Compagnie Ivoirienne d'Electricité

Centre des Métiers de l'Electricité

Cours de Mathématiques

Primitives

Professeurs :

N'GORAN Benoît Kouadio
KONE TALNAN Lucien Benoît
KOUAME Benoît

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et telle que :
$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

2. Propriétés

a. Primitives usuelles

Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \longmapsto a\ (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n (n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ (n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n}\ \ (n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$	$x \longmapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c\ (n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln\lvert x\rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x + c$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto x\ln(x) - x + c$	$]0; +\infty[$
$x \longmapsto x^r\ (r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$	$x \longmapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c\ (r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	$x \longmapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$x \longmapsto x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \longmapsto \tan(x) + c$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \longmapsto \frac{1}{\sin(x)}$	$x \longmapsto \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + c$	$\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)}$	$x \longmapsto \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \longmapsto \sin(ax + b)$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*)$	$x \longmapsto -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$

$x \longmapsto \cos(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*)$	$x \longmapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)+c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)+c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \mathrm{sh}(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*)$	$x \longmapsto \frac{1}{a}\mathrm{ch}(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \mathrm{ch}(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*)$	$x \longmapsto \frac{1}{a}\mathrm{sh}(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$	$x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x)+c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^2+a}, a \neq 0$	$x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)+c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x)+c$ $x \longmapsto -\mathrm{Arccos}(x)+c$	$]-1,1[$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a \neq 0$	$x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)+c$	$]-a,a[$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}, a \neq 0$	$x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a \neq 0$	$x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c$	$]-\infty;-a[\mathrm{U}]a;+\infty[$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \longmapsto \mathrm{Argsh}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \longmapsto \mathrm{Argsh}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+c$	$]-\infty;-1[\mathrm{U}]1;+\infty[$

NB : c est un nombre réel.

b. <u>Opérations sur les primitives</u>

- Soient f et g deux fonctions admettant respectivement pour primitives sur un intervalle I les fonctions F et G, $\lambda \in \mathbb{R}$
  - ✓ la fonction $f+g$ admet pour primitive sur I, la fonction $F+G$
  - ✓ la fonction λf admet pour primitive sur I, la fonction λF
- Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction f	**Une primitive de f**	**Sur l'intervalle**

$u'u^n (n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	I
$\dfrac{u'}{u^n}$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\})$	$\{\forall x \in I, u(x) \neq 0\}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\{\forall x \in I, u(x) > 0\}$
$u'u^r (r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1} (r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$	$\{\forall x \in I, u(x) \geq 0\}$si r$\geq 0$ $\{\forall x \in I, u(x) > 0\}$si r$< 0$
$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\dfrac{u}{v}$	$\{\forall x \in I, u(x) \neq 0\}$
$u'v + uv'$	$u \times v$	I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$\{\forall x \in I, u(x) \neq 0\}$
$u'e^u$	e^u	I

Exemple 1 :

.

- Déterminer une primitive sur $]-1\,;+\infty[$de $f(x) = \frac{-3}{x+1}$, une primitive sur $]2\,;+\infty[$de $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$ et une primitive sur $]2\,;+\infty[$ de $j(x) = \frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.
- Déterminer une primitive de chaque fonction sur I :

  $$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}, I = \mathbb{R}\backslash\{-1\} \quad \text{et } g(x) = \frac{2}{(3x+2)^5}, I = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3}\right\}$$
- Déterminer une primitive de chaque fonction sur $\mathbb{R}$:

  $h(x) = \sin(2x)$ et $k(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
- Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

  $i(x) = xe^{x^2}$; $m(x) = \sin^4(x)\cos(x)$ et $f(x) = (x+1)(x^2+2x+3)^3$.
- Déterminer une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ de chacune des fonctions suivantes : $k(x) = \tan(x)$ et $n(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.
- Dans chacun des cas suivants, donner la primitive F de f sur I avec la condition indiquée :

  $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$, $I = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$, $F(2) = 0$,

  $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$, $I = \mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln(2)$

c. Propriétés

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}P(x)$ avec $a\epsilon\mathbb{C}$ et $P(x)$ un polynôme. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{ax}Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme et $°P = d°Q$. On détermine le polynôme Q en procédant par identification des coefficients des polynômes dans la relation : $\forall x\epsilon\mathbb{R}\ \ F'(x) = f(x)$.

- Exemple 2 : Déterminer une primitive de chaque fonction sur $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = e^{-2x}(x^3 - x + 1) \text{ et } f_2(x) = e^{\frac{x}{2}}(x^2 + 2)$$

Propriété 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}(\lambda\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x))$ avec $a\epsilon\mathbb{C}$ et $\lambda, \beta\epsilon\mathbb{R}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
$F(x) = e^{ax}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$. On détermine les constantes A et B en procédant par identification des coefficients de $\cos(\omega x)$ et de $\sin(\omega x)$ dans la relation : $\forall x\epsilon\mathbb{R}\ \ F'(x) = f(x)$.

- Exemple 3 : Déterminer une primitive de chaque fonction sur $\mathbb{R}$:
  $f_1(x) = e^{2x}(\sin(x) - 2\cos(x))$ et $f_2(x) = e^{-3x}\sin(4x)$