

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFR-SEG

LICENCE 2

2021 – 2022

MATHEMATIQUES FINANCIERES

Chargé de cours :

Dr ASSANDE Paul

assande2000@yahoo.fr

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1. LES INTERETS SIMPLES.....	4
1. DEFINITIONS	4
2. LE CALCUL DE L'INTERET SIMPLE (I)	4
3. LA VALEUR ACQUISE (V_n) ET LA VALEUR ACTUELLE (V_o).....	6
4. L'ESCOMPTE DES EFFETS DE COMMERCE (E)	6
4.1. La technique de l'escompte	6
4.2. Les agios d'escompte	6
4.3. Le taux réel d'escompte	8
5. L'ACTUALISATION ET LES DECISIONS FINANCIERES	8
5.1. Le remplacement d'un mode de règlement	8
5.2. Le choix entre plusieurs modes de règlement	8
6. LES COMPTES COURANTS REMUNERES	9
6.1. Les comptes courants ouverts dans les établissements financiers	9
6.2. Les comptes courants d'associés	10
6.3. Quelques notions utiles.....	10
6.4. L'échelle d'intérêt.....	10
CHAPITRE 2. LES INTERETS COMPOSES	12
1. DEFINITION	12
2. LA VALEUR ACQUISE (V_n) ET LA VALEUR ACTUELLE (V_o).....	13
3. TAUX PROPORTIONNELS ET TAUX EQUIVALENTS	13
3.1. La période de capitalisation des intérêts est différente d'un an	13
3.2. La durée n'est pas égale à un nombre entier de périodes	14
3.3. Les montants sont réguliers et de valeur constante.....	15
4. TAUX MOYEN	15
5. LES DECISIONS FINANCIERES A INTERETS COMPOSES	16
5.1. Equivalence à intérêts composés.....	16
5.2. Escompte à intérêts composés	16
CHAPITRE 3. LES ANNUITES	18
1. DEFINITION	18
2. LES ANNUITES VARIABLES	18
2.1. Le calcul de la valeur acquise (V_n).....	18
2.2. Le calcul de la valeur actuelle (V_o)	18
3. LES ANNUITES CONSTANTES DE FIN DE PERIODE.....	19
3.1. Le calcul de la valeur acquise (V_n).....	19
3.2. Le calcul de la valeur actuelle (V_o)	19

3.3.	Le calcul de l'annuité (a).....	19
4.	LES ANNUITES CONSTANTES DE DEBUT DE PERIODE.....	20
4.1.	Le calcul de la valeur acquise (V_n).....	20
4.2.	Le calcul de la valeur actuelle (V_0)	20
4.3.	Le calcul de l'annuité (a).....	20
5.	EVALUATION A UNE PERIODE QUELCONQUE (V_P).....	21
6.	LES SUITES D'ANNUITES EN PROGRESSION.....	21
CHAPITRE 4 : LES EMPRUNTS INDIVIS.....		22
1.	GENERALITES	22
2.	LES MODALITES DE REMBOURSEMENT DES EMPRUNTS INDIVIS.....	22
2.1.	Le remboursement par amortissements constants	23
2.2.	Le remboursement par annuités constantes	23
2.3.	Le remboursement in fine	24
2.4.	Les relations entre les amortissements et l'annuité constante.....	24
2.5.	Le coût d'un emprunt : le taux effectif global (TEG)	25
2.6.	Les quatre règles fondamentales	25
CHAPITRE 5. LE CHOIX DES INVESTISSEMENTS		26
1.	LES PARAMETRES	26
1.1.	Les paramètres liés à un projet d'investissement	26
1.2.	Les paramètres liés à un mode de financement.....	26
1.3.	Le taux d'actualisation (t).....	27
2.	LES CRITERES DE CHOIX	27
2.1.	La valeur actuelle nette (VAN).....	27
2.2.	L'indice de profitabilité.....	27
2.3.	Le taux de rentabilité interne (TRI).....	27
2.4.	Le délai de récupération du capital investi (DRCI)	28
3.	L'UTILISATION ET LE CHOIX DU CRITERE	28
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		29
ANNEXES : Les fonctions financières sous EXCEL		30

1. DEFINITIONS

X prête de l'argent à Y pendant un temps déterminé. L'intérêt constitue la rémunération du service rendu par X à Y : c'est le loyer de l'argent prêté.

Capital ou **principal** : Somme d'argent mise à disposition d'un emprunteur ou placée par un épargnant.

Intérêt : Pour un emprunteur (consommateur, entreprise), c'est le prix à payer au prêteur (banque,) pour utiliser un capital pendant un temps donné. Pour un épargnant, c'est le rapport d'un placement (récompense pour la remise à plus tard de l'utilisation d'un capital).

C'est donc le loyer de la somme prêtée ou placée, calculé en utilisant un **taux d'intérêt** appliqué au capital. Ce taux est une fonction du temps (croissante), du risque (il y a un risque de contrepartie : l'emprunteur peut faire défaut ; le taux d'intérêt sera une fonction croissante du risque : plus l'emprunteur fait prendre de risque, plus le taux est élevé), des conditions économiques en général (si le prêteur a possibilité de placer son argent à 4.5%, il n'acceptera pas de prêter à moins). Le taux dépend donc de nombreux paramètres économiques, financiers, politiques, de circonstances propres à l'opération considérée (durée, solvabilité de l'emprunteur, ...).

Valeur acquise par le capital : c'est le capital augmenté des intérêts acquis pendant le temps couru au-delà de la date choisie comme origine des temps. Elle est toujours associée à une date.

$$\text{Valeur acquise} = \text{capital} + \text{intérêts.}$$

2. LE CALCUL DE L'INTERET SIMPLE (I)

L'intérêt simple est essentiellement utilisé pour des opérations à court terme (moins d'un an). L'intérêt simple est directement proportionnel au montant du capital placé et à la durée du placement du capital. (L'intérêt simple obtenu sur une période donnée n'est pas incorporé au capital pour le calcul des intérêts de la période suivante.)

Le coefficient de proportionnalité est le taux de l'intérêt. C'est le loyer de l'argent pour une période (unité de temps), en général une année comptée pour 365 ou 360 jours, et pour une unité de capital.

Exemples : taux de 8 %, de 5 %, 10 %, ...

La durée du placement pour les opérations financières à court terme est exprimée en jours ou en mois. La convention de calcul majoritairement adoptée consiste à retenir le nombre exact de jours, que l'on divise par **365**, soit on considère les mois de 30 jours sur une année de 360 jours (durée en **jours** d'une **année** dite **commerciale**, simplification souvent utilisée dans les relations commerciales). Le nombre exact de jours entre deux dates se calcule en excluant une des deux dates.

Paramètres		Formule de calcul
V_o	la valeur placée ou prêtée	I = V_o x t x n m/12 j/360 ou 365
t	le taux de l'intérêt annuel pour 1	
n	la durée de placement : - en années	
m	- en mois	
j	- en jours	

- ☐ Le **nombre de jours** de placement est calculé :
- soit en dénombrant le nombre de jours réels chaque mois sur une année de 365 j ;
 - soit par mois de 30 jours sur une année de 360 jours (simplification souvent utilisée dans les relations commerciales).

Exemple

La Sté ABC a effectué les placements ci-dessous.

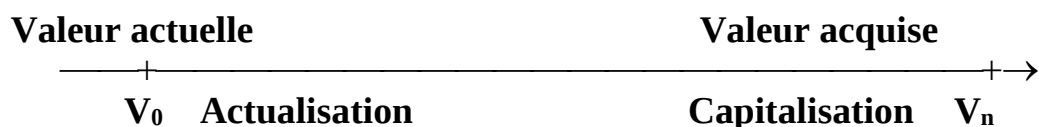
Calculer l'intérêt acquis et en déduire le taux moyen de placement (année de 365 j)

Nominal	Taux	Durée	Intérêt		V _n
5 000	5%	1 an 3 mois			
4 000	6%	8 mois			
2 000	4%	du 15/03 au 05/07			
11 000		← Taux moyen (t) (1)			

$$(1) \text{ Taux moyen} = \sum (C * n * t) / \sum (C * n)$$

Taux moyen = sommes des intérêts / [C1xn1 + C2xn2 +] avec ni = n/360 ou 365

3. LA VALEUR ACQUISE (V_n) ET LA VALEUR ACTUELLE (V_0)



Domaines d'application	• L'escompte des effets (§3) • Les décisions financières (§4)	• Les placements < 1 an (§1) • Les comptes courants rémunérés (§5)
Formules de calcul	$V_0 = V_n - \text{Intérêt}$	$V_n = V_0 + \text{Intérêt}$

Exemple : Calculer la valeur acquise des 3 placements précédents ?

Nominal	Taux	Durée	Intérêt		V_n
5 000	5%	1 an 3 mois			
4 000	6%	8 mois			
2 000	4%	du 15/03 au 05/07			

4. L'ESCOMPTE DES EFFETS DE COMMERCE (E)

4.1. La technique de l'escompte

Un effet de commerce (lettre de change, billet à ordre ou warrant) constate l'engagement pris par un débiteur de payer à son créancier à une date déterminée une somme d'argent, montant de la dette qu'il a contractée.

