Centre des Métiers de l'Electricité

ELECTRONIQUE ANALOGIQUE :
LES FILTRES

Objectifs : A l'issue de la leçon, l'étudiant doit être capable de :
1-Définir les filtres analogiques
2- Donner le rôle d'un filtre dans une chaine de traitement électronique
3-Classer les filtres en fonction de la nature des composants utilisés
4-Classer les filtres en fonction du domaine de fréquences où les signaux sont transmis
5-Déterminer la fonction de transfert d'un filtre
6-Déterminer la nature d'un filtre
7-Déterminer les fréquences de coupure à -3dB (bande passante)
8- Déterminer l'ordre d'un filtre

Pré requis :

- Impédances complexes
- Fonction de transfert
- Limites
- Résolution d'équations
- Forme canonique des fonctions de transfert

Mots clés

Bande passante
Fréquence de coupure à -3dB
Filtre passe-bas, Filtre passe-haut, Filtre passe-bande, Filtre coupe-bande ou réjecteur de bande
Fonction de transfert

BOA Yandaki Félix **UE Physique Appliquée CME** **Mars 2020**

1- Définitions

1-1 Décomposition spectrale d'un signal

On est en droit de s'interroger sur le fait que l'analyse des fonctions de transfert se fait en régime sinusoïdal alors que la plupart des signaux utilisés, que ce soit en basse ou en haute fréquence, ne sont que très rarement purement sinusoïdaux.
On doit à Joseph Fourier (1768 - 1830) mathématicien et physicien français, les travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier :
« Tout signal est constitué par un mélange de signaux sinusoïdaux dont les fréquences respectives sont multiples de la fréquence fondamentale, la fréquence la plus basse. Ces fréquences multiples de la fréquence fondamentale sont appelés harmoniques ».

Joseph Fourier, 1768-1830

Tout signal périodique $x_p(t)$ de période $T_o = \dfrac{1}{f_o}$

peut s'écrire $$x_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi \quad nf_o t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi \quad nf_o t)$$

Tout signal périodique de fréquence f_o est une somme d'harmoniques

$$a_o = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} x_p(t)\,dt$$

Valeur moyenne sur une période

$$a_n = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o} x_p(t)\cos(2\pi n f_o t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o} x_p(t)\sin(2\pi n f_o t)\,dt$$

Le signal est projeté sur chaque signal harmonique

et on en calcul la moyenne sur une période

Ecriture équivalente

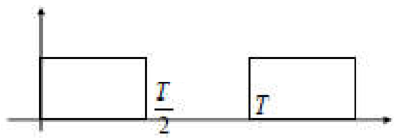
$$x_p(t) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}\cos(2\pi \; n f_o t + \varphi_n)$$

$$\varphi_n = Arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

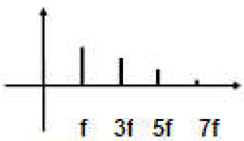
Grace à Fourier on trouve la décomposition harmonique du signal périodique

On fait l'analyse harmonique du signal

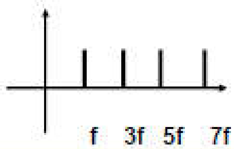
Exemple, cas d'un signal carré :



Spectre d'amplitude



Spectre de phase

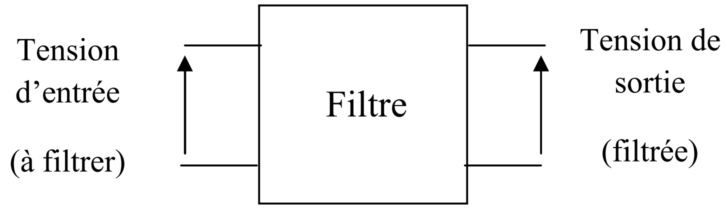


$$a_o = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad \varphi_n = Arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \quad si \quad n \quad impair \qquad b_n = 0 \quad Si \;\; n \; pair$$

1-2 Définition d'un filtre

Un filtre est un circuit dont le comportement dépend de la fréquence du signal disponible à l'entrée.



selon la valeur de la fréquence le filtre va :
- amplifier,
- atténuer,
- ou déphaser différemment les composantes spectrales du signal d'entrée.

L'élément essentiel pour l'étude d'un filtre est sa fonction de transfert c-à-dire le rapport entre la tension de sortie et la tension d'entrée en notation complexe.

