Leçon2 : Systèmes du deuxième ordre

1) Système simple du 2nd ordre

➢ Définition

C'est un système linéaire régit par une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants :

$$b_0\, s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2\, s(t)}{dt^2} = a_0\, e(t)$$

➢ Fonction de transfert

Par application de la transformée de Laplace, on a :

$b_0\, S(P) + b_1 P\, S(P) + b_2 P^2\, S(P) = a_0\, E(P)$

$$\Rightarrow F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{a_0}{b_0 + b_1\, P + b_2 P^2} \quad \text{soit} \quad F(P) = \frac{\frac{a_0}{b_0}}{1 + \frac{b_1}{b_0} P + \frac{b_2}{b_0} P^2}$$

➢ Autre écriture de la fonction de transfert

$$F(P) = \frac{k}{1 + \frac{2m}{\omega_0} P + \frac{P^2}{\omega_0^2}}$$

F(P) est la forme canonique de la fonction de transfert d'un système de deuxième ordre simple.

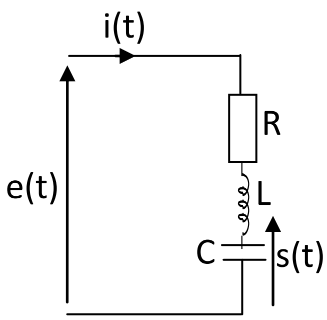
Par identification on définit les paramètres suivants :

- **K**$= \frac{a_0}{b_0}$ **: gain statique du système**
- $\omega_0 = (\frac{b_0}{b_2})^{½}$ **: pulsation propre non amortie du système**

- **m = ζ =** $\frac{b_1}{2(b_0b_2)}$ ½ : **facteur d'amortissement ou amortissement réduit**

➢ **Exemple d'un système de 2nd ordre simple**

Déterminer la fonction de transfert F(P)= $\frac{S(P)}{E(P)}$ du système.



e(t) = Ri(t) + L$\frac{di(t)}{dt}$ + s(t) or i(t) = C $\frac{ds(t)}{dt}$

$\Longrightarrow$ s(t) + RC$\frac{ds(t)}{dt}$ + LC$\frac{d^2\,s(t)}{dt^2}$ = e(t)

$\Longrightarrow S(P) + RCPS(P) + LCP^2S(P) = E(P)$

$\Longrightarrow \mathbf{F(P) = \frac{1}{1+RCP+LCP^2}}$

Par identification, on a :

K = 1 : gain statique

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: pulsation propre non amortie

$m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ *: facteur d'amortissement*

2) Système du 2nd ordre généralisé

➢ **Définition**

C'est un système linéaire régit par une équation différentielle d'ordre 2 à coefficient constant de la forme :

$$b_0\, s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2\, s(t)}{dt^2} = a_0\, e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2\, e(t)}{dt^2}$$

- **Fonction de transfert**

Par application de Laplace, on a : $F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{a_0 + a_1\, P + a_2 P^2}{b_0 + b_1\, P + b_2 P^2}$

Généralement $a_2 = 0 \Longrightarrow F(P) = \frac{a_0}{b_0} \frac{1+ \frac{a_1}{a_0} P}{1+ \frac{b_1}{b_0} P + \frac{b_2}{b_0} P^2}$

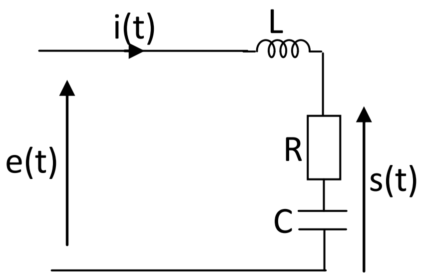
- **Autre écriture de la fonction de transfert**

$F(P) = \frac{k(1+a\tau P)}{1+ \frac{2m}{\omega_0} P + \frac{P^2}{\omega_0^2}}$ forme canonique de la fonction de transfert.