Si le créancier a besoin de cet argent avant l'échéance stipulée, il cédera l'effet de commerce, avec tous les droits qui s'y attachent, à une banque, suivant la technique de l'escompte : le banquier escompteur achète l'effet et se substitue au créancier ; le débiteur paiera au banquier le montant de sa dette à l'échéance fixée. Le banquier verse par avance au créancier la somme qui lui est due, mais avec des intérêts pour prix du service rendu.

Ce moyen de financement qui permet aux entreprises de **disposer du montant de leurs créances avant leur échéance** constitue une **mobilisation de créances**.

4.2. Les agios d'escompte

Vendre un effet de commerce, c'est **le négociier**. L'acheter, c'est **l'escompter**.

Le total des intérêts, frais et commissions perçus par la banque en rémunération du crédit qu'elle consent constituent les **agios**. Les agios d'escompte comportent l'escompte proprement dit et des commissions :

L'escompte (E) : il se calcule comme l'intérêt mais à partir de la **valeur nominale (Vn)** : valeur de l'effet à l'échéance.

Les commissions : Elles sont proportionnelles ou fixes et permettent à la banque de récupérer ses frais et de se rétribuer les services qu'elle rend. Généralement, sont perçues :

- **une commission d'endos** pour couvrir les frais d'endossement des effets : elle se calcule dans les mêmes conditions que l'escompte (**proportionnelle au temps**) ;
- **une commission de service** dont le montant par effet est **fixe**.

S'y ajoutent parfois des commissions spéciales, telle la commission d'acceptation dont le montant est forfaitaire, en rémunération de l'envoi des effets à l'acceptation des tirés. Ces nombreuses commissions sont très fréquemment remplacées par une seule commission forfaitaire, variable selon les banques.

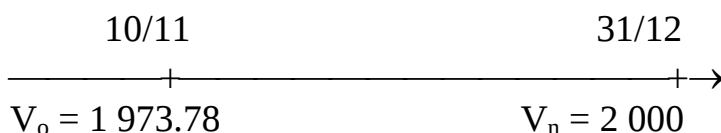
Les agios proportionnels au temps (escompte proprement dit et la commission d'endos) représentent la rémunération d'une opération financière et sont, à ce titre, exonérés de TVA. Seule la **commission de service** (rémunération du service commercial rendu par la banque) est **assujettie à la TVA**.

Les commissions majorent le taux d'escompte et rendent l'opération coûteuse, surtout si les effets sont de faible valeur nominale. En diminuant la valeur nominale du total des agios on obtient la **valeur actuelle (Vo)**.

Exemple

- Le 10/11, la Sté ABC escompte un effet de 2 000, échéance le 31/12.
- Le 13/11, elle reçoit le document ci-dessous.

CIO Compte : Sté ABC n° 264015	Montants	Calculs à reconstituer (année de 360 j)
Effet n° ..., échéance le 31/12/N, nominal :	2 000.00	
- Escompte à 7%	- 19.44	
- Commission d'endos (proportionnelle au temps) 1%	- 2.78	
- Commission fixe TTC	-4.00	
Agios TTC à déduire (dont TVA : 0.66)	- 26.22	
Net à votre crédit, le 13/11 (Nominal - Agios)	1 973.78	



Escompter un effet consiste à le remettre à sa banque pour obtenir de la trésorerie avant l'échéance.

4.3. Le taux réel d'escompte

C'est le taux de revient de l'opération pour l'entreprise: taux d'escompte majoré des diverses commissions. Il correspond au taux qui, appliqué à la valeur nominale et au temps, donne le total des agios HT = $V_n \times \text{taux réel} \times n/360 = \text{agios HT}$.

Calculer le taux réel d'escompte de l'exemple précédent ?

Agios HT =

Taux réel d'escompte =

5. L'ACTUALISATION ET LES DECISIONS FINANCIERES

La prise de décision sur le plan financier (décision de remplacement ou de choix entre plusieurs modes de règlement...) nécessite souvent de comparer plusieurs valeurs monétaires exprimées à des échéances différentes. Cette comparaison se réalise par le calcul de la valeur actuelle de chaque valeur exprimée dans le temps.

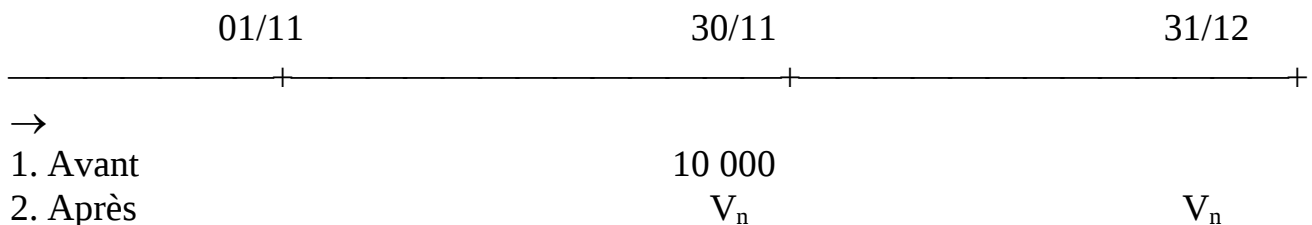
5.1. Le remplacement d'un mode de règlement

Exemple

La Sté ABC dispose d'un effet de 10 000, échéance le 30/11. Le 01/11, GRIMAUD, le tiré, demande un étalement de sa dette. La Sté ABC lui propose la création de 2 effets de montant identique, échéance le 30/11 et le 31/12 (année de 360 j).

Déterminer la valeur nominale V_n de ces 2 effets (taux d'escompte 7%) ?

(5 014.71)



Le 01/11, il doit y avoir équivalence entre les 2 modes de règlement : la valeur actuelle avant doit être égale à la valeur actuelle après.

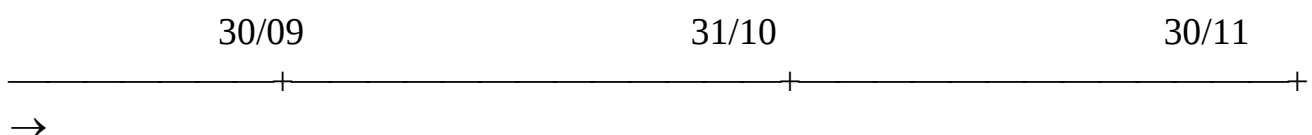
5.2. Le choix entre plusieurs modes de règlement

Exemple

Le 30/09/N, en règlement de l'achat d'un matériel (valeur 10 000 HT), la Sté ABC a le choix entre 3 modes de règlement :

- 1. soit au comptant sous escompte de 2% ;* (9 800.00)
- 2. soit avec une traite de 10 420, échéance 30/11 ;* (10 298.43)
- 3. soit avec 2 traites de 5 200, échéances 31/10 et 30/11.* (10 309.00)

Quel est le règlement le plus avantageux (escompte à 7% ; année de 360j) ? (1, 2 puis 3)



1.	9 800	
2.		10 420
3.	5 200	5 200

Le mode règlement le plus avantageux est celui pour lequel la valeur actuelle est la plus faible le 30/09 :

$V_{01} =$

$V_{02} =$

$V_{03} =$

Remarque : équivalence d'effets

Deux effets sont équivalents à une date déterminée lorsque, étant escomptés au même taux et dans les mêmes conditions à cette date, ils ont la même valeur actuelle commerciale.

Si V_1 et V_2 sont les valeurs nominales des deux effets ayant respectivement à courir n_1 et n_2 jours à compter de la date d'équivalence choisie :

$$V_1(1 - n_1t/360) = V_2(1 - n_2t/360)$$

t étant le taux annuel d'escompte.

La date d'équivalence est unique : si deux effets de valeurs nominales différentes sont équivalents à une date donnée, l'équivalence ne peut avoir lieu qu'à cette date.

6. LES COMPTES COURANTS REMUNERES

Ce sont des comptes pour lesquels les opérations créditrices (alimentant le compte) et les opérations débitrices (les prélèvements) portent intérêts.

6.1. Les comptes courants ouverts dans les établissements financiers

Leur tenue respecte certaines règles (méthode hambourgeoise) :

- les opérations sont classées par dates de valeur croissantes (1) ;
- les intérêts sont calculés sur le temps de placement du solde du compte (nombre de jours de date de valeur séparant deux soldes) ;
- le taux d'intérêt dépend du sens (débitteur ou créditeur) du solde.

(1) Il faut en effet distinguer la date d'opération (date effective de réalisation de celle-ci) et la date de valeur (la date à partir de laquelle on calcule l'intérêt) :

Nature de l'opération	Date de valeur
•Créditrice	Date d'opération majorée d'un à plusieurs jours de banque.
•Débitrice	Date d'opération minorée d'un à plusieurs jours de banque.

6.2. Les comptes courants d'associés

Ils se gèrent dans les mêmes conditions que les précédents.

6.3. Quelques notions utiles

- ❖ **Date de valeur** : c'est la date à laquelle le compte bancaire de l'entreprise est modifié ; date réelle de débit ou de crédit d'un compte bancaire. Elle détermine la durée sur laquelle sont calculés les intérêts. Elle est antérieure ou postérieure à la date d'opération selon qu'il s'agit d'un crédit ou d'un débit.
- ❖ **Jour de banque** : jour ajouté par la banque à la durée du crédit résultant de l'application des dates de valeur
- ❖ **Heure de caisse** : heure au de-là de laquelle les opérations bancaires sont réputées faites le lendemain.
- ❖ **Jours ouvrés** : jours effectivement travaillés par la banque

6.4. L'échelle d'intérêt

L'échelle d'intérêt permet à une entreprise de vérifier que les conditions négociées avec la banque sont satisfaites et en tenir compte dans la gestion quotidienne de trésorerie.

