FONCTION DE TRANSFERT

Cette partie va permettre à l'étudiant de déterminer la fonction de transfert d'un système à partir de l'équation différentielle qui le régit ou de son schéma fonctionnel.

A la fin du chapitre, l'apprenant sera capable de mettre une fonction de transfert sous diverses formes, d'identifier les différentes entrées typiques et de déterminer la réponse d'un système à une entrée typique. Aussi pourra-t-il appliquer l'algèbre des schémas fonctionnels en vue de la réduction de schémas fonctionnels complexes à leur forme canonique.

1) Définitions

➢ Fonction de transfert

Soit un système linéaire avec une entrée x(t) et une sortie y(t) régit par l'équation différentielle suivante :

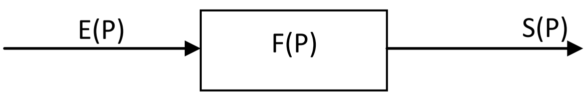
$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

Toutes les conditions initiales étant nulles, appliquons la transformée de Laplace à l'équation différentielle ci-dessus :

$$b_n P^n Y(P) + b_{n-1} P^{n-1} Y(P) + \ldots + b_1 P Y(P) + b_0 Y(P) = a_m P^m X(P) + a_{m-1} P^{m-1} X(P) + \ldots + a_1 P X(P) + a_0 X(P)$$

La fonction $F(P) = \frac{a_m P^m + a_{m-1} P^{m-1} + \cdots + a_1 P + a_0}{b_n P^n + b_{n-1} P^{n-1} + \cdots + b_1 P + b_0}$ est appelée fonction de transfert ou transmittance du système. Elle représente le comportement du système et s'exprime tout simplement comme le rapport de deux polynômes en p (fraction rationnelle), construits à partir de l'équation différentielle régissant son évolution.

Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie s'écrit : S(p) = F(p).E(p)



- Le polynôme $b_n P^n + b_{n-1} P^{n-1} + \cdots + b_1 P + b_0$ est le **polynôme caractéristique du système.**

- L'équation $b_n P^n + b_{n-1} P^{n-1} + \cdots + b_1 P + b_0 = 0$ est appelée **équation caractéristique du système.**

Exemple : Déterminer la transmittance $F(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$ du système régit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 6\frac{ds(t)}{dt} + 3s(t) = 12e(t) \; avec \; s'(0) = 0 \; et \; s(0) = 0.$$

Laplace ⟹ $P^2 S(P) + 6PS(P) + 3S(P) = 12E(P)$

$$\Longrightarrow F(P) = \frac{12}{P^2 + 6P + 3}$$

- **Forme canonique de la fonction de transfert**

Toute fonction de transfert peut être exprimée sous sa forme canonique. Ainsi on peut la comparer à d'autres fonctions, on peut identifier des paramètres,…

$$F(P) = \frac{K}{P^{\alpha}} \frac{1 + \dots + a_{m'}P^{m'}}{1 + \dots + b_{n'}P^{n'}}$$

$n = n' + \alpha$: **ordre du système**

α : **classe du système**

$K = \lim_{P \to 0} F(P)$: **gain statique du système.**

- **Zéros et pôles**

En faisant apparaître les racines du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert, on a :

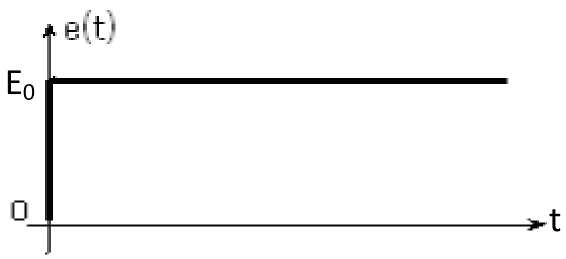
$$F(P) = \frac{(P - Z_m)(P - Z_{m-1})\dots(P - Z_1)}{(P - P_n)(P - P_{n-1})\dots(P - P_1)}$$

- Les z_i sont appelés **les zéros de la fonction de transfert**
- Les P_i sont appelés **les pôles de la fonction de transfert**
- Un système qui possède un pôle nul **est dit intégrateur**
- Un système qui possède un zéro nul **est dit dérivateur**

L'étude des pôles et des zéros sera utile pour avoir une idée des performances du système.

