

SYNTHESE DU COURS DE RDM (PARTIE 2)

ETUDE DES DIFFERENTES SOLLICITATIONS

ETUDE DE CAS 1 : TRACTIONS SIMPLE

PROBLEME 1 : CHAÎNE DE LEVAGE

Une chaîne se compose d'une suite de maillons soudés les uns derrière les autres. La limite à la rupture de l'acier utilisé est de 63 daN.mm^2 . Déterminer la force d'extension maximale F que peut supporter la chaîne si le coefficient de sécurité adopté est de 5.

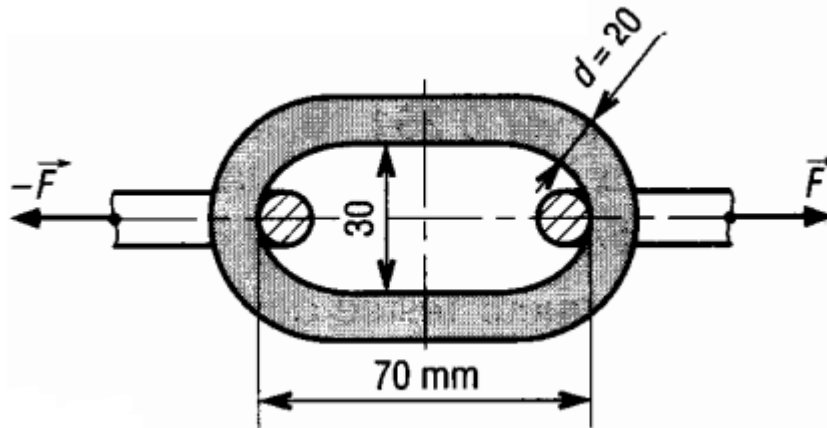


Figure 1 : maillons d'une chaîne de levage

RESOLUTION :

1 – Identification de la nature de la sollicitation que subit un maillon

Vue la configuration des efforts extérieurs, le maillon est sollicité en traction simple par les forces d'intensité F .

2 – Nombre de section susceptible de se rompre.

Vue la forme du maillon (anneau, cf. figure 1), deux sections circulaires de diamètres identique $d = 20$ sont susceptibles de subir une rupture sous l'action des forces de traction.

3 – Expression de la contrainte normale maximale de traction dans une section droite du maillon

$$\sigma_{maxi} = \frac{F}{2S} \quad \text{avec } S = \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{soit } \sigma_{maxi} = \frac{2F}{\pi d^2}$$

4 – Détermination de l'effort maximal d'extension (traction) que peut supporter la chaîne

Il faut écrire la condition de résistance en tenant compte de la limite à la rupture et du coefficient de sécurité imposé par le cahier des charges.

Condition de résistance à la rupture en extension (traction) simple : $\sigma_{maxi} \leq \frac{R_r}{s}$

Soit $\frac{2F}{\pi d^2} \leq \frac{R_r}{s}$ ce qui donne $F \leq \frac{R_r \pi d^2}{2s}$

Donc $F_{maxi} = \frac{R_r \pi d^2}{2s}$.

L'application numérique donne $F_{maxi} = 7916,813 \text{ daN}$

PROBLEME 2 : Poutre tubulaire

Une poutre tubulaire (diamètre extérieur 400 mm, épaisseur e) en acier (limite à la rupture $R_r = 380 \text{ MPa}$; limite élastique $R_e = 240 \text{ MPa}$), appartenant à une charpente métallique supporte un effort de traction de 400 kN. Le coefficient de sécurité adopté, par rapport à R_e , est égal à 6.

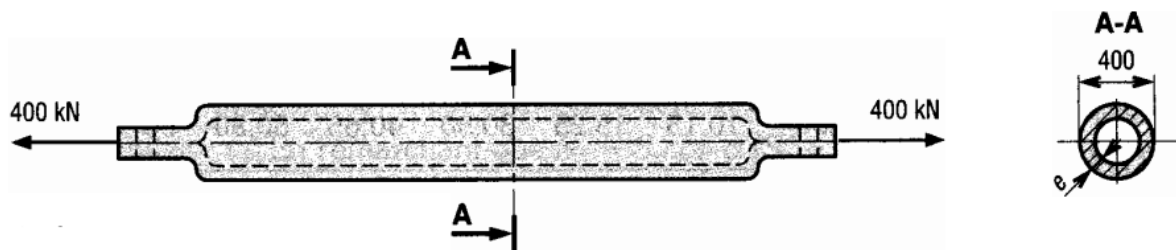


Figure 2 – poutre tubulaire

- 1- Déterminer l'épaisseur e minimale admissible pour la construction.
- 2- La longueur de la partie tubulaire de la poutre est de 3,5 m ; déterminer son allongement si le module de Young $E = 200 \text{ GPa}$.