Le « **nombre de jours** » correspond au nombre de jours pendant lesquels ce capital est resté inchangé.

On appelle « **nombre** » le produit d'un capital par le nombre de jours pendant lesquels ce capital est resté inchangé.

La commission du plus fort découvert est en général égale à 0,05% du plus fort découvert de chaque mois ; elle est plafonnée à la moitié des intérêts débiteurs du trimestre. Le taux peut varier d'une banque à une autre.

Exemple : d'échelle d'intérêt d'une entreprise

Date de valeur	Mouvements		Soldes en date de valeur		Nombre de jours	Nombre	
	débiteurs	créditeurs	débiteurs	créditeurs		débiteurs	créditeurs
1/10	1725420	425400	1300020		1	1300020	
31/10	427800	678400		250600	2		501200
30/11	1110030	2357030		1246710	1		1246710
31/12	427800	263400	164400		1	164400	
	9427430	1352410			92	77426	127460
Découvert du 17/10 : 2 745 360							
Découvert du 25/11 : 3 455 520							
Découvert du 15/12 : 1 817 480							

Application :

L'extrait de l'échelle d'intérêt trimestrielle de l'entreprise UFRSEG pour le 1^{er} trimestre de l'exercice 2017 transmise par BANKCI est le suivant :

Date des opérations	Libellés	Mouvements		Soldes en date de valeur		Date de valeur	Nombre de jours	nombre	
		débit	crédit	débit	crédit			débit	crédit
1 - 4	Solde			100		1 - 4	11	1100	
10 - 4	Remise de chèque		500		400	12 - 4	7		2800
20 - 4	Domiciliation	1000		600		19 - 4	26	15600	
15 - 5	Virement		700		100	15 - 5	10		1000
25 - 5	Retrait espèces	800		700		25 - 5	11	7700	
3 - 6	Remise chèques		400	300		5 - 6	12	3600	
18 - 6	Païement chèques	200		500		17 - 6	13	6500	
30 - 6	TOTAUX	2000	1600	2200	500		---	34 500	3 800

TAF : 1) calculer le montant des intérêts débiteurs ; taux : 10%.

I = Total Nombre débiteur*0,1/365

= 34 500*0,1/365

2) calculer la commission du plus fort découvert ; taux 0,05%

Plus fort découvert :

Avril : 600

Mai : 700

Juin : 500

Total = 1 800

Commission du plus fort découvert (CPFD) = 1800*0,05%

3) calculer la commission de mouvement ; taux : 0,025%

Commission mouvement (CM) = total mouvement débiteur*0,025%

= 2000*0,025%

AGIOS HT = Intérêt + CPFD + CM

CHAPITRE 2. LES INTERETS COMPOSES

1. DEFINITION

On dit qu'un capital est placé à **intérêts composés** lorsqu'à la fin de la première **période de capitalisation**, l'intérêt de cette période est ajouté à ce capital pour produire intérêt à son tour pendant la période suivante. Ainsi de suite, à la fin de chaque période, l'intérêt simple produit est ajouté au capital pour produire intérêt à son tour pendant la période suivante. Ainsi, le montant d'intérêt et le capital change à chaque période (ce qui n'était pas le cas pour les intérêts simples où l'intérêt était le même pour chaque période).

Pour les opérations financières à long terme, les unités de période les plus fréquemment utilisées sont l'année, le semestre ou le trimestre.

Exemple

Soit un placement de 10 000 à 5% pendant 3 ans :

H1 placement à intérêts simples

H2 placement à intérêts composés.

Calculer la valeur acquise V_n à la fin de chaque période ?

	Période	Capital début	Intérêts produits	Valeur acquise
H1 : à intérêts simples, les intérêts sont remboursés à la fin de chaque période.	1	10 000.00	500.00	10 500.00
	2	10 000.00	500.00	11 000.00
	3	10 000.00	500.00	11 500.00
H2 : à intérêts composés, les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque période.	1	10 000.00		
	2			
	3			

Conclusion :

La valeur acquise à intérêts simples est en progression arithmétique de raison $q = 500 = i$
(Chaque terme est égal au précédent + q).

La valeur acquise à intérêts composés est en progression géométrique de raison $q = 1.05 = (1+i)$
(Chaque terme est égal au précédent $\times q$).

2. LA VALEUR ACQUISE (V_n) ET LA VALEUR ACTUELLE (V_o)

Soit : V_o = le capital initial ;
 V_i = la valeur acquise à la fin de la période i ;
 t = l'intérêt de 1 pour une période de capitalisation ;
 n = le nombre de périodes de capitalisation.

Période	Capital	Intérêts	Valeur acquise en fin de période
1	V_o	$V_o t$	$V_1 = V_o + V_o t = V_o(1+t)$
2	$V_o(1+t)$	$V_o(1+t)t$	$V_2 = V_o(1+t) + V_o(1+t)t = V_o(1+t)^2$
3	$V_o(1+t)^2$	$V_o(1+t)^2 t$	$V_3 = V_o(1+t)^2 + V_o(1+t)^2 t = V_o(1+t)^3$
...	...	...	...
n	$V_o(1+t)^{n-1}$	$V_o(1+t)^{n-1} t$	$V_n = V_o(1+t)^n$

• **Formule d'actualisation**

$$V_o = V_n(1+t)^{-n}$$

• **Formule de capitalisation**

$$V_n = V_o(1+t)^n$$

Exemple : Retrouver dans l'exemple précédent le calcul de la valeur acquise à la fin de la 3^e période et le calcul de la valeur actuelle à partir de la valeur précédente (en utilisant les intérêts composés).

3. TAUX PROPORTIONNELS ET TAUX EQUIVALENTS

Les opérations financières sont généralement effectuées sur des durées différentes de l'année. Il faut alors prendre en compte la notion de périodicité, qui est un nombre de périodes (jours, quinzaines, mois, trimestres, semestres) par an.

Dans la majorité des cas (sauf quelques produits financiers), la périodicité des échéances et la périodicité du calcul des intérêts est la même.

Le taux périodique est le taux correspondant à la périodicité de capitalisation des intérêts : par exemple, le taux mensuel.

3.1. La période de capitalisation des intérêts est différente d'un an

Le taux est en principe défini pour une période d'un an. Si la capitalisation des intérêts se réalise sur une période plus courte, il est nécessaire de convertir le taux annuel. Il existe deux méthodes de conversion :

3.1.1. L'utilisation de taux proportionnels

Deux taux sont proportionnels si leur rapport est égal au rapport de leur période de capitalisation respective (méthode utilisée par les banques).

Exemple : Calculer les taux proportionnels ?

Taux annuel	7%			
Taux semestriel	$0.07/2 = 3.5\%$	4%		
Taux trimestriel	$0.07/4 = 1.75\%$		2.5%	
Taux mensuel	$0.07/12 = 0.58\%$			1%

3.1.2. L'utilisation de taux équivalents

Deux taux sont équivalents si pour une même durée de placement, ils conduisent à une même valeur acquise à intérêts composés (méthode plus précise).

Soit t_a un taux annuel, t_s , t_t et t_m les taux respectivement semestriel, trimestriel et mensuel équivalents à t_a . On a : $1 + t_a = (1 + t_s)^2 = (1 + t_t)^4 = (1 + t_m)^{12}$.

V_0 placé sur 1 an au taux annuel t , $V_1 = V_0(1+t)^1$

V_0 placé sur 12 mois au taux mensuel t ; $V_{12} = V_0(1+t_m)^{12}$

$$V_0(1+t)^1 = V_0(1+t_m)^{12}$$

$$V_0(1+t)^3 = V_0(1+t_a)^1$$

$$t_m = (1+t)^{1/12} - 1$$

$$V_{15} = V_0(1+t_m)^{15}$$

10 000 sur 15 mois au taux de 10%

$$t_m = (1+0,1)^{1/12} - 1 = 0,8\%$$

$$V_{15} = 10000(1+0,8)^{15}$$

Exemple : Calculer les taux équivalents ?

Taux annuel	7%			
Taux semestriel	$1.07^{1/2} - 1 = 3.44\%$	4%		
Taux trimestriel	$1.07^{1/4} - 1 = 1.71\%$		2.5%	
Taux mensuel	$1.07^{1/12} - 1 = 0.57\%$			1%

3.2. La durée n'est pas égale à un nombre entier de périodes

Exemple : Quelle est au bout de 3 ans et 7 mois la valeur acquise d'un placement de 2000 au taux annuel de 5% ?

Il y a deux méthodes de résolution de ce type de problème :

- (i) **Le calcul d'un taux proportionnel** pour la durée inférieure à la période de capitalisation prévue.
- (ii) **Le calcul d'une période de capitalisation proportionnelle** pour la durée inférieure à la période de capitalisation prévue (méthode des taux équivalents). Cette 2^{ème} méthode donne un résultat plus précis.

3.3. Les montants sont réguliers et de valeur constante

Lorsque le montant des placements ou des versements sont réguliers (tous les ans, tous les trimestres, ou autre ...) et de valeur constante, le calcul de la valeur acquise et de la valeur actuelle s'effectue différemment (*voir le ch.3 sur les annuités et le ch. 4 sur les emprunts*).

