

**CH II : TRANSFORMEE DE LAPLACE**

**1. Définition**

À toute fonction du temps  $f(t)$  définie pour  $t$  positif ( $f(t)$  causale), on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  qu'on appelle la transformée de Laplace de  $f(t)$  définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

On note  $L[f(t)] = F(p)$ .

Remarque : La transformation faisant passer du domaine des  $p$  au domaine des  $t$  s'appelle l'inversion de la transformation de Laplace.

Soit  $L[f(t)] = F(p)$ . On note  $L^{-1}[F(p)] = f(t)$  et on dit que  $f(t)$  est l'original ou la transformée inverse de Laplace de  $F(p)$ .

**2. Transformées de fonctions élémentaires**

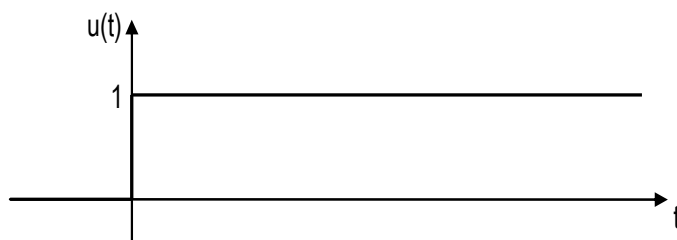
**2-1 Fonction échelon unité ou de Heaviside  $u(t)$**

La fonction  $u(t)$  est définie par :

$$\begin{cases} t < 0 & u(t) = 0 \\ t \geq 0 & u(t) = 1 \end{cases}$$

Soit  $L[u(t)] = U(p)$

$$U(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$



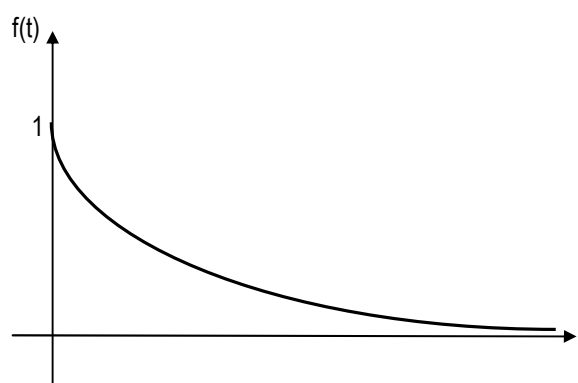
**2-2 Fonction exponentielle**

La fonction exponentielle  $f(t)$  est définie par :

$$\begin{cases} t < 0 & f(t) = 0 \\ t \geq 0, f(t) = e^{-at}, a > 0 \end{cases} \text{ donc } f(t) = e^{-at} u(t)$$

Soit  $L[f(t)] = F(p)$

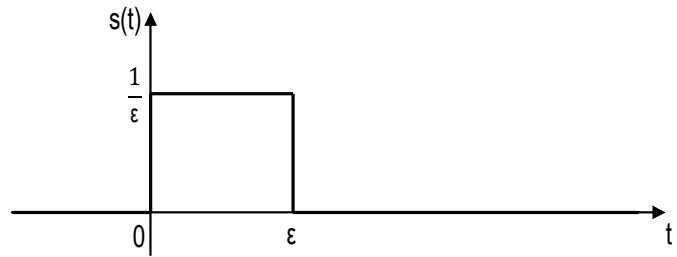
$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = \left[ \frac{e^{-(p+a)t}}{-(p+a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p+a}$$



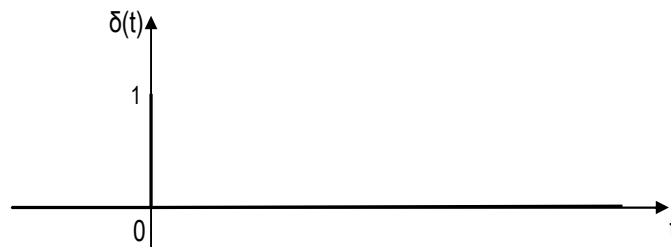
## 2-3 Fonction impulsion unité ou de Dirac

Soit la distribution de Dirac  $s(t)$  définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq \varepsilon & s(t) = \frac{1}{\varepsilon} \\ s(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Si  $\varepsilon$  tend vers 0, la distribution de Dirac devient impulsion de Dirac  $\delta(t)$ , permettant la représentation en physique d'une action s'exerçant sur un très court instant.