Résolution

1 – Détermination de l'épaisseur e minimale admissible pour la construction

1 – 1 – Identification de la nature de la sollicitation

La figure 2 présente la configuration des forces extérieures appliquées à la poutre : la poutre est sollicitée en **traction simple** d'après la définition.

1 – 2 – Expression de la contrainte normale maximale dans une section droite de la poutre.

$$\sigma_{maxi} = \frac{F}{S} \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi(d^2 - (d-2e)^2)}{4} \quad \text{soit} \quad \sigma_{maxi} = \frac{4F}{\pi(d^2 - (d-2e)^2)}$$

1 – 3 – Condition de résistance

Il faut écrire la condition de résistance en tenant compte de la limite élastique du matériau et du coefficient de sécurité imposé par le cahier des charges.

$$\sigma_{maxi} \leq \frac{R_e}{s}$$

$$\text{Soit } \frac{4F}{\pi(d^2 - (d-2e)^2)} \leq \frac{R_e}{s} \text{ donc } \frac{4Fs}{\pi R_e} \leq (d^2 - (d-2e)^2)$$

$$\text{Ce qui donne } 400^2 - (400 - e)^2 \geq \frac{4 \times 400000 \times 6}{\pi \times 240}$$

Tout calcul fait, l'inéquation devient $-e^2 + 800e - 12732,40 \geq 0$

La résolution de cette inéquation conduit à $e_{\text{minimal}} = 16,245 \text{ mm}$.

2 – Pour $e = 16,25$ calculons l'allongement que subit la poutre sous l'action de la force de traction

L'équation de déformation est donnée par la relation suivante : $\sigma = E \frac{\Delta L}{L_0}$

$$\text{Soit } \Delta L = \frac{\sigma L_0}{E} ; \text{ ce qui donne } \Delta L = \frac{4FL_0}{E\pi(d^2 - (d-2e)^2)}$$

$$\text{AN : } \Delta L = 0,70 \text{ mm}$$

L'allongement que subit la poutre sous l'action de la force de traction est de 0,70 mm.

La compression simple se traite de la même manière que la traction (extension) simple.

Problème à résoudre : Fers plats pour transmission

Une transmission est construite à partir de trois fers plats de 6,5 mm d'épaisseur, de 32 mm de largeur et de 800 mm de longueur. Au moment de l'assemblage, il apparaît que la barre centrale mesure exactement 0,75 mm de moins que les deux autres barres.

Déterminer la contrainte dans chaque barre après assemblage ($E = 20\,000 \text{ daN} \cdot \text{mm}^{-2}$). On suppose qu'aucune charge extérieure n'est appliquée à l'ensemble monté.

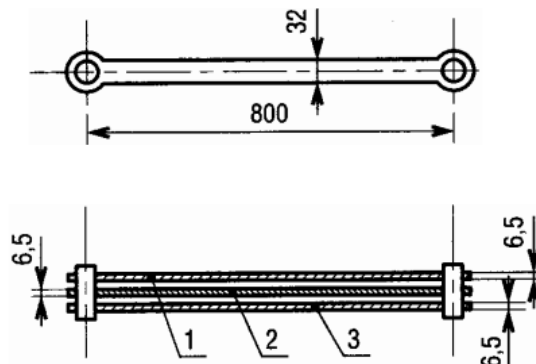


Figure 3 : Fer plat pour transmission

ETUDE DE CAS 2 : CISAILLEMENT SIMPLE

En cisaillement simple, pour évaluer la contrainte tangentielle moyenne, il faut tenir compte de l'effort qui engendre le cisaillement et du nombre de sections cisillées. L'effort tranchant T_y est donc égal à $\frac{T}{n}$ avec « T » effort de cisaillement et « n » nombre de sections cisillées.

