des valeurs efficaces dépendent en revanche, pour la capacité et l'inductance, de la pulsation  $\omega$ , puisqu'elles valent respectivement  $V_C = I/C\omega$  et  $V_L = L\omega I$ . On distingue alors trois tracés possibles, correspondant chacun à l'un des volets de la figure 4.16.



**Figure 4.16** – Diagramme de Fresnel des tensions du circuit de la figure 4.15 aux (a) hautes fréquences, (b) aux basses fréquences et (c) à la résonance.

**Volet (a) :** pour des valeurs élevées de  $\omega$ , on peut écrire que

$$\omega \rightarrow \infty \implies \frac{I}{C\omega} \rightarrow 0 \text{ et } L\omega I \rightarrow \infty \quad (4.52)$$

Ainsi, les effets de l'inductance sont prépondérants, et le circuit RLC a un comportement inductif.

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

**Volet (b) :** pour des valeurs faibles de  $\omega$ , on peut écrire que

$$\omega \rightarrow 0 \implies \frac{I}{C\omega} \rightarrow \infty \text{ et } L\omega I \rightarrow 0 \quad (4.53)$$

Cette fois-ci, ce sont les effets de la capacité qui sont prépondérants, et le circuit a un comportement capacitif.

**Volet (c) :** Enfin, pour des composants donnés, il existe une valeur fixe de  $\omega$  pour laquelle les effets capacitifs et inductifs se compensent exactement, et pour laquelle le circuit a un comportement purement résistif. Dans ces conditions,

$$\frac{I}{C\omega} = L\omega I \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.54)$$

On identifie alors la fréquence de résonance  $f_0$  du circuit

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.55)$$

La résonance est un régime particulier du circuit. En effet, si l'on calcule le rapport  $G = V_R/V$ , pouvant être interprété comme le gain du circuit, on établit grâce au diagramme de Fresnel que

$$G = \frac{V_R}{V} = \frac{V \cos \varphi}{V} = \cos \varphi \quad (4.56)$$

Le gain du circuit sera donc maximal pour cette fréquence particulière.

Un circuit contenant des résistances, des capacités et des inductances aura, selon la fréquence, soit un comportement inductif, soit un comportement capacitif. Par ailleurs, il existe une fréquence particulière, appelée fréquence de résonance, pour laquelle le circuit a un comportement résistif.

### 4.2.4 Le principe de superposition

Le principe de superposition énoncé en régime continu à la section 2.3.2, page 61 se généralise, en régime alternatif sinusoïdal, au cas des phaseurs.

Dans un circuit linéaire, si une branche est alimentée par plusieurs sources alternatives sinusoïdales indépendantes, le phaseur du courant traversant cette branche est la somme complexe des phaseurs des courants dus à la contribution de chacune des sources.

En d'autres termes, si seule la source  $i$  est allumée et que le courant circulant dans la branche choisie a pour phaseur  $\underline{I}_i$ , alors le phaseur du courant circulant sous l'effet conjugué des  $n$  sources indépendantes vaut

$$\underline{I} = \sum_{i=1}^n \underline{I}_i$$

Remarquons que la notion de linéarité en régime alternatif est définie à la section a) de la page 204.

Par ailleurs, pour modéliser l'extinction d'une source, on procède de la façon suivante :

- une source de tension alternative sinusoïdale  $u$  éteinte impose une tension efficace  $U = 0$  entre ses bornes. Elle est alors associée au phaseur  $\underline{U} = 0$  et se comporte comme une connexion équipotentielle (ou un court-circuit) ;
- une source de courant alternative sinusoïdale  $i$  éteinte impose un courant de valeur efficace  $I = 0$  dans la branche où elle se trouve. Elle est donc associée au phaseur  $\underline{I} = 0$  et se comporte comme un circuit ouvert.

Le moyen mnémotechnique qui consiste à supprimer le cercle du symbole de la source pour modéliser son comportement lorsqu'elle est éteinte reste donc valable en régime alternatif sinusoïdal.

Pour éteindre une source de tension ou de courant en régime alternatif sinusoïdal, il suffit de supprimer le cercle constituant son symbole électrique.

Il faut toutefois prendre une précaution importante concernant l'utilisation du principe de superposition avec les phaseurs. En effet, l'utilisation des phaseurs suppose que tous les signaux du circuit sont cadencés à la **même fréquence** : il est incorrect d'additionner deux phaseurs définis pour deux fréquences différentes. Il n'est donc pas possible de superposer des signaux de fréquences différentes, à moins de revenir à une description temporelle et de ne pas utiliser le formalisme des phaseurs.

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

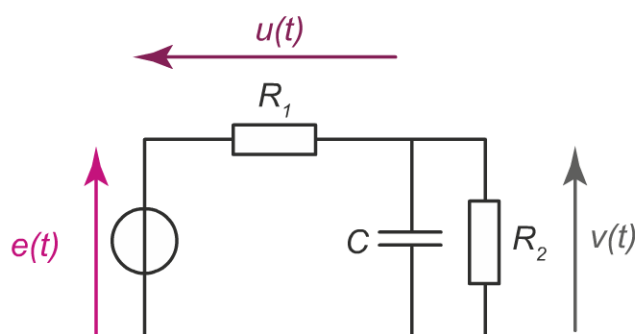
En pratique, on utilisera le principe de superposition avec le formalisme des phaseurs lorsque l'on aura dans le circuit :

- uniquement des sources continues (les phaseurs sont dans ce cas les valeurs efficaces des signaux) ;
- des sources alternatives sinusoïdales de même fréquence ;
- des sources continues et des sources alternatives sinusoïdales de même fréquence.

### Exercice 4.12

On considère le circuit représenté sur la figure 4.17. Le signal  $e(t)$  appliqué par le générateur supposé idéal est une tension sinusoïdale de fréquence 10 kHz, d'amplitude 1 V et de valeur moyenne 1 V. On donne  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$  et  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ .

1. En appliquant le principe de superposition, déterminer les tensions  $u(t)$  et  $v(t)$ .
2. Discuter de l'utilité d'un tel circuit.



**Figure 4.17** – Circuit de l'exercice 4.12. La tension  $e(t)$  générée est un signal sinusoïdal de composante continue  $E_{moy} = 1 \text{ V}$  et de composante alternative  $e_{alt}(t)$  d'amplitude 1 V. On donne  $f = 10 \text{ kHz}$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$  et  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ .

### Solution 4.12

1. Le signal  $e(t)$  s'écrit comme la somme d'une composante continue  $E_{moy}$  et d'une composante alternative  $e_{alt}(t)$ , c'est-à-dire  $e(t) = E_{moy} + e_{alt}(t)$ . Ayant affaire à un signal continu et un signal harmonique, il est possible d'utiliser le principe de superposition dans le cadre du formalisme des phaseurs. Nous déterminons donc les deux composantes :
  - la composante continue est la valeur moyenne du signal, et l'on a  $E_{moy} = 1 \text{ V}$  ;
  - la composante alternative  $e_{alt}(t)$  a pour amplitude 1 V et pour fréquence 10 kHz. On donne  $\underline{E}$ , le phaseur de  $e_{alt}$ , en choisissant la composante alter-

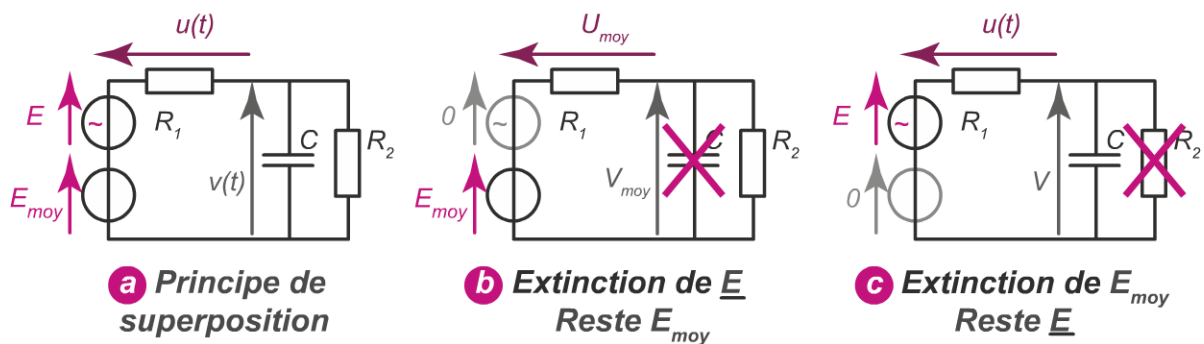
native du générateur comme origine des phases :

$$\underline{E} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

Nous appliquons à présent le principe de superposition. Pour cela, et en suivant la relation  $e(t) = E_{moy} + e_{alt}$ , nous représentons le générateur de tension délivrant  $e(t)$  comme une source continue en série avec une source alternative sinusoïdale, comme reporté sur la figure 4.18(a).

Nous calculons à présent les tensions  $v(t)$  et  $u(t)$  aux bornes de la dérivation et de  $R_1$  en calculant, successivement, les tensions  $V_{moy}$  et  $U_{moy}$  issues de l'action de la tension  $E_{moy}$ , et les phaseurs de tension  $\underline{V}$  et  $\underline{U}$  issus de l'action de la tension de phaseur  $\underline{E}$ .

— Nous commençons par considérer la seule composante continue, le générateur de tension  $e_{alt}$  est alors éteint comme représenté sur le panel (b) de la figure 4.18.



**Figure 4.18** – Correction de l'exercice 4.12. Le principe de superposition est appliqué. Dans le volet (b), la composante continue est la seule à être active : le condensateur se comporte alors comme un circuit ouvert. Dans le volet (c), la composante alternative est la seule à être active : l'impédance apparente du condensateur est négligeable devant la résistance  $R_2$ , de sorte que cette dernière est court-circuitée.

Le condensateur se comporte en continu comme un circuit ouvert. En effet, l'impédance du condensateur  $\underline{Z}_c$  dépend de la fréquence considérée et le régime continu correspond à une pulsation  $\omega = 0$ . L'impédance apparente du condensateur devient alors :

$$Z_c = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty \quad (4.57)$$

On peut donc remplacer le condensateur par un circuit-ouvert et la simple application de la formule du pont diviseur de tension permet d'écrire

$$V_{moy} = E_{moy} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = E_{moy} \cdot \frac{10000}{100 + 10000} \simeq E_{moy}$$

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

et

$$U_{moy} = E_{moy} \cdot \frac{R_A}{R_1 + R_2} = E_{moy} \cdot \frac{100}{100 + 10000} \simeq 0$$

Ainsi, la totalité de la composante continue est mesurée aux bornes de  $R_2$ , avec  $V_{moy} = 0,707$  V.

- On continue d'appliquer le principe de superposition en éteignant le générateur de tension continue et en ayant préalablement rallumé le générateur de tension harmonique. L'impédance du condensateur devient :

$$Z_c = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-4} \times 6,28 \cdot 10^4} = 0,16 \Omega$$

de sorte que l'impédance apparente du condensateur  $Z_c = |Z_c| = 0,16 \Omega$  est très petite devant la valeur de la résistance  $R_2 = 10000 \Omega$ . L'impédance de la dérivation est sensiblement égale à celle du condensateur, de sorte que le phaseur  $\underline{V}$  se calcule comme

$$\underline{V} = E \frac{Z_c}{Z_c + R_1} = \frac{-0,16j}{-0,16j + 100}$$

ce qui permet de dire que

$$V = |\underline{V}| = \frac{0,16}{\sqrt{0,16^2 + 100^2}} \simeq 0$$

et que, par conséquent, la composante alternative n'est pas mesurée aux bornes de la dérivation. Celle-ci se mesure en effet aux bornes de  $R_1$ , puisque en procédant de manière identique nous obtenons

$$U = |\underline{U}| = E \frac{100}{\sqrt{0,16^2 + 100^2}} \simeq E$$

Par ailleurs, en déterminant la phase de  $\underline{U}$

$$\arg(\underline{U}) = \arg(100) - \arg(-0,16j + 100) \simeq 0$$

on vérifie que la totalité de la composante alternative est mesurée aux bornes de  $R_1$ .

2. Un tel circuit peut être mis à profit pour séparer la composante continue et la composante alternative d'un signal. Par exemple, dans un circuit électronique, on peut transporter la puissance électrique à l'aide de la composante continue et le signal à l'aide de la composante alternative.

### a) Dipôles actifs linéaires

Nous avons défini à la section 2.5.3 page 87 les dipôles actifs linéaires en régime continu comme des dipôles aux bornes desquels la tension et le courant vérifient la loi d'Ohm. En régime alternatif sinusoïdal, nous généralisons cette notion aux dipôles aux bornes desquels les phaseurs de tension et de courant vérifient la loi d'Ohm généralisée. Ainsi, aux résistances et aux sources de tension et de courant déjà considérées comme dipôles linéaires en continu, nous ajoutons les inductances et les capacités.

### b) Théorème de Thévenin

#### • Le modèle de Thévenin

Dans le même esprit, le théorème de Thévenin abordé en régime continu au paragraphe 2.5.4 de la page 90 se généralise en régime alternatif à condition de remplacer :

- les grandeurs continues réelles par des phaseurs ;
- les résistances par des impédances.

Comme nous l'avons fait tout au début de cet ouvrage pour le régime continu, nous pouvons modéliser un circuit constitué de dipôles actifs linéaires et fonctionnant en régime alternatif en décrivant l'ensemble des phénomènes physiques s'y produisant. On recense alors :

- la conversion énergétique, que l'on représente par une source de tension ;
- les effets d'échauffement dus à la circulation du courant et représentés par une résistance  $R$  ;
- les effets réactifs, dus à la circulation du courant et à l'interaction des charges électriques, que l'on représente par une réactance  $X$ .

Un tel modèle est reporté dans la figure 4.19, pointé par la flèche (1). L'impédance de Thévenin  $\underline{Z}_\theta$  généralise la résistance de Thévenin en rassemblant les grandeurs précédemment définies

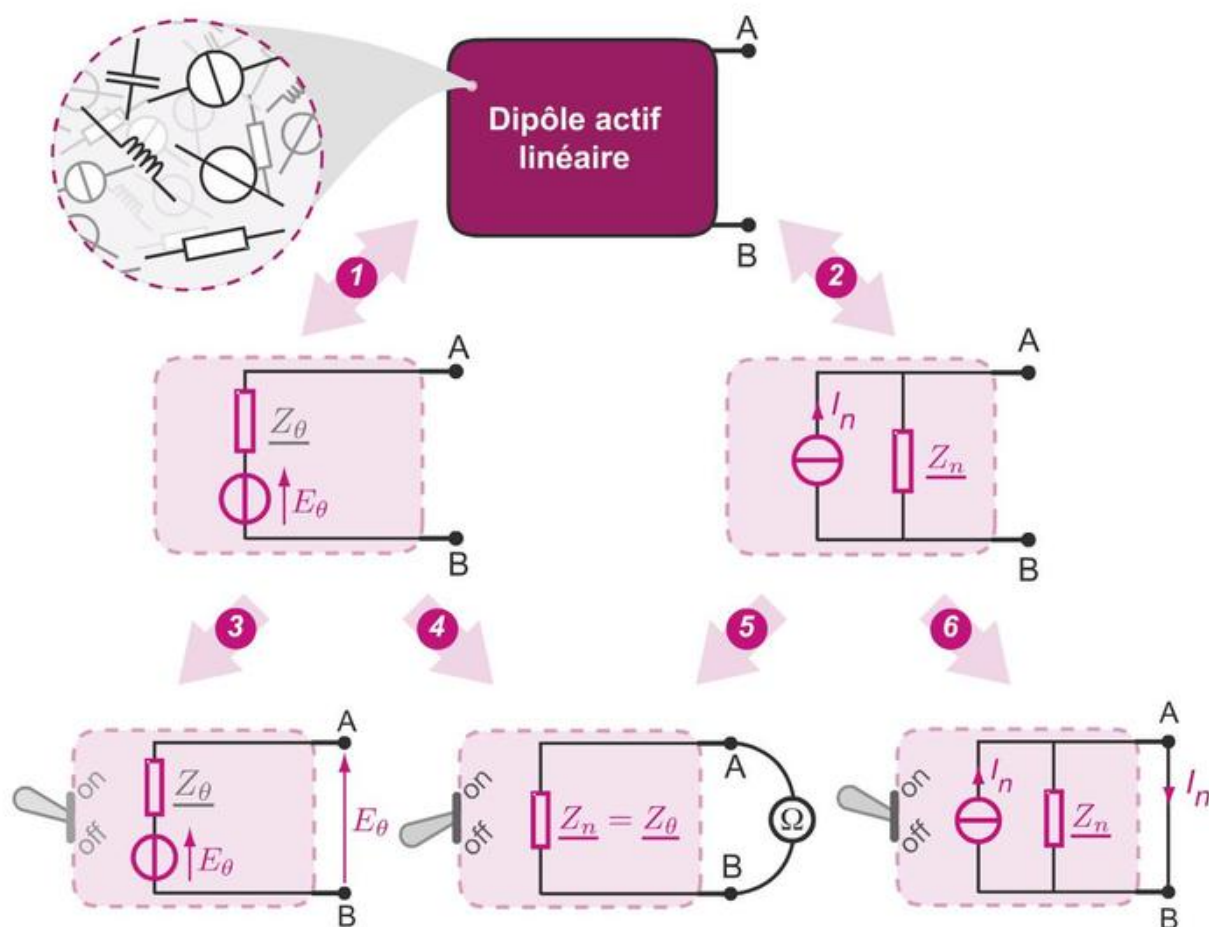
$$\underline{Z}_\theta = R + jX \quad (4.58)$$

Nous précisons que la réactance  $X$  est mesurée en ohms ( $\Omega$ ), et qu'il s'agit d'un nombre réel :

- si  $X > 0$  alors le dipôle a un comportement inductif, et l'on peut remplacer la réactance par une inductance au travers de la relation

$$X = L\omega \quad (4.59)$$

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal



**Figure 4.19** – Illustration des théorèmes de Thévenin et de Norton pouvant être appliqués à tout dipôle linéaire en régime alternatif sinusoïdal. Les grandeurs se déterminent par des méthodes similaires à celles vues en régime continu : tension de circuit ouvert pour  $\underline{E}_\theta$ , courant de court-circuit pour  $\underline{I}_n$  et impédance vue des bornes A et B toutes sources éteintes pour  $\underline{Z}_\theta$  et  $\underline{Z}_n$ .