Soit  $L[\delta(t)] = \delta(p)$  et  $L[s(t)] = S(p)$

$$S(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} s(t) dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-pt}}{\varepsilon} dt = \left[ \frac{e^{-pt}}{-p\varepsilon} \right]_0^{\varepsilon} = \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{-p\varepsilon} \quad \text{et} \quad \delta(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(p) = 1$$

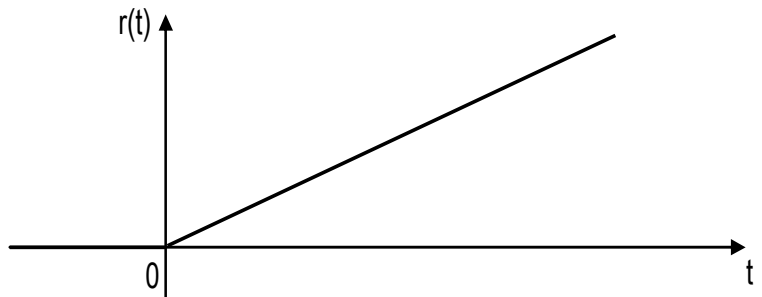
## 2-4 Fonction rampe

La fonction rampe  $r(t)$  est définie par :

$$\begin{cases} t < 0 & r(t) = 0 \\ t \geq 0 & r(t) = at, \quad a > 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad r(t) = atu(t)$$

Soit  $L[r(t)] = R(p)$

$$R(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} r(t) dt = \int_0^{\infty} ate^{-pt} dt = \frac{a}{p^2}$$



## 3. Propriétés

### 3-1 Linéarité

Soient  $a$  et  $b$  des réels et,  $L[f(t)] = F(p)$  et  $L[g(t)] = G(p)$

$$L[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$$

$$L^{-1}[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)$$

Exemple :  $f(t) = (2 + e^{-3t})u(t)$

### 3-2 Règle de similitude ou de changement d'échelle

Soit  $L[f(t)] = F(p)$  et  $a$ , réel strictement positif

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Exemple :  $f(t) = \cos wt$  et  $F(p) = \frac{p}{p^2+w^2}$ . Déterminer  $L[\cos 2wt]$ .

### 3-3 Règle de translation en p

Soit  $L[f(t)] = F(p)$

$$L[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$$

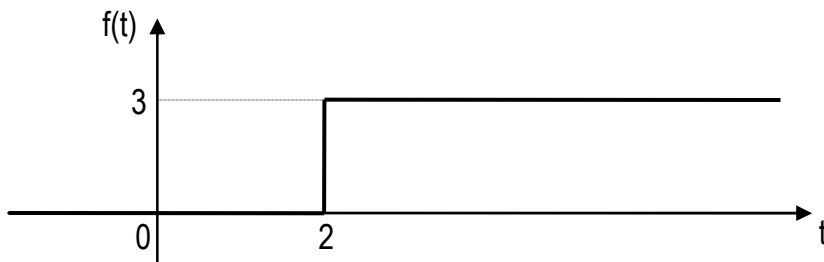
Exemple :  $L[e^{-2t}u(t)]$

### 3-4 Règle de translation en t

Soit  $L[f(t)] = F(p)$  et  $t_0 > 0$

$$L[f(t-t_0)] = e^{-pt_0}F(p)$$

Exemple :



### 3-5 Transformée de la dérivée

Soit  $L[f(t)] = F(p)$

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$$

où  $f(0^+)$  est la valeur initiale de  $f(t)$ .

Remarque : Généralisation

$$L\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}\dot{f}(0^+) - p^{n-3}\ddot{f}(0^+) - p^{n-4}\dddot{f}(0^+) - p^{n-5}f^{(4)}(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

où  $f(0^+)$ ,  $\dot{f}(0^+)$ ,  $\ddot{f}(0^+)$ , ...,  $f^{(n-1)}(0^+)$  sont les valeurs initiales de  $f(t)$  et de ses dérivées.

