

Chapitre 2 : TRANSFORMATION DE LAPLACE

Cette partie est destinée à comprendre les règles de la transformation de Laplace qui est un chapitre indispensable pour la suite du programme d'Automatique.

A la fin du cours, l'étudiant sera capable de déterminer la transformée de Laplace d'une fonction, de retrouver son originale et d'appliquer les différents théorèmes tels que le théorème du retard, le théorème de la valeur initiale et le théorème de la valeur finale.

1) DEFINITION

Soit $f(t)$ une fonction du temps, définie pour $t > 0$ et nulle pour $t < 0$. Soit P une variable complexe, on appelle transformée de Laplace de $f(t)$ la fonction de la variable complexe notée $F(P)$ ou $\mathcal{L}[f(t)]$ telle que :

$$F(P) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-Pt} dt$$

L'existence de $F(P)$ suppose que l'intégrale converge. Cette transformation est bijective, $f(t)$ est dite transformée inverse ou originale de $F(P)$. on a :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(P)]$$

Exemple : $f(t) = e^{-at} u(t)$: déterminons la transformée de Laplace de $f(t)$.

$$\begin{aligned} F(P) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-Pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(P+a)t} dt \\ &= -\frac{1}{P+a} [e^{-(P+a)t}] \\ \Rightarrow F(P) &= \frac{1}{P+a} \end{aligned}$$

2) TABLE DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

	$f(t)u(t) ; t > 0$	$F(P) = \mathcal{L}[f(t)u(t)]$
1	$u(t)$	$\frac{1}{P}$
2	$\delta(t)u(t)$	1
3	$tu(t)$	$\frac{1}{P^2}$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{P^{n+1}}$
5	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{P+a}$
6	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(P+a)^2}$
7	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(P+a)^{n+1}}$
8	$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{P^2 + \omega^2}$
9	$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{P}{P^2 + \omega^2}$
10	$f(t-\tau)u(t-\tau) ; \tau > 0$	$e^{-\tau P}F(P)$
11	$u(t-\tau) ; \tau > 0$	$\frac{e^{-\tau P}}{P}$
12	$(t-\tau)u(t-\tau) ; \tau > 0$	$\frac{e^{-\tau P}}{P^2}$
13	$e^{-at}f(t)u(t)$	$F(P+a)$
14	$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{P+a}{(P+a)^2 + \omega^2}$
15	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(P+a)^2 + \omega^2}$
16	$f(at)u(t) ; a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{P}{a}\right)$

17	$\lambda e^{-at} \cos(\omega t + \varphi) u(t)$ <p>avec $\lambda = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + (\beta - a\alpha)^2}$</p> <p>et $\varphi = -\arctan\left(\frac{\beta - a\alpha}{\alpha\omega}\right); \alpha \neq 0; \omega \neq 0$</p>	$\frac{\alpha P + \beta}{(P + a)^2 + \omega^2}$
18	$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$	$PF(P) - f(0^+)$
19	$f''(t) = \frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$P^2F(P) - Pf(0^+) - f'(0^+)$
20	$f^n = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$P^n F(P) - P^{n-1} f(0^+) - P^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{n-1}$
21	$g(t) = \int_0^t f(x) dx$	$G(P) = \frac{F(P)}{P} + \frac{g(0^+)}{P}$
22	f est périodique de période T	$\frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$
23	$(f * g)(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$	$F(P) \cdot G(P)$

3) PROPRIETES

➤ Linéarité

Si $f(t)$ et $g(t)$ ont des transformées de Laplace alors :

- $\mathcal{L}[a f(t)] = a F(P)$
- $\mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] = a F(P) + b G(P)$

➤ Recherche de l'originale

On se place dans le cas où $F(P)$ est une fraction dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur. On cherche les zéros (racines du numérateur) et les pôles (racines du dénominateur).

- **Pôles réels et simples**

On écrit alors $F(P)$ sous la forme :

$$F(P) = \frac{A}{P-P_1} + \frac{B}{P-P_2} + \frac{C}{P-P_3} + \dots$$

On obtient alors des expressions simples dont on peut trouver l'original dans le tableau de transformée.

Exemple : $F(P) = \frac{P+2}{P^2+9P+20}$

Recherche de pôles : on résoud $P^2 + 9P + 20 = 0$

$$\Rightarrow P_1 = -5 \text{ et } P_2 = -4$$

$$\Rightarrow F(P) = \frac{P+2}{(P+5)(P+4)} = \frac{A}{P+5} + \frac{B}{P+4}$$

Détermination de A et B

$$\lim_{P \rightarrow -5} (P+5)F(P) = A = 3 \text{ et } \lim_{P \rightarrow -4} (P+4)F(P) = B = -2$$

$$\Rightarrow F(P) = \frac{3}{P+5} - \frac{2}{P+4}$$

Expression de l'originale de $F(P)$

$$\Rightarrow \mathbf{f(t) = (3e^{-5t} - 2e^{-4t})\mu(t)}$$

- **Pôles réels et multiples**

On écrit alors $F(P)$ sous la forme :

$$F(P) = \frac{A_\alpha}{(P-P_1)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(P-P_1)^{\alpha-1}} + \frac{A_{\alpha-2}}{(P-P_1)^{\alpha-2}} + \dots + \frac{A_1}{P-P_1} + \frac{B}{P-P_2} + \frac{C}{P-P_3} + \frac{D}{P-P_4} + \dots$$