Remarque

A intérêts simples des taux proportionnels produisent sur une même durée des intérêts identiques.

Il n'en est pas de même à intérêts composés où la valeur acquise augmente quand la période de capitalisation diminue.

Le taux équivalent est toujours inférieur au taux proportionnel.

4. TAUX MOYEN

On prend ici l'exemple d'un placement pour lequel les intérêts sont capitalisés annuellement. On adaptera le raisonnement s'ils sont capitalisés semestriellement, trimestriellement ou mensuellement.

On place un capital C_0 pendant n années. Le taux annuel est t_1 les n_1 premières années, t_2 les n_2 années suivantes, ..., t_k les n_k dernières années.

On a bien sur $\sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$

La valeur acquise par ce capital au bout de n années est :

$$C_n = C_0(1+t_1)^{n_1}(1+t_2)^{n_2}(1+t_3)^{n_3} \dots (1+t_k)^{n_k}$$

Le taux annuel moyen t est le taux constant sur les n années qui permettrait d'obtenir le capital C_n à partir du capital C_0 . Il vérifie donc l'égalité $C_n = C_0(1+t)^n$ d'où

$$(1+t)^n = (1+t_1)^{n_1}(1+t_2)^{n_2}(1+t_3)^{n_3} \dots (1+t_k)^{n_k}$$

$$t = [(1+t_1)^{n_1}(1+t_2)^{n_2}(1+t_3)^{n_3} \dots (1+t_k)^{n_k}]^{1/n} - 1$$

5. LES DECISIONS FINANCIERES A INTERETS COMPOSES

Pour prendre des décisions financières, il est nécessaire d'actualiser au jour de la prise de décision les valeurs monétaires exprimées dans le temps (*voir le ch.1 §4*).

A intérêts composés, l'actualisation des données monétaires est utilisée dans les mêmes domaines qu'à intérêts simples (escompte, choix ou remplacement d'un mode de règlement).

5.1. Equivalence à intérêts composés

Deux capitaux sont **équivalents**, à intérêts composés, un jour donné, s'ils ont la même valeur actuelle à cette date, les actualisations étant faites avec le même taux. Ainsi, deux capitaux V_1 et V_2 payables dans n_1 et n_2 périodes sont équivalents aujourd'hui (date 0) au taux t par période si $V_1(1+t)^{-n_1} = V_2(1+t)^{-n_2}$

Deux groupes de capitaux sont **équivalents**, à intérêts composés, un jour donné, si la somme des valeurs actuelles des capitaux du premier groupe est égale à la somme des valeurs actuelles des capitaux du second groupe.

Règle d'or des mathématiques financières : ne jamais comparer ou égaler deux ou plusieurs capitaux sans avoir, au préalable, ramener ces capitaux à une même date, appelée date d'équivalence.

Propriété : si deux capitaux ou deux groupes de capitaux sont équivalents à un moment donné, l'équivalence a lieu à tout moment, lorsque les calculs sont effectués avec la solution commerciale.

Exemple :

Un débiteur devait s'acquitter des dettes suivantes :

3 600 payables dans 1 an, = $3600 \cdot (1+0,06)^{-1}$

2 400 payables dans 1 an et 6 mois = $2400 \cdot (1+0,06)^{-1,5}$

4 500 payables dans 2 ans et 6 mois = $4500 \cdot (1+0,06)^{-2,5}$

6 000 payables dans 4 ans = $6000 \cdot (1+0,06)^{-4}$

TOTAL = 14 237,91

Il a obtenu de son créancier de se libérer de sa dette par un paiement unique de 19 053,54 dans 5 ans = $19\,053,54 \cdot (1+0,06)^{-5} = 14\,237,91$

En considérant un taux annuel de 6 %, Pensez-vous que les 2 modes de règlement sont équivalents ?

5.2. Escompte à intérêts composés

Lorsqu'un effet est payable à une date éloignée (plus d'un an en général), la valeur actuelle à retenir lors de l'opération d'escompte est la valeur actuelle à intérêts composés.

Avec la solution commerciale, l'escompte à intérêts composés E est égal à la différence entre la valeur nominale V_n et la valeur actuelle V_0 :

$$E = V_n - V_0 = V_n - V_n(1+t)^{-n} = V_n(1 - (1+t)^{-n})$$

où t est le taux d'escompte et n l'échéance à courir de l'effet.

Exemple :

Un commerçant remet à son banquier un effet de 1 500 payable dans 3 ans. Le taux d'escompte annuel est 8,5 %. Calculer la valeur actuelle commerciale et le montant de l'escompte retenu par le banquier.

Valeur nominale : $V_n = 1500$. Echéance dans $n = 3$ ans.

Valeur actuelle : $V_0 = 1500 \times 1.085^{-3} = 1174,36$.

Escompte commercial : $E = 1500 - 1174,36 = 325,64$

CHAPITRE 3. LES ANNUITES

1. DEFINITION

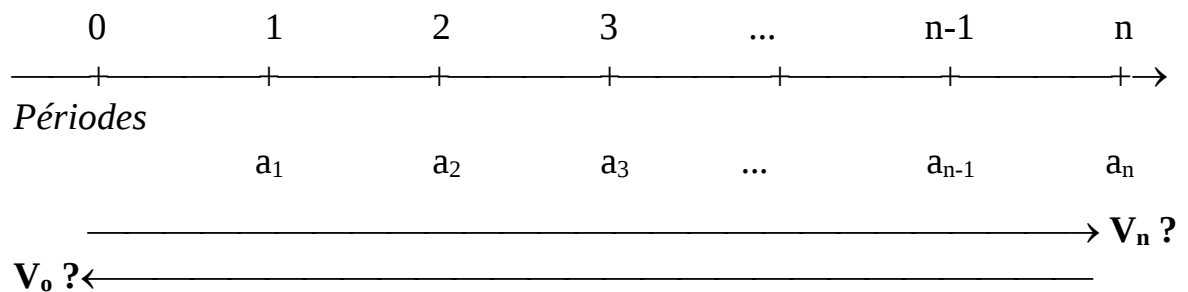
On appelle annuités une suite de transactions effectuées à intervalles de temps égaux (ou périodes).

Au sens strict, le terme correspond à des transactions annuelles. Le terme adéquat est fonction de leur périodicité : mensualités, trimestrialités, semestrialités.

Les annuités peuvent être variables ou constantes et les transactions peuvent être effectuées en fin de période (cas des remboursements d'emprunt) ou en début de période (cas des placements avec capitalisation des intérêts).

2. LES ANNUITES VARIABLES

Soit une série de n annuités variables (a_i) de fin de période :



2.1. Le calcul de la valeur acquise (V_n)

$$V_n = a_1(1+t)^{n-1} + a_2(1+t)^{n-2} + a_3(1+t)^{n-3} + \dots + a_{n-1}(1+t) + a_n$$

$$V_n = \sum a_i(1+t)^{n-i}$$

2.2. Le calcul de la valeur actuelle (V_0)

$$V_0 = a_1(1+t)^{-1} + a_2(1+t)^{-2} + a_3(1+t)^{-3} + \dots + a_{n-1}(1+t)^{-(n-1)} + a_n(1+t)^{-n}$$

$$V_0 = \sum a_i(1+t)^{-i}$$

Exemple

La Sté ABC prévoit de réaliser les surplus de trésorerie suivants :

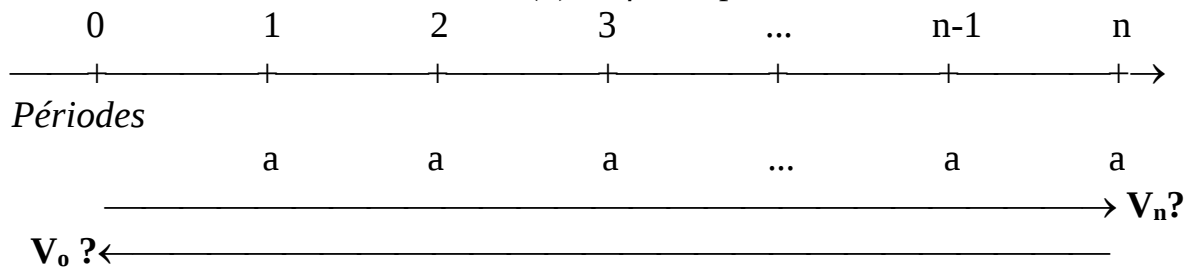
- 2 000 fin N+1 ;
- 3 000 fin N+2 ;
- 5 000 fin N+3.