Exemple :  $L\left[\frac{d^5 f}{dt^5}\right]$

### 3-6 Transformée de la primitive

Soit  $L[f(t)] = F(p)$

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}$$

### 3-7 Théorème de la valeur initiale

La valeur initiale  $f(0^+)$  de la fonction causale  $f(t)$  dont la transformée de Laplace est  $F(p)$  est :

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

### 3-8 Théorème de la valeur finale

La valeur finale  $f(\infty)$  de la fonction causale  $f(t)$  dont la transformée de Laplace est  $F(p)$  est :

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

## 4. Applications à l'intégration des équations différentielles

### 4-1 Définitions

#### 4-1-1 Fraction rationnelle

Une fraction rationnelle (réelle) est du type  $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  où  $N(p)$  et  $D(p)$  sont des polynômes à coefficients réels respectivement appelés numérateur et dénominateur de  $F(p)$ .

#### 4-1-2 Zéros d'une fraction

On appelle zéro d'une fraction toute valeur (réelle ou complexe) qui annule le numérateur  $N(p)$ .

Un zéro  $\beta$  est d'ordre de multiplicité  $n$  si on peut factoriser le numérateur par  $(p - \beta)^n$ .

#### 4-1-3 Pôles d'une fraction

On appelle pôle d'une fraction toute valeur (réelle ou complexe) qui annule le dénominateur  $D(p)$ .

Un pôle  $\gamma$  est d'ordre de multiplicité  $n$  si on peut factoriser le dénominateur par  $(p - \gamma)^n$ .

Remarque : Lorsque le numérateur  $N(p)$  et le dénominateur  $D(p)$  d'une fraction n'ont aucun zéro en commun, elle est dite irréductible.

Exemple :

$$F(p) = \frac{p(p+1)^2}{(p+2)(p+3)}$$

#### 4-1-4 Eléments simples

Il existe deux types d'éléments simples :

- les éléments simples de première espèce, fraction rationnelle pouvant s'écrire :

$$F(p) = \frac{A}{(p - \alpha)^n} \text{ où } A \text{ et } \alpha \text{ sont des réels et, } n \text{ un naturel}$$

- les éléments simples de deuxième espèce, fraction rationnelle s'écrivant :

$$F(p) = \frac{Ap+B}{(ap^2+bp+c)^n} \text{ où } A, B, a, b, c \text{ sont des réels et, } n \text{ un naturel et, } b^2-4ac < 0$$

#### 4-2 Décomposition en éléments simples

Dans la recherche de l'original d'une transformée de Laplace  $F(p)$ , il apparaît souvent nécessaire de la décomposer en éléments simples :

$$F(p) = E_p(p) + F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p)$$

où  $E_p(p)$  est la partie entière (quotient) découlant de la division euclidienne de  $N(p)$  par  $D(p)$  si  $\deg[N(p)] > \deg[D(p)]$  et,  $F_1(p) \dots F_n(p)$ , les éléments simples.

La décomposition proprement dite s'effectue de la manière suivante :

- si  $p=\alpha$  est un pôle réel d'ordre  $n$ , alors la décomposition de  $F(p)$  comportera la somme des  $n$  éléments simples de première espèce suivante :

$$\frac{A_1}{p-\alpha} + \frac{A_2}{(p-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(p-\alpha)^n} \text{ avec } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ des réels}$$

- si  $F(p)$  admet des pôles complexes conjugués d'ordre  $n$ , racines du trinôme  $ap^2+bp+c$ , alors la décomposition comportera la somme de  $n$  éléments simples de deuxième espèce suivante :

$$\frac{B_1p+C_1}{ap^2+bp+c} + \frac{B_2p+C_2}{(ap^2+bp+c)^2} + \dots + \frac{B_np+C_n}{(ap^2+bp+c)^n} \text{ avec } B_i, C_i \text{ des réels}$$

Remarque : METHODE DES RESIDUS (Recherche des coefficients à pôles multiples)

$$A_i = \frac{1}{(k-i)!} \frac{d^{k-i}}{dp^{k-i}} \left| (p-p_i)^k F(p) \right|_{p=p_i} \text{ avec } i=1 \dots k$$

Exemple :

$$F(p) = \frac{p(p+1)}{(p+2)(p+3)^2}$$

#### 4-3 Méthode de résolution

L'intégration d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants à l'aide de la transformée de Laplace s'effectue de la manière suivante :

- appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle,
- résoudre l'équation algébrique ainsi obtenue par rapport à la transformée de la fonction inconnue,
- décomposer si nécessaire cette transformée en éléments simples,
- et utilisant la table des transformées en sens inverse, déduire la fonction du temps inconnue.