$$\tau_{moy} = \frac{T}{nS} = \frac{T_y}{S} \quad \text{et la condition de résistance s'écrit : } \tau_{moy} \leq \frac{R_{eg}}{s} = R_{pg}$$

R_{eg} = limite élastique au cisaillement ou au glissement en MPa

R_{pg} = Résistance pratique au glissement ou au cisaillement en MPa

s = coefficient de sécurité (sans unité)

PROBLEME 1 : Articulation cylindrique

Une articulation cylindrique entre deux barres plates 1 et 2 est réalisée comme l'indique la figure 4. La liaison est assurée par un axe cylindrique 3 de diamètre « d » inconnu. L'effort maximal supporté par la liaison est de 5 000 daN.

La résistance pratique (ou admissible) au cisaillement du matériau de l'axe est de 5 daN.mm⁻². Déterminer le diamètre « d » de l'axe 3. Indiquer la (ou les) section(s) cisillée(s).

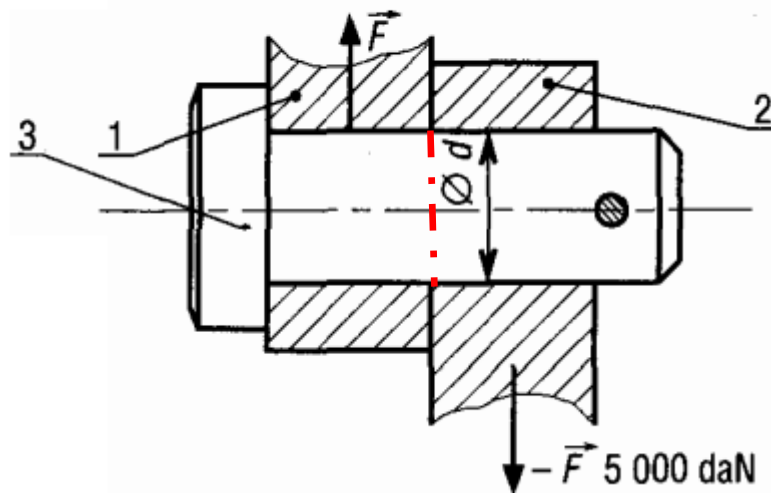


Figure 4 : Axe d'articulation cylindrique

--- Une section cisillée sous l'action de l'effort de cisaillement F

Résolution

1 – L'axe 3 est sollicité en cisaillement (il est soumis à deux forces opposées perpendiculaires à sa ligne moyenne qui ont tendance à le sectionner) : les surfaces de contact de 1 et 2 « glissent » l'une par rapport à l'autre sous l'action de F.

2 – Détermination du diamètre « d » : Condition de résistance

$\tau_{moy} \leq \frac{R_{eg}}{s}$ soit $\frac{T}{nS} \leq R_{pg}$; ici $n=1$ et $S = \frac{\pi d^2}{4}$ ce qui donne comme condition de résistance :

$$\frac{4F}{\pi d^2} \leq R_{pg} \text{ soit } d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi R_{pg}}}$$

$$AN : d_{mini} = \sqrt{\frac{4 \times 5000}{\pi \times 5}} = 35,68 \text{ mm}$$

PROBLEME 2: articulation réalisée par chape

L'articulation proposée assure la liaison (pivot) entre la chape 1 et le tirant 2 au moyen d'un axe 3 arrêté en translation par deux circlips 4 (voir figure 5). La résistance admissible au cisaillement de l'axe 3 est égale à 80 MPa. Si le diamètre « d » de l'axe est égal à 50 mm, déterminer l'effort F maximal transmissible par la liaison.

