SYSTEME DU PREMIER ETDEUXIEME ORDRE

Leçon 1 : Systèmes du premier ordre

1) Définition

Ce sont des systèmes qui sont régit par l'équation différentielle de la forme généralisée suivante :

$\tau \frac{ds(t)}{dt}$ + s(t) = k e(t) + $\tau' \frac{de(t)}{dt}$; τ, τ' et k sont des constantes

e(t) : entrée du système

s(t) : sortie du système

Si τ'=0, le système est dit du 1er ordre simple sinon il est dit du 1er ordre généralisé.

2) Système du 1er ordre simple

- **Fonction de transfert**

$$\tau' = 0 \Longrightarrow \qquad \tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k\, e(t)$$

Toutes les conditions initiales étant nulles appliquons, la transformée de Laplace à l'équation différentielle ci-dessus :

$\tau PS(P) + S(P) = kE(P)$ soit $F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{k}{1+\tau P}$

F(P) est la forme canonique de la fonction de transfert d'un système du 1er ordre simple.

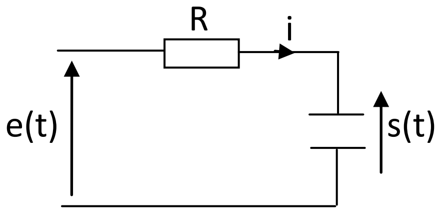
k = $\lim_{P\to 0} F(P)$: gain statique du système

τ : Constante du système

➢ Exemple de systèmes du 1er ordre simple

Exemple

Déterminons la fonction de transfert $F(P)=\frac{S(P)}{E(P)}$ du système.



$e(t) = Ri + s(t)$ or $i = c\frac{ds(t)}{dt}$

$e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$ appliquons Laplace, on a :

$E(P) = RCP\,S(P) + S(P)$ soit $\mathbf{F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{1}{1+RCP}}$

Par identification à la forme canonique, on a : $k = 1$ et $\tau = RC$

3) Système du 1er ordre généralisé

➢ Fonction de transfert

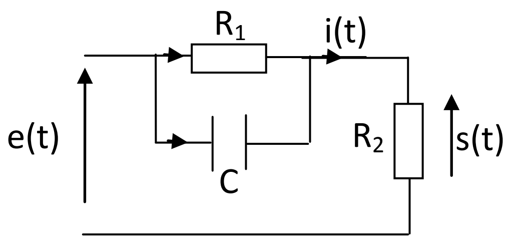
$$\tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k\,e(t) + \tau'\frac{de(t)}{dt}$$

Toutes les conditions initiales étant nulles appliquons Laplace, on a :

$\tau PS(P) + S(P) = KE(P) + \tau' PE(P)$ soit $\mathbf{F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = k\frac{1+\lambda P}{1+\tau P}}$ avec $\lambda = \frac{\tau'}{k}$

F(P) est la forme canonique de la fonction de transfert d'un système du 1er ordre généralisé

➢ Exemple d'un système de 1er ordre généralisé



Déterminer la fonction de transfert $F(P)=\frac{S(P)}{E(P)}$du système.

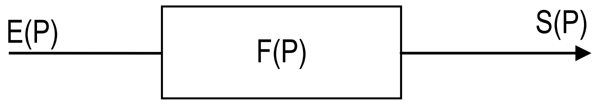
$S(P) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}E(P)$: diviseur de tension tel que $Z_1 = R_1 \parallel C = \frac{R_1}{1+R_1CP}$ et $Z_2 = R_2$

$\Longrightarrow S(P) = \frac{R_2}{R_2+\frac{R_1}{1+R_1CP}}E(P) = \frac{R_2(1+R_1CP)}{R_1+R_2+R_1R_2CP}E(P)$

Soit $\mathbf{F(P)} = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + R_1 CP}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} CP}$ par identification à la forme canonique :

k = $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$: gain statique, $\lambda = R_1C$, $\tau = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$