- si  $X < 0$  alors le dipôle a un comportement capacitif, et la réactance est associée à une capacité par l'expression

$$X = \frac{1}{C\omega} \quad (4.60)$$

- si  $X = 0$  alors le dipôle est uniquement résistif.

En régime alternatif sinusoïdal, tout dipôle linéaire peut être représenté par son modèle équivalent de Thévenin constitué d'une source de tension de phaseur  $\underline{E}_\theta$  en série avec une impédance  $\underline{Z}_\theta$ .

### • Détermination des grandeurs de Thévenin

Le phaseur de tension  $\underline{E}_\theta$  et l'impédance  $\underline{Z}_\theta$  se déterminent comme indiqué par les flèches (3) et (4) de la figure 4.19.

- Le phaseur de la tension Thévenin  $\underline{E}_\theta$  se détermine en circuit ouvert entre les bornes A et B. Étant donné que le courant est nul, le déphasage n'est pas défini. La seule grandeur techniquement mesurable est donc la valeur efficace  $E_\theta$ , la phase étant déterminée arbitrairement.
- L'impédance  $\underline{Z}_\theta$  se détermine toutes sources éteintes en évaluant l'impédance du dipôle vu des bornes A et B. Celle-ci aura une composante réactive qui sera soit capacitive, soit inductive, soit nulle. En pratique, cette grandeur est mesurable avec un RLC-mètre.

### c) Théorème de Norton

#### • Le modèle de Norton

Le modèle de Norton est, comme en régime continu, l'analogie du modèle de Thévenin faisant intervenir une source de courant.

En régime alternatif sinusoïdal, tout dipôle linéaire peut être représenté par son modèle équivalent de Norton constitué d'une source de courant de phaseur  $\underline{I}_n$  en parallèle avec une impédance  $\underline{Z}_n$ .

#### • Détermination des grandeurs de Norton

Le phaseur de courant  $\underline{I}_n$  et l'impédance  $\underline{Z}_n$  se déterminent comme indiqué par les flèches (5) et (6) de la figure 4.19.

- L'impédance  $\underline{Z}_n$  est la même que  $\underline{Z}_\theta$ . Elle se détermine donc toutes sources éteintes en évaluant l'impédance du dipôle vu des bornes A et B.
- Le phaseur du courant de Norton  $\underline{I}_n$  est celui du courant circulant dans le court-circuit connectant les bornes A et B. Étant donné que la tension est nulle, le déphasage n'est pas défini. La seule grandeur techniquement mesurable est donc la valeur efficace  $I_n$ , la phase étant déterminée arbitrairement.

### d) Transformation Thévenin-Norton

La transformation de Thévenin-Norton se généralise au régime alternatif sinusoïdal. On retrouve en effet les mêmes relations de passage entre les deux modèles, si ce n'est que, là encore, les résistances laissent la place aux impédances, et les valeurs continues aux phaseurs. Ainsi, les impédances de Thévenin et de Norton sont les mêmes :

$$\underline{Z}_n = \underline{Z}_\theta \quad (4.61)$$

En ce qui concerne les phaseurs  $\underline{E}_\theta$  et  $\underline{I}_n$ , ils sont liés par l'expression

$$\underline{E}_\theta = \underline{Z}_n \underline{I}_n \quad (4.62)$$

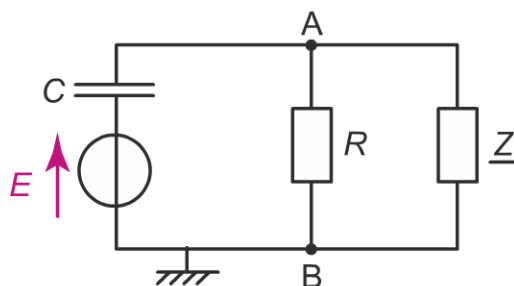
équivalente à

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{E}_\theta}{\underline{Z}_\theta} \quad (4.63)$$

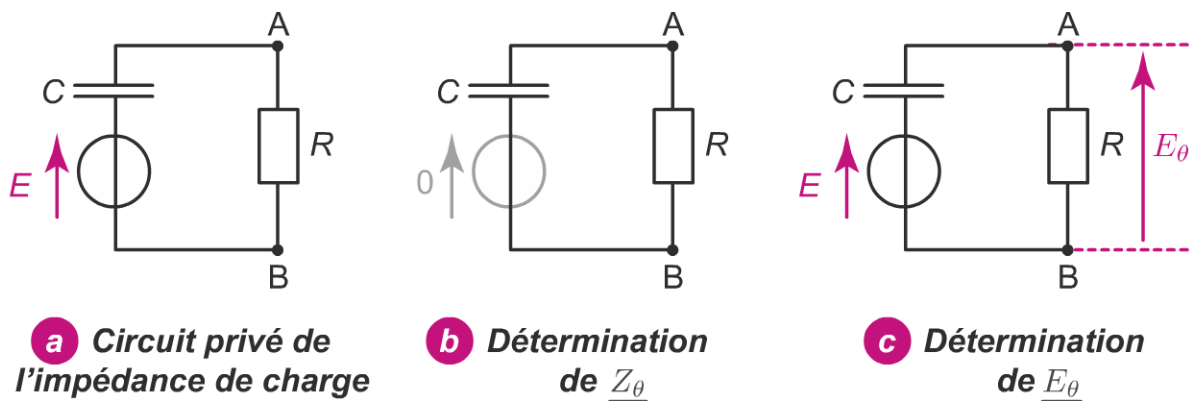
### Exercice 4.13

En considérant le circuit illustré sur la figure 4.20, pour lequel  $R = 68 \Omega$ ,  $C = 47 \mu\text{F}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$  et  $e(t) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$  :

1. déterminer le modèle équivalent de Thévenin du dipôle AB privé de l'impédance de charge  $\underline{Z}$  ;
2. déterminer le modèle équivalent de Norton du dipôle AB privé de l'impédance de charge  $\underline{Z}$  ;
3. calculer la valeur efficace et la phase du courant qui traverse l'impédance  $\underline{Z}$ , où  $\underline{Z}$  représente une bobine d'inductance 427 mH et de résistance 66  $\Omega$ .



**Figure 4.20** – Figure de l'exercice 4.13. On donne  $R = 68 \Omega$ ,  $C = 47 \mu\text{F}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$  et  $e(t) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$ .



**Figure 4.21** – Correction de l'exercice 4.13. (a) Retrait de l'impédance de charge  $\underline{Z}$ . (b) Détermination de l'impédance de Thévenin  $\underline{Z}_\theta$ . (c) Détermination du phaseur de la tension de Thévenin  $\underline{E}_\theta$ .

**Solution 4.13**

- Calculons les éléments du générateur de Thévenin vu des points A et B lorsque l'on retire l'impédance  $\underline{Z}$ , comme indiqué sur le panel (a) de la figure 4.21.
  - Commençons par calculer l'impédance équivalente  $\underline{Z}_\theta$  du circuit vu des points A et B en éteignant la source de tension, comme décrit sur le volet (b). Éteindre une source de tension revient à la remplacer par un court-circuit, l'impédance équivalente est donc composée d'une résistance  $R$  et de l'impédance du condensateur  $\underline{Z}_C$  en parallèle. On a donc

$$\frac{1}{\underline{Z}_{//}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C} \Rightarrow \underline{Z}_{//} = \frac{\underline{Z}_C \cdot R}{\underline{Z}_C + R}$$

On doit donc en premier lieu calculer :

$$\underline{Z}_C = \frac{-j}{C\omega} = \frac{-j}{47 \cdot 10^{-6} \times 2\pi \cdot 50} = -68j$$

Aussi

$$\underline{Z}_\theta = \frac{\underline{Z}_C \cdot R}{\underline{Z}_C + R} = \frac{-j68 \cdot 68}{68 - j68} = \frac{-j68}{1 - j}$$

On calcule le module et l'argument de  $\underline{Z}_\theta$  avec

$$|\underline{Z}_\theta| = \frac{|-j68|}{|1 - j|} = \frac{68}{\sqrt{2}}$$

et

$$\arg(\underline{Z}_\theta) = \arg(-j68) - \arg(1 - j) = -\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

de sorte que

$$\underline{Z}_\theta = 48,1 \exp(-j\pi/4)$$

Cette impédance est capacitive, en effet

$$\underline{Z}_\theta = 48,1 \cos(-\pi/4) + 48,1 \sin(-\pi/4) = 34 - j34$$

On a donc  $R_\theta = 34 \Omega$  et  $X_\theta = -34 \Omega$ . Nous pouvons déterminer la valeur de la capacité  $C_\theta$  :

$$\frac{-j}{C_\theta \omega} = -j34 \implies C_\theta = \frac{1}{34\omega} = \frac{1}{34 \cdot 2\pi \cdot 50} = 9,36 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 93,6 \mu\text{F}$$

de sorte que l'on peut ramener l'impédance de Thévenin à une résistance de  $34 \Omega$  en série avec une capacité de  $93,6 \mu\text{F}$ .

- On calcule ensuite la tension à vide prise entre les points A et B, comme indiqué sur le panel (c) de la figure 4.21. Pour cela on utilise la formule du pont diviseur de tension généralisée au régime harmonique, c'est-à-dire avec les phaseurs :

$$\underline{V}_{AB} = \underline{E}_\theta = \underline{E} \cdot \frac{R}{R + \underline{Z}_C} \quad (4.64)$$

Il faut donc en premier lieu déterminer le phaseur  $\underline{E}$  de la tension délivrée par le générateur  $e(t)$  de valeur efficace 10 V. Comme l'expression sinusoïdale de  $e(t)$  ne fait pas apparaître de phase, nous prenons  $\underline{E}$  comme grandeur de référence, et nous écrivons que

$$\underline{E} = 10 \quad (4.65)$$

La tension à vide s'exprime donc par la relation :

$$\underline{E}_\theta = \underline{V}_{AB} = \underline{E} \cdot \frac{R}{R + \underline{Z}_C} = \frac{10}{1 - j}$$

On détermine alors la valeur efficace de  $\underline{E}_\theta$

$$|\underline{E}_\theta| = \frac{|10|}{|1 - j|} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ V}$$

et sa phase (c'est-à-dire son déphasage par rapport à  $\underline{E}$ )

$$\arg(\underline{E}_\theta) = \arg(10) - \arg(1 - j) = \pi/4$$

de sorte que

$$\underline{E}_\theta = 7,07 \cdot \exp(j\pi/4)$$

La tension de Thévenin a donc une valeur efficace de 7,07 V et une phase de  $\pi/4$ . Au final nous obtenons un générateur équivalent de Thévenin tel

que représenté sur la figure 4.22(a) avec

$$\begin{cases} \underline{E}_\theta = 7,07 \cdot \exp(j\pi/4) \\ \underline{R}_\theta = 34 \Omega \\ C_\theta = 93,6 \mu\text{F} \\ \underline{Z}_\theta = 48,1 \exp(-j\pi/4) \end{cases}$$

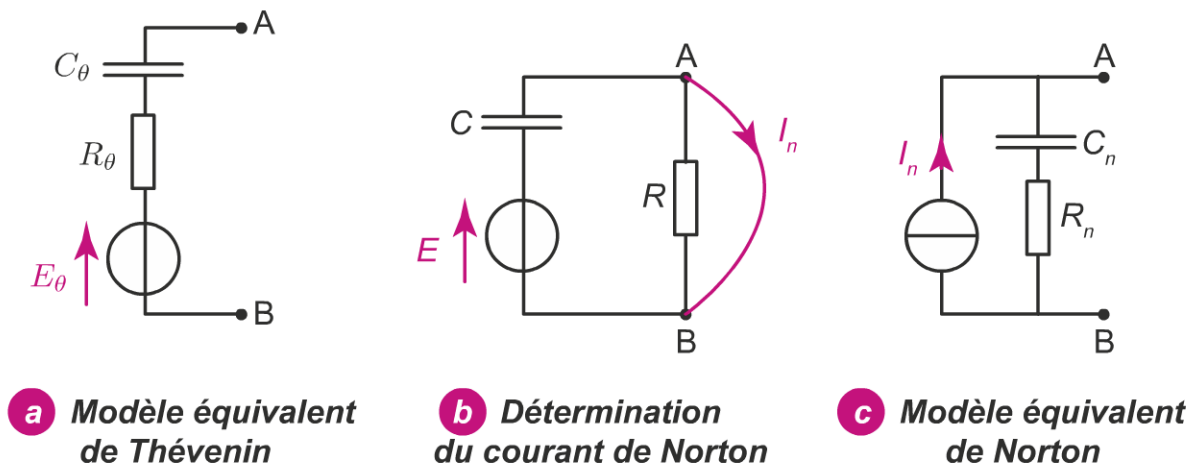


Figure 4.22 – Correction de l'exercice 4.13.

2. Pour déterminer les éléments du générateur de Norton, nous commençons par remarquer que  $\underline{Z}_n = \underline{Z}_\theta$ , de sorte que

$$\underline{Z}_n = 48,1 \exp(-j\pi/4)$$

et que l'impédance de Norton est une résistance de  $34 \Omega$  en série avec une capacité de  $93,6 \mu\text{F}$ , comme montré précédemment.

On calcule ensuite le courant de court-circuit  $\underline{I}_n$  comme indiqué sur le panel (b) de la figure 4.22. On place une connexion équipotentielle entre le point A et le point B, de sorte que la résistance  $R$  est court-circuitée. Le courant  $\underline{I}_n$  peut alors être déterminé en appliquant simplement la loi d'Ohm aux bornes de la capacité C :

$$\underline{I}_n = \underline{I}_{cc} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_C} = \frac{10}{68 \cdot \exp(-j\pi/2)} = 0,147 \exp(j\pi/2) \quad (4.66)$$

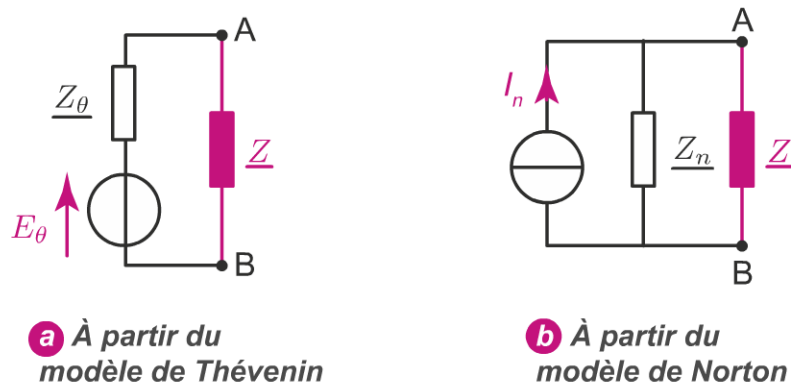
Le courant de court-circuit ou de Norton a une valeur efficace de 147 mA et une phase avance de phase de  $\pi/2$  sur  $e(t)$ . Finalement, nous obtenons un générateur équivalent de Norton tel que celui représenté sur la figure 4.22(c) avec

$$\begin{cases} \underline{I}_n = 0,147 \exp(j\pi/2) \\ \underline{R}_n = 34 \Omega \\ C_n = 93,6 \mu\text{F} \\ \underline{Z}_n = 48,1 \exp(-j\pi/4) \end{cases}$$

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal

Remarquons que l'on vérifie bien la relation de passage entre les deux modèles (4.62) puisque

$$\underline{E}_\theta = 7,07 \exp(j\pi/4) = 68,0 \exp(-j\pi/4) \cdot 0,208 \exp(j\pi/2)$$



**Figure 4.23** – Correction de l'exercice 4.13.

3. Pour calculer la valeur efficace et la phase du courant qui traverse l'impédance  $\underline{Z}$  à partir du modèle de Thévenin ou du modèle de Norton, on re-connecte celle-ci. On applique ensuite soit la formule du pont diviseur de tension, soit celle du pont diviseur de courant, en prenant

$$\underline{Z} = R + jL\omega = 66 + j \cdot 0,427 \cdot 2\pi \cdot 50 = 66 + 134j$$

— La formule du pont diviseur de tension (figure 4.23(a))

$$\underline{V}_{AB} = \underline{E}_\theta \cdot \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_\theta}$$

permet d'établir, en appliquant la loi d'Ohm aux bornes de  $\underline{Z}$ , que

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}_{AB}}{\underline{Z}} = \underline{E}_\theta \cdot \frac{1}{\underline{Z} + \underline{Z}_\theta} = \frac{7,07 \exp(j\pi/4)}{66 + 134j + 34 - 34j} = \frac{7,07 \exp(j\pi/4)}{100 + 100j}$$

On exprime alors le dénominateur sous forme trigonométrique

$$100 + 100j = \sqrt{100^2 + 100^2} \exp \left[ j \cdot \arctan \left( \frac{100}{100} \right) \right] = 141 \exp(j\pi/4)$$

et l'on écrit que

$$\underline{I} = \frac{7,07 \exp(j\pi/4)}{141 \exp(j\pi/4)} = 50,1 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(j \cdot 0)$$

Le courant traversant l'impédance de charge a une valeur efficace de 50,1 mA et est en phase avec la tension du générateur.