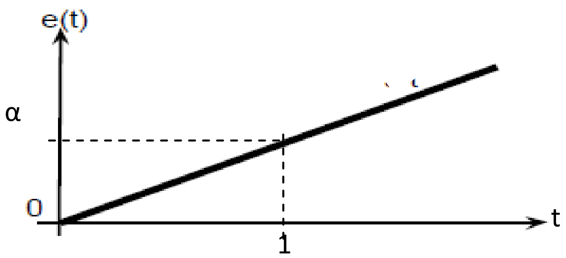
2) Entrées typiques

- **Echelon de position** : **e(t) = $E_0\,\mu(t)$** (**échelon d'amplitude E_0**)



$$E(P) = \frac{E_0}{P}$$

- **Rampe ou échelon de vitesse**: **e(t) = $\alpha t\,\mu(t)$** (**rampe de coefficient directeur α**)

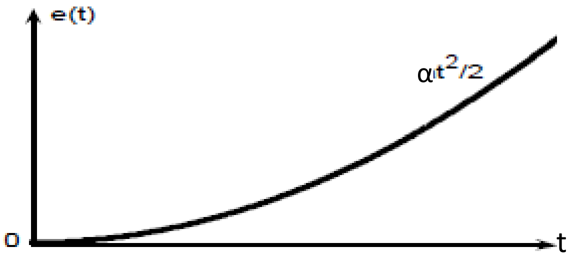


$$E(P) = \frac{\alpha}{P^2}$$

- **Impulsion** : e(t) = $A\delta$(t) (impulsion d'amplitude A)

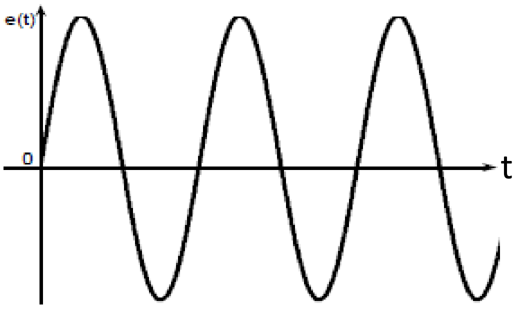
$E(P) = A$

- **Echelon accélération** : e(t) = $\frac{\alpha}{2} t^2 \, \mu(t)$



$E(P) = \frac{\alpha}{P^3}$

- **Fonction harmonique** : e(t) = a $\sin \omega t \, \mu(t)$



$E(P) = \frac{a\omega}{P^2+\omega^2}$

3) Réponses aux entrées typiques et fonction de transfert

- **Réponse à un échelon unitaire ou réponse indicielle**

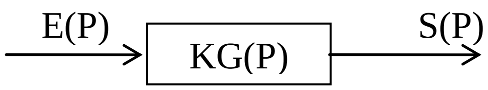
$e(t) = u(t) \Longrightarrow S(P) = \frac{F(P)}{P}$

- **Réponse à une impulsion unitaire ou réponse impulsionnelle**

$e(t) = \delta(t) \Longrightarrow S(P) = F(P)$

4) algèbre des schémas fonctionnels et fonction de transfert

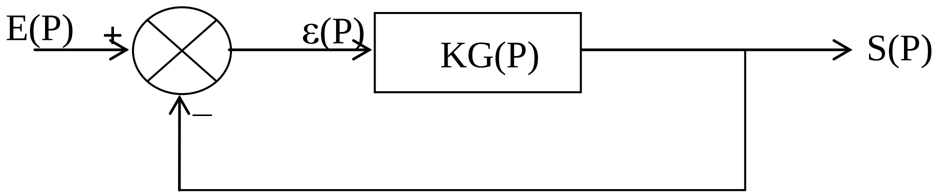
- **Fonction de transfert d'un système en boucle ouverte**