Par identification, on a :

- $K = \frac{a_0}{b_0}$: **gain statique**
- $\omega_0 = (\frac{b_0}{b_2})^{½}$: **pulsation propre non amortie**
- $m = \zeta = \frac{b_1}{2(b_0 b_2)}$ ½ : **facteur d'amortissement**
- $a\tau = \frac{a_1}{a_0}$: **constante**

- **Exemple**



$S(P) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$ E(P) : diviseur de tension tel que Z_1 = LP et $Z_2 = \frac{1+RCP}{CP}$

$\Longrightarrow$ $S(P) = \frac{\frac{1+RCP}{CP}}{LP + \frac{1+RCP}{CP}} E(P) = \frac{1+RCP}{1+RCP+P^2} E(P)$

$$\mathbf{F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{1+RCP}{1+RCP+P^2}}$$

Par identification, on a :

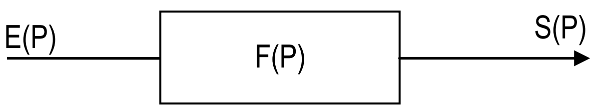
K = 1 : gain statique

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: pulsation propre non amortie

$m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ *: facteur d'amortissement*

$a\tau = RC$: constante

3) Réponse d'un système du 2nd ordre simple a un échelon unitaire



- **1er cas :** Δ=0 c'est-à-dire m =1 ; on dit que le système est en amortissement critique.

Il existe $P_0 = -\omega_0$ tel que $S(P) = \frac{K\omega_0^2}{P(P+\omega_0)^2}$

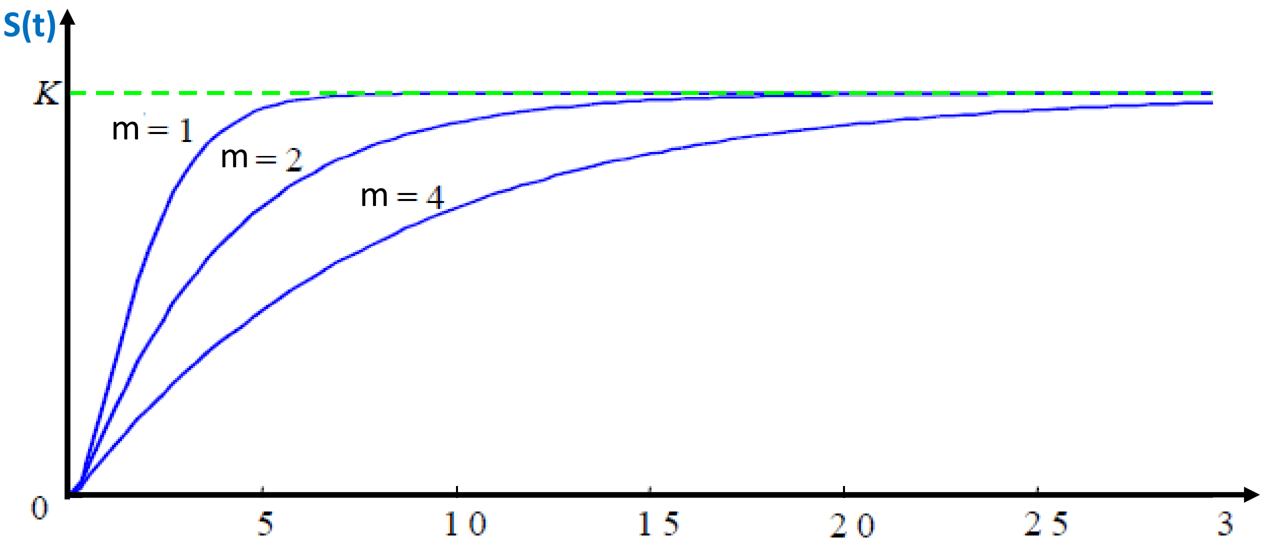
$\Longrightarrow$ $\mathbf{s(t) = K\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \mu(t)}$ **avec** $\boldsymbol{\tau = \frac{1}{\omega_0}}$