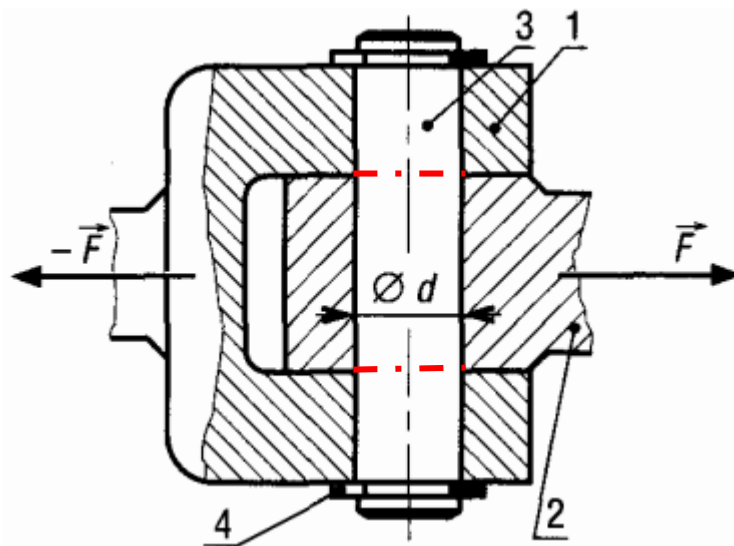


Figure 5

Résolution :

1 - L'axe 3 est sollicité en cisaillement, nous avons 2 sections cisillées.

2 - L'expression de la contrainte tangentielle moyenne de cisaillement est donnée par la relation suivante : $\tau_{moy} = \frac{F}{2S} = \frac{2F}{\pi d^2}$

3 - La condition de résistance au cisaillement impose $\frac{2F}{\pi d^2} \leq R_{pg}$

Soit $F \leq \frac{\pi d^2 R_{pg}}{2}$, tout calcul fait, F maximale admissible vaut : 31416 daN

PROBLEMES A RESOUDRE

Problème 1 : Poinçonnage

Un poinçon **1** réalise un trou oblong dans une tôle **2** de 3 mm d'épaisseur.

- 1 - Si la résistance à la rupture par cisaillement du matériau de la tôle est de 25 daN.mm^{-2} , déterminer l'effort F nécessaire au poinçonnage.
- 2 - En déduire la contrainte de compression dans le poinçon.

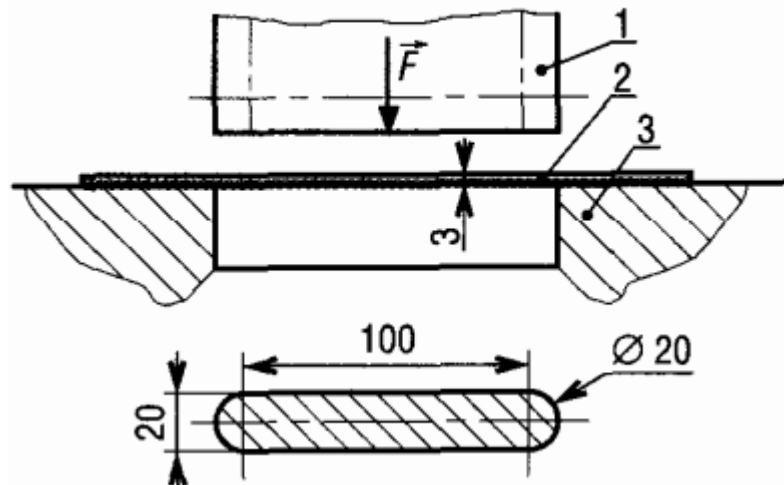


Figure 6

Problème 2 : Accouplement

Un accouplement **3** à deux goupilles **4** et **5** permet la transmission de puissance d'un arbre **1** vers un arbre **2**. Le couple maximal à transmettre est de 300 Nm, le diamètre des arbres est de 40 mm. Si la contrainte admissible au cisaillement du matériau des goupilles est de 300 MPa, déterminer leur diamètre d .