$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = KG(P)$$

- **Fonction de transfert d'un système bouclé**

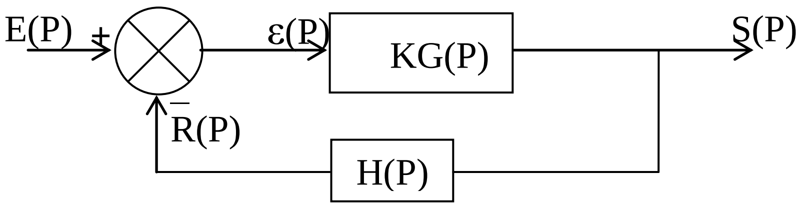
  - **A retour unitaire**



Le diagramme fonctionnel sous cette représentation est appelée forme canonique du système.

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{KG(P)}{1+KG(P)}$$

  - **Système à retour non unitaire**



$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{KG(P)}{1+KG(P)H(P)}$$

Forme canonique du système

*KG(P) : Fonction de transfert de la chaîne direct

*H(P) : Fonction de transfert de la chaîne de retour

*KG(P)H(P) : Fonction de transfert de la boucle ouverte

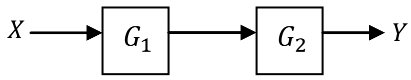
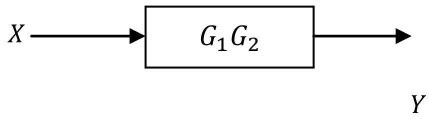
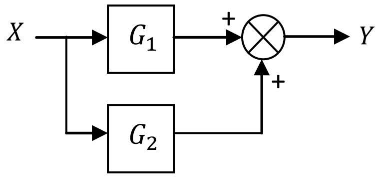
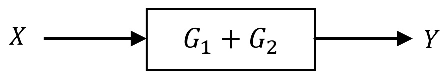
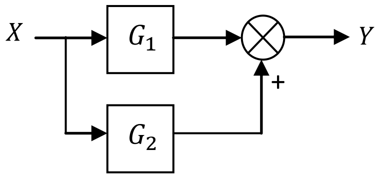
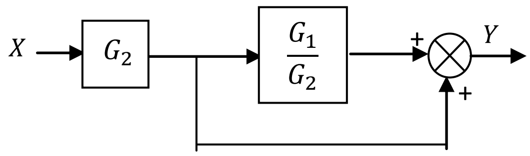
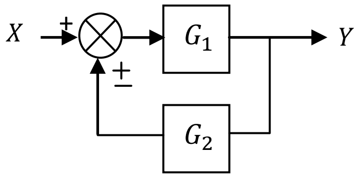
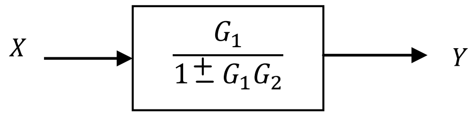
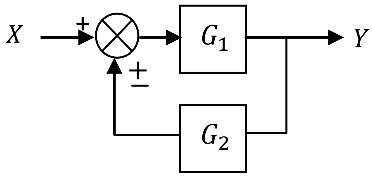
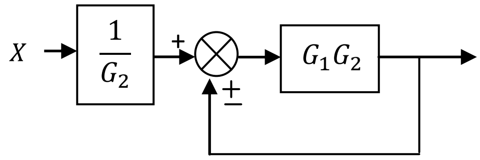
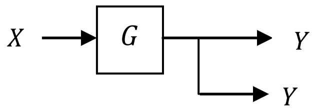
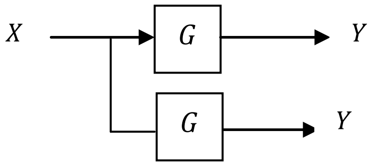
*$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$: Fonction de transfert de la boucle fermée