On rappelle qu'une fonction de transfert peut être établie en fonction de la pulsation ω, ou de la fréquence f, ou de la variable de Laplace p, avec $p = j\omega$, ou encore de la variable réduite x avec $x = \omega/\omega c = f/fc$, où ωc et fc représentent respectivement la pulsation et la fréquence de coupure.

2- Typologie des filtres

Il s'agit de classer les filtres en fonction de deux critères de base d'abord la nature des composants utilisés ensuite en fonction du domaine de fréquences transmis.

2-1 Classification en fonction de la nature des composants

On distingue les filtres passifs et les filtres actifs.

Pour les filtres passifs le schéma du filtre est uniquement réalisé à partir de composants passifs tels que les résistances les condensateurs et les bobines.

Pour les filtres actifs, en plus des composants passifs le schéma comporte au moins un composant actif (alimentation continue externe) notamment un amplificateur opérationnel.

2-2 Classification en fonction du domaine de fréquences transmis

Suivant les intervalles ou les valeurs des fréquences transmises ou atténuées, on distinguera :

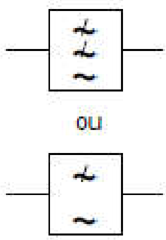
• le filtre **passe-bas :** les signaux de fréquence basse sont transmis avec le gain maximum alors que les signaux de haute fréquence sont atténués.

• le filtre **passe-haut**: les signaux de basse fréquence sont atténués alors que les signaux de haute fréquence sont transmis avec le gain maximum.

• le filtre **passe-bande :** les signaux de basse fréquence et ceux de haute fréquence sont atténués alors qu'un domaine central de fréquence est transmis avec le gain maximum.

• le filtre **coupe bande** ou **réjecteur de bande :** les signaux de basse fréquence et ceux de haute fréquence sont transmis avec le gain maximum alors qu'un domaine central de fréquence est atténué.

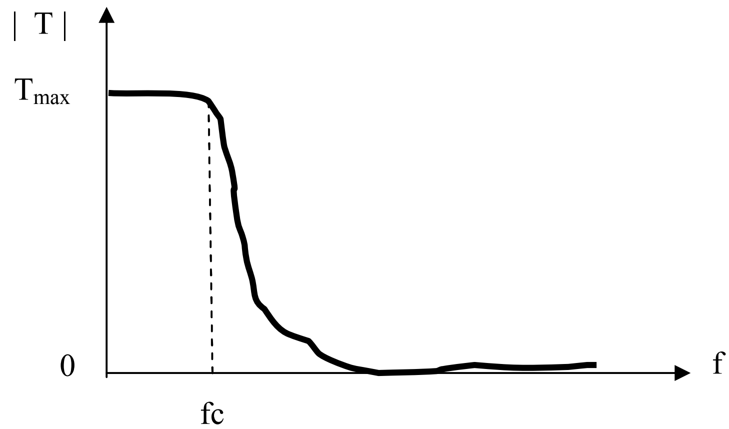
2-2-1 Filtre passe-bas



Le symbole associé au filtre passe-bas, on barre les intervalles de fréquence non transmis par le filtre.

Fonction de transfert : $T(j\omega) = \dfrac{VS(j\omega)}{VE(j\omega)}$

L'évolution du module de la fonction transfert en fonction de la fréquence ou de la pulsation se présente comme suit :