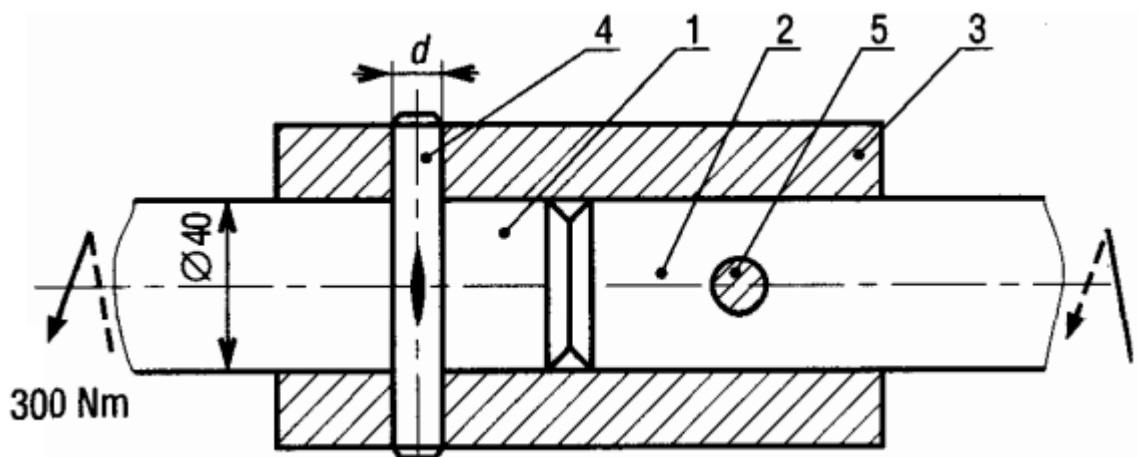


Figure 7 : Accouplement rigide

ETUDE DE CAS 3 : TORSION SIMPLE

HYPOTHESES SUPPLEMENTAIRES

Les poutres considérées sont toutes de sections droites circulaires et constantes.

Une nouvelle notion est introduite dans cette partie, il s'agit de la géométrie de masse. En torsion simple la détermination de la section de la poutre passe par le calcul du moment quadratique polaire de la dite section para rapport à son centre de masse G.

- ✓ Pour une section circulaire de diamètre d , $I_G = I_0$ est le moment quadratique polaire de la section par rapport au centre de masse G de la section, il s'exprime en mm^4 .

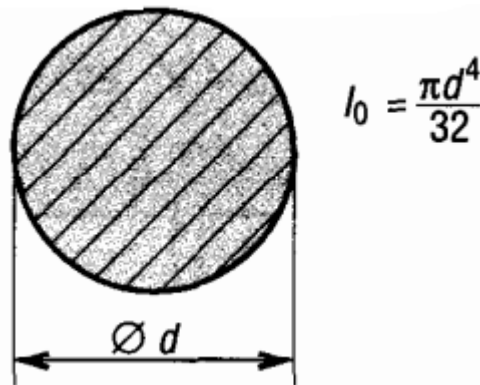


Figure 8 : Moment quadratique polaire d'une section circulaire de diamètre « d »

- ✓ Pour une section tubulaire, le moment quadratique polaire est donné par la relation ci – dessous

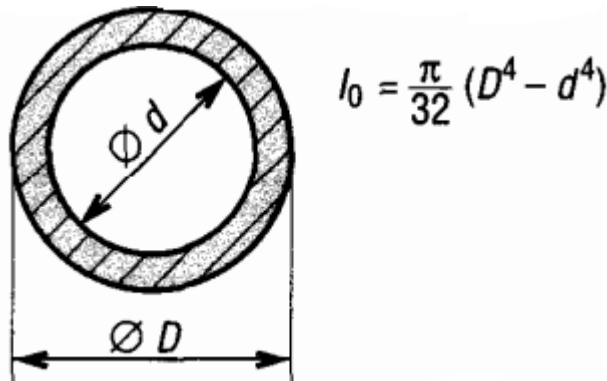


Figure 9 : Moment quadratique d'une section tubulaire circulaire

L'équation de déformation met en relation le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion θ .

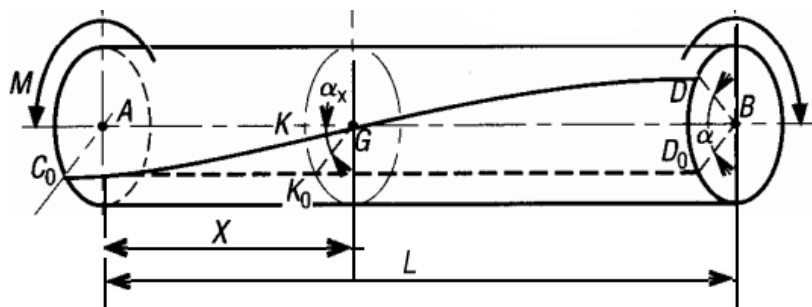


Figure 10 : Angle de torsion

Pour calculer l'angle unitaire de torsion, il faut supposer que les différentes sections droites de la poutre tournent toutes entre elles de la même manière ; l'angle de torsion α entre deux sections droites quelconques est proportionnel à la distance entre celles-ci :