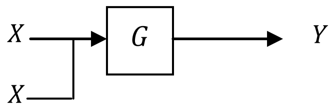
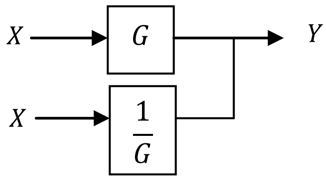
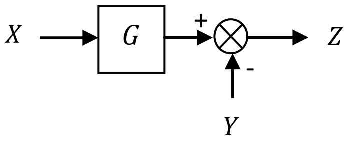
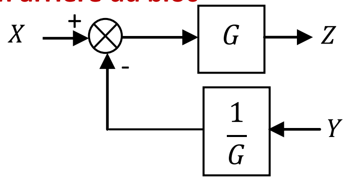
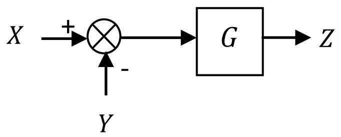
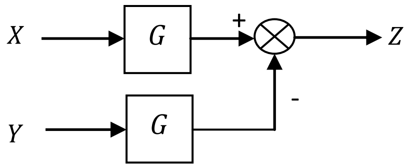
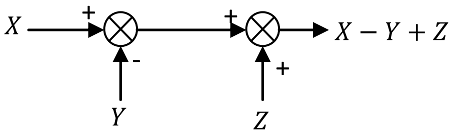
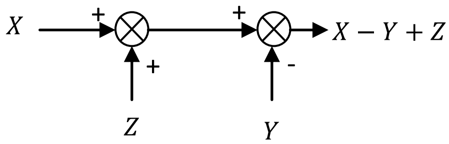
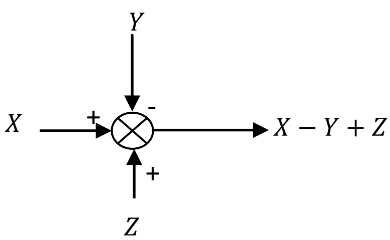
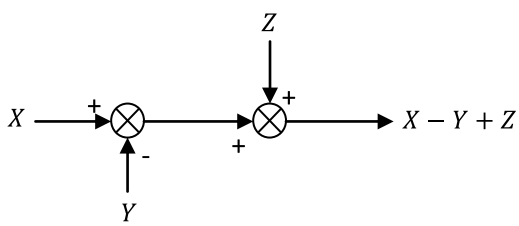
*$\frac{\varepsilon(P)}{E(P)}$: rapport d'erreur

*$\frac{R(P)}{E(P)}$: rapport de retour primaire

5) Réduction des schémas fonctionnels

➢ **Schémas fonctionnels – Théorèmes de transformation**

Schéma de départ	Schéma équivalent
	
	
	
	
	