1. Calculer la valeur acquise en N+3 (placement au taux de 6%) ? (10 427.20)
2. Calculer la valeur actuelle fin N (taux d'actualisation de 6%) ? (8 754.88)

Période	Flux de trésorerie	Coefficients	Valeur acquise	Coefficients	Valeur actuelle
1					
2					
3					

3. LES ANNUITES CONSTANTES DE FIN DE PERIODE

Soit une série de n annuités constantes (a) de fin de période :



3.1. Le calcul de la valeur acquise (V_n)

Annuités	Durées	Valeur acquise
1	$n-1$	$a(1+t)^{n-1}$
2	$n-2$	$a(1+t)^{n-2}$
3	$n-3$	$a(1+t)^{n-3}$
...	...	...
$n-1$	1	$a(1+t)$
n	0	a

= Suite en progression géométrique

$$\Rightarrow \text{Somme} = u_1(q^n - 1)/(q - 1)$$

avec $u_1 = 1^{\text{er}}$ terme et $q = \text{la raison} = (1+t)$

$$\Rightarrow V_n = a \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1} = a \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

3.2. Le calcul de la valeur actuelle (V_0)

Annuités	Durées	Valeur actuelle
1	1	$a(1+t)^{-1}$
2	2	$a(1+t)^{-2}$
3	3	$a(1+t)^{-3}$
...	...	...
$n-1$	$n-1$	$a(1+t)^{-(n-1)}$
n	n	$a(1+t)^{-n}$

= Suite en progression géométrique

$$\Rightarrow \text{Somme} = u_1(q^n - 1)/(q - 1)$$

avec $u_1 = 1^{\text{er}}$ terme et $q = \text{la raison} = (1+t)$

$$\Rightarrow V_0 = a(1+t)^{-n} \frac{(1+t)^n - 1}{t} = a \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

3.3. Le calcul de l'annuité (a)

• A partir de V_n

$$V_n = a \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\Rightarrow a = V_n \frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

• A partir de V_0

$$V_0 = a \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

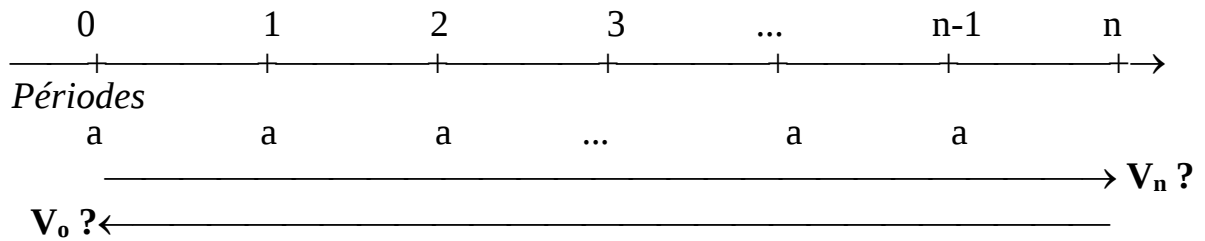
$$\Rightarrow a = V_0 \frac{t}{1 - (1+t)^{-n}}$$

Exemple : Calculer V_n et V_0 pour les 2 séries de fin de période suivantes (taux 8%) :

1. suite de 5 annuités de 1 000 ;
2. suite de 24 mensualités de 500 ?

4. LES ANNUITES CONSTANTES DE DEBUT DE PERIODE

Soit un placement de n annuités constantes (a) de début de période :



4.1. Le calcul de la valeur acquise (V_n)

Annuités	Durées	Valeur acquise	= Suite en progression géométrique
1	n	$a(1+t)^n$	$\Rightarrow$ Somme = $u_1(q^n - 1)/(q - 1)$
2	n-1	$a(1+t)^{n-1}$	avec $u_1 = 1^{\text{er}}$ terme et $q =$ la raison = $(1+t)$
3	n-2	$a(1+t)^{n-2}$	$\Rightarrow V_n = a(1+t) \frac{(1+t)^n - 1}{t} = a \frac{(1+t)^n - 1}{t} (1+t)$
...	...	...	
n-1	2	$a(1+t)^2$	
n	1	$a(1+t)$ u_1	= V_n avec les annuités de fin de période $\times (1+t)$

4.2. Le calcul de la valeur actuelle (V_0)

Annuités	Durées	Valeur actuelle	= Suite en progression géométrique
1	0	a	$\Rightarrow$ Somme = $u_1(q^n - 1)/(q - 1)$
2	1	$a(1+t)^{-1}$	avec $u_1 = 1^{\text{er}}$ terme et $q =$ la raison = $(1+t)$
3	2	$a(1+t)^{-2}$	$\Rightarrow V_0 = a(1+t)^{-n+1} \frac{(1+t)^n - 1}{t} = a \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} (1+t)$
...	...	...	
n-1	n-2	$a(1+t)^{-(n-2)}$	
n	n-1	$a(1+t)^{-(n-1)}$ u_1	= V_0 avec les annuités de fin de période $\times (1+t)$

4.3. Le calcul de l'annuité (a)

• A partir de V_n	$V_n = a \frac{(1+t)^n - 1}{t} (1+t)$	$\Rightarrow$	$a = V_n \frac{t}{(1+t)^n - 1} (1+t)^{-1}$
• A partir de V_0	$V_0 = a \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} (1+t)$	$\Rightarrow$	$a = V_0 \frac{t}{1 - (1+t)^{-n}} (1+t)^{-1}$

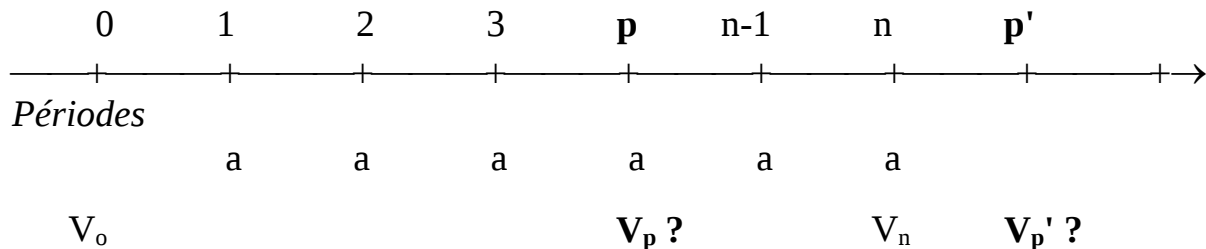
Exemple : Calculer V_n et V_0 pour les 2 séries de début de période suivantes (taux 8%) :

1. d'une suite de 5 annuités de 1 000 ; (6 335.93, 4 312.13)
2. d'une suite de 24 mensualités de 500 ? (13 013.78, 11 158.29)

Remarque : Pour faire la différence entre annuité de fin de période et annuité de début de période, il faut toujours se poser la question suivante : « cherche-t-on la valeur acquise au dernier versement ou un an après le dernier versement. »

5. EVALUATION A UNE PERIODE QUELCONQUE (V_p)

Soit une série de n annuités constantes de fin de période :



• Evaluation à une période p antérieure à V_n

$$V_p = V_0 (1+t)^p$$

• Evaluation à une période p' postérieure à V_n

$$V_{p'} = V_0 (1+t)^{p'}$$

Exemple : Soit une suite de 5 annuités de 1 000 placées en fin de période à 8%. Déterminer la valeur équivalente à la fin de la période 3 et 7 ? (5 029.67, 6 842.80)

$V_3 =$

$V_7 =$

6. LES SUITES D'ANNUITES EN PROGRESSION

	Progression arithmétique	Progression géométrique
Valeur acquise (V_n)	$\frac{(a_1 + \frac{r}{t}) (1+t)^n - 1}{t} - \frac{nr}{t}$	$\frac{a_1 (1+t)^n - q^n}{(1+t) - q}$
Valeur actuelle (V_0)	$\frac{(a_1 + \frac{r}{t} + nr) (1+t)^{-n} - nr}{t}$	$\frac{a_1 (1+t)^n - q^n (1+t)^{-n}}{(1+t) - q}$

avec a_1 = première annuité

r = raison de la progression arithmétique

q = raison de la progression géométrique

1. GENERALITES

Il existe une grande variété d'emprunts qui peuvent cependant être regroupés en deux catégories selon que l'emprunteur, personne physique (particulier) ou morale (entreprise, association, collectivité publique), s'adresse à un seul ou à plusieurs prêteurs. Si l'emprunt est contracté auprès d'un prêteur unique (généralement une banque), le contrat établi entre les deux parties définit les modalités d'un emprunt ordinaire communément appelé **emprunt indivis**. Il se différencie d'un **emprunt obligataire** qui fait intervenir plusieurs prêteurs.

Le cours sur l'emprunt obligataire fait partie du programme de la licence 3. Nous insisterons donc dans ce cours sur les emprunts indivis.

Les emprunts indivis sont constitués essentiellement par les prêts personnels aux particuliers (achat de biens de consommation durables : automobiles, meubles, appareils ménagers...), les prêts immobiliers (construction d'une maison individuelle, acquisition d'un logement, ...), les crédits à moyen terme (d'investissements en matériels, outillages, véhicules...). Pour les prêts à une personne physique, on parle de **crédit affecté** lorsque l'emprunt doit être utilisé pour l'acquisition d'un bien clairement identifié, **non affecté** lorsque son utilisation est à la discrétion de l'emprunteur.

Les clauses du contrat entre prêteur (créancier) et emprunteur (débiteur) précisent entre autres la durée de mise à disposition des fonds, le taux d'intérêt, les conditions de remboursement du capital emprunté.

2. LES MODALITES DE REMBOURSEMENT DES EMPRUNTS INDIVIS

Le remboursement se réalise par amortissements constants, par annuités constantes ou in fine (en fin de période). Il porte sur le capital, les intérêts sur le restant dû à la fin de la période et en plus une assurance en garantie des paiements exprimée en % du nominal.

Exemple :

Le 01.02.N, la Sté ABC a emprunté auprès du CIO 10 000 € au taux de 5% remboursable sur 4 ans à dater du 01.02.N+1 (assurance 0.40% du nominal) :

- **H1** Remboursement en 4 fractions égales (amortissements constants)
- **H2** Remboursement en 4 annuités constantes.
- **H3** Remboursement in fine.