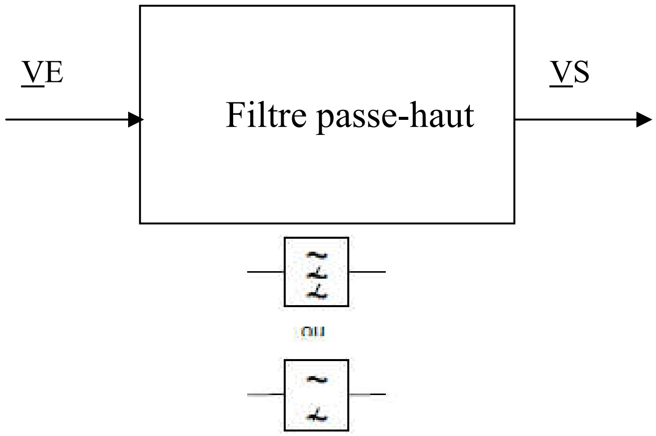


$\lim_{f \to 0} | T | = T_{max}$

$\lim_{f \to +\infty} | T | = 0$

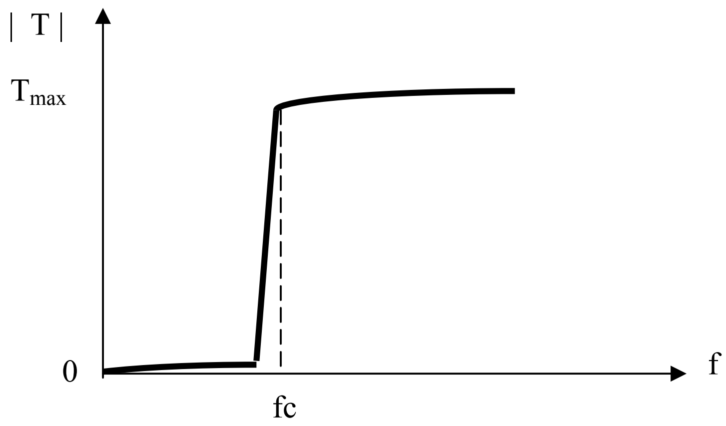
Bande passante : Bp = [0 , fc] (fc : fréquence de coupure à – 3dB)

2-2-2 Filtre passe-haut



Fonction de transfert : $T(j\omega) = \dfrac{VS(j\omega)}{VE(j\omega)}$

L'évolution du module de la fonction transfert en fonction de la fréquence ou de la pulsation se présente comme suit :

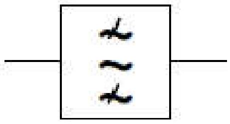


$\lim\limits_{f \to 0} |T| = 0$

$\lim\limits_{f \to +\infty} |T| = T_{max}$

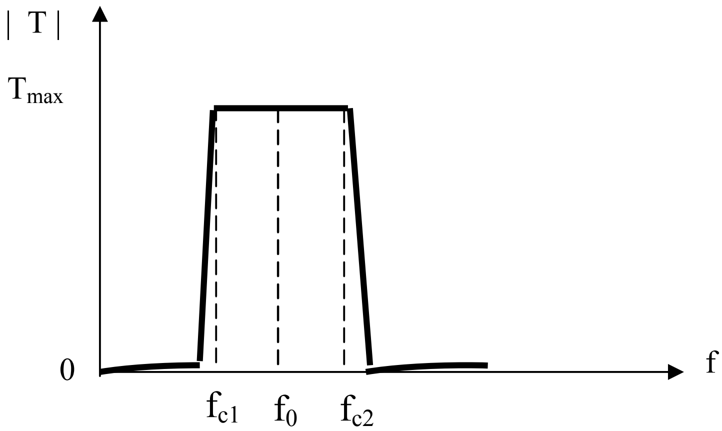
Bande passante : Bp = [fc, +∞[(fc : fréquence de coupure à – 3dB)

2-2-3 Filtre passe-bande



Fonction de transfert : $T(j\omega) = \dfrac{VS(j\omega)}{VE(j\omega)}$

L'évolution du module de la fonction transfert en fonction de la fréquence ou de la pulsation se présente comme suit :



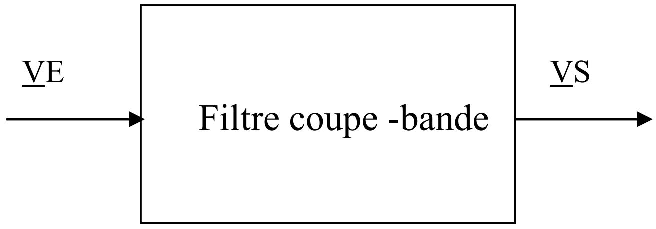
$\lim\limits_{f \to 0} |\underline{T}| = 0$

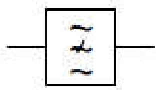
$\lim\limits_{f \to +\infty} |\underline{T}| = 0$

Pour $f = f_0$ on a $|\underline{T}| = T_{max}$

Bande passante : $Bp = [f_{c1}, f_{c2}]$ (f_{c1} et f_{c2} : fréquence de coupure à – 3dB)