- La formule du pont diviseur de courant appliquée comme indiqué dans la figure 4.23(b) s'écrit

$$\underline{I} = \underline{I}_n \cdot \frac{\underline{Z}_n}{\underline{Z}_n + \underline{Z}} = 0,147 \exp(j\pi/2) \frac{48,1 \exp(-j\pi/4)}{\underbrace{66 + 134j + 34 - 34j}_{100(1+j)}}$$

En exprimant le dénominateur sous forme trigonométrique, comme précédemment, on obtient la relation

$$\underline{I} = 0,147 \exp(j\pi/2) \frac{48,1 \exp(-j\pi/4)}{141 \exp(j\pi/4)} = 50,1 \cdot 10^{-3}$$

qui permet de montrer que le courant traversant l'impédance de charge a une valeur efficace de 50,1 mA et est en phase avec la tension du générateur.

#### Exercice 4.14

Un alternateur est un convertisseur mécano-électrique permettant de produire de l'énergie électrique alternative sinusoïdale. Afin de caractériser un tel générateur, un technicien procède à trois manipulations :

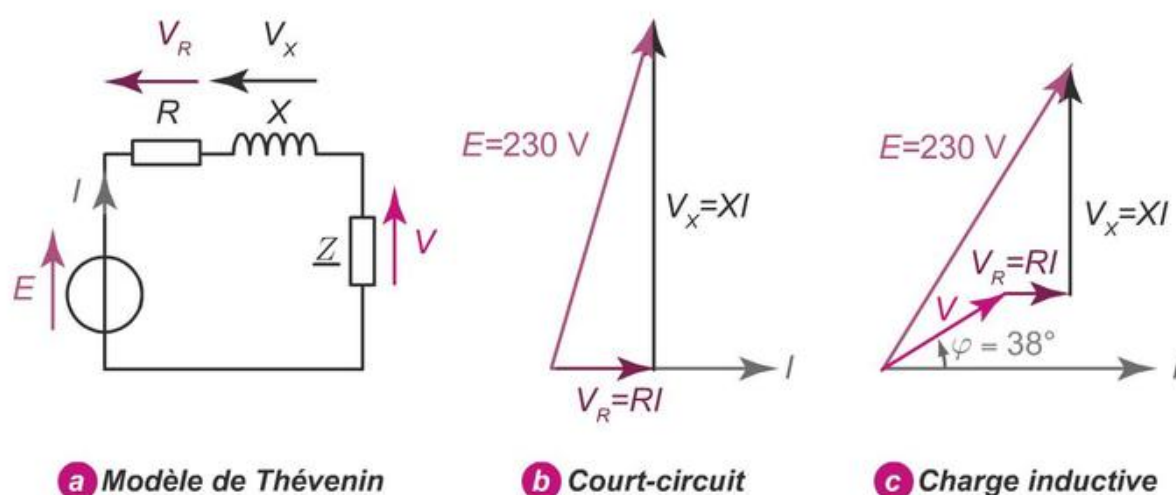
- Tout d'abord, l'alternateur est débrayé, de sorte que le générateur qu'il constitue est éteint. Une mesure à l'ohmmètre entre ses bornes permet de relever une valeur de 2 Ω.
- L'alternateur est ensuite mis en production et sa vitesse de rotation est réglée afin que la tension qu'il produit ait une fréquence de 50 Hz. Ses bornes sont laissées à vide, et une mesure au voltmètre permet de relever une tension de 230 V.
- Enfin, dans les mêmes conditions de fonctionnement qu'auparavant, les bornes de l'alternateur sont court-circuités au moyen d'un ampèremètre dont la résistance interne peut être négligée. On mesure alors un courant de 4,60 A.

Quel sera le courant débité par l'alternateur s'il alimente une charge inductive d'impédance apparente 200 Ω et de facteur de puissance 0,788 ? En déduire la puissance consommée par la charge.

#### Solution 4.14

Nous appliquons le théorème de Thévenin au générateur, qui nous permet d'aboutir au schéma du volet (a) de la figure 4.24. Pour connaître le courant délivré par l'alternateur en fonction de la charge, il suffit de déterminer les trois paramètres du modèle  $E$ ,  $R$  et  $X$ .

## 4.2 Les lois et théorèmes en régime alternatif sinusoïdal



**Figure 4.24** – Correction de l'exercice 4.14. (a) Modèle de Thévenin du générateur et sa charge  $Z$ . Diagramme de Fresnel (b) en court-circuit et (c) dans le cas d'une charge inductive. Les normes des vecteurs ne sont pas à l'échelle.

- La valeur de  $E$  est la tension de Thévenin définie comme la tension à vide du générateur. On utilise alors l'essai en circuit ouvert qui donne directement accès à la valeur  $E = 230 \text{ V}$ .
- Le théorème de Thévenin décrit ensuite l'impédance de thévenin comme mesurable à l'aide d'un RLC-mètre, toutes sources éteintes. Si l'on utilise un ohmmètre, c'est du courant continu qui est utilisé pour faire la mesure, et l'inductance n'est donc pas mesurée. Seule la résistance est prise en compte dans ce cas, de sorte que  $R = 2 \Omega$ .
- La dernière grandeur à déterminer est la réactance. Le générateur étant inductif, on peut d'ores et déjà affirmer que  $X > 0$ . Pour déterminer sa valeur, nous nous aidons de la représentation de Fresnel. Les diagrammes correspondant aux branchements en court-circuit et inductif sont reportés respectivement sur les volets (b) et (c) de la figure. Le courant  $I$  a été choisi en référence, et nous avons pris en compte le fait que :
  - la tension  $V_R$  mesurée aux bornes de la résistance est en phase avec le courant ;
  - la tension  $V_X$  mesurée aux bornes des inductances est en avance de phase de  $90^\circ$  sur le courant ;
  - la tension  $V$  mesurée sur la charge inductive est déphasée de  $38^\circ$  (soit un facteur de puissance  $\cos \varphi = 0,788$ ).

Remarquons que les valeurs efficaces de tension et de courant sont liées par les expressions  $V_R = R \cdot I$  aux bornes de la résistance de Thévenin,  $V_X = X \cdot I$  aux bornes de la réactance de Thévenin et  $V = Z \cdot I$  aux bornes de la charge,  $Z$  étant l'impédance apparente de cette dernière. Notons toutefois que le courant n'a pas la même valeur dans les deux situations considérées.

## Chapitre 4 – Réseaux linéaires en régime alternatif sinusoïdal

Le diagramme de Fresnel correspondant à la mesure en court-circuit est reporté dans le volet (b). Il nous permet d'établir une équation impliquant  $X$ . En effet, en appliquant le théorème de Pythagore, on écrit que

$$E^2 = (RI^2) + (XI)^2 \implies 230^2 = (2 \cdot 4,60)^2 + (X \cdot 4,60)^2$$

ce qui permet d'établir que

$$X = \frac{\sqrt{230^2 - (2 \cdot 4,60)^2}}{4,60} = 50,0 \Omega$$

Remarquons que  $R$  est négligeable devant  $X$ , car elle est plus de vingt fois plus petite. Il va de soi que les diagrammes représentés ne sont pas à l'échelle.

Connaissant les valeurs de  $R$  et de  $X$ , nous pouvons déterminer la valeur du courant circulant dans la charge  $\underline{Z} = 200 \cdot \exp(j38^\circ)$ . L'application du théorème de Pythagore dans le volet (c) permet enfin d'écrire que

$$(V \cos \varphi + RI)^2 + (V \sin \varphi + XI)^2 = E^2$$

sachant que  $\cos \varphi = 0,788$ , ce qui implique que  $\sin \varphi = 0,616$ ,  $X = 50 \Omega$  et  $R = 2 \Omega$ . L'information qui nous est donnée sur l'impédance apparente de la charge nous permet d'établir que

$$V = Z \cdot I = 200 \cdot I$$

Aussi, l'équation à résoudre est

$$(0,788 \cdot 200I + 2I)^2 + (0,616 \cdot 200I + 50I)^2 = 230^2$$

de sorte que, puisque les valeurs efficaces sont définies positives,  $I = 0,970 \text{ A} = 970 \text{ mA}$ .

Enfin, la puissance consommée par la charge est la puissance active. Celle-ci se calcule comme

$$P = VI \cos \varphi = ZI \cdot I \cos \varphi = 200 \cdot 0,97^2 \cdot 0,788 = 148 \text{ W}$$

La charge inductive connectée à l'alternateur consomme un courant de 970 mA et une puissance de 148 W.

# 5

## Régime transitoire

Les chapitres précédents ont été consacrés à l'étude des différents régimes de fonctionnement d'un circuit électrique et au développement des outils permettant de les analyser. Nous avons ainsi abordé les régimes continus et variables, en distinguant les signaux périodiques, alternatifs et harmoniques. Dans chacun de ces chapitres, nous avons considéré les régimes étudiés comme des situations établies et permanentes, ne nous intéressant pas à ce qui se passe dans les tout premiers instants qui suivent la mise sous tension. Une étape d'approfondissement consiste à étudier ce que l'on appelle le régime transitoire.

Après nous être arrêtés sur l'oscilloscope, qui permet d'observer le comportement des grandeurs électriques dans le temps, et sur la problématique liée sa connexion, nous aborderons le circuit RC, constitué d'une résistance connectée en série avec une capacité. Nous décrirons ce que l'on appelle la charge et la décharge du condensateur et analyserons l'influence de la fréquence des signaux sur le comportement du circuit. Les circuits intégrateurs et dérivateurs seront abordés, avant de conclure sur quelques notions de filtrage.

Dans un troisième temps, nous aborderons le cas du circuit RL, constitué par la mise en série d'une résistance et d'une inductance. L'analyse de la réponse des grandeurs électriques nous permettra de vérifier, entre autre, le caractère antinomique de l'inductance et de la capacité.

Au travers de ce chapitre, nous donnerons des éléments permettant de comprendre les comportements précédemment décrits des réactances en régimes continu et harmonique. L'étude énergétique nous permettra de mettre en évidence la faculté de stockage des capacités et des inductances, pouvant être appréhendées respectivement comme des réservoirs de tension et de courant.

### 5.1 UTILISATION D'UN OSCILLOSCOPE POUR L'ÉTUDE DU RÉGIME TRANSITOIRE

L'observation des phénomènes électriques transitoires est techniquement réalisable au moyen d'un oscilloscope. Toutefois, cet appareil n'est capable d'acquérir que des tensions, et le problème pratique de son branchement doit être posé si l'on souhaite visualiser un courant. Par ailleurs, même si la masse, que nous avons définie au premier chapitre, n'est qu'un moyen d'indiquer le potentiel de référence, le fait que les deux voies d'un oscilloscope aient une borne en commun tend à lui donner une réalité physique qui impose quelques précautions. On dira, en pratique, que les masses des voies de l'oscilloscope sont reliées l'une à l'autre.

La figure 5.1 représente le type de circuits électriques que nous allons considérer dans toute la section suivante. Il s'agit d'un montage RC, car il est constitué d'un condensateur placé en série avec une résistance, l'association étant alimentée par une source de tension alternative. Supposons que l'on souhaite, dans ce cadre, utiliser un oscilloscope pour visualiser simultanément la tension  $e$  et le courant  $i$  délivrés par le générateur.

#### • *Mesure du courant*

Le courant étant le même dans tout le circuit, on le visualise indirectement en observant la tension  $u$  aux bornes de la résistance. En effet, ce dipôle passif n'impliquant pas de déphasage entre le courant  $i$  qui le traverse et la tension à ses bornes, un simple coefficient de proportionnalité lie ces deux grandeurs.

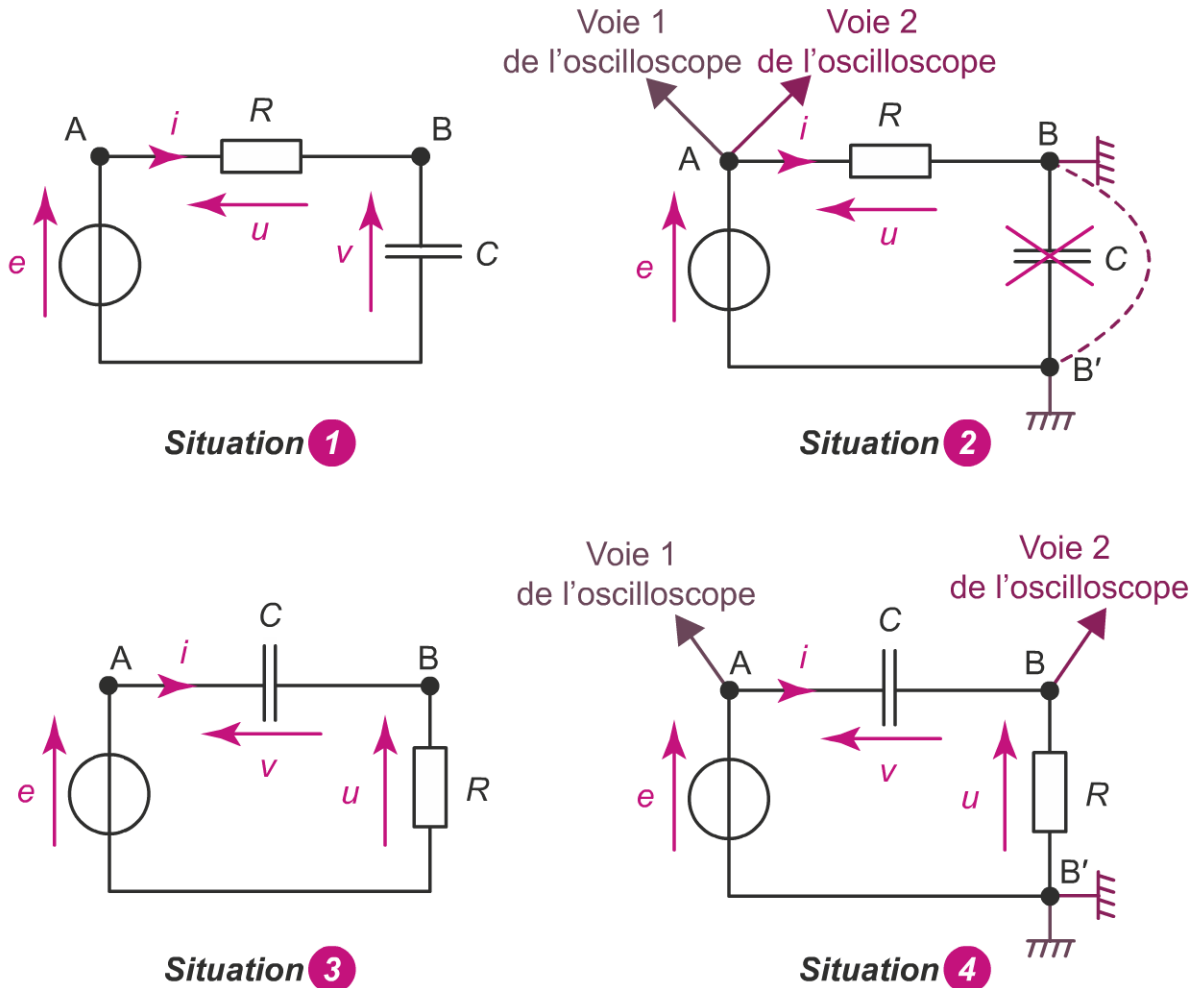
#### • *Mesures simultanées*

Pour réaliser la mesure instantanée et connecter l'oscilloscope, deux possibilités peuvent être envisagées, mais seule l'une des deux est correcte.