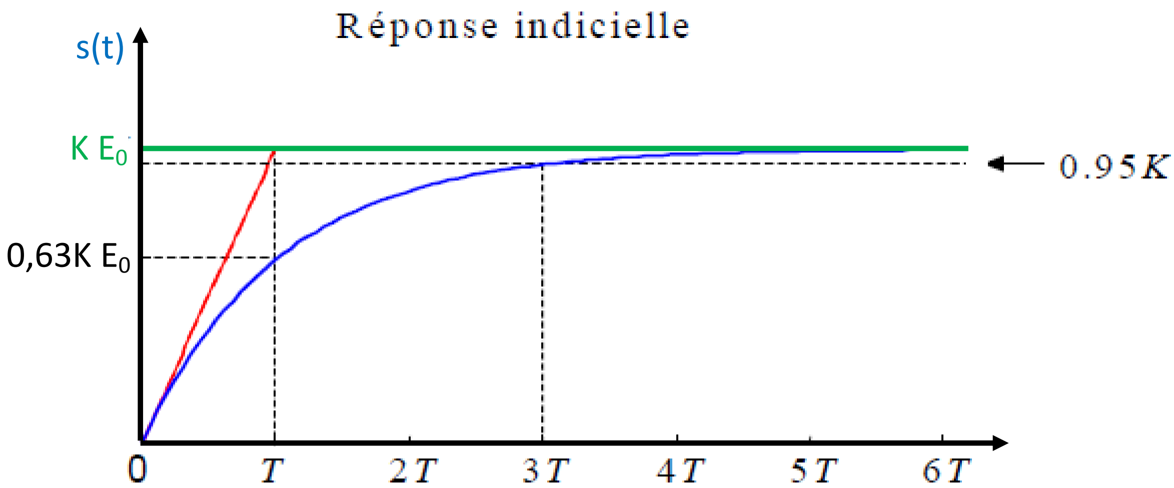
4) Réponses a des entrées typiques d'un système du 1er ordre simple



avec $F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{K}{1+\tau P}$

- **Réponse à un échelon** ($e(t) = E_0\,\mu(t)$: échelon d'amplitude E_0)

S(P) = F(P).E(P) or E(P) = $\frac{E_0}{P}$ $\Longrightarrow$ S(P) = $\frac{kE_0}{P(1+\tau P)}$ soit $s(t) = kE_0\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\mu(t)$



On définit :

- L'erreur de position

C'est l'écart obtenu lorsque l'entrée est un échelon :

$$\varepsilon_P = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{P \to 0} \varepsilon(P) \quad \text{avec } \varepsilon(t) = e(t) - s(t)$$

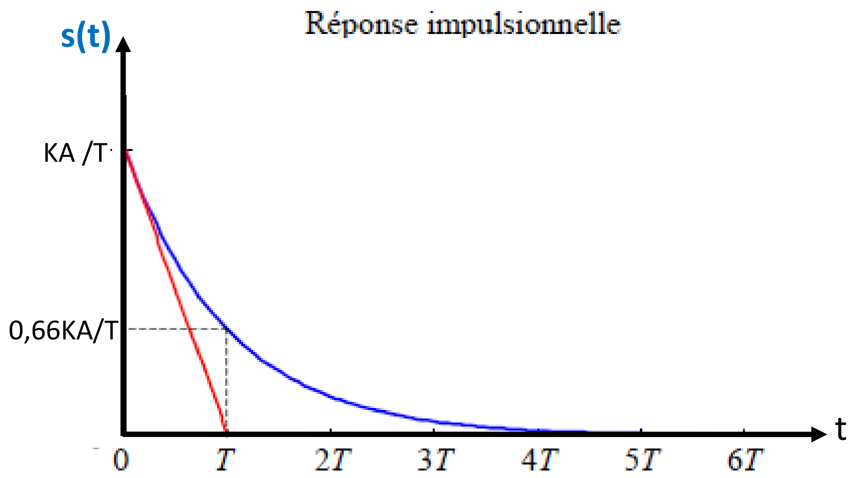
- Le temps de réponse à 5%

C'est le temps que met le système pour être à 95% de sa valeur finale. C'est le temps de réponse qui définit la rapidité d'un système. Soit tr ce temps de réponse.

On a :**tr (5%) = 3 τ soit tr (x%) = - $\tau \ln \frac{x}{100}$**

➢ **Réponse à une impulsion** (**e(t) =A$\delta(t)\ \mu(t)$: amplitude A**)

S(P) = F(P).E(P) or E(P) = A $\Rightarrow$ S(P) = $\frac{KA}{1+\tau P}$ soit **s(t) = $\frac{kA}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} \mu(t)$**



- **Réponse à une rampe** (**e(t) = at $\mu(t)$**)