Exemple : $F(P) = \frac{P+2}{P(P+3)^2}$

$$F(P) = \frac{A}{P} + \frac{B}{(P+3)^2} + \frac{C}{P+3}$$

$$\lim_{P \rightarrow 0} PF(P) = A = \frac{2}{9}; \quad \lim_{P \rightarrow -3} (P+3)^2 F(P) = B = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} (P+3)F(P) = A + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow F(P) = \frac{2}{9} \frac{1}{P} + \frac{1}{3} \frac{B}{(P+3)^2} - \frac{2}{9} \frac{C}{P+3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{f(t) = \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3} t e^{-3t} - \frac{2}{9} e^{-3t} \right) \mu(t)}$$

• **Pôles réels et complexes**

La décomposition de $F(P)$ donnera un terme de la forme :

$$F(P) = \frac{\alpha P + \beta}{(P+a)^2 + \omega^2} \text{ avec } P_1 = -a + j\omega \text{ et } P_2 = -a - j\omega \text{ racines complexes du dénominateur.}$$

Exemple : $F(P) = \frac{P+1}{P(P^2+P+2)}$

$$F(P) = \frac{P+1}{P(P^2+P+2)} = \frac{A}{P} + \frac{\alpha P + \beta}{(P+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2}$$

$$\lim_{P \rightarrow 0} PF(P) = A = \frac{1}{2}; \lim_{P \rightarrow +\infty} PF(P) = A + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$F(1) = A + \frac{\alpha + \beta}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} F(P) &= \frac{P+1}{P(P^2+P+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{P} - \frac{1}{2} \frac{P+1}{(P+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{P} - \frac{1}{2} \frac{P + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(P+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{P} - \frac{1}{2} \frac{P + \frac{1}{2}}{(P+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(P+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{P} - \frac{1}{2} \frac{P + \frac{1}{2}}{(P+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} - \frac{1}{4} \frac{\frac{\sqrt{7}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{7}}}{(P+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{P} - \frac{1}{2} \frac{P + \frac{1}{2}}{(P+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} - \frac{1}{2\sqrt{7}} \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(P+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t - \frac{1}{2\sqrt{7}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \right) \mu(t)$$

➤ **Transformée de Laplace d'une fonction périodique**

Soit une fonction $f(t)$ périodique de période T ,

On définit $g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } 0 < t < T \\ 0 & \text{pour } t > T \end{cases}$ afin d'écrire :

$$f(t) = g(t)\mu(t) + g(t-T)\mu(t-T) + \dots + g(t-nT)\mu(t-nT)$$

$$\Rightarrow F(P) = G(P) + e^{-TP}G(P) + \dots + e^{-nTP}G(P) + \dots$$

4) THEOREMES

➤ Théorème du retard

$$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-PT}F(P)$$

Exemple : soit $f(t) = 3e^t u(t)$, déterminer la transformée de Laplace de $f(t-2)$

$$\mathcal{L}[f(t - 2)] = e^{-2P}F(P)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t - 2)] = \frac{3e^{-2P}}{P-1}$$

➤ Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF(P)$$

Ce théorème permet de calculer $f(0)$ sans passer par l'originale.

Exemple : soit $F(P) = \frac{P+2}{P^2+9P+20}$, calculer $f(0)$.

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF(P)$$

$$\Rightarrow f(0) = \lim_{P \rightarrow +\infty} \left(\frac{P^2}{P^2} \right) = 1$$

➤ Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF(P)$$

Il permet de connaître la valeur finale du système sans connaître l'originale.

Exemple : soit $F(P) = \frac{P+2}{P(P^2+4)}$; calculer $f(+\infty)$.

$$f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF(P)$$

$$\Rightarrow f(+\infty) = \lim_{P \rightarrow 0} \left(\frac{P+2}{P^2+4} \right) = \frac{1}{2}$$

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Calculer la transformée de Laplace de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(t) = (t^4 + 2)u(t) ; f_2(t) = 7 \sin(3t) u(t) ; f_3(t) = e^{-3t} \cos(7t) u(t)$$

Exercice 2

Trouver l'original des transformées de Laplace suivantes :

$$F_1(P) = \frac{P+3}{P^2+3P-4} ; \quad F_2(P) = \frac{P+2}{P(P^2+P+3)}$$

$$F_3(P) = \frac{1}{P(P^2+5)} ; \quad F_4(P) = \frac{P}{P^2+36}$$

Exercice 3

Dans un circuit électrique, la charge $q(t)$ s'exprime par $\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 8 \frac{dq(t)}{dt} + 25q(t) = 150u(t)$: où $u(t)$ est l'échelon unité. Si toutes les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression de la charge $q(t)$. En déduire celle du courant $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.

Exercice 4

Soit un système régi par l'équation différentielle ci-dessous :

$$\frac{d^3v_s(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2v_s(t)}{dt^2} + 5 \frac{dv_s(t)}{dt} = \frac{dv_e(t)}{dt} + 3v_e(t)$$

Toutes les conditions initiales sont nulles.

1) Déterminer l'expression de $H(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)}$.

2) Déterminer $h(t)$, l'original de $H(P)$ sous la forme

$$h(t) = \alpha(\beta + \gamma e^{-at} \cos(\omega t) + \lambda e^{-at} \sin(\omega t)) \mu(t)$$

En déduire les valeurs des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, a$ et ω .