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{\alpha_x}{x} = \theta = \text{angle unitaire de torsion en rad/m}$$

- ✓ Equation de déformation : $M_t = G\theta I_0$ avec G module d'élasticité transversale du matériau de la poutre ou module de Coulomb en MPa.
- ✓ Expression la contrainte tangentielle maximale de torsion

$$|\tau|_{\text{Maxi}} = \frac{|M_t|}{I_0} \frac{d}{2} \text{ pour une section circulaire de diamètre « d ».}$$

Problème 1 :

Déterminer la puissance transmise et la contrainte de cisaillement maximale dans l'arbre si le diamètre d'enroulement de la courroie sur la poulie est de 100 mm et si $T_1 = 1\,000\text{ N}$ et $T_2 = 400\text{ N}$ sont les tensions respectives des deux brins de celle-ci.

Fréquence de rotation de l'arbre, $N_{\text{arbre}} = 1\,000\text{ tr/min}$.

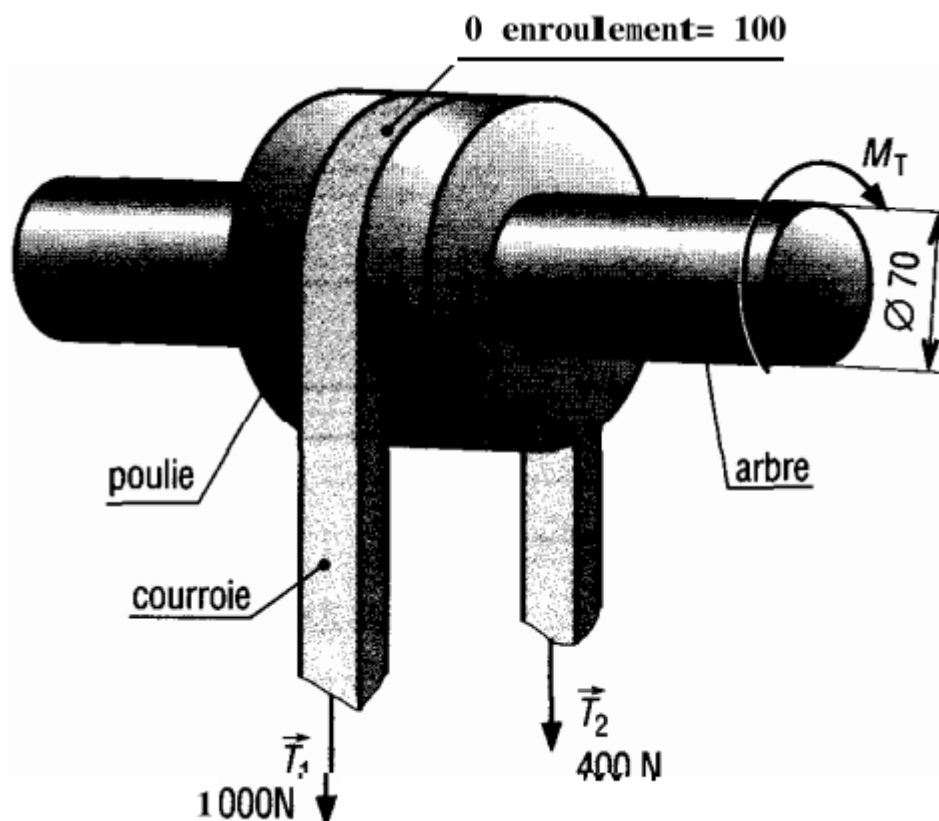


Figure 11 : Transmission par poulies - courroies

Résolu :

1 – Calcul du couple transmis

$$C = (T_1 - T_2) \times \frac{d}{2}$$

A.N. $C = 30 \text{ N.m}$

2 - La puissance transmise est donnée par la formule $P = C\omega = C \frac{\pi N}{30}$

Donc $P = 3141,6 \text{ W}$

3 – Calcul de la contrainte maximale de cisaillement dans l'arbre ou contrainte tangentielle maximale de torsion dans l'arbre.

Le moment de torsion est égal au couple calculé en 1, $M_t = C$

$$|\tau|_{\text{Maxi}} = \frac{16C}{\pi d^3} = 0,445 \text{ MPa}$$

Problème 2 :

L'arbre plein, de diamètre d et de longueur 2 m, relie un moteur à un récepteur par l'intermédiaire de deux accouplements (voir figure 12, ci – dessous). La puissance transmise est de 20 kW à 1 500 tr/min.