2.1. Le remboursement par amortissements constants

Calcul de l'amortissement constant : le capital emprunté (C) est remboursé en n périodes par amortissements (A) égaux à :

$$A = \frac{C}{n}$$

Tableau d'amortissement de l'emprunt						
Périodes	Restant dû début (1)	Intérêts (2)=(1)x <i>t</i>	Amortissements (3)	Annuités (4) hors assurance	Assurances (5)	Restant dû Fin (6)=(1-3)
1						
2						
3						
4						

2.2. Le remboursement par annuités constantes

• **Calcul de l'annuité constante** (hors assurance) :

L'emprunteur paie à la fin de chaque période une annuité constante **a** calculé comme suit :

$$a = \frac{Ct}{1 - (1 + t)^{-n}}$$

Avec : C : le capital emprunté ;

t : le taux d'intérêt

n : la durée de l'emprunt

Tableau d'amortissement de l'emprunt						
Périodes	Restant dû début (1)	Intérêts (2)=(1)x <i>t</i>	Amortissements (3)=(4-2)	Annuités (4) hors assurance	Assurances (5)	Restant dû Fin (6)=(1- 3)
1						
2						
3						
4						

(1) Ajuster les résultats de la dernière ligne pour terminer le plan d'amortissement sachant que le capital dû au début de la dernière période est égal à la dernière part d'amortissement.

2.3. Le remboursement in fine

Le remboursement se réalise en une seule fois en fin de période. A la fin de chaque période, l'emprunteur ne paie que l'intérêt du capital emprunté. Les amortissements sont nuls. Il rembourse en une seule fois, à la date fixée dans le contrat, l'intégralité du capital emprunté. On a donc :

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = C.t \text{ et } a_n = C + C.t$$

Périodes	Restant dû début (1)	Intérêts (2)=(1)x <i>t</i>	Amortissements (3)	Annuités (4) hors assurance	Assurances (5)	Restant dû Fin (6)=(1-3)
1						
2						
3						
4						

2.4. Les relations entre les amortissements et l'annuité constante

Soit a = le montant de l'annuité

V_i = le restant dû à la fin de la période

V_0 = le montant de l'emprunt

A_i = l'amortissement pour la période

t = l'intérêt pour 1 € pour une période

Périodes	Restant dû début période	Intérêts	Amortissements	Annuités	Restant dû fin de période
1	V_0	$V_0 t$	$A_1 = a - V_0 t$	a	$V_0(1+t) - a$
2	$V_0(1+t) - a$	$V_0(1+t)t - at$	$A_2 = a - V_0(1+t)t + at$ $= a(1+t) - V_0 t(1+t)$ $= (a - V_0 t)(1+t)$ $= A_1(1+t)$		
3			$A_3 = A_2(1+t) = A_1(1+t)^2$		
...			...		
p			$A_p = A_1(1+t)^{p-1}$		
n	A_n	$A_n t$	$A_n = A_1(1+t)^{n-1}$ $A_n = a/(1+t)$	$a = A_n(1+t)$	0.00

Les amortissements sont en progression géométrique avec une raison $q = (1+t)$

Exemple : Appliquer les relations ci-dessus à l'exemple avec annuités constantes :

• Calcul de A_n (dernier amortissement) (A_n) =

• Calcul de A_3 (3^e amortissement) (A_3) =

2.5. Le coût d'un emprunt : le taux effectif global (TEG)

Le TEG est le taux de revient de l'emprunt en prenant tous les frais (intérêts, assurances et frais de dossier éventuels). Il correspond au taux qui permet d'avoir des décaissements actualisés égaux au montant net perçu sur l'emprunt.

Exemple : Calculer le TEG dans l'exemple avec annuités constantes

2.6. Les quatre règles fondamentales

Pour conclure, on peut énoncer quatre règles fondamentales à respecter dans la construction d'un tableau d'amortissement, quel que soit l'emprunt indivis concerné.

Règle 1 : la part d'intérêt versée en fin de période est égale au capital dû en début de période, multiplié par le taux d'intérêt de la période.

Règle 2 : l'annuité est égale à la somme de l'intérêt et de l'amortissement.

Règle 3 : la somme des amortissements est égale au capital emprunté.

Règle 4 : le capital dû au début de la dernière période est égal à la dernière part d'amortissement.

La règle 4 est un corollaire de la précédente. Elle permet de vérifier l'exactitude d'un tableau d'amortissement.

CHAPITRE 5. LE CHOIX DES INVESTISSEMENTS

Les professionnels de la finance sont quotidiennement confrontés à des problèmes d'évaluation, concernant aussi bien des actifs financiers (actions, obligations, ...) que des actifs réels matériels (immeubles terrains, ...) ou immatériels (brevets, marques, capital humain, ...). Ces problèmes interviennent régulièrement, par exemple dès qu'une entreprise établit son bilan, ou ponctuellement, par exemple pour une opération d'investissement ou d'acquisition d'une autre entreprise. La plupart des techniques d'évaluation repose sur la technique de l'actualisation. La théorie de la finance nous apprend en effet que la valeur d'un actif est égale à la somme des flux de profit futurs actualisés.

Ce chapitre est une introduction à l'évaluation des investissements. Il montre que la mathématique financière est l'instrument privilégié du décideur d'une entreprise. Une connaissance claire et critique des méthodes actuarielles de choix d'investissement est alors utile.

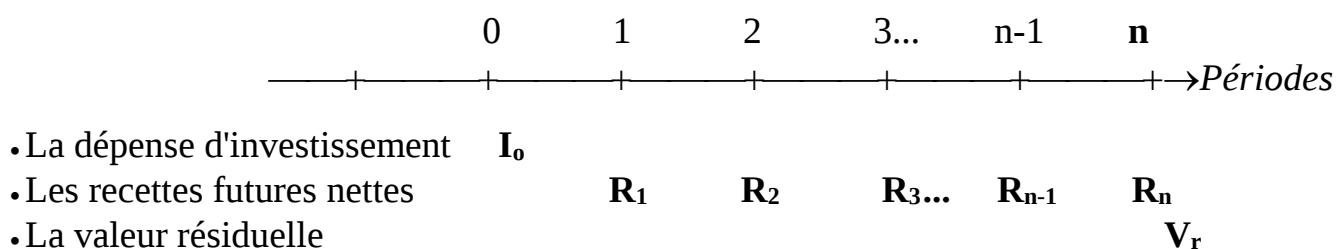
La décision d'investir suscite plusieurs interrogations :

- Comment déterminer si le projet est rentable ?
- Comment choisir entre plusieurs projets le plus rentable ou le moins coûteux ?
- Comment choisir le mode de financement le moins cher ?

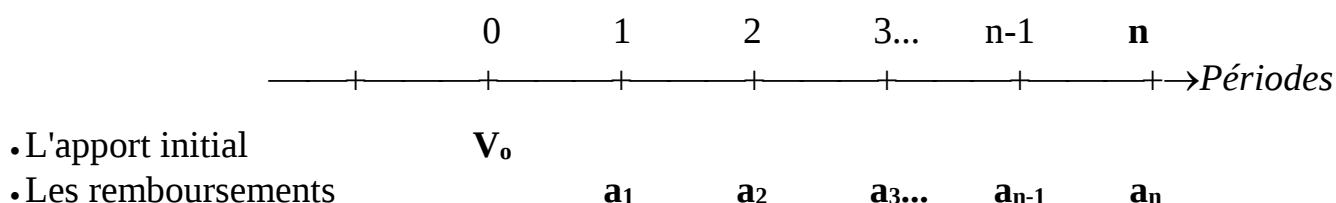
Pour y répondre, il est nécessaire d'identifier les paramètres à prendre en considération et de définir des critères de comparaison entre les projets envisagés.

1. LES PARAMETRES

1.1. Les paramètres liés à un projet d'investissement



1.2. Les paramètres liés à un mode de financement



Les données monétaires précédentes sont étalées dans le temps. Pour les comparer, il faut les actualiser. Comment choisir le taux d'actualisation ?

1.3. Le taux d'actualisation (t)

Le taux d'actualisation correspond au **taux de rémunération attendu** pour 1F d'investissement. Ce taux doit se situer :

- au dessus du taux de rémunération d'un placement classique pour tenir compte du risque lié à la décision d'investir ;
- au moins égal au taux de rémunération des capitaux permanents déjà utilisés dans l'entreprise (coût du capital) pour ne pas détériorer sa rentabilité antérieure.

2. LES CRITERES DE CHOIX

2.1. La valeur actuelle nette (VAN)

Elle correspond à la valeur actualisée des recettes et dépenses liées au projet pour un taux d'actualisation donné.

• Si recettes irrégulières	$VAN = \sum_1^n R_i(1+t)^{-i} + V_r(1+t)^{-n} - I_0$
• Si recettes régulières (constantes)	$VAN = R (1-(1+t)^{-n})/t + V_r(1+t)^{-n} - I_0$

La décision d'investissement dépend du signe de la VAN. Si la VAN est positive, l'investissement crée de la valeur pour l'entreprise, et est donc rentable. Lorsque la VAN est négative, le projet doit être rejeté.

