II- RAPIDITE

1) Définition

La rapidité est un critère de performance fondamental des systèmes asservis et caractérise le temps que met le système à réagir à une variation de la commande. Afin d'avoir un critère pour quantifier la rapidité d'un système asservi, le temps de réponse à 5 % a été crée.

- Le temps de réponse en boucle fermée diminue, ou encore la rapidité du système en boucle fermée augmente lorsque le gain de sa FTBO augmente :

Soit un système de FTBO, T(P) = $\frac{K}{1+\tau P}$ montrons que la rapidité du système augmente avec son gain.

FTBF : $$F(P) = \frac{K}{1+\tau P+K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{\tau}{1+K}P}$$

$$F(P) = \frac{K'}{1+\tau' P} \quad \text{avec } \tau' = \frac{\tau}{1+K} \text{ et } K' = \frac{K}{1+K}$$

On remarque que τ' diminue lorsque K augmente.

- Le système est d'autant plus rapide que la bande passante a -3 dB est élevée :

Soit un système de FTBO, T (jω) = $\frac{K}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ montrons que la rapidité du système augmente avec sa bande passante.

FTBF : $$F(j\omega) = \frac{K}{1+K+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0(1+K)}}$$

$$F(j\omega) = \frac{K'}{1+K+j\frac{\omega}{\omega_0'}} \quad \text{avec } \omega_0' = \omega_0(1+K)$$

Ainsi la bande passante à – 3dB augmente. Le système est donc d'autant plus rapide que la bande passante est élevée. La vitesse d'oscillation est plus élevée donc le système tend plus rapidement vers sa valeur finale.

2) Dilemme rapidité-stabilité

Pour qu’un système soit rapide, il faut que le gain de sa FTBO soit grand, ce qui est contradictoire avec la condition de stabilité d’un système asservi. On parle de dilemme rapidité-stabilité.

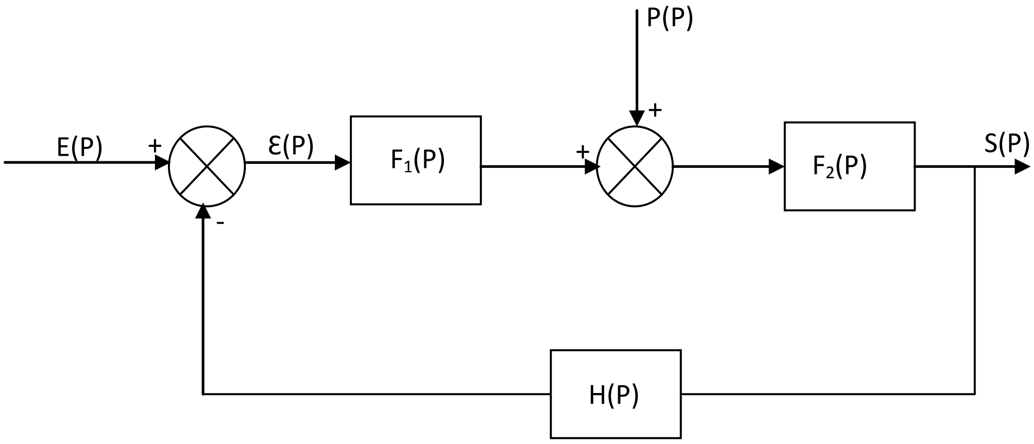
II- PRECISION

2) Définition

La précision est l'écart entre la valeur de la consigne e(t) et la valeur de la sortie s(t). C'est donc la valeur à la sortie du comparateur : **$\varepsilon(t)= e(t) - s(t)$.**

En pratique :

- L'entrée varie et le système fonctionne en suiveur et réalise la fonction asservissement.
- L'entrée est constante mais un signal de perturbation peut venir se superposer au signal utile en un point quelconque de la chaîne. Le fait de maintenir $\mathcal{E}(t)=0$, malgré cette perturbation impose que le système fonctionne en régulateur.



<u>1^er^ cas</u> : $P(P) = 0$ et $E(P) \neq 0$; $\varepsilon_1(P) = \frac{E(P)}{1+T(P)}$ avec $T(P) = H(P)F_1(P)F_2(P)$

<u>2^ème^ cas</u> : $E(P) = 0$ et $P(P) \neq 0$; $\varepsilon_2(P) = \frac{-H(P)F2(P)}{1+T(P)}P(P)$

$\varepsilon(P) = \frac{E(P)}{1+T(P)} + \frac{-H(P)F2(P)}{1+T(P)}P(P)$: superposition

On s'intéresse à l'erreur permanente encore appelée erreur statique c'est-à-dire :

$$\varepsilon = \lim_{\infty} \varepsilon(t) = \lim_{0} P\varepsilon(P)$$

3) Etude de l'erreur permanente

3.1) Ecart dû à l'entrée principale (P(p)=0 pas de perturbation)

On a donc $\varepsilon(P)=\frac{E(P)}{1+T(P)}$

Ɛ(P) dépend du signal d'entré E(P) et de la fonction de transfert en boucle ouverte T(P).