- La première consiste à réaliser le montage représenté dans la situation 1 de la figure 5.1. La connexion de l'oscilloscope dans le but de mesurer à la fois la tension et le courant fournis par le générateur se fait alors selon les indications données dans la situation 2. La voie 1 de l'oscilloscope est reliée aux bornes du générateur, c'est-à-dire entre le point A et le point B'. La voie 2 est quant à elle connectée aux bornes de la résistance, c'est-à-dire que le signal est mesuré au point A et que la masse de cette voie est placée au point B. Les masses de chacune des voies de l'oscilloscope étant liées l'une à l'autre, un

## 5.1 Utilisation d'un oscilloscope pour l'étude du régime transitoire

tel branchement est incorrect, car il court-circuite le condensateur, comme l'indique la liaison représentée par la courbe en pointillés.



**Figure 5.1** – Connexion d'un oscilloscope pour visualiser simultanément la tension  $e$  du générateur et la tension  $u$  aux bornes de la résistance.

- La seconde possibilité consiste à réaliser le montage de la situation 3 et à connecter l'oscilloscope comme indiqué dans la situation 4. Dans ces conditions, la voie 1 est toujours branchée entre les points A et B' mais la voie 2 mesure cette fois-ci la tension  $u$  entre les points B et B'. La masse de l'oscilloscope, c'est-à-dire la masse de chacune des deux voies, se retrouve uniquement au point B' de sorte qu'elle ne court-circuite plus aucun composant.

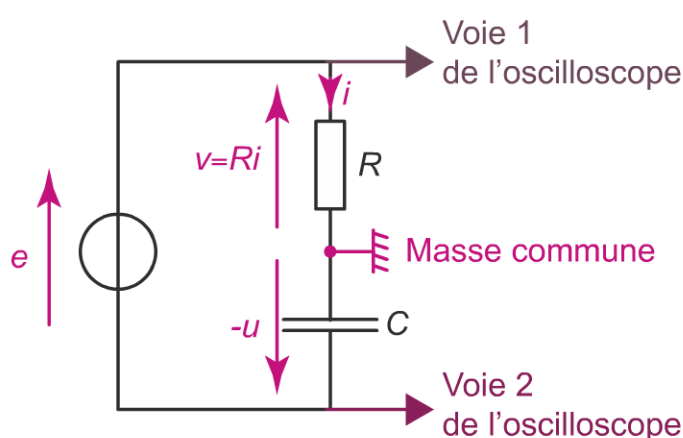
C'est donc le montage de la situation 3 et la connexion indiquée dans la situation 4 de la figure 5.1 qui permettent de mesurer correctement et simultanément le courant et la tension délivrés par le générateur.

### Exercice 5.1

Comment connecter un oscilloscope sur un circuit RC pour mesurer simultanément le courant qui circule dans le circuit et la tension aux bornes de la capacité ?

### Solution 5.1

On procède au branchement représenté dans la figure 5.2. Celui-ci permet de mesurer sur la voie 1 la tension aux bornes de la résistance. Une simple application de la loi d'Ohm permet de déduire la valeur du courant  $i$  qui traverse tout le circuit.



**Figure 5.2** – Correction de l'exercice 5.1. Montage permettant la mesure simultanée à l'oscilloscope du courant (voie 1) par application de la loi d'Ohm et de la tension aux bornes de la capacité (voie 2) par inversion du signal.

Sur la voie 2, c'est l'opposé de la tension  $u$  qui est mesuré. Pour déterminer  $u$ , on utilise alors la fonction d'inversion (notée INV ou INVERT) de l'oscilloscope, qui permet d'opposer toutes les valeurs du signal et de retrouver l'allure de  $u$ .

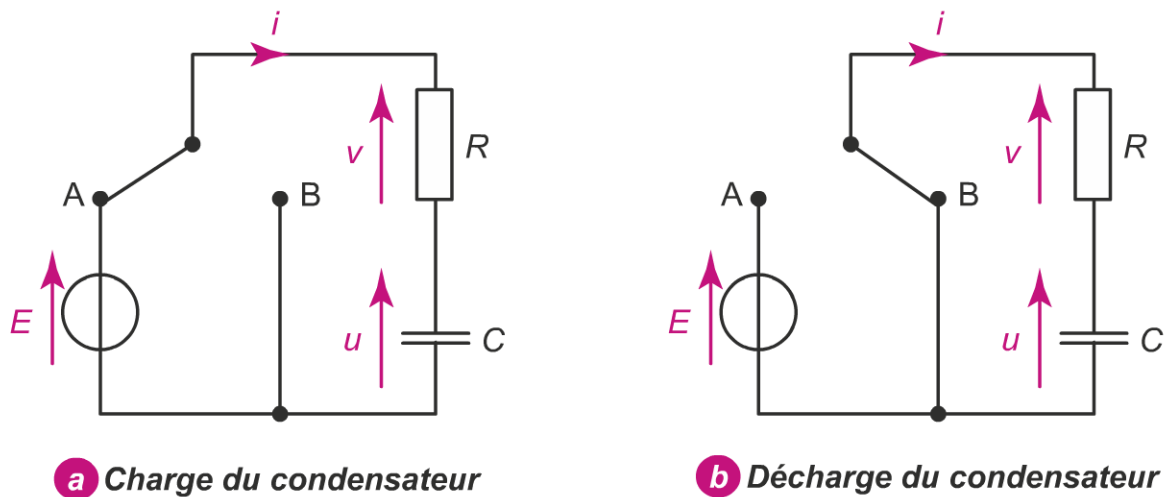
## 5.2 LE RÉGIME TRANSITOIRE DANS UN CIRCUIT RC

Les effets capacitifs sont décrits à la section 3.3.1 page 148. La capacité se comporte comme un circuit ouvert en régime continu et entraîne un retard de phase de  $90^\circ$  de la tension sur le courant en régime harmonique.

Analysons à présent le comportement de la capacité en régime transitoire. Cela est réalisable en pratique à l'aide d'un condensateur, un composant électrique profitant de l'effet capacitif pour assurer des fonctions de stockage ou de filtrage.

## 5.2.1 Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance

Un circuit faisant intervenir une capacité est nécessairement un circuit RC. Nous présentons sur la figure 5.3 le montage électrique permettant d'analyser le comportement transitoire de la tension  $u$  aux bornes de  $C$  et du courant  $i$  circulant dans le circuit.



**Figure 5.3** – Circuit RC permettant d'étudier (a) la charge et (b) la décharge du condensateur.

## a) Charge du condensateur

## • Mise en équation et résolution

La charge du condensateur se visualise dans la situation décrite par le panel (a) de la figure 5.3. À l'instant initial, alors que les valeurs de  $u$  et de  $v$  sont nulles, l'interrupteur est fermé sur le point A, de sorte qu'une différence de potentiels continue  $E$  est appliquée au dipôle RC. Dans la capacité, le courant et la tension sont, nous l'avons déjà dit au chapitre 3, liés par l'expression

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (5.1)$$

La tension maximale du condensateur ne peut être supérieure à la valeur de  $E$ . Aussi, une première analyse de cette relation permet d'établir que, dès que la tension  $u$  augmente, le courant circule dans le circuit. D'autre part, à mesure que la tension  $u$  s'approche de sa valeur maximale, le taux de variation de la tension  $du(t)/dt$  diminue et le courant  $i$ , qui est un courant de déplacement, tend vers zéro.

## Chapitre 5 – Régime transitoire

Afin de comprendre ce qui se passe entre ces deux situations limites, nous établissons l'équation différentielle de la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur. L'application de la loi des mailles et de la loi d'Ohm au montage considéré permet d'écrire que

$$E = R \cdot i(t) + u(t) \quad (5.2)$$

On remarque alors que le courant est le même dans tout le circuit, ce qui permet d'injecter dans la relation précédente l'expression (5.1). En notant  $u' = du/dt$ , et en divisant par  $RC$ , on arrive à l'équation

$$u'(t) + \frac{1}{RC}u(t) = \frac{E}{RC} \quad (5.3)$$

La solution générale de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de (5.3). Elle s'exprime comme

$$u(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + E \quad (5.4)$$

où  $\lambda$  est une constante pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle. D'ores et déjà, on remarque que le terme  $\lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$  est un terme de relaxation. Le produit  $RC$  étant de plus homogène à un temps, on pose

$$\tau_C = RC \quad (5.5)$$

Il s'agit de la constante de temps caractéristique du circuit RC. Elle permet de décrire la dynamique de charge et de décharge de celui-ci.

La constante  $\lambda$  est déterminée par les conditions initiales du problème. Comme nous l'avons dit précédemment, le condensateur est déchargé au moment de la mise en tension, de sorte que  $u(0) = 0$  V. En appliquant cette condition, on obtient

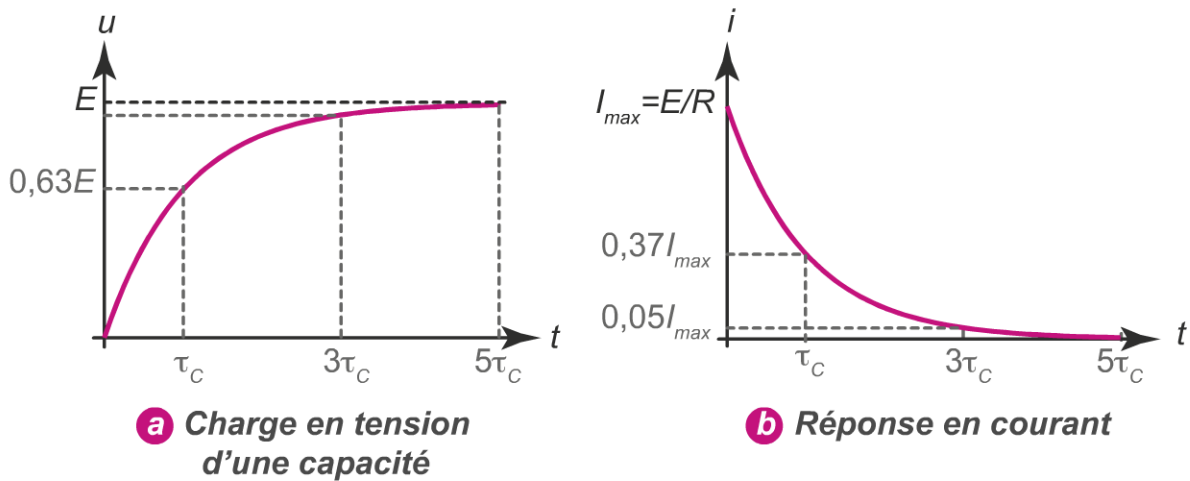
$$u(0) = 0 = \lambda + E \implies \lambda = -E \quad (5.6)$$

ce qui permet d'extraire la solution générale du problème  $u(t)$  dont l'expression est

$$u(t) = E \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right)\right] \quad (5.7)$$

Cette relation, décrivant la charge en tension du condensateur, est représentée sur le volet (a) de la figure 5.4.

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC



**Figure 5.4** – Réponse de la tension aux bornes d'une capacité dans un circuit RC soumis à un échelon de tension. (a) Charge en tension et (b) réponse en courant de la capacité.

### • Dynamique de la tension en charge

Analysons à présent l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction de la constante de temps  $\tau_C = RC$ . Comparons pour cela  $u$  à  $E$  et posons  $t = \tau_C$ . On obtient alors

$$\frac{u(\tau_C)}{E} = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_C}{\tau_C}\right) \right] = 0,63 = 63 \% \quad (5.8)$$

de sorte que la capacité est à 63 % de sa charge lorsqu'il s'est écoulé une durée égale à  $\tau_C$ , comme reporté sur le volet (a) de la figure 5.4.

Déterminons la durée du régime transitoire, définie comme le temps nécessaire à la capacité pour dépasser 99 % de sa tension maximale. Il s'agit alors de chercher  $t_0$  tel que

$$\begin{aligned} \frac{u(t_0)}{E} > 0,99 &\implies \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_0}{\tau_C}\right) \right] > 0,99 \\ &\implies t_0 > -\tau_C \cdot \ln(0,01) \implies t_0 > 4,61\tau_C \quad (5.9) \end{aligned}$$

On retiendra pour simplifier que le régime permanent du circuit RC est atteint au delà de  $5\tau_C$ .

Un circuit RC sous l'effet d'un échelon de tension atteint son régime permanent au bout de  $5\tau_C$ , où  $\tau_C = RC$  est la constante de temps.

## Chapitre 5 – Régime transitoire

On pourra de plus retenir que le condensateur atteint 95 % de sa charge au bout de  $3\tau_C$ .

### • Réponse en courant

Connaissant le comportement de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps, il est possible de déterminer celui du courant. Pour cela, nous injectons l'équation (5.7) dans l'expression (5.1) de la page 219 qui lie le courant de déplacement à la tension aux bornes du condensateur, et l'on obtient

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right) \quad (5.10)$$

Cette relation est reportée sur le volet (b) de la figure 5.4. On peut remarquer qu'à l'instant  $t = \tau_C$ , le courant prend la valeur

$$i(\tau) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{\tau_C}{\tau_C}\right) \quad (5.11)$$

qui s'écrit, en posant  $I_{max} = E/R$ ,

$$i(\tau) = 0,37 \cdot I_{max} \quad (5.12)$$

Notons que le courant n'est plus qu'à 5 % de sa valeur initiale au bout de  $3\tau_C$  et que l'installation du régime permanent se fait, ici aussi, au bout de  $5\tau_C$ . Le courant est alors nul : la capacité ouvre le circuit.

En régime continu permanent, la capacité se comporte comme un circuit ouvert.

### b) Décharge du condensateur

Revenons à la figure 5.3 page 219. L'interrupteur étant resté connecté au point A pendant un temps bien plus grand que  $\tau_C$ , on le bascule subitement pour le connecter au point B : on se trouve dans la situation du volet (b). La source de tension est court-circuitée, et la seule tension imposée dans le circuit est celle de la capacité qui est initialement totalement chargée.

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC

- *Mise en équation et résolution*

La loi des mailles reste la même puisque le montage est resté le même que dans le cas de la charge. Toutefois,  $E = 0$ , de sorte que

$$u'(t) + \frac{1}{\tau_C} u(t) = 0 \quad (5.13)$$

Cette équation admet comme solution générale

$$u(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right) \quad (5.14)$$

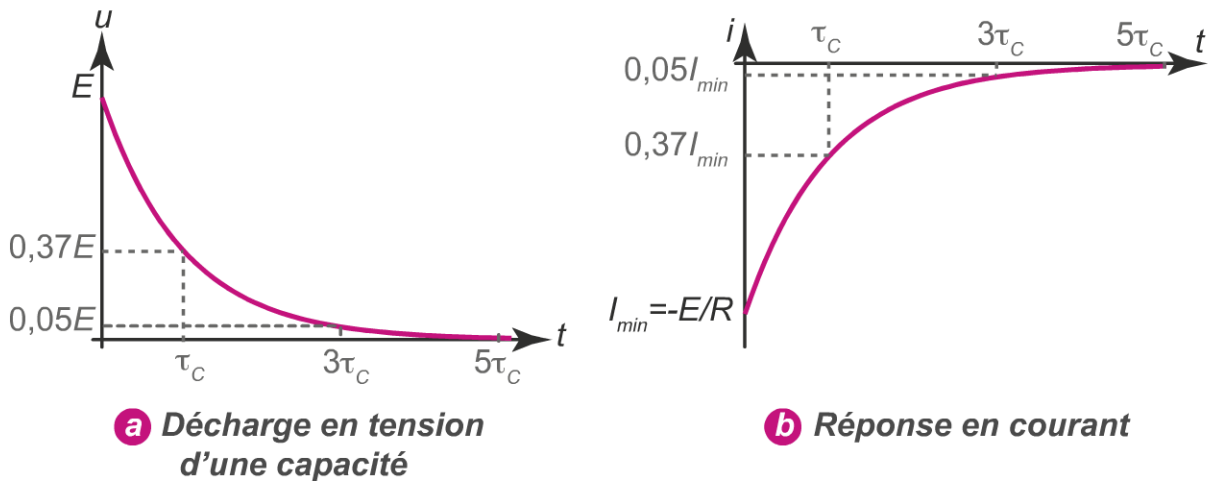
La condition initiale diffère du cas de la charge, puisque le condensateur a atteint, avant le basculement de l'interrupteur, sa tension maximale. On a donc

$$u(0) = E \implies \lambda = E \quad (5.15)$$

de sorte que

$$u(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right) \quad (5.16)$$

Cette relation est reportée sur le volet (a) de la figure 5.5.



**Figure 5.5** – Décharge du condensateur : évolution (a) de la tension et (b) du courant en fonction du temps.

- *Dynamique de la tension en décharge*

La tension lors de la décharge décroît de façon exponentielle. Des calculs semblables à ceux effectués précédemment permettent d'établir que la tension at-

## Chapitre 5 – Régime transitoire

teint 37 % de sa valeur initiale au bout de  $\tau_C$ , 5 % au bout de  $3\tau_C$ , et que la capacité est totalement déchargée au bout de  $5\tau_C$ .