- **2ème cas :** $\Delta > 0$ c'est-à-dire m > 1 ; le système admet deux racines réelles. Pas d'oscillation. Il existe deux racines réelles $P_1 = - m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$ et $P_2 = - m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$

$$\Longrightarrow S(P) = \frac{K\omega_0^2}{P(P-P_1)(P-P_2)} = \frac{K}{P\left(1-\frac{P}{P_1}\right)\left(1-\frac{P}{P_2}\right)} \text{ avec } P_1P_2 = \omega_0$$

$$\Longrightarrow \mathbf{s(t)} = \left[K + \frac{K}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1 e^{\frac{-t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}}\right)\right]\mu(t) \text{ avec } \tau_1 = -\frac{1}{P_1} \text{ et } \tau_2 = -\frac{1}{P_2}$$

Réponse indicielle pour m ≥ 1



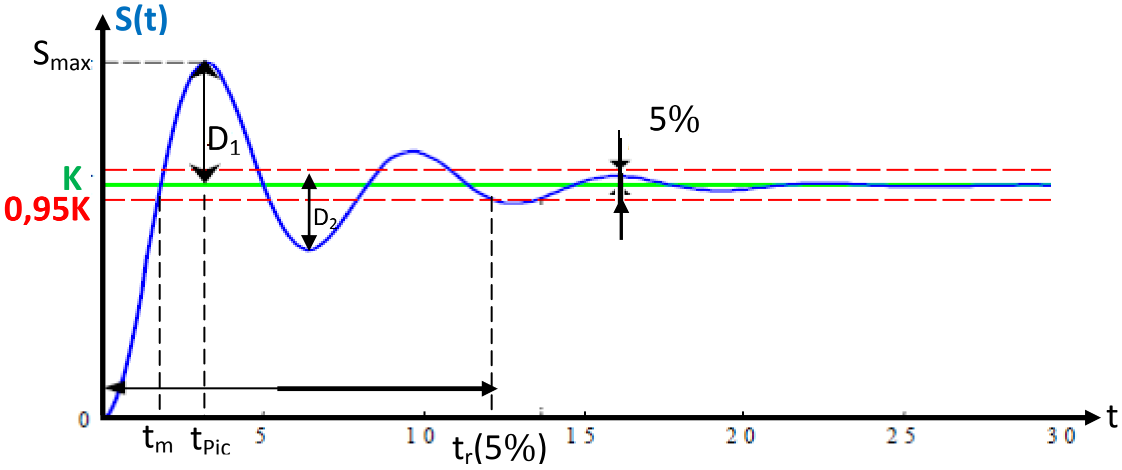
- **3ème cas :** $\Delta<0$ c'est-à-dire m<1 ; le système admet deux racines complexes conjuguées. On dit que le système est oscillant ou pseudopériodique.

Il existe deux racines complexes conjuguées $P_1 = - m\,\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$ et $P_2 = - m\,\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$

$$\Longrightarrow \mathbf{s(t)} = \left[K - \frac{K}{\sqrt{1-m^2}} e^{\frac{-t}{\tau}} . \sin(\omega_P t - \varphi)\right]\mu(t) \quad \text{avec} = \frac{1}{m\omega_0},$$

$$\omega_P = \omega_0\sqrt{1 - m^2} \quad \text{et } \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{-m}\right)$$

Réponse indicielle pour m < 1



On définit les quelques relations suivantes :

- **Dépassement**

$$D_i\,\% = 100 \times e^{\frac{-i\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$$

$$D_i\,\% = \frac{\text{Valeur maximale de la ième onde} - \text{valeur finale}}{\text{Valeur finale}} \times 100$$

$$\Longrightarrow D_1\% = \frac{S_{max} - K}{K} \times 100$$

- **Temps du i^ème^ dépassement**

$$t_i = \frac{i\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$

- **Temps de réponse à x%**

$$t_r(x\%) = \frac{-\ln\left(\frac{x}{100}\right)}{m\omega_0}$$

- **Temps de pic**

$t_{Pic} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$

- **Nombre d'oscillations complètes**

$N = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$

- **Temps de montée**

$t_m = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}(\pi - \arccos m)$

- **Pulsation de résonance**

$\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$

- **Gain maximal atteint**

$G_{max} = \frac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$

- **Facteur de surtension ou de résonance ou de qualité**

$Q = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}} = = \frac{Gmax}{K}$

- **Pulsation des oscillations transitoires**

$\omega_P = \omega_0\sqrt{1-m^2}$

- **Pseudo période**

$T_P = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} = \frac{2\pi}{\omega_P}$