3.1.1) Influence de l'entrée E(P)

- Si l'entrée E(P) est un échelon, l'erreur est appelée erreur de position et est notée $\boldsymbol{\varepsilon_P}$.
- Si l'entrée E(p) est une rampe on a une erreur de trainage ou de vitesse notée ε_t ou $\boldsymbol{\varepsilon_V}$.
- Si l'entrée E(P) est une parabole, l'erreur est appelée erreur d'accélération et est notée $\boldsymbol{\varepsilon_a}$.

3.1.2) Influence de la F.T.B.O

La forme de la FTBO dépend du nombre d'intégrateurs qu'elle contient. En générale :

La FTBO, $T(P) = \frac{K\,N(P)}{P^{\alpha}D(P)}$ avec $N(0) = D(0) = 1$, α est la classe du système.

$$\varepsilon(P) = \frac{E(P)}{1+T(P)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(P) = \frac{E(P)}{1+\frac{K\,N(P)}{P^{\alpha}D(P)}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(P) = E(P)\,\frac{P^{\alpha}D(P)}{P^{\alpha}D(P)+K\,N(P)}$$

-**<u>Entrée échelon :</u>** $E(P) = \frac{E_0}{P}$

$$\varepsilon_P = \lim_{0} P\varepsilon(P) = \lim_{0} E_0\,\frac{P^{\alpha}D(P)}{P^{\alpha}D(P)+K\,N(P)} = E_0\,\frac{P^{\alpha}}{P^{\alpha}+K}$$

-**<u>Entrée rampe :</u>** E (P) = $\frac{E_0}{P^2}$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_t = \lim_{0} P\varepsilon(P) = \lim_{0} E_0 \frac{P^{\alpha-1}D(P)}{P^{\alpha}D(P)+K\,N(P)} = E_0 \frac{P^{\alpha-1}}{P^{\alpha}+K}$$

-**<u>Entrée parabole :</u>** E (P) = $\frac{E_0}{P^3}$

$$\varepsilon_a = \lim_{0} P\varepsilon(P) = \lim_{0} E_0 \frac{P^{\alpha-2}D(P)}{P^{\alpha}D(P)+K\,N(P)} = E_0 \frac{P^{\alpha-2}}{P^{\alpha}+K}$$

Classe / Ecart	α=0	α=1	α=2	α>2
ε_P	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
ε_V	∞	$\frac{E_0}{K}$	0	0
ε_a	∞	∞	$\frac{E_0}{K}$	0

<u>Remarque</u> :

- Un système de classe 0 ne suit ni en vitesse, ni en accélération.
- Un intégrateur annule l'erreur de position et rend finie l'erreur de traînage.
- Dans un système de classe 2, les erreurs de position et de vitesse sont nulles et l'erreur d'accélération devient finie.

3.2) Ecart dû à une perturbation (E(P)=0)

On a donc $\quad \varepsilon(P) = P(P)\,\dfrac{H(P)F_2(P)}{1+F_1\,(P)F_2\,(P)H(P)}$

On considère $F_1(P) = \dfrac{K_1N_1(P)}{P^{\alpha_1}D_1(P)}$ $\quad$ et $\quad$ $H(P)\ F_2\,(P) = \dfrac{K_2N_2(P)}{P^{\alpha_2}D_2(P)}$

Avec $N_1(0) = N_2(0) = D_1(0) = D_2(0) = 1$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \geq 0$

Donc $\varepsilon(P) = P(P)\,\dfrac{K_2P^{\alpha_1}N_2(P)D_1(P)}{P^{\alpha_1+\alpha_2}D_1(P)D_2(P)+K_1K_2N_1(P)N_2(P)}$

- **<u>Perturbation en échelon :</u>** $P(P) = \frac{E_0}{P}$

$$\varepsilon_P = \lim_{O} P\varepsilon(P) = \lim_{O} E_0\,\frac{K_2P^{\alpha_1}N_2(P)D_1(P)}{P^{\alpha_1+\alpha_2}D_1(P)D_2(P)+K_1K_2N_1(P)N_2(P)} \Longrightarrow \varepsilon_P = E_0\,\frac{K_2P^{\alpha_1}}{P^{\alpha_1+\alpha_2}+K_1K_2}$$

- **<u>Perturbation en rampe :</u>** $P(P) = \frac{E_0}{P^2}$

$$\varepsilon_V = \lim_{O} P\varepsilon(P) = \lim_{O} E_0\,\frac{K_2P^{\alpha_1-1}N_2(P)D_1(P)}{P^{\alpha_1+\alpha_2}D_1(P)D_2(P)+K_1K_2N_1(P)N_2(P)} \Longrightarrow \varepsilon_t = \frac{K_2P^{\alpha_1-1}}{P^{\alpha_1+\alpha_2}+K_1K_2}$$

Classe / Ecart	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 > 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 = 1$	$\forall\ \alpha_2$	$\forall\ \alpha_2$
ε_P	$\dfrac{E_0K_2}{1+K_1K_2}$	$\dfrac{E_0}{K_1}$	0	0
ε_V	∞	∞	$\dfrac{E_0}{K_1}$	0

3.3) Dilemme Stabilité-Précision

On constate que plus K est grand, plus la précision s'améliore. L'automaticien désire que son système soit précis ; il augmente K mais déstabilise le système. Ou bien, il garde une marge normale de stabilité en diminuant le gain dans ce cas la précision diminue.