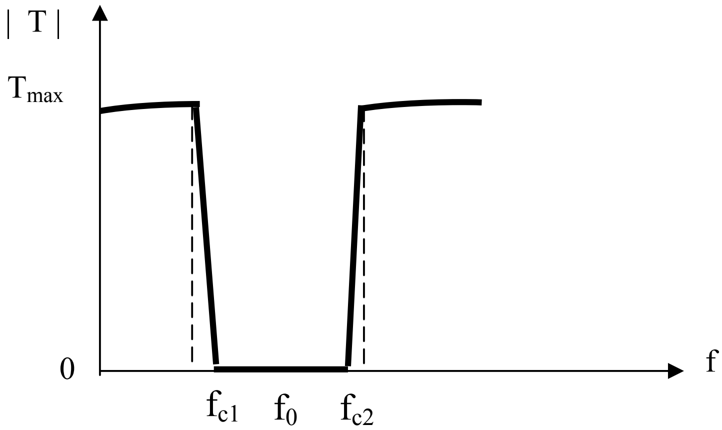
2-2-4 Filtre coupe-bande





Fonction de transfert : $T(j\omega) = \frac{VS(j\omega)}{VE(j\omega)}$

L'évolution du module de la fonction transfert en fonction de la fréquence ou de la pulsation se présente comme suit :



$\lim_{f \to 0} |\underline{T}| = T_{max}$

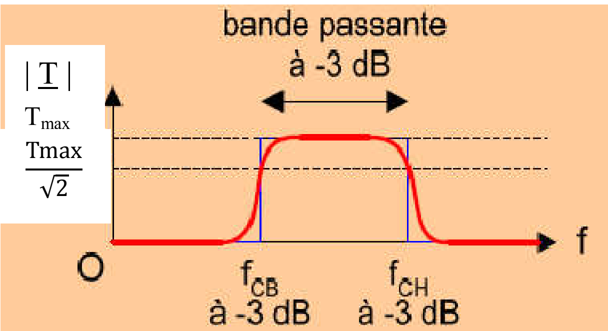
$\lim_{f \to +\infty} |\underline{T}| = T_{max}$

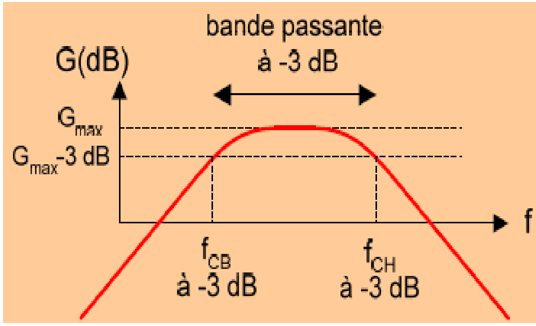
Pour f= f_0 on a $|\underline{T}| = 0$

Bande passante : Bp = $[0,f_{c1}] \cup [f_{c2}, +\infty[$ (f_{c1} et f_{c2} : fréquence de coupure à – 3dB)

3- Fréquence de coupure à -3 dB et bande passante

Les fréquences de coupure « à – 3 dB » sont les fréquences qui correspondent à la valeur maximale de la fonction de transfert divisée par $\sqrt{2}$.





Pour déterminer les fréquences de coupure à -3dB, il faut résoudre l'équation : $|\underline{T}| = \frac{Tmax}{\sqrt{2}}$

4- Ordre d'un filtre

L'ordre d'un filtre est déterminé à partir de la pente atténuatrice de la courbe de gain.
Exemple :
- pour une pente de ± 6 dB/octave ou ± 20 dB/décade on a un filtre d'ordre 1.
- pour une pente de ± 12 dB/octave ou ± 40 dB/décade on a un filtre d'ordre 2.

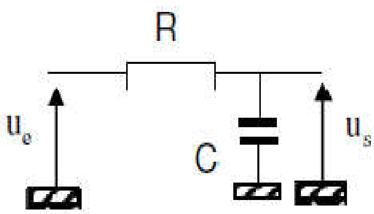
En règle générale, l'ordre est un entier naturel qui traduit la manière dont les fréquences indésirables sont éliminées ; il s'agit du degré le plus élevé du dénominateur de la fonction de transfert.

5- Exemples

Exemple 1

Soit un réseau RC donné pour lequel on détermine l'expression de la tension de sortie u_s par rapport à la tension d'entrée u_e en appliquant le théorème du pont diviseur de tension :

$$u_s = \frac{1/(jC\omega)}{R+1/(jC\omega)}u_e$$



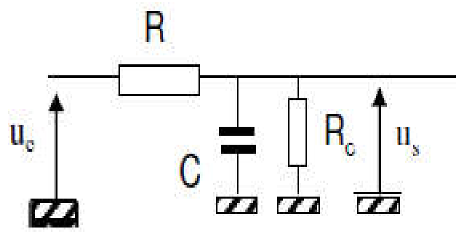
On en déduit la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1+jRC\omega}$$ soit encore

$$H(x) = \frac{1}{1+jx}$$ avec $x=\omega/\omega_c$ et ω_c=RC.