La formule précédente s'applique à des flux annuels avec un taux annuel, mais aussi des flux de périodicité quelconque pourvu que le taux retenu soit exprimé en taux équivalent et dans la même base que la durée séparant les flux.

2.2. L'indice de profitabilité

$$(IP = 1 + VAN / I_0)$$

Cet indice mesure les recettes actualisées générées par un franc d'investissement. Ce critère est utile pour comparer des projets ayant des dépenses d'investissement différentes.

Si l'IP est supérieur à 1, le projet est rentable dans le cas contraire le projet n'est pas rentable.

2.3. Le taux de rentabilité interne (TRI)

C'est le taux (t) pour lequel la VAN est égale à zéro.

• Si recettes irrégulières	$0 = \sum_1^n R_i(1+t)^{-i} + V_r(1+t)^{-n} - I_0$
• Si recettes régulières (constantes)	$0 = R (1-(1+t)^{-n})/t + V_r(1+t)^{-n} - I_0$

Le TRI est calculé par interpolation linéaire.

Il n'est pas nécessaire de disposer d'un taux d'actualisation pour calculer un TRI. Cependant, la décision d'investir ou de ne pas investir nécessite que l'on connaisse le taux d'actualisation requis par l'investisseur, afin de le comparer au TRI obtenu.

Si le TRI est supérieur au taux d'actualisation alors le projet est rentable dans le cas contraire, il n'est pas rentable.

2.4. Le délai de récupération du capital investi (DRCI)

Il correspond au temps mis pour récupérer la dépense d'investissement actualisée avec les recettes futures actualisées.

• Si recettes irrégulières	Temps passé pour que $\Rightarrow \sum_1^n R_i(1+t)^{-i} + V_r(1+t)^{-n} = I_0$
• Si recettes régulières (constantes)	$DRCI = R (1-(1+t)^{-n})/t + V_r(1+t)^{-n} / D_0$

Le DRCI est calculé par interpolation linéaire.

3. L'UTILISATION ET LE CHOIX DU CRITERE

Les critères précédents permettent de mesurer la rentabilité des investissements qui ont des durées de vie identiques. Si les dépenses d'investissement sont très différentes d'un projet à un autre, le choix doit se réaliser à partir d'un critère qui mesure la rentabilité en valeur relative (I_p ou TRI).

Malgré ces précautions, le projet à choisir peut dans certaines circonstances varier suivant le critère utilisé (*voir les applications*).

Critères	Analyse de la rentabilité			Projet à choisir	Domaine d'utilisation
	-	0	+		
VAN	< 0	= 0	> 0	VAN la + élevée	Projets d'importance similaire (*)
I_p	< 1	= 1	> 1	I_p le + élevé	Projets d'importance différente
TRI (1)	< T_a	= T_a	> T_a	TRI le + élevé	Projets d'importance différente (*)
DRCI (2)	> n	= n	< n	DRCI le + faible	Projets à obsolescence rapide ou risqués

(*) ou pour sélectionner le mode de financement le moins onéreux.

(1) T_a = Taux d'actualisation attendu.

(2) n = durée de vie du projet.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Boissonnade Marie, Fredon Daniel (2012, 4ème édition) - Mathématiques financières en 22 fiches - Dunod
- Chaigneau Gérard et Anne Claude (2010, 2ème édition) - Mathématiques financières - Ellipses Marketing
- Assoumou Menye Oscar et Bekolo Claude (2010) - Mathématiques financières : Outils et applications - L'Harmattan
- Schlachter Daniel (2007, 3ème édition) - Comprendre les mathématiques financières - Hachette Supérieur
- Rolando Thierry, Fink Jean-Claude (2006, 3ème édition) – Mathématiques financières – Vuibert
- Ginglinger Edith, Hasquenoph Jean-Marie (2006, 2ème édition) - Mathématiques financières – Economica
- Legros Benjamin (2011) - Mini Manuel de Mathématiques financières - Nathan scolaire
- Collectif (2011) - Mathématiques financières - Nathan scolaire

Site internet utile :

<http://www.lamfa.u-icardie.fr/ducay/Mathematiques%20Financieres%2020132014.html>

ANNEXES : Les fonctions financières sous EXCEL

VA (taux;npm; <u>vpm</u> ;vc;type)	Valeur actuelle avec des paiements constants (V_o)
VC (taux;npm; <u>vpm</u> ;va;type)	Valeur acquise avec des paiements constants (V_n)
VPM (taux;npm;va; <u>vc</u> ;type)	Valeur d'un paiement (a)
TAUX (npm;vpm;va; <u>vc</u> ;type;estimation)	Intérêt attendu de 1 F pour une période (t)
NPM (taux;vpm;va; <u>vc</u> ;type)	Nombre de paiements (n)
INTPER (taux;période;npm;va; <u>vc</u> ;type)	Intérêts de la période
PRINCPER (taux;période;npm;va; <u>vc</u> ;type)	Amortissement du principal de la période
VAN (taux;série)	Valeur actuelle avec des paiements variables (V_o)
TRI (série;estimation)	Taux de rentabilité interne (montants variables)
Période	N° de la période de paiement (de 1 à npm)
Type (facultatif)	Païement dans la période (0=fin, 1=début) (0 par défaut)
Estimation (facultatif)	Degré de précision pour le calcul du taux (0.1 par défaut)

.Les paramètres en italiques (type, estimation) sont facultatifs ;

.Paramètres soulignés : préciser un paramètre sur deux ;

.Inscrire la valeur décaissée en négatif (vmp, va ou vc).

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES FINANCIERES

Intérêts simples – intérêts composés – annuités

NB : Les années sont comptées pour 360 jours, les semestres pour 180 jours, les trimestres pour 90 jours et les mois pour 30 jours.

Exercice 1

I) On place 150 € pendant 3 ans au taux annuel de 10%.

- 1) Déterminer la valeur acquise si le placement se fait à intérêts simples.
- 2) Déterminer la valeur acquise si le placement se fait à intérêts composés.

II) Calcul du capital

- 1) Quel est le capital qui, placé au taux annuel de 6% pendant 45 jours, rapporte 3,02 € d'intérêt ?
- 2) Quel est le capital qui, placé au taux trimestriel de 2 % pendant 81 jours, acquiert une valeur de 509 € ?

III) Calcul du taux

- 1) A quel taux annuel a été placé un capital de 700 € qui a rapporté 9,60 € d'intérêt en 91 jours ?
- 2) A quel taux annuel a été placé un capital de 1 200 € qui a acquis une valeur de 1 229,76 € en 146 jours
- 3) A quel taux trimestriel a été placé un capital de 830 € qui a rapporté 18,92 € d'intérêt en 108 jours.

IV) Calcul de la durée de placement

- 1) Au bout de combien de jours un capital de 4 180 € placé au taux annuel de 8,40 %, rapporte-t-il 121,92 € d'intérêt ?
- 2) Au bout de combien de jours un capital de 660 € placé au taux annuel de 5,75 %, acquiert-il une valeur de 691,31 € ?

Exercice 2

Trois capitaux sont tels que le rapport du premier au deuxième est de $\frac{2}{5}$ et que le troisième est égal à la somme des deux premiers augmentée de 2 380 €. Ils sont placés pour le premier à 5% pendant 91 jours, pour le deuxième à 4% pendant 63 jours et pour le troisième à 3% pendant 96 jours (taux annuels). Le total des intérêts s'est élevé à 269,37 €.

TAF : Quels sont les trois capitaux ?

Exercice 3

Le 15 mai 2016, une entreprise remet à son banquier un effet de 200 € payable le 15 juin 2016, un effet de 400 € payable le 30 juin 2016 et un effet de 600 € payable le 15 juillet 2016. Le taux d'escompte annuel est de 7%. L'entreprise doit compter un jour de banque supplémentaire et supporter les frais suivants :

- Commission d'endos : 0.40 % ;
- Commission de service 0.15 € par effet ;
- Commission d'acceptation : 0.30 € par effet ;
- Taxe sur les activités financières : 10 % ;

TAF :

- 1) Calculer le montant total des agios et le montant net négocié de chaque effet
- 2) Calculer le taux réel d'escompte

Exercice 4

Pour l'achat d'un appareil ménager, un commerçant propose deux formules de crédit au taux mensuel de 0,775 %.

- **Première formule : Règlement en 4 versements.**

100 € 1 mois après la livraison ; 95 € 2 mois après la livraison ;

94 € 3 mois après la livraison ; 86 € 4 mois après la livraison.

Coût de l'acquisition : 375 €.

• **Deuxième formule : Règlement en 4 versements.**

85 € 1 mois après la livraison ; 91 € 3 mois après la livraison ;
98 € 5 mois après la livraison ; 106 € 7 mois après la livraison.
Coût de l'acquisition : 380 €.

TAF :

- 1) Montrer que ces deux formules de crédit à intérêts composés sont équivalentes.
- 2) Quel est le prix de l'appareil ménager au comptant ?

Exercice 5

Le tableau ci-après présente, un extrait d'échelle d'intérêts du compte de l'entreprise LICENCE2 du premier trimestre 2017. Les intérêts du découvert sont facturés au taux TBB+2%. La CPFD est de 0,05% et la commission de mouvement de 0,025%. Le TBB est à 8%.