La capacité dans un circuit RC est totalement déchargée au bout de  $5\tau_C$ .

### • Réponse du courant en décharge

Nous déterminons enfin l'équation décrivant le comportement du courant en dérivant l'expression du courant

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right) \quad (5.17)$$

et nous la reportons sur le volet (b) de la figure 5.5. Outre les caractéristiques dynamiques déjà décrites, on remarque que le courant est négatif, ce qui indique que le condensateur, dont les grandeurs sont repérées en convention récepteur, se comporte comme un générateur lors de la décharge.

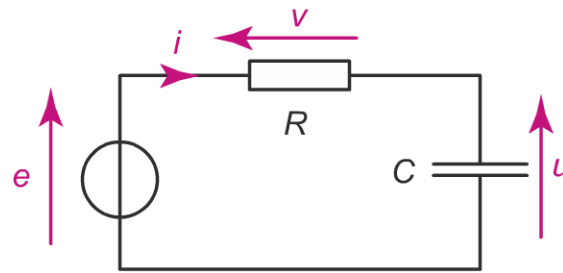
En décharge, la capacité se comporte comme un générateur.

Cette expérience de charge et de décharge permet d'appréhender la notion de stockage de l'énergie par voie électrostatique déjà abordée à la page 151.

### Exercice 5.2

1. Avec quelles unités exprime-t-on une résistance ? une capacité ? une inductance ?
2. Calculer la valeur théorique de la constante de temps d'un circuit RC série, avec  $C = 22 \text{ nF}$  et  $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ .
3. On souhaite réaliser l'étude d'un circuit RC tel que représenté sur la figure 5.6 en prenant  $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ , et  $C = 22 \text{ nF}$ .
  - (a) Comment disposer en pratique d'un interrupteur fonctionnant à 1 kHz et permettant d'étudier la charge et la décharge de la capacité à cette fréquence ?
  - (b) Quelle doit être la fréquence  $f$  du générateur pour que la charge ou la décharge du condensateur soit complète ?
  - (c) Donner une méthode permettant de mesurer la valeur de  $\tau_C$ .

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC



**Figure 5.6** – Circuit de l'exercice 5.2. La tension de sortie est prise aux bornes de la capacité  $C$ .

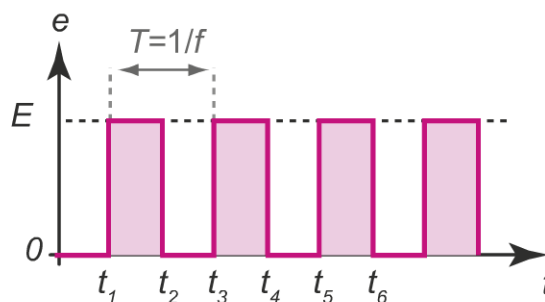
### Solution 5.2

1. Une résistance s'exprime en ohms ( $\Omega$ ), une capacité en farads (F) et une inductance en henrys (H).
2. La valeur théorique de la constante de charge est donnée par

$$\tau_C = RC = 5,6 \cdot 10^3 \times 22 \cdot 10^{-9} = 123 \mu\text{s}$$

3. Étude du circuit RC.

(a) Pour disposer d'un interrupteur fonctionnant à 1 kHz, on remplace le générateur de tension continue par un générateur de tension rectangulaire délivrant des signaux à 1 kHz et ayant l'allure représentée sur la figure 5.7. Ce signal correspond à un signal continu généré en amont d'un interrupteur, ce qui permet de basculer entre la charge et la décharge du condensateur.



**Figure 5.7** – Illustration du rôle d'interrupteur joué par le signal rectangulaire. Les zones colorées correspondent au mode charge, les autres au mode décharge.

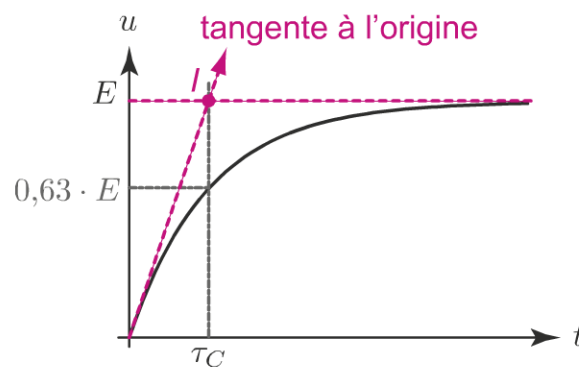
- Dans les zones colorées, c'est-à-dire entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ ,  $t_3$  et  $t_4$ , *etc.*, le générateur se comporte comme une source continue de force électromotrice  $E$  (comme si l'interrupteur de la figure 5.3 page 219 était basculé sur A).

## Chapitre 5 – Régime transitoire

- Entre les instants  $t_2$  et  $t_3$  ou  $t_4$  et  $t_5$ , *etc.*, le générateur se comporte comme une équipotentielle (un court-circuit), comme si l'interrupteur était positionné sur le point B.
- (b) Un circuit RC sous l'effet d'un échelon de tension atteint son régime permanent au bout de  $5\tau_C$ , où  $\tau_C = RC$  est la constante de temps. Pour que la charge soit complète, il faut par conséquent que

$$t > 5\tau_C \implies f < 1/5\tau_C \implies f < 1626 \text{ Hz}$$

La fréquence du générateur du signal en créneaux doit être inférieure à environ 1,63 kHz.



**Figure 5.8** – Correction de l'exercice 5.2. Détermination expérimentale de la valeur de  $\tau_C$ .

- (c) Une allure simplifiée de l'oscillogramme obtenu en mode de charge est représentée dans la figure 5.8. Pour déterminer  $\tau_C$ , il y a deux possibilités :
  - la première est illustrée en pointillés gris. On calcule la valeur de tension correspondant à  $0,63 \cdot E$  et on reporte son horizontale sur l'oscillogramme. L'abscisse de l'intersection de l'horizontale avec la courbe donne  $\tau_C$  ;
  - la seconde est illustrée en pointillés magenta. Il s'agit d'utiliser la méthode des tangentes : (i) on trace une droite horizontale d'ordonnée  $E$  ; (ii) on trace une tangente à la courbe à l'origine ; (iii) on repère leur point d'intersection  $I$ . L'abscisse du point d'intersection  $I$  est égale à  $\tau_C$ .

En effet, la pente de la tangente à l'origine se calcule en déterminant

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{E}{\tau_C} \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right)$$

en  $t = 0$ , de sorte que la tangente à l'origine, qui est linéaire, a pour équation

$$u(t) = \frac{E}{\tau_C} t$$

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC

ce qui implique que  $u = E$  quand  $t = \tau_C$  et correspond aux coordonnées du point  $I$ .

### 5.2.2 Énergie stockée par la capacité

Une analyse des grandeurs mesurées aux bornes de la capacité, repérées en convention récepteur, permet de mettre en évidence la relation de celle-ci vis-à-vis de l'énergie électrique :

- lors de la charge, la tension augmente alors que le courant diminue de sorte que leur produit est positif. La capacité consomme donc de l'énergie électrique durant cette phase ;
- une fois que le régime permanent est atteint, la capacité n'est plus traversée par aucun courant, et elle ne consomme par conséquent aucune énergie ;
- la décharge est marquée par un changement de mode de la capacité qui fonctionne en générateur. Jusqu'à la décharge complète, la tension est positive et le courant est négatif, de sorte que leur produit est négatif : la capacité fournit au circuit de l'énergie électrique.

Lors de sa décharge, le condensateur restitue l'énergie qu'il a accumulée lors de sa charge. Il se comporte comme un réservoir de tension.

Afin d'évaluer l'énergie stockée par le condensateur à l'issue de sa charge, considérons la puissance instantanée qui, quel que soit le régime de fonctionnement, s'écrit comme le produit entre la tension et le courant. En considérant la relation (5.1) de la page 219, la puissance consommée par le condensateur à l'instant  $t$  s'exprime en convention récepteur

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} \quad (5.18)$$

Puisque  $p(t)$  décrit une variation d'énergie par unité de temps, nous pouvons écrire que

$$\frac{d\epsilon}{dt} = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} \quad (5.19)$$

ce qui s'écrit, en allégeant les notations et en multipliant les deux côtés de l'égalité par l'élément  $dt$ ,

$$d\epsilon = C \cdot u \cdot du \quad (5.20)$$

## Chapitre 5 – Régime transitoire

L'énergie  $\Delta\epsilon$  que stocke la capacité lors de sa charge pendant le temps  $t_0$  l'est pour une tension à ses bornes variant entre 0 et  $u(t_0) = U$ , de sorte que

$$\Delta\epsilon(t_0) = \int_0^U C \cdot u \cdot du = C \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^U \quad (5.21)$$

Ainsi, l'énergie stockée par le condensateur lors de sa charge de tension entre 0 et  $U$  vaut

$$\Delta\epsilon(t_0) = \frac{CU^2}{2} \quad (5.22)$$

ou bien, en introduisant la charge  $q$  à  $t = t_0$ ,

$$\Delta\epsilon(t_0) = \frac{q^2}{2C} \quad (5.23)$$

L'énergie stockée par une capacité dépend entièrement de la charge qu'il accumule.

### Exercice 5.3

Pour le circuit de la figure 5.3(a) page 219, on donne  $C = 22 \text{ nF}$ ,  $E = 220 \text{ V}$  et  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Calculer :

1. l'énergie stockée par le condensateur à  $t = 22 \mu\text{s}$  ;
2. l'énergie dissipée par la résistance à  $t = 22 \mu\text{s}$  ;
3. l'énergie finale stockée par le condensateur ;
4. l'énergie totale fournie par la source de tension à la fin du régime transitoire.

### Solution 5.3

1. Pour calculer l'énergie stockée à  $t = 22 \mu\text{s}$ , il faut en premier lieu calculer la constante de charge du circuit  $\tau_C$  :

$$\tau_C = RC = 1000 \cdot 22 \cdot 10^{-9} = 22 \mu\text{s}$$

On considère donc le condensateur à  $t = \tau_C$ . Puisqu'au cours de sa charge la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur suit la loi de variation (5.7) page 220, nous pouvons calculer la tension aux bornes du condensateur à  $t = \tau_C$ . On a

$$U = 0,63 \cdot E = 139 \text{ V}$$

Aussi,

$$\Delta\epsilon(\tau_C) = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 10^{-9} \cdot 139^2 = 2,11 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC

2. Pour connaître la puissance dissipée  $p$  dans la résistance à l'instant  $t = 22 \mu\text{s} = \tau_C$ , nous exprimons le courant de charge par

$$i(\tau_C) = 0,37 \cdot \frac{E}{R} = 0,37 \cdot \frac{220}{1000} = 8,14 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

ainsi,

$$p(\tau_C) = R \cdot i(\tau_C)^2 = 1000 \cdot (0,0814)^2 = 6,63 \text{ W}$$

3. Lorsque le condensateur est chargé, la tension à ses bornes est égale à  $E$ , et l'énergie qu'il a accumulée vaut donc

$$\Delta\epsilon_C(5\tau_C) = \frac{CE^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 10^{-9} \cdot 220^2 = 5,32 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

4. À la fin du régime transitoire, c'est-à-dire pour  $t = 5\tau_C$ , la source de tension a fourni l'énergie nécessaire à la charge du condensateur et à celle dissipée par la résistance. Nous connaissons déjà la valeur de l'énergie accumulée par le condensateur, qui vaut  $\Delta\epsilon_C(5\tau_C) = 5,32 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ . Il nous reste à calculer celle qui a été consommée par la résistance. On pose

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_R(5\tau_C) &= R \int_0^{5\tau_C} i^2(t) dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{5\tau_C} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_C}\right) dt \\ &= \frac{-CE^2}{2} \left[ \exp\left(-\frac{2t}{\tau_C}\right) \right]_0^{5\tau_C} = \frac{CE^2}{2} = 5,32 \cdot 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$

car  $\exp(-10\tau_C/\tau_C) \simeq 0$ .

Finalement, l'énergie totale  $\epsilon$  fournie par le générateur correspond à la somme de l'énergie stockée par le condensateur et de celle consommée par la résistance

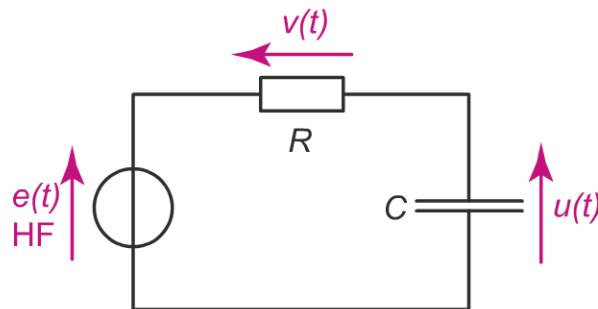
$$\Delta\epsilon(5\tau_C) = \Delta\epsilon_C(5\tau_C) + \Delta\epsilon_R(5\tau_C) = CE^2 = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 1,06 \text{ mJ}$$

### 5.2.3 Applications du régime transitoire : les circuits RC intégrateurs et dérivateurs

Les circuits RC sont connus pour leurs fonctions de filtrage en régime périodique mais ils ont longtemps été utilisés en électronique analogique pour jouer le rôle d'intégrateurs et de dérivateurs de fonctions. Nous verrons à la section 5.2.4 page 237 que l'opération que réalise un circuit RC dépend des points de mesure de la tension de sortie et de sa fréquence d'utilisation au regard de sa constante de temps, ou temps caractéristique,  $\tau_C = RC$ .

a) Circuit RC intégrateur

Nous considérons dans un premier temps le circuit représenté sur la figure 5.9, dans lequel la source de tension délivre un signal périodique à haute fréquence.



**Figure 5.9** – Circuit RC intégrateur. La source de tension délivre un signal périodique à haute fréquence (HF).

La loi des mailles appliquée à ce circuit permet d'établir une équation différentielle non-homogène dont le second membre contient la fonction du temps  $e(t)$  :

$$u'(t) - \frac{u(t)}{\tau_c} = \frac{e(t)}{\tau_c} \quad (5.24)$$

La recherche de la solution générale permet de donner, en appliquant la méthode de Lagrange, l'expression de  $u$  après un temps de fonctionnement égal à  $t_0$

$$u(t_0) = \left[ \lambda + \int_0^{t_0} \exp\left(\frac{t}{\tau_c}\right) \frac{e(t)}{\tau_c} dt \right] \cdot \exp\left(-\frac{t_0}{\tau_c}\right) \quad (5.25)$$

où  $\lambda$  dépend des conditions initiales. On se place dans la situation où le générateur délivre une tension de fréquence élevée, c'est-à-dire que la période  $T$  du signal considéré, et par conséquent la durée  $t_0$  pendant laquelle le circuit réalise l'opération, est nettement inférieure au temps de charge du condensateur  $\tau_c$ . Dans ces conditions,

$$\frac{t_0}{\tau_c} \rightarrow 0 \implies \exp\left(-\frac{t_0}{\tau_c}\right) \simeq \exp\left(\frac{t_0}{\tau_c}\right) \simeq 1 \quad (5.26)$$

et la dérivation de l'équation (5.25) permet d'écrire que

$$\frac{du(t)}{dt} \simeq \frac{e(t)}{\tau_c} \quad (5.27)$$

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC

Remarquons qu'une démonstration équivalente consiste à considérer que le temps de fonctionnement  $t_0$ , très inférieur à  $\tau_C$ , ne permet pas au condensateur de se charger suffisamment. Ainsi, la quasi-totalité de la tension  $e(t)$  se trouve aux bornes la résistance  $R$ . Le courant est alors contrôlé par cette dernière et s'écrit

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \simeq \frac{e(t)}{R} \quad (5.28)$$

et l'on retrouve, en introduisant la relation (5.1) de la page 219 dans l'expression ci-dessus, l'équation (5.27).

Remarquons de plus que l'hypothèse de cette seconde démonstration consiste à dire que la tension du condensateur est négligeable. Il va donc de soi que les tensions observées en sortie de ce circuit seront très petites devant les tensions d'entrée. On s'attend donc à mesurer un rapport au moins égal à 10 entre  $e$  et  $u$ .

Finalement, on établit que la tension  $u$  mesurée aux bornes du condensateur après un temps d'opération  $t_0$  en fonctionnement haute fréquence est liée à la tension d'entrée  $e(t)$  par l'équation

$$u(t_0) = \frac{1}{RC} \int_0^{t_0} e(t) dt \quad (5.29)$$

Dans le circuit intégrateur de la figure 5.9 fonctionnant en haute fréquence, la tension aux bornes du condensateur est proportionnelle à l'intégrale de la tension d'entrée  $e(t)$ .