Jonction en avant du bloc 	Déplacement de la jonction en arrière du bloc 

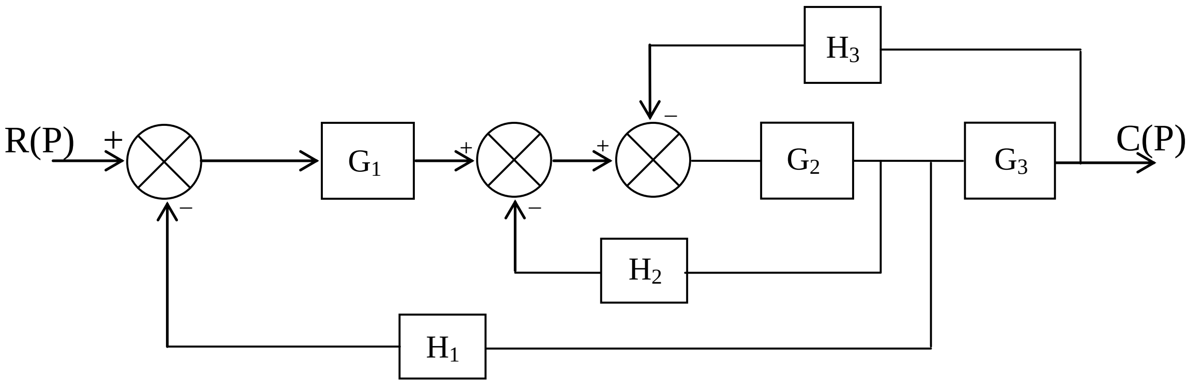
 **Jonction en arrière du bloc**	 **Déplacement de la jonction en avant du bloc**
Comparateur en avant du bloc 	**Déplacement du comparateur en arrière du bloc** 
Comparateur en arrière du bloc 	**Déplacement du comparateur en avant du bloc** 
	
	

Réduction

Pour réduire ces schémas, on peut suivre les étapes suivantes :

1. Associer tous les éléments en série.
2. Associer tous les éléments en parallèle.
3. Réduire toutes les boucles de retour non principales.
4. Faire passer les comparateurs à gauche et les points de dérivation à droite de la boucle principale.
5. Répéter les étapes 1. Et 4. Pour chaque signal d'entrée.
6. Ajouter algébriquement toutes les réponses calculées à l'étape 5. Pour obtenir la grandeur de sortie totale comme si tous les signaux d'entrée agissent ensemble.

<u>Exemple</u> : Mettons le schéma fonctionnel ci-dessous sous sa forme canonique et déterminons sa fonction de transfert$F(P) = \frac{C(P)}{R(P)}$.

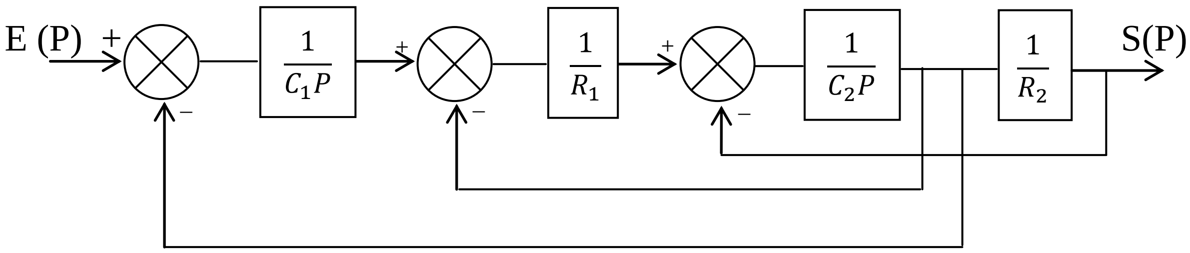


TRAVAUX DIRIGES

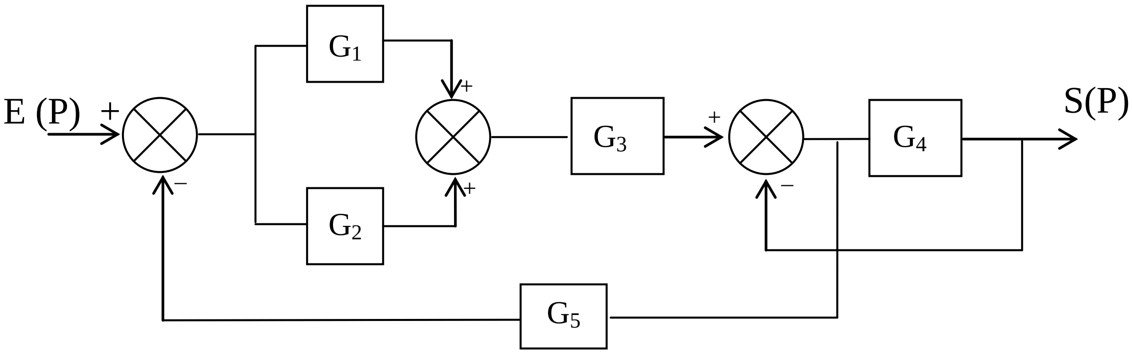
Exercice 1

Mettre les schémas fonctionnels ci-dessous sous leur forme canonique et déterminer leur fonction de transfert.