On retrouve l'expression de la forme canonique du filtre passe-bas d'ordre 1.

Exemple 2



En connectant une charge R_c en sortie du filtre on modifie les caractéristiques du réseau électrique :

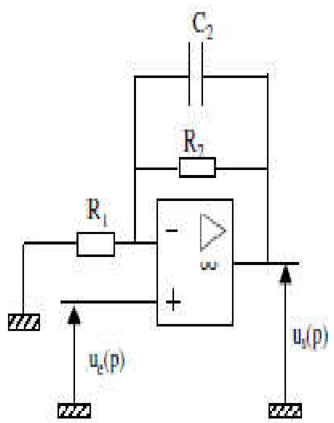
$$u_s = \frac{R_c/(1+jR_cC\omega)}{R+R_c/(1+jR_cC\omega)}u_e = \frac{R_c}{R+R_c+jRR_cC\omega}u_e$$

D'où l'expression de la nouvelle fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{R_c}{R+R_c}\left(\frac{1}{1+j(R//R_c)C\omega}\right)$$

où apparaissent une nouvelle pulsation de coupure $\omega_c=C(R//R_c)$ et un gain statique $H_0=R_c/(R+R_c)$.

Exemple 3



On considère le montage suivant où l'A.O est supposé idéal. Les tensions d'alimentation sont ±15Volts.

En considérant la capacité déchargée, identifier les paramètres $T_{2,0}=T_2(\omega=0)$, τ_1, τ_2 dans l'expression de la fonction de transfert

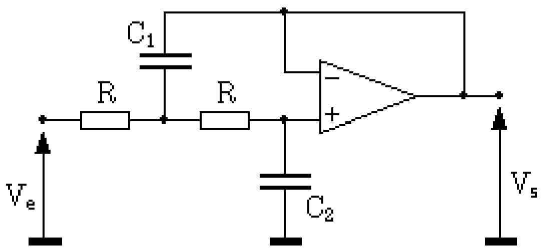
$$\underline{T}_2(\omega) = \frac{u_s(\omega)}{u_e(\omega)} = T_0\frac{1+j\omega\tau_1}{1+j\omega\tau_2}.$$

On définit $R_2=100k\Omega$, $C_2=10nF$, déterminer R_1 pour garantir un gain statique $T_{2,0}=40dB$. En déduite la valeur de deux fréquence de coupure.

Esquisser le tracé asymptotique de $T_2(f)$ dans le plan de Bode. Donner un nom au montage.

Exemple 4

Passe bas 2e ordre.



Filtre passe bas du deuxième ordre.

On peut remarquer qu'à la base, la structure ressemble fort à deux filtres passifs R-C passe bas concaténés. La différence vient du fait que le premier condensateur n'est pas relié à la masse, mais à la sortie du filtre qui est isolée de la deuxième cellule passe-bas par un montage suiveur.

La réponse en fréquence de ce montage est du type :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2RC_2 j\omega - R^2 C_1 C_2 \omega^2}$$

La fonction de transfert "générique" d'un filtre passe bas d'ordre 2 est du type :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2zj\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

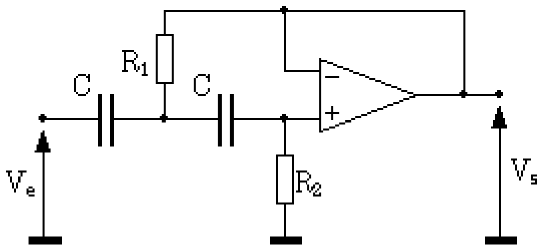
On identifie les deux formules pour les valeurs suivantes de ωo et z :

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$

$$z = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

Exemple 5

Passe haut 2e ordre.



Filtre passe haut du deuxième ordre.

La topologie de ce filtre est la même que celle du précédent, sauf qu'on a permuté les résistances et les condensateurs. La fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{-R_1R_2C^2\omega^2}{1 + 2R_1Cj\omega - C^2R_1R_2\,\omega^2}$$

La pulsation de cassure et le coefficient de surtension de ce filtre sont :

$$\omega_o = \frac{1}{C\sqrt{R_1\,R_2}}$$

$$z = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$