### Exercice 5.4

Tracer la tension aux bornes d'un condensateur de capacité  $C = 100 \mu\text{F}$  en série avec une résistance  $R = 50 \text{ k}\Omega$  lorsque le générateur de tension qui alimente l'association délivre :

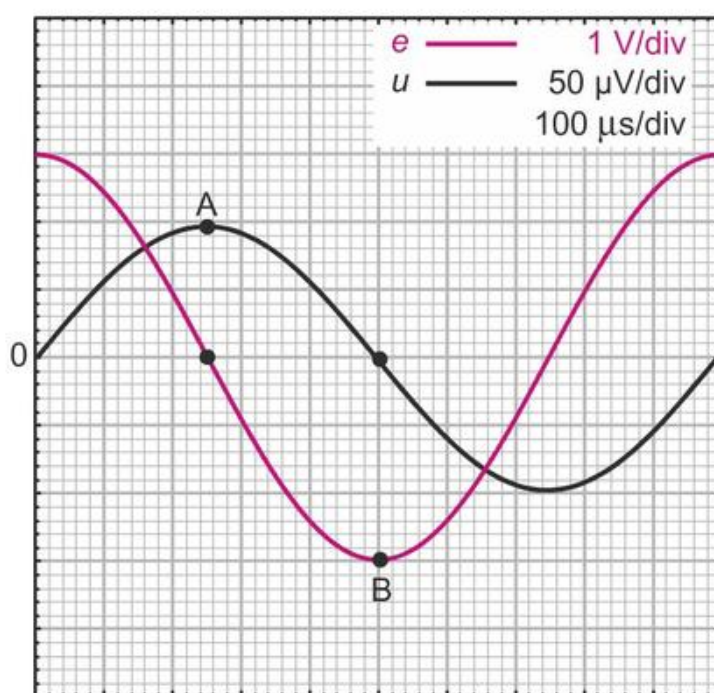
1. une tension sinusoïdale de la forme  $e(t) = 3 \cos(\omega t)$  à la fréquence 1 kHz ;
2. une tension alternative en créneaux de rapport cyclique 1/2, d'amplitude 3 V et de fréquence de 2 kHz ;
3. une tension alternative triangulaire d'amplitude 3 V et de fréquence de 1 kHz.

**Solution 5.4**

Le circuit considéré est le même que celui reporté dans la figure 5.9 de la page 230. La constante de temps du circuit, c'est-à-dire le temps nécessaire au condensateur pour atteindre 63 % de sa charge, est donnée par

$$\tau_C = RC = 5 \cdot 10^4 \times 10^{-4} = 5 \text{ s}$$

Le temps de charge est largement supérieur à la période  $T$  de la tension dans les trois situations envisagées, une fréquence de plus de 1 kHz correspondant à une période de moins de 1 ms. Dans ces conditions, le circuit fonctionne en intégrateur.



**Figure 5.10** – Correction de l'exercice 5.4(1). La tension d'entrée alternative sinusoïdale  $e$  apparaît en magenta. La tension de sortie  $u$ , mesurée aux bornes de la capacité, est représentée en noir.

1. Nous avons reporté le signal d'entrée sinusoïdal  $e$  en couleur sur la figure 5.10. La base de temps est de  $100 \mu\text{s}$  par division : une période se retrouve entièrement sur l'écran car celui-ci contient dix divisions. La tension d'entrée générée par la source a une amplitude de 3 V, et l'on attend une amplitude bien plus faible de la tension mesurée aux bornes du condensateur. La valeur prise par la tension  $u$  à l'instant  $t_0$  est déterminée au travers de la relation (5.29).

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC

Ainsi,

$$u(t_0) = \frac{1}{RC} \int_0^{t_0} e(t) dt = \frac{1}{RC} \int_0^{t_0} 3 \cos(\omega t) dt = \frac{3}{5\omega} \cdot [\sin(\omega t)]_0^{t_0} = 9,55 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(\omega t_0)$$

de sorte que, quelle que soit la valeur  $t$  que l'on donne à  $t_0$ ,

$$u(t) = 9,55 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(\omega t)$$

Cette tension est reportée en noir sur la figure 5.10, la tension d'entrée étant reportée en couleur. Les deux tensions sont déphasées de  $\pi/2$ , c'est-à-dire que quand l'une est à son maximum ou à son minimum (points A et B de la figure), l'autre est nulle. On dit qu'elles sont en **quadrature de phase**. L'amplitude de la tension  $u(t)$  vaut  $95,5 \mu\text{V}$ , soit un peu moins de deux divisions à  $50 \mu\text{V}$  par division. On trouve bien le grand rapport attendu entre l'amplitude d'entrée et celle de sortie, puisque

$$\frac{3 \text{ V}}{95,5 \cdot 10^{-6} \text{ V}} \simeq 31000$$

2. Une tension en créneaux de rapport cyclique 1/2 est une tension pour laquelle le rapport entre la durée de la partie positive du signal sur une période vaut 0,5. Ce signal est représenté en couleur sur la figure 5.11, pour une base de temps de  $100 \mu\text{s}/\text{division}$ . La fréquence de ce signal étant de 2 kHz, une période vaut

$$T = \frac{1}{f} = 0,5 \text{ ms} = 500 \mu\text{s} \quad (5.30)$$

de sorte que l'oscillogramme décrit deux périodes du signal  $e$ . Celui-ci, en créneaux, peut être vu comme la succession d'un signal positif entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t = \frac{T}{2}$  (c'est-à-dire entre les points A et B) et d'un signal négatif entre  $t = \frac{T}{2}$  et  $t = T$  (c'est-à-dire entre les points B et C). Le signal représentant la tension aux bornes du condensateur se détermine donc en utilisant la relation (5.29). Deux cas de figure se présentent :

— ou bien  $t < T/2$  et, dans ce cas,

$$u(t) = \frac{1}{\tau_C} \int_0^t e(t) dt = \frac{1}{\tau_C} \int_0^t 3 \cdot dt$$

et l'on définit, dans cette première partie,

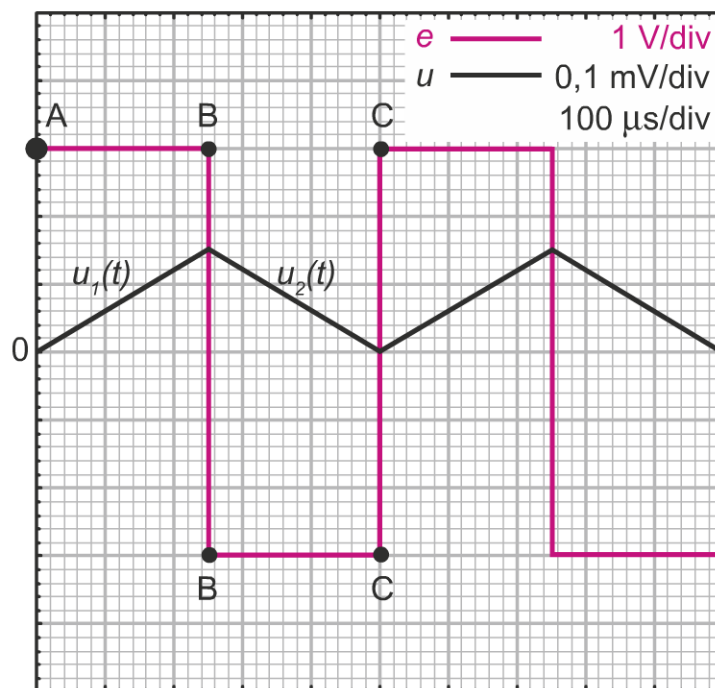
$$u_1(t) = u(t) \Big|_{t < T/2} = \frac{3t}{\tau_C}$$

— ou bien  $T/2 < t < T$  et, dans ce cas,

$$u(t) = \frac{1}{\tau_C} \left[ \int_0^{T/2} 3 dt + \int_{T/2}^t (-3) dt \right] = u_1(T/2) - \frac{3}{\tau_C} \int_{T/2}^t dt$$

et l'on définit, dans cette seconde partie,

$$u_2(t) = u(t) \Big|_{T/2 < t < T} = 3 \frac{T-t}{\tau_C}$$



**Figure 5.11** – Correction de l'exercice 5.4(2). La tension d'entrée  $e$  est représentée en magenta. La tension de sortie  $u$ , mesurée aux bornes de la capacité, est reportée en noir.

Le signal de sortie, représenté en noir sur la figure 5.11, est sur une période la succession de deux segments symétriques qui forment un signal périodique triangulaire. Celui-ci n'est pas alternatif, car il est de valeur moyenne non-nulle. L'amplitude étant la valeur maximale du signal, celle-ci est atteinte pour  $t = T/2$ , et vaut par conséquent

$$u(T/2) = u_1(T/2) = u_2(T/2) = \frac{3T}{2\tau_C}$$

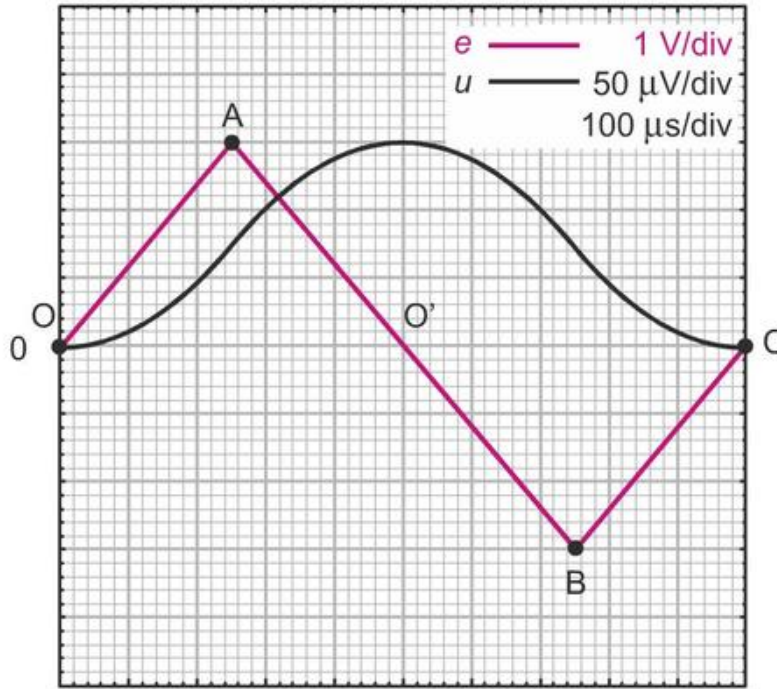
ce qui permet d'établir, en remplaçant  $T$  par sa valeur de  $500 \mu s$ , que l'amplitude du signal vaut

$$\frac{3 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 5} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 0,15 \text{ mV}$$

- La tension générée par la source de tension est représentée en magenta sur la figure 5.12. Il s'agit d'un signal triangulaire d'amplitude 3 V et de fréquence 1 kHz, donc de période 1 ms. Ce signal s'exprime au travers d'une fonction

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC

$e(t)$  définie par morceaux. Nous attirons l'attention sur le fait que, dans l'expression (5.31), le temps est multiplié par une constante de valeur 12000 Vs, qui correspond à la pente du signal  $u_1(t)$  et dont l'unité n'est pas précisée dans les expressions ci-après.



**Figure 5.12** – Correction de l'exercice 5.4(3). La tension d'entrée  $e$  apparaît en magenta. La tension de sortie  $u$ , mesurée aux bornes de la capacité, est reportée en noir.

La tension  $e$  s'écrit :

$$e(t) = \begin{cases} 12000 \cdot t & \text{pour } 0 < t < T/4, \text{ soit entre O et A} \\ 6 - 12000 \cdot t & \text{pour } T/4 < t < 3T/4, \text{ soit entre A et B} \\ -12 + 12000 \cdot t & \text{pour } 3T/4 < t < T, \text{ soit entre B et C} \end{cases} \quad (5.31)$$

et la tension  $u$  aux bornes du condensateur prend par conséquent différentes expressions selon la valeur du temps  $t_0$  durant lequel l'opération se déroule.

— Si  $0 < t_0 < T/4$ , l'application de la relation (5.29) de la page 231 donne

$$u_1(t_0) = \frac{1}{\tau_c} \int_0^{t_0} 12000 \cdot t dt = \frac{1}{\tau_c} 6000 \cdot t_0^2 = 1200 \cdot t_0^2$$

— Quand  $T/4 < t_0 < 3T/4$ , en posant  $T = 10^{-3}$  s et  $\tau_c = 5$  s,

$$\begin{aligned} u_2(t_0) &= u_1(T/4) + \frac{1}{\tau_c} \int_{T/4}^{t_0} (6 - 12000 \cdot t) dt \\ &= -1200t_0^2 + 1,2t_0 - 1,50 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

## Chapitre 5 – Régime transitoire

- avec  $u_1(T/4) = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ V}$ .  
 — Quand  $3T/4 < t < T$ , en posant  $T = 10^{-3} \text{ s}$  et  $\tau_C = 5 \text{ s}$ ,

$$\begin{aligned} u_3(t_0) &= u_2(3T/4) + \frac{1}{\tau_C} \int_{3T/4}^{t_0} (-12 + 12000 \cdot t_0) dt \\ &= 1,20 \cdot 10^{-3} + 1200t_0^2 - 2,40t_0 \end{aligned}$$

avec  $u_2(3T/4) = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ V}$ .  
 Le signal de sortie, reporté en noir sur la figure, prend son maximum en milieu de période. En effet, une intégrale étant une somme, le signal  $u$  ne peut décroître tant que le signal  $e$  n'est pas devenu négatif. Aussi, l'amplitude de  $u$  vaut

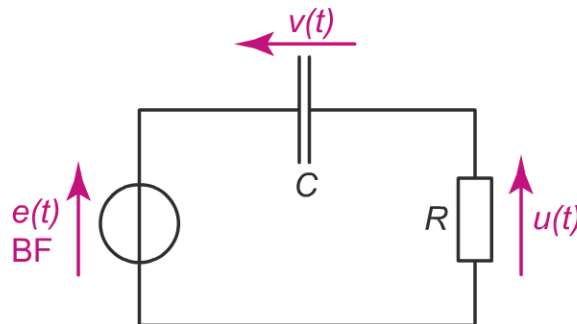
$$u(T/2) = u_2(T/2) = 1,50 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 150 \mu\text{V}$$

qui correspond à trois divisions sur la figure, chaque division correspondant à  $50 \mu\text{V}$ .

À chaque étape, c'est-à-dire d'abord entre O et A, puis entre A et B et, enfin, entre B et C, le signal décrit un arc de parabole. En fin de période, au point C, la valeur  $u(T)$  représente, à une constante près, la valeur moyenne de la grandeur alternative  $e$  : c'est pour cela qu'elle s'annule.

### b) Circuit RC dérivateur

Considérons à présent le circuit représenté sur la figure 5.13 pour lequel la source génère des tensions périodiques basse fréquence.



**Figure 5.13** – Circuit RC en montage dérivateur. La source génère des tensions périodiques basse fréquence (BF).

Pour ce circuit, nous établirons la tension aux bornes de la résistance  $u(t)$  en utilisant l'hypothèse simplificatrice que cette tension est très petite devant  $e(t)$ .

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC

Le générateur fonctionne à basse fréquence, le signal d'entrée présente donc une grande période. Aussi, le temps d'opération  $t_0$  du circuit est bien plus grand que la constante de temps  $\tau_C$ . Dans ces conditions, le condensateur a le temps de se charger en totalité, de sorte que la tension à ses bornes  $v(t)$  est égale à la tension fournie par le générateur  $e(t)$ . Il contrôle alors le courant. Ainsi, la tension  $u(t)$  aux bornes de la résistance (qui est, selon l'hypothèse simplificatrice, très petite devant  $e(t)$ ) s'écrit

$$u(t) = Ri(t) = RC \frac{dv(t)}{dt} \simeq RC \frac{de(t)}{dt} \quad (5.32)$$

La tension  $u(t)$  aux bornes de la résistance, c'est-à-dire en sortie du circuit, est donc liée à la tension d'entrée  $e(t)$  par l'équation

$$u(t) = RC \frac{de(t)}{dt} \quad (5.33)$$

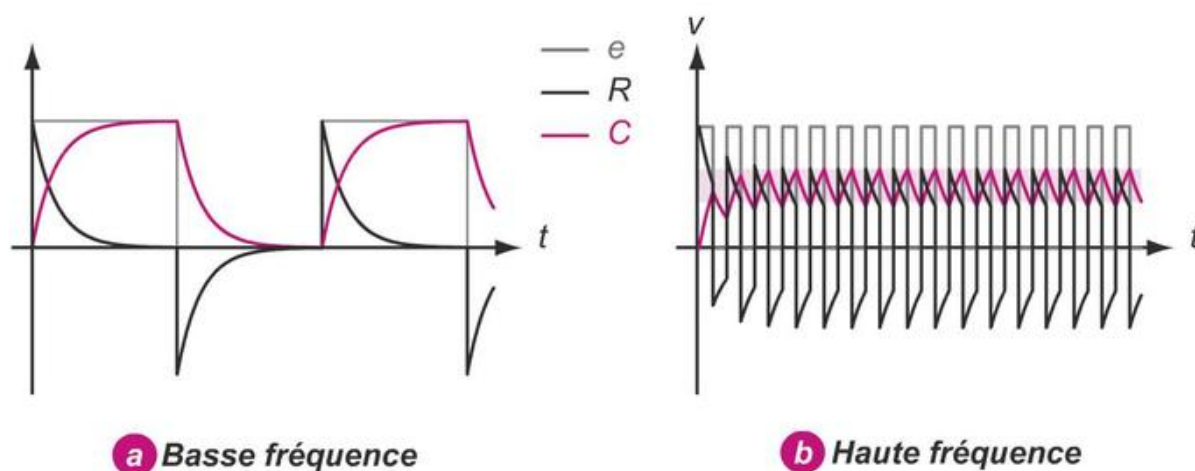
Dans le circuit dérivateur de la figure 5.13 fonctionnant en basse fréquence, la tension aux bornes de la résistance est proportionnelle à la dérivée de la tension d'entrée  $e(t)$ .