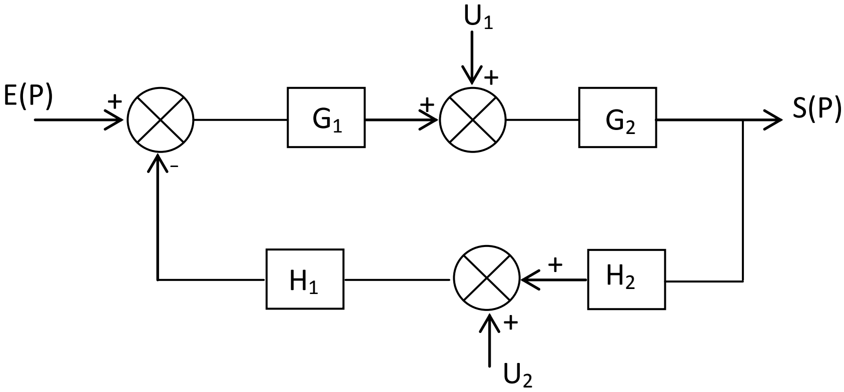
1)



2)

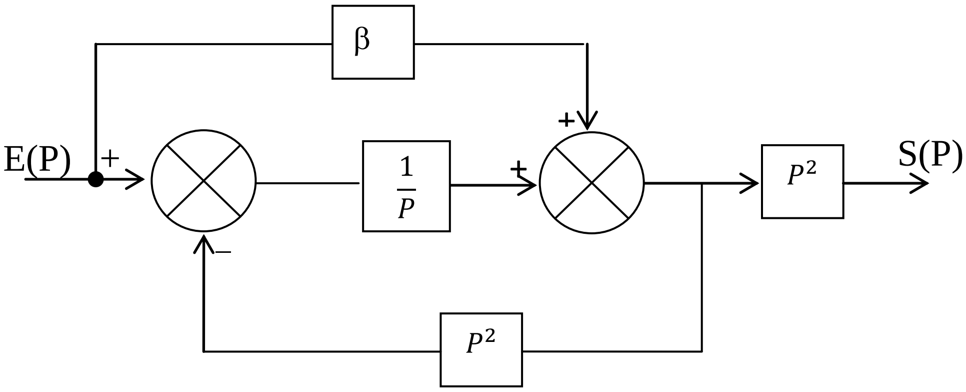


3)



Exercice 2

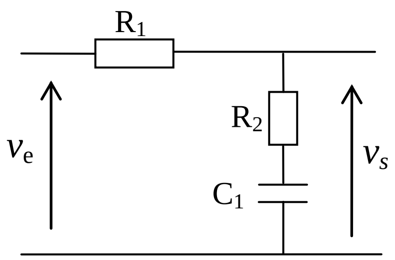
Soit un système régit par le schéma fonctionnel ci-dessous.



1) Déterminer la fonction de transfert $F(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$ du système.
2) L'entrée du système est une rampe de coefficient directeur 1. Calculer la valeur finale du système.

Exercice 3

Soit un système représenté par le schéma ci-dessous.



1) Déterminer la fonction de transfert $H(P) = \frac{v_s(P)}{v_e(P)}$ et la mettre sous la mettre sous la forme

   $H(P) = \frac{1+\tau_1 P}{1+\tau_2 P}$.

   On déterminera les expressions de τ_1 et τ_2.
2) Déterminer le schéma bloc de ce système.