1 - Si on impose une contrainte de cisaillement admissible de 80 MPa pour le matériau de l'arbre, déterminer le diamètre minimal d nécessaire.

2 - On impose un angle de torsion de $0,2^\circ$ entre les deux extrémités de l'arbre, $G = 80 \text{ GPa}$.

Déterminer le diamètre minimal d nécessaire

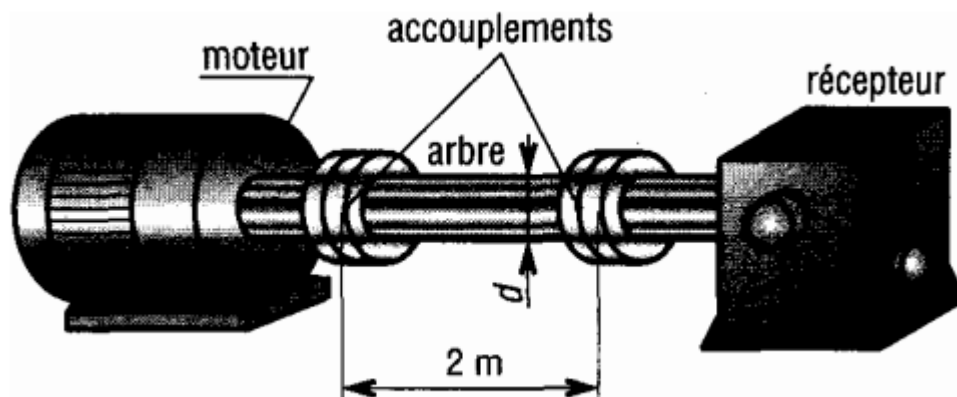


Figure 12 : Transmission de puissance entre arbres en prolongement l'un de l'autre

ETUDE DE CAS 4 : FLEXION SIMPLE

HYPOTHESES SUPPLEMENTAIRES

- ✓ La ligne moyenne de poutre est droite.
- ✓ Le système des forces extérieures appliquées à la poutre peut se réduire à un système coplanaire et ce plan est un plan de symétrie de la poutre.
- ✓ Toutes les forces appliquées à la poutre sont perpendiculaires à la ligne moyenne.
- ✓ Le torseur des efforts de cohésion à la configuration suivante

$$_G \left\{ \begin{array}{ll} N = 0 & M_t = 0 \\ T_y \neq 0 & M_{fy} = 0 \\ T_z = 0 & M_{fz} \neq 0 \end{array} \right\}_{x,y,z}$$

MEHODOLOGIE D'ETUDE

1 – Déterminer le torseur des efforts de cohésion tout le long de la poutre.

2 – Tracer le diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissant.

Vérifier la relation $T_y(x) = -M'_{fz}(x)$, pour chaque tronçon.

3 – En déduire l'abscisse de la section la plus sollicitée (au point G où $|M_{fz}|$ est maxi).

4 – Ecrire l'expression de $|\sigma|$ maxi

$$|\sigma|_{\text{maxi}} = \frac{|M_{fz}|_{\text{maxi}}}{I_{Gz}} \cdot y_{\text{maxi}} ;$$

$$\mu = \frac{I_{Gz}}{y_{\text{maxi}}} = \text{module de flexion},$$

donné dans les catalogues constructeurs pour déterminer la section de la poutre

Quelques expressions de I_{Gz} pour des sections particulières

Moments quadratiques ou inerties à connaître

	I_{Gyy}	I_{Gzz}	$I_G = I_{Gyy} + I_{Gzz}$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{hb}{12}(b^2+h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$

5 – Ecrire la condition de résistance Condition de résistance en considérant que la contrainte normale de flexion est prépondérante sur la contrainte tangentielle de flexion.

$$|\sigma|_{\text{Maxi}} \leq R_{pe} \text{ soit } \frac{|M_{fz}|_{\text{Maxi}}}{I_{Gz}} \cdot y_{\text{maxi}} \leq R_{pe}$$

Déterminer la section minimale en déterminant le module de flexion.

PROBLEMES : Voir fiche TD