### 5.2.4 Notion de filtrage

Dans le cas d'un circuit RC série tel que ceux considérés précédemment, la tension  $e$  du générateur constitue la tension d'entrée du signal, la sortie pouvant être prise soit aux bornes de la résistance  $R$ , soit aux bornes de la capacité  $C$ . Nous reportons dans la figure 5.14 l'allure de l'ensemble de ces tensions. Le signal d'entrée est en créneaux, à basse fréquence (c'est-à-dire avec  $f < 1/\tau_C$ ) dans le volet (a) et à haute fréquence ( $f > 1/\tau_C$ ) dans le volet (b).

- Dans le volet (a), le signal d'entrée à basse fréquence laisse au condensateur le temps de se charger complètement. La tension aux bornes de celui-ci décrit donc un signal périodique, dont l'amplitude prend la valeur maximale qu'il lui est possible de prendre : celle de la tension d'entrée. La tension aux bornes de la résistance, en revanche, voit sa valeur s'annuler pendant une grande partie de la période, de sorte que sa valeur efficace est relativement faible. Si la période de  $e$  augmente, puisque  $\tau_C$  ne dépend que des valeurs de  $R$  et de  $C$ , la durée relative pendant laquelle le signal s'annule

augmente à son tour. La valeur efficace de la tension mesurée aux bornes de la résistance est par conséquent d'autant plus petite que la fréquence du signal est faible. Par ailleurs, une grande période donne à la courbe mesurée en  $R$  des allures de dérivée du signal d'entrée, décrivant un pic chaque fois que  $e$  change de signe. On retrouve ainsi la fonction de dérivateur vue au paragraphe b) de la page 236.



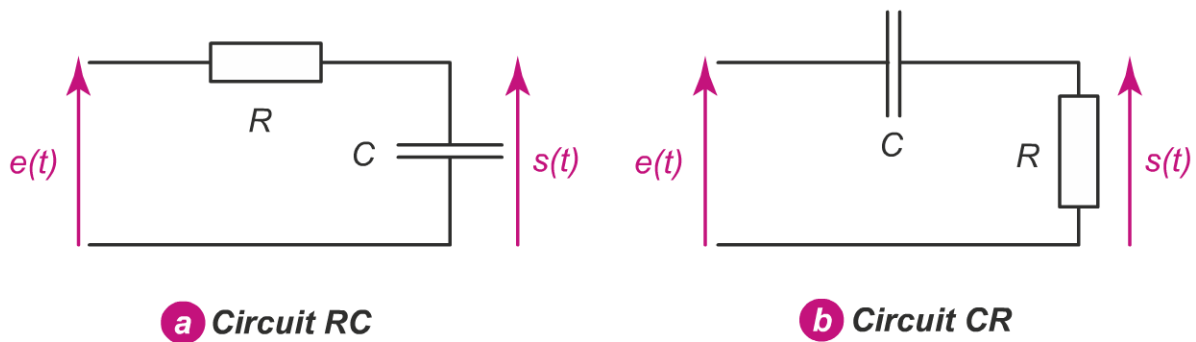
**Figure 5.14** – Tensions mesurées aux bornes du générateur ( $e$ ), de la résistance  $R$  et de la capacité  $C$  pour un signal (a) à basse fréquence et (b) à haute fréquence.

- Dans le volet (b), le signal d'entrée est à haute fréquence. Cette fois-ci, le temps de charge du condensateur est plus grand que la période : non seulement il n'atteint jamais la pleine charge, mais il n'arrive pas non plus à se décharger entièrement. La tension à ses bornes oscille alors entre deux valeurs, et la bande que nous avons représentée en magenta sur la figure constitue l'intervalle des tensions prises par la composante alternative de la tension mesurée aux bornes de la capacité. Plus la fréquence est élevée, plus cette composante alternative présente une amplitude, et par conséquent une valeur efficace, faible. Par ailleurs, une période courte donne à la courbe mesurée aux bornes de  $C$  une allure de fonction affine, primitive du signal d'entrée constant. Nous retrouvons ainsi la fonction de circuit intégrateur, vue au paragraphe a) de la page 230. Il en va tout autrement de la tension mesurée aux bornes de la résistance, puisque celle-ci ne s'annule jamais et prend des valeurs successivement positives et négatives. Sa composante alternative pré-

## 5.2 Le régime transitoire dans un circuit RC

sente donc une valeur efficace élevée, pouvant pour les plus hautes fréquences atteindre celle de la tension d'entrée.

Au regard de cette analyse, nous déclinons le montage étudié sous deux formes équivalentes reportées sur la figure 5.15, la différence étant constituée par le composant choisi pour mesurer la tension  $s$  de sortie.



**Figure 5.15** – (a) Circuit RC : la tension de sortie  $s$  est mesurée aux bornes de la capacité. (b) Circuit CR : la tension de sortie  $s$  est mesurée aux bornes de la résistance.

- Dans le circuit RC reporté sur le volet (a), la tension de sortie  $s$  est mesurée aux bornes du condensateur. Ce montage laisse passer les signaux basse fréquence présentés à l'entrée  $e$ . Les signaux haute fréquence sont quant à eux intégrés et fortement atténués, au point que leurs valeurs efficaces en sortie se révèlent négligeables.

Le circuit RC est un filtre passe-bas et agit comme un intégrateur avec les signaux haute fréquence, qu'il atténue fortement.

- Dans le circuit CR reporté sur le volet (b), la tension de sortie  $s$  est mesurée aux bornes de la résistance. Ce montage laisse passer les signaux haute fréquence présentés à l'entrée  $e$ . Les signaux basse fréquence sont dérivés et fortement atténués, au point que leurs valeurs efficaces en sortie se révèlent négligeables.

Le circuit CR est un filtre passe-haut et agit comme un dérivateur avec les signaux basse fréquence, qu'il atténue fortement.

Notons que le choix des valeurs de  $R$  et de  $C$  lors de la réalisation du montage conditionne  $\tau_C$ , et de fait la notion de haute et de basse fréquence.

### 5.3 LE RÉGIME TRANSITOIRE DANS UN CIRCUIT RL

Les effets inductifs, et en particulier l'auto-induction, sont décrits à la section 3.3.2 page 152. Se comportant comme un court-circuit en régime continu, l'inductance entraîne une avance de phase de  $90^\circ$  de la tension sur le courant en régime harmonique. Nous avons analysé ce comportement de manière phénoménologique, en établissant que le champ magnétique variable créé par le passage du courant s'oppose de manière indirecte à la circulation de celui-ci.

Nous analysons à présent le comportement de l'inductance en régime transitoire. Cela est réalisable en pratique à l'aide d'une bobine, un composant profitant de l'effet inductif pour assurer des fonctions de stockage ou de filtrage. Rappelons que la bobine ne constitue jamais une inductance seule : cette dernière est systématiquement associée à une résistance (que nous modélisons ici en série).

L'inductance et la capacité étant des composants que l'on peut qualifier d'antinomiques, nous pouvons retrouver les fonctions réalisées par le circuit RC en mesurant la tension de sortie tantôt sur l'inductance, tantôt sur la résistance. Les notions de circuit intégrateur, dérivateur et de filtrage ne seront donc pas abordées dans cette section.

#### 5.3.1 Établissement et rupture du courant dans la bobine

Un circuit faisant intervenir une inductance est un circuit RL. Nous présentons sur la figure 5.16 le montage électrique permettant d'analyser le comportement transitoire de la tension  $u$  aux bornes de  $L$  et du courant  $i$  circulant dans le circuit.

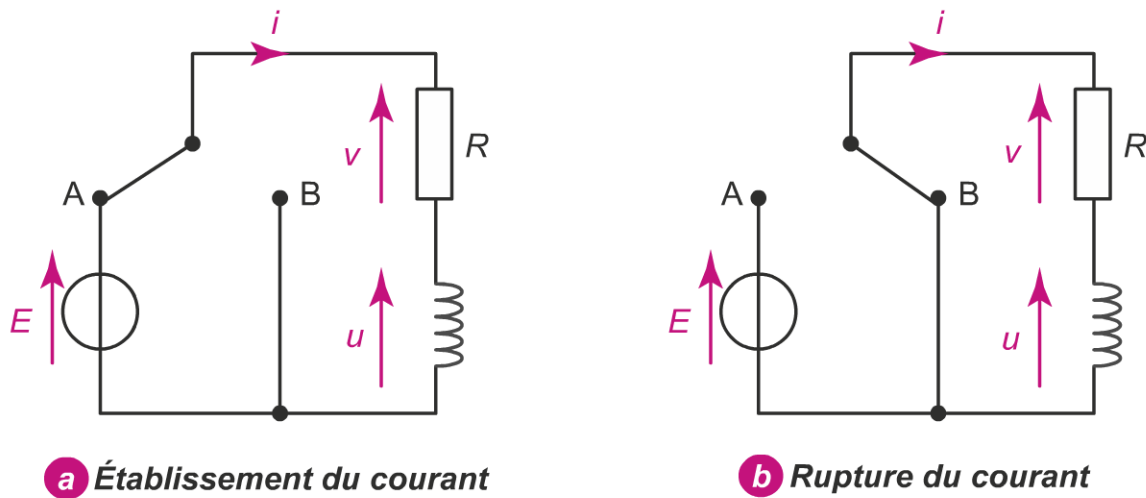
##### a) Établissement du courant

###### • Mise en équation et résolution

L'établissement du courant dans l'inductance se visualise dans la situation décrite par le panel (a) de la figure 5.16. À l'instant initial, alors que les valeurs de  $u$  et de  $v$  sont nulles, l'interrupteur est fermé sur le point A, de sorte qu'une différence de potentiels continue  $E$  est appliquée au dipôle RL. Aux bornes de l'inductance, le courant et la tension sont, comme nous l'avons dit au chapitre 3, liés par l'expression

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.34)$$

### 5.3 Le régime transitoire dans un circuit RL



**Figure 5.16** – Circuit RL permettant d'étudier (a) l'établissement et (b) la rupture du courant traversant la bobine.

Le courant maximal traversant le circuit ne peut être supérieur à la valeur  $E/R$  correspondant au cas où la bobine se comporte comme un court-circuit (nous l'avons vu en régime continu).

Une première analyse de l'équation (5.34) permet d'établir qu'à partir de l'instant où le courant  $i$  commence à circuler dans le circuit, une tension  $u$  apparaît aux bornes de l'inductance. D'autre part, à mesure que le courant  $i$  s'approche de sa valeur maximale, le taux de variation de celui-ci  $di/dt$  diminue, de sorte que la tension  $u$  tend vers zéro : la bobine se comporte alors comme un court-circuit.

Afin de comprendre ce qui se passe entre ces deux situations, nous établissons l'équation différentielle du courant  $i(t)$  traversant l'inductance et, étant donné qu'il y n'a qu'une maille, traversant le circuit. L'application de la loi des mailles et de la loi d'Ohm permet d'écrire qu'à l'instant  $t$

$$E = R \cdot i(t) + u(t) \quad (5.35)$$

que l'on ramène en injectant la relation (5.34), en remplaçant  $di/dt$  par  $i'$  et en divisant par  $L$  à

$$i' + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \quad (5.36)$$

Comme dans le cas du condensateur, on voit apparaître une grandeur homogène à un temps que l'on note  $\tau_L$  et que l'on appelle constante de temps du

## Chapitre 5 – Régime transitoire

circuit RL, avec

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad (5.37)$$

L'équation précédente se ramène à

$$i' + \frac{i}{\tau_L} = \frac{E}{L} \quad (5.38)$$

Avant même de résoudre cette équation, nous pouvons faire deux remarques :

- d'une part, le comportement du courant dans la bobine et dans le circuit RL est décrit avec une expression similaire à celle obtenue lorsque nous avons étudié la tension aux bornes du condensateur dans le circuit RC (voir l'équation (5.3) de la page 220) ;
- d'autre part, on peut établir un parallèle entre les équations (5.1) page 219 et (5.34) puisque dans la première le courant est la dérivée de la tension alors que c'est le contraire dans la seconde.

Ainsi, lorsque l'on passe du montage RC au montage RL, les rôles joués par le courant et par la tension sont permutés.

La solution générale de l'équation (5.38) s'exprime comme

$$i(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) + \frac{E}{R} \quad (5.39)$$

où  $\lambda$  est une constante pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle, mais que l'on détermine en indiquant dans les conditions aux limites le fait que le circuit a été fermé en  $t = 0$ , c'est-à-dire en posant  $i(0) = 0$  A. Ainsi, le courant circulant dans le circuit à l'instant  $t$  vaut

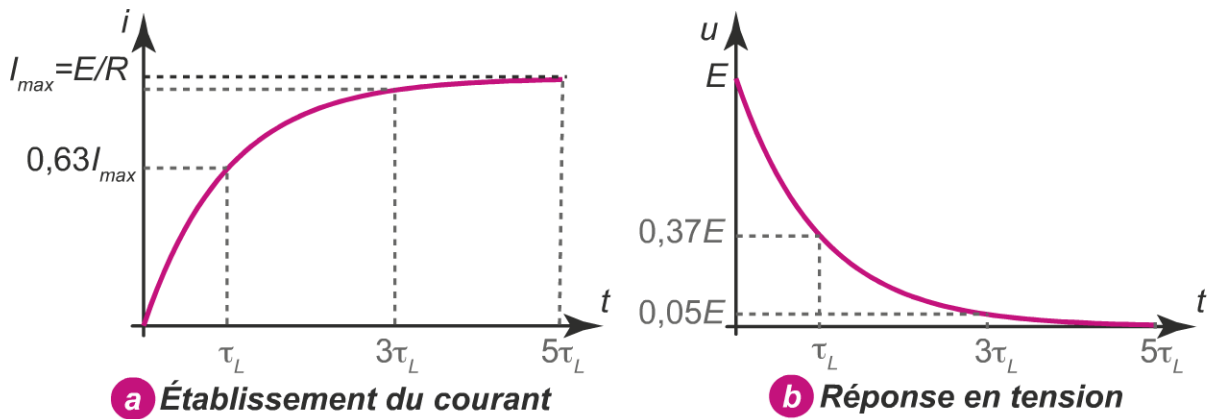
$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right)\right] \quad (5.40)$$

### • Dynamique du courant à l'établissement

Nous avons tracé la courbe correspondant à l'équation (5.40) dans le volet (a) de la figure 5.17. On retrouve la même dynamique que celle observée dans la charge du condensateur : au bout de  $t = \tau_L$ , le courant circulant a atteint 63 % de sa valeur maximale. Cette proportion est de 95 % au bout de  $3\tau_L$  et il faut attendre environ  $5\tau_L$  pour que le régime permanent soit atteint.

Un circuit RL sous l'effet d'un échelon de tension atteint son régime permanent au bout de  $5\tau_L$ , où  $\tau_L = L/R$  est la constante de temps.

### 5.3 Le régime transitoire dans un circuit RL



**Figure 5.17** – (a) Établissement du courant dans le circuit RL et (b) réponse de la tension aux bornes de l'inductance.

#### • Réponse en tension

La réponse en tension se déduit des équations (5.34) et (5.40). On écrit alors

$$v(t) = E \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (5.41)$$

Cette relation est reportée sur le volet (b) de la figure 5.17. La grandeur caractéristique  $\tau_L$  correspond à la durée pour laquelle la tension n'a plus que 63 % de sa valeur initiale. Cette proportion chute à 5 % à  $t = 3\tau_L$ . Au bout de  $5\tau_L$  le régime permanent est atteint : la tension aux bornes de  $L$  est nulle alors que le courant est maximal, de sorte que l'inductance se comporte comme un court-circuit.

En régime continu permanent, l'inductance se comporte comme un court-circuit.

#### b) Rupture du courant

Revenons à la figure 5.16 page 241 et considérons à présent le volet (b). L'interrupteur étant resté connecté au point A pendant un temps bien plus grand que  $\tau_L$ , on le bascule subitement pour le connecter au point B. Ce faisant, on court-circuite la source de tension et seule l'inductance est maintenant en mesure d'imposer un courant au circuit.

## Chapitre 5 – Régime transitoire

### • Mise en équation et résolution

La loi des mailles reste la même que celle qui a permis d'arriver à la relation (5.38), si ce n'est que cette fois-ci  $E = 0$ . On obtient alors

$$i'(t) - \frac{1}{\tau_L} i(t) = 0 \quad (5.42)$$

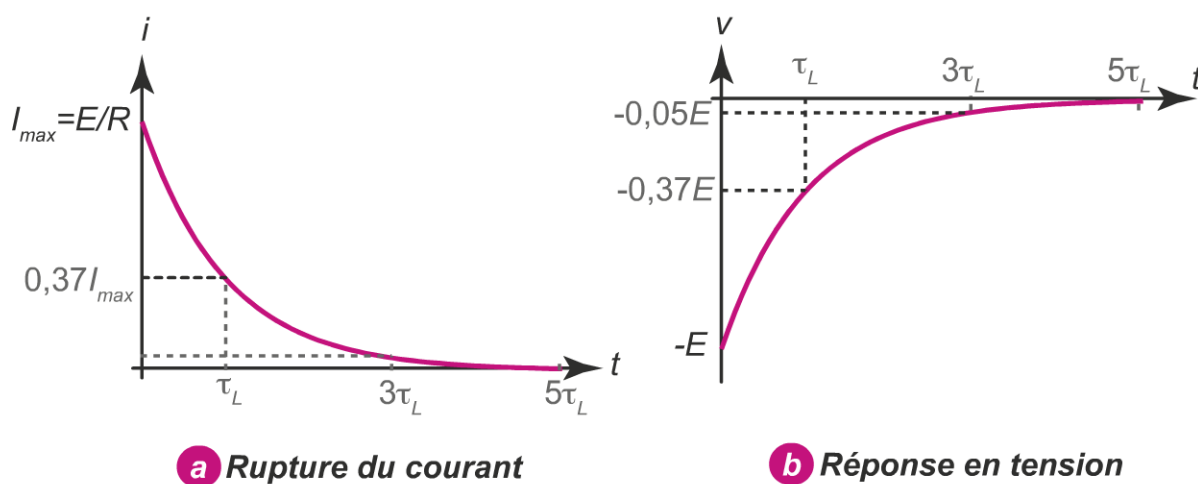
qui admet comme solution générale

$$i(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (5.43)$$

La condition initiale indique cette fois-ci que le courant débité par le générateur juste au moment de la coupure traverse une inductance jouant le rôle d'un court-circuit et vaut donc  $i(0) = E/R$ . Ainsi, le courant traversant le circuit à l'instant  $t$  succédant à l'extinction de la source de tension s'écrit

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (5.44)$$

relation que nous reportons sur le volet (a) de la figure 5.18.



**Figure 5.18** – (a) Rupture du courant du circuit RL et (b) réponse en tension de l'inductance

### • Dynamique du courant à la rupture

Le courant lors de la rupture décroît de façon exponentielle. On retrouve alors les durées caractéristiques de la décharge des composants réactifs : le courant

## 5.3 Le régime transitoire dans un circuit RL

atteint 37 % de sa valeur initiale au bout de  $\tau_L$ , 5 % au bout de  $3 \tau_L$ , et la rupture de courant totale est atteinte au bout de  $5\tau_L$ .

Le courant circulant dans un circuit RL est totalement rompu au bout de  $5\tau_L$ .

### • Réponse de la tension à la rupture

Nous déterminons enfin l'équation décrivant le comportement de la tension en dérivant l'expression (5.44) du courant :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -E \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (5.45)$$

et nous la reportons sur le volet (b) de la figure 5.18. Outre les caractéristiques dynamiques déjà décrites, on remarque que la tension est négative, ce qui indique que l'inductance, dont les grandeurs sont repérées en convention récepteur, se comporte lors de la rupture du courant comme un générateur.

Lors de la rupture du courant, l'inductance restitue l'énergie qu'elle a accumulée lors de l'établissement de ce même courant. Elle se comporte comme un réservoir de courant.

Cette expérience d'établissement et de rupture du courant permet d'appréhender la notion de stockage de l'énergie par voie magnétique déjà abordée à la page 154.

### 5.3.2 Énergie stockée par l'inductance

L'analyse du comportement transitoire du circuit RL faite dans la section précédente permet de montrer que l'effet d'auto-induction peut soit s'opposer à l'établissement du courant dans le circuit, soit au contraire contribuer à son maintien. Le régime transitoire étant marqué par une variation du courant, le champ magnétique induit est variable. Cela lui donne la faculté d'induire la bobine dans le but de s'opposer aux effets qui lui donnent naissance : pour cette raison, le courant ne s'établit pas instantanément. Le courant augmentant alors que la tension aux bornes de l'inductance chute, le produit des deux n'est pas nul, de sorte que lors de l'établissement du courant, la bobine consomme de l'énergie électrique.

## Chapitre 5 – Régime transitoire

Lorsque le régime transitoire est terminé, le courant prend une valeur constante et, par conséquent, le champ induit devient lui aussi constant. La loi de Faraday ne permet alors plus l'auto-induction de la bobine, celle-ci nécessitant que le flux magnétique traversant le composant soit variable, ce qui ne peut se faire que si le champ varie ou s'il y a un mouvement. Pour cette raison, en régime permanent, l'inductance ne s'oppose plus au passage du courant et se comporte comme un court-circuit. Dans ces conditions, elle ne consomme plus d'énergie électrique.

Lorsque le générateur est éteint (ou bien court-circuité comme dans le montage de la figure 5.16(b)), le courant traversant le circuit tend à chuter. Le flux magnétique induit par la bobine est donc variable, ce qui permet au phénomène d'auto-induction de réapparaître. L'inductance s'oppose alors à la rupture du courant, en vertu de la loi de Lenz. Elle joue dans ces conditions le rôle d'un générateur.

Aucune des deux grandeurs courant et tension mesurées aux bornes de la bobine ne s'annulent jusqu'à la décharge totale, de sorte que l'inductance produit de l'énergie électrique.

Lors de la rupture du courant, l'inductance restitue l'énergie électrique qu'elle a absorbée lors de son établissement.

Aussi, à la différence d'une résistance qui dissipe systématiquement l'énergie qu'elle consomme sous forme thermique au travers de l'effet Joule, l'inductance stocke et restitue de l'énergie.

Afin d'évaluer l'énergie stockée par la bobine à l'issue de l'établissement du courant, nous considérons comme dans le cas de la capacité la puissance instantanée si ce n'est que, cette fois-ci, c'est l'expression (5.34) qui lie le courant et la tension. Aussi, la puissance consommée par l'inductance à l'instant  $t$  s'exprime en convention récepteur comme

$$\frac{d\epsilon}{dt} = p(t) = u(t) \cdot i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (5.46)$$

où  $\epsilon$  est l'énergie échangée par la bobine et le circuit. On établit alors la relation différentielle entre l'énergie et le courant

$$d\epsilon = L \cdot i \cdot di \quad (5.47)$$

### 5.3 Le régime transitoire dans un circuit RL

que l'on intègre en faisant varier ce dernier entre 0 et la valeur  $i(t_0) = I$  qu'il atteint au bout d'une durée de fonctionnement  $t_0$  :

$$\Delta\epsilon(t_0) = \int_0^I L \cdot i \cdot di = L \left[ \frac{i^2}{2} \right]_0^I \quad (5.48)$$

Ainsi, l'énergie stockée par la bobine lors de l'établissement du courant entre 0 et  $I$  vaut

$$\Delta\epsilon = \frac{LI^2}{2} \quad (5.49)$$

L'énergie stockée par une inductance dépend entièrement du courant qui la traverse.

# Index

- A**  
Amplitude, 128  
Argument (nombres complexes), 164  
Auto-induction, 152, 240
- B**  
Bobine  
- établissement du courant, 240  
- rupture du courant, 243  
Boucherot  
- théorème (harmonique), 146  
- théorème (régime continu), 47  
Bouteille de Leyde, 148  
Branche, 52
- C**  
Capacité, 148  
- charge, 219  
- décharge, 222, 224  
- impédance d'une, 166  
- puissances (harmonique), 175  
- symbole électrique, 152  
Caractéristique courant-tension, 87, 89, 90, 101, 103  
Circuit à deux nœuds, 73, 77  
Circuit dérivateur, 236  
Circuit intégrateur, 230  
Circuit RC, 218, 230, 236  
Circuit RL, 240  
Circuit RLC, 197  
Composante continue, 125  
Composants réactifs, 148  
Condensateur  
- charge, 219  
- décharge, 222, 224  
Conductance, 158  
Conducteur, 1  
Connexion, 15  
Convention, 24  
Convention générateur, 24  
Convention récepteur, 22  
Conversion énergétique, 2  
Courant, 4, 5, 24, 26, 28  
- de Norton, 78, 102–105, 108, 115, 116  
- de Norton (harmonique), 206  
- de déplacement, 219  
- sens conventionnel, 5, 6, 24
- D**  
Décomposition d'un signal, 131  
Déphasage, 169, 179, 182, 190  
- capacité, 152  
- inductance, 154  
Diagramme de Fresnel, 177, 182, 185, 188, 193  
Différence de potentiels (d.d.p.), 3  
Dipôle  
- actif, 85  
- linéaire, 87  
- non réversible, 86  
- passif, 86

- réversible, 86
- Dipôle linéaire, 83
- Dipôle linéaire (harmonique), 204

## E

- Effet capacitif, 149
- Énergie dissipée, 228
- Énergie stockée
  - capacité, 227, 228
  - inductance, 245
- Équipotentielle, 15

## F

- Facteur de puissance, 142, 145, 146
- Filtrage (notion), 237
- Flèche
  - de courant, 11, 12
  - de tension, 10, 12

- Fréquence
  - influence, 169

- Fresnel
  - diagramme, 177, 182, 185, 188, 193
  - méthode, 180

## I

- Impédance, 165
  - association, 171
  - d'un dipôle, 170, 172, 182
  - d'une bobine, 188
  - d'une capacité, 166
  - d'une inductance, 166
  - d'une résistance, 165
  - de Norton, 206, 207
  - de Thévenin, 207
  - de Thévenin (harmonique), 204
  - propriétés, 168
  - tableau, 171
- Impédance apparente, 169
- Inductance, 152
  - établissement du courant, 240

- impédance d'une, 166
- puissances (harmonique), 175
- rupture du courant, 243
- symbole électrique, 155

Isolant, 1

## J

- Joule
  - effet, 13
  - loi de, 47

## K

- Kirchhoff
  - lois de, 54
  - lois de (harmonique), 175
  - méthode, 54, 55, 57

## L

- Ligne électrique (modèle), 158
- Loi
  - d'Ohm, 8, 22, 41
  - de Kirchhoff, 54
  - de Kirchhoff (harmonique), 175
  - des mailles, 20
  - des mailles (harmonique), 175
  - des nœuds, 21
  - des nœuds (harmonique), 175
- Loi d'Ohm généralisée (harmonique), 165

## M

- Méthode matricielle, 57, 72
- Maille, 52
  - loi des, 20
- Mailles
  - loi des (harmonique), 175
- Masse, 16
  - d'un oscilloscope, 216
- Millman (théorème), 69, 71, 73, 77–81, 83
- Modèle équivalent, 18

## INDEX

Module (nombres complexes), 164

Montage parallèle (harmonique), 172

Montage série (harmonique), 172

### N

Nœud, 52

Nœuds

- loi des, 21

- loi des (harmonique), 175

Norton

- courant de, 78, 102–105, 108, 115, 116

- courant de (harmonique), 206

- impédance de, 206, 207

- modèle, 101, 105, 114

- modèle (harmonique), 206

- résistance de, 102, 104–106, 110, 112

- résistance de (harmonique), 206

- théorème, 103, 106, 109, 110

- théorème (harmonique), 206

Norton-Thévenin

- transformation, 113

- transformation (harmonique), 207

### O

Ohm

- loi d', 8, 22, 41

- loi généralisée (harmonique), 165

Oscillogramme, 155, 170

Oscilloscope, 216

- connexion, 218

### P

Phase, 129, 164, 196, 207

- avance de, 179

- origine, 178

- quadrature, 233

- retard de, 179

Phaseur, 163, 164, 167, 182

Pont diviseur

- de courant, 39, 41

- de courant (harmonique), 192, 196

- de tension, 37, 39, 41

- de tension (harmonique), 192

Potentiel, 5

Problème d'électricité, 53

Puissance

- active, 141

- apparente, 143, 145, 146

- dissipée, 127, 133, 229

- fluctuante, 142

- instantanée, 139

- réactive, 143, 145

- régime continu, 47

- triangle, 145

Puissance électrique

- consommée, 44

- générée, 46

- régime alternatif, 138

- régime continu, 43

Puissance complexe, 174

Pulsation, 129

### R

Réactance, 204, 205, 213

Régime

- alternatif, 126

- alternatif sinusoïdal, 128

- harmonique, 128, 139

- périodique, 122

- permanent, 221, 222, 226, 227, 242, 243, 246

- transitoire, 215, 216, 218, 221, 228, 229, 240, 245

Réseau électrique, 51

Résistance

- de Norton, 102, 104–106, 110, 112

- de Norton (harmonique), 206

- de Thévenin, 92, 94, 96, 100, 101, 105
  - de Thévenin (harmonique), 204, 213
  - impédance d'une, 165
  - notion, 7
  - puissances (harmonique), 174
- Résistance équivalente, 30, 33, 34
- parallèle, 31
  - série, 30
- Résonance, 199
- Rapport cyclique, 136, 231
- Réservoir
- de courant, 245
  - de tension, 227

## S

Schéma équivalent (harmonique), 182

Signal

- alternatif, 131, 134
- en créneaux, 135
- harmonique, 134
- périodique, 131, 133, 134
- rectangulaire, 135
- sinusoïdal, 131, 135

Source, 87

- de courant, 15, 63, 75, 76
- de tension, 13, 62, 74
- extinction, 62, 63

Stockage électrostatique, 151, 224

Stockage magnétique, 154, 245

Superposition

- principe, 60, 61, 63, 66, 68
- principe (harmonique), 199, 201

Symbole électrique, 13

- capacité, 152
- inductance, 155
- résistance, 13
- source de courant, 15
- source de tension, 13

## T

Temps caractéristique

- circuit RC, 220–222, 224, 229, 232
- circuit RL, 241–244

Tension, 3, 24, 26, 28

- de Thévenin, 92, 94, 95, 97, 99, 101
- de Thévenin (harmonique), 209, 212

Théorème

- de Boucherot (harmonique), 146
- de Millman, 69, 73, 77–81, 83
- de Norton, 103, 106, 109, 110
- de Thévenin, 90, 93, 96, 99

Thévenin

- impédance de, 204, 207
- modèle, 90, 92, 94, 114
- modèle (harmonique), 204, 207, 212
- résistance de, 92, 94, 96, 100, 101, 105
- résistance de (harmonique), 204, 213
- tension de, 92, 94, 95, 97, 99, 101
- tension de (harmonique), 209, 212
- théorème, 90, 93, 96, 99
- théorème (harmonique), 206

Thévenin-Norton

- transformation, 113
- transformation (harmonique), 207

Transformations successives, 115, 118

## V

Valeur efficace, 126, 130, 164, 190, 196, 207

- RMS, 127
- TRMS, 133
- complexe, 163

Christophe Palermo  
Jérémié Torres

## Précis d'électricité

Cet ouvrage, conforme au programme des filières GEI, Mesures Physiques, GIM, Chimie et Génie Chimique, expose les fondements de l'électricité. Le cours, clair et pédagogique, est illustré de **nombreux exemples** et schémas, et des **encadrés** signalent les notions importantes à retenir. Dans chaque chapitre, des **exercices** permettent de se préparer aux épreuves : les **corrigés** détaillés mettent l'accent sur la méthodologie.

L'ouvrage rappelle les bases de l'électricité puis aborde les réseaux linéaires en régime continu. Les régimes variables et périodiques sont ensuite présentés et les différentes grandeurs d'intérêt sont introduites. Le régime alternatif sinusoïdal est décrit en même temps que les différents outils permettant son étude dans les réseaux linéaires. Enfin, l'étude du régime transitoire permet une meilleure compréhension du comportement des composants réactifs.

Chaque chapitre contient :

- Un **cours synthétique** richement illustré,
- Des **exercices d'application** intégrés aux cours,
- Des **corrigés détaillés**,
- Des **conseils pratiques** et des encadrés.

### Christophe Palermo

Maître de conférences au département Mesures physiques de l'IUT de Montpellier-Sète et à l'Institut d'Électronique et des systèmes (Université de Montpellier).

### Jérémié Torres

Maître de conférences au département Mesures physiques de l'IUT de Montpellier-Sète et à l'Institut d'Électronique et des systèmes (Université de Montpellier).



9 782100 724703

1388962  
ISBN 978-2-10-072470-3