DATE DE VALEUR	MOUVEMENTS		SOLDE		NOMBRE DE JOURS	NOMBRE	
	D	C	D	C		D	C
1 ^{er} Janvier				65 000			
7 Janvier	130 000	18 000					
18 Janvier	45 000	105 000					
27 Janvier	96 000	15 000					
10 Février	25 000	17 000					
21 Février	250 000	166 000					
28 Février	119 000	255 000					
1 ^{er} Mars	34 000	77 000					
16 Mars	3 000	81 000					
19 Mars	368 000	173 000					
28 Mars	56 000	185 000					
31 Mars	27 000	79 000					

TAF :

- 1) Compléter le tableau
- 2) Calculer le ticket d'agios.

Exercice 6

1. Le 15 mars 2000, une banque a accordé à un client un prêt de 70000 f cfa sur 15 ans au taux annuel de 12 %. L'emprunt est remboursé par mensualités constantes, les intérêts étant calculés au taux proportionnel.

- a) Déterminer le montant de chacune des mensualités.
- b) Déterminer le coût du crédit.

2. Le 15 mars 2006, la mensualité due ce jour-là étant versée, le client peut souscrire dans la même banque un nouveau prêt pour une durée de 9 ans au nouveau taux de 7,2 %, avec les mêmes conditions de remboursement. La banque réclame une indemnité de 3 % du capital restant dû, sans autre frais à régler.

- a) Déterminer le montant de chacune des mensualités restantes.
- b) Déterminer le nouveau coût du crédit.

c) L'indemnité réclamée par la banque est-elle désavantageuse?

Exercice 7

Un particulier dispose d'une capacité mensuelle de remboursement de 150 f cfa. Il peut s'engager dans un crédit revolving sur des durées comprises entre 12 et 24 mois, au taux mensuel de 0,85 %.

1. Déterminer le plafond du crédit remboursable en 12 mensualités que la banque peut lui accorder.
2. Déterminer le plafond du crédit remboursable en 24 mensualités que la banque peut lui accorder.
3. Déterminer sa capacité d'emprunt sur 24 mois après la sixième mensualité d'un emprunt de 1000 f cfa remboursable en 12 mensualités.

Exercice 8

Une personne emprunte 60 000 f cfa, remboursables en 20 ans par mensualités constantes calculées au taux mensuel de 0,8 %. A tout moment, à la date d'une échéance mensuelle, elle a la possibilité de se libérer de la totalité de sa dette, moyennant le paiement d'une indemnité égale à 3 % du montant du capital restant dû.

Au moment du versement de la 112ème mensualité, les taux d'intérêt étant en forte baisse, elle décide de tout rembourser, ayant pu emprunter, à un taux intéressant, la somme nécessaire à ce remboursement total.

- a) Quel est le montant des 112 premières mensualités ?
- b) Quel est le montant du paiement effectué en sus de cette mensualité pour se libérer totalement du premier emprunt ?
- c) Sachant que le second emprunt s'élève à 46 500 f cfa et est remboursable par 90 mensualités constantes au taux mensuel de 0,6 %, déterminer le montant de chacune de ces mensualités, la première échéant un mois après le remboursement total.

Exercice 9

Un commerçant emprunte 16 000 f cfa sur cinq ans dans les conditions suivantes : taux mensuel de 0,7 %, les 12 premières mensualités ne comprennent que l'intérêt du capital emprunté ; le capital est remboursé au cours des 48 mensualités constantes suivantes.

Déterminer le montant des 48 dernières mensualités.

Exercice 10

"Prenez dès aujourd'hui livraison d'un véhicule neuf en versant un apport initial de 35 %, ne payez rien pendant 12 mois et remboursez en 45 versements mensuels constants."

Profitant de cette offre, un particulier prend livraison d'un véhicule dont le prix comptant T.T.C. est de 20 000 000 f cfa. Son apport initial est de 7 000 000 f cfa et, après 12 mois, il accepte d'acquitter 45 mensualités de 355 100 f cfa.

Quel est le taux de cet emprunt ?

Exercice 1

Présenter le tableau d'amortissement d'un emprunt de 500 000 €, au taux de 7%, remboursable en 4 annuités constantes après un différé d'amortissement de 2 ans.

Exercice 2

Pour un capital donné, vous avez le choix entre ces placements sur 2 ans, sans risque. Hiérarchisez les.

1^{er} placement : intérêts composés, capitalisation annuelle, taux annuel de 6%.

2^{ème} placement : intérêts simples, taux annuel de 6,2%.

3^{ème} placement : intérêts composés, capitalisation mensuelle, taux mensuel de 0,49%.

Exercice 3

Une entreprise veut créer un fonds d'amortissement pour un emprunt de 800000 € remboursable en une seule fois dans 6 ans.

Combien doit-elle verser à la fin de chaque année après la délivrance de ce crédit sur un compte rapportant 7% par an pour pouvoir effectuer le remboursement prévu ?

Exercice 4

Le 1/6/N, l'entreprise E a contracté auprès de la banque B un emprunt de 950000 € destiné à financer l'aménagement de ses locaux administratifs. Cet emprunt, au taux annuel de 8,5% est remboursable en 7 ans par annuités constantes, la première étant versée le 1/6/N+1. Présenter le tableau d'amortissement de cet emprunt (3 premières lignes et la dernière ligne).

1.1. Exercice 5

Une personne place chaque 31 décembre ses économies de l'année, soit 2000 € à intérêts composés à 5% l'an. Elle pensait pouvoir réaliser ce versement pendant 20 ans (20 versements).

1. Quelle eût été la valeur acquise au moment du dernier versement ?

2. En fait, à partir du 11^{ème} versement inclus, elle a pu placer chaque année une somme de 3000 €.

De combien augmentera la valeur acquise au moment du dernier versement ?

Exercice 6

Votre espérance de vie est de 37 ans. Vous pouvez placer sans risque au taux annuel de 3%.

Préférez-vous une rente annuelle, à compter d'aujourd'hui 21 janvier 2005, jusqu'au 21 janvier 2042 de 4500€, ou un capital unique, versé aujourd'hui, de 115000€ ?

Exercice 7

Chaque année, du 1^{er} juillet 1996 inclus au 1^{er} juillet 2005 inclus, un investisseur verse sur un compte portant intérêts composés, 10 000 €. Les versements se capitalisent annuellement au taux annuel de 5%.

- Quel est le capital constitué immédiatement après le dernier versement ?
- Quel montant l'investisseur peut-il retirer deux ans après le dernier versement ?
- Dans l'hypothèse où cinq ans après le dernier versement, on décide de retirer annuellement 10000 €, du 1^{er} juillet 2010 inclus au 1^{er} juillet 2019 inclus. De quelle somme disposera-t-on sur le compte immédiatement après le dernier retrait (en tenant toujours compte d'un taux annuel de 5% pour vos calculs) ?

Exercice 8

La société COPRA a emprunté le 1^{er} janvier 2004 une somme remboursable par annuités constantes de 203 362,60 €, la première étant exigible le 1^{er} janvier 2005. Le premier amortissement est de 143 362,60 €. Le 3^{ème} de 161 082,22 €.

Déterminer, dans l'ordre :

- Le taux de l'emprunt
- Son montant
- Sa durée

Exercice 9

Chaque mois, du 28 mars 1998 inclus au 28 mars 2005 inclus, un individu place 150 € sur un compte portant intérêts composés, à capitalisation mensuelle, au taux mensuel de 0,40%.

- Quelle sera la valeur du capital constitué le 28 mars 2005 ?
- Quel capital unique (alternatif à tous les versements) aurait-il fallu placer le 28 mars 1998 pour obtenir le même capital constitué le 28 mars 2005 ?
- Quelle serait la valeur du capital constitué le 28 mars 2005 si aucun versement n'avait été constaté sur toute l'année 2003 ?

Exercice 10

La société des Applications Electroniques (SAE) envisage une augmentation de sa capacité de production par l'achat d'un matériel d'une valeur de 1 000 000 € qui devrait permettre de dégager un revenu de 300 000 € par an pendant 5 ans.

On admettra que l'acquisition est réalisée le 31 décembre 2003 et que les revenus sont enregistrés chaque année le 31 décembre, à partir du 31/12/2004.

L'équipement envisagé est amortissable linéairement sur quatre ans. En fin d'exploitation, on estime qu'il pourrait être revendu 250 000 € net d'impôts. L'entreprise est soumise à l'impôt sur les sociétés (35%). Elle sera globalement bénéficiaire pour les cinq années à venir.

Déterminer la valeur actuelle nette (VAN) après impôts de cet investissement pour un taux d'actualisation de 10%, puis son taux de rendement interne (TIR).

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES FINANCIERES

Emprunts – choix d'investissement

Exercice 1

Monsieur DECEF gagne 18 000 euros par mois et n'anticipe pas de modification de ses revenus dans l'avenir. Il veut effectuer un emprunt immobilier sur 15 ans. Sachant que le banquier accepte un ratio mensualité/revenu de 30% et qu'il lui propose un financement à 7%.

Quel est le montant peut-il emprunter ?

Exercice 2

Une entreprise emprunte 50 000 le 1^{er} juin 2016 au taux de 7% pour financer l'achat d'une machine. Le remboursement s'effectue par 4 annuités constantes payables à terme échu, la dernière annuité échéant le 31 Mai 2020.

Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt

Exercice 3

On considère un emprunt indivis de montant 200 000 le 01.01.2006, remboursable en 5 ans au taux d'intérêt