Compagnie Ivoirienne d'Electricité

Centre des Métiers de l'Electricité

Cours de Mathématiques

Intégrale d'une fonction continue

Professeurs :

N'GORAN Benoît Kouadio
KONE TALNAN Lucien Benoît
KOUAME Benoît

1. Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I.
F une primitive de f sur I, le réel $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ est l'intégrale de a à b de f.
On note : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

2. Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; $a, b, c \in I, \lambda \in \mathbb{R}$

- $\int_a^a f(x)dx = 0$;
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **Linéarité :**
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \text{ et } \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$
- **Positivité :** $\forall x \in [a,b]$ si $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Inégalité :** $\forall x \in [a,b]$ si $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- **Inégalité de la moyenne :** f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et $M, m \in \mathbb{R}$.

Si $\forall x \in [a,b], m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

- **Valeur moyenne :**

f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.
On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$, le réel μ tel que : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

- **Valeur efficace :**

f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On appelle valeur efficace de f sur $[a,b]$, le réel f_c tel que : $f_c = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$

Exemple 4 :

a) Soit la fonction f telle que : $\begin{cases} f(x) = 3x-2, \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x}, \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Calcule $A = \int_0^e f(x)dx$.

b) Calcule $B = \int_0^\pi (2\cos x - 3\sin x)dx$.

c) Démontre que : $\int_0^1 (x^2+1)dx \leq \int_0^1 2x dx$. (on ne demande pas de calculer les deux intégrales)

d) soit i la fonction définie par $i(t) = I_{max}\sin(\omega t)$. Calculer sa valeur moyenne et efficace sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{\omega}\right]$.

e)

i. Démontrer que : $\forall x \epsilon \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], 1 \leq \frac{1}{\sin x} \leq \sqrt{2}$.

ii. Déduisons-en que : $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

3. <u>Techniques de calculs</u>

a. Utilisation des primitives usuelles

Voir les exercices N°1 et N°2 de la fiche de TD.

b. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$.
Si les fonctions dérivées u'et v' sont continues sur $[a, b]$ alors
$\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$

<u>**Exemple 5 :**</u> Calculer les intégrales suivantes :
$I = \int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$.

c. Changement de variable affine

Soit à calculer $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$et $\beta \in \mathbb{R}$. On peut procéder comme suit :

- Faire le changement de variable : $u = \alpha t + \beta \Rightarrow du = \alpha dt$
- Utiliser l'égalité $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)du$

<u>**Exemple 6 :**</u> Calculer les intégrales suivantes :
$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt$, $I_2 = \int_1^0 \frac{1}{2t+3} dt$

<u>**Exemple d'autres changements de variables :**</u>

Exemple 7 :
Calculer les intégrales suivantes :

- $J_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$ (Utiliser le changement de la variable $t = \sin(u)$)
- $J_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt$ (Utiliser le changement de la variable $t = sh(u)$ et la relation $sh^2(u) - ch^2(u) = 1$)
- $J_3 = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^3}$ (utiliser le changement de la variable $t = \tan(u)$ et la relation $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$)

d. Intégration des fonctions rationnelles :

Exemple 8 : Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2x^3+x^2-3x-3}{x^2+x-2} dx$
- $I_2 = \int_{2}^{3} \frac{x^2+x-1}{x(x-1)^2} dx$
- $I_3 = \int_{0}^{1} \frac{2x^2+5x+7}{(x+1)(x^2+2x+5)} dx$

e. Intégration par linéarisation :

La linéarisation est la transformation d'un produit en somme. Cette méthode est surtout employée pour intégrer les fonctions trigonométriques. On linéarise à l'aide des formules de trigonométrie ou à l'aide des formules d'Euler.

Exemple 9 :

- $I_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(4x)\, dx$
- $I_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(x)\, dx$
- $I_3 = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4(x) dx$

f. Intégration de $x \to e^{ax}f(x)$ par indentification

On utilisera les théorèmes suivants pour éviter une double intégration par parties

Théorème 1

Si P est un polynôme de degré n, alors une primitive de $x \longmapsto e^{ax}P(x)$ est $x \longmapsto e^{ax}Q(x)$, Q étant un polynôme de degré n.

Théorème 2

Si $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$, alors une primitive de $x \longmapsto e^{ax}f(x)$ est $x \longmapsto e^{ax}g(x)$, avec $g(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

Exemple 10 :

- $I = \int_{0}^{1} e^{2x}(x^2 - 3x + 1) dx$
- $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(\cos(2x) - \sin(2x))\, dx$

g. Intégration d'une fonction complexe à valeurs complexes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I,
a et b deux éléments de I. F et G les primitives respectives des fonctions f et g sur I.
On pose : $z(x) = f(x) + ig(x)$ (avec $i^2 = -1$) . On a :

$\int_a^b z(x)dx = [Z(x)]_a^b = Z(b) - Z(a)$ avec $Z(x) = F(x) + iG(x)$

Exemple 11 : Calculer les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\, dx$. On utilisera
$Z = I + iJ$ pour calculer I et J avec $i^2 = -1$.