## TRAVAUX DIRIGES I

### EXERCICE I

Les fonctions  $f(t)$  étant causales, déterminer leurs transformées de LAPLACE.

1.  $f(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

3.  $f(t) = \frac{1}{T^3} (T - t) e^{-\frac{t}{T}}$

2.  $f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$

4.  $f(t) = t - T + T e^{-\frac{t}{T}}$

### EXERCICE II

Déterminer les originaux des transformées de LAPLACE suivantes :

1.  $F(p) = \frac{1}{(1+ap)(1+bp)}$

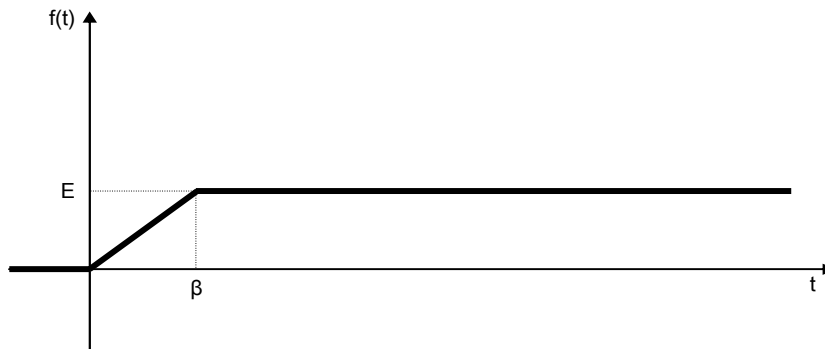
3.  $F(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+5}$

2.  $F(p) = \frac{1}{p(1+ap)(1+bp)}$

4.  $F(p) = \frac{1}{p^2(1+Tp)^2}$

### EXERCICE III

Déterminez la transformée de LAPLACE de la fonction représentée ci-dessous :



### EXERCICE IV

Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la transformation de LAPLACE :

1.  $\dot{y} = -3y$  avec  $y(0)=2$

2.  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = e^{-t}$  avec  $y(0)=0$  et  $\dot{y}(0) = 1$

**TABLE USUELLE DES TRANSFORMEES DE LAPLACE**

$f(t)$ (causale)	$F(p)$	$f(t)$ (causale)	$F(p)$
$\delta(t)$	$1$	$\frac{w_n^2}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin(w_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta)$	$\frac{p}{1 + \frac{2\xi}{w_n} p + \frac{p^2}{w_n^2}}$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\theta = \pi - \text{Arc cos } \xi$	
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{w_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin(w_n \sqrt{1-\xi^2} t)$	$\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{w_n} p + \frac{p^2}{w_n^2}}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$0 < \xi < 1$	
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin(w_n \sqrt{1-\xi^2} t + \psi)$	$\frac{1}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{w_n} p + \frac{p^2}{w_n^2} \right)}$
$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$\psi = \text{Ar cos } \xi$	
$\cos wt$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$	$t - \frac{2\xi}{w_n} + \frac{1}{w_n \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin(w_n \sqrt{1-\xi^2} t + 2\psi)$	$\frac{1}{p^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{w_n} p + \frac{p^2}{w_n^2} \right)}$
$\sin wt$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$	$\psi = \text{Arcos } \xi$	
$e^{-\alpha t} \cos wt$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + w^2}$		
$e^{-\alpha t} \sin wt$	$\frac{w}{(p+\alpha)^2 + w^2}$	<i>Chat</i>	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$t \cos wt$	$\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$	<i>Shat</i>	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\frac{1}{2w} t \sin wt$	$\frac{p}{(p^2 + w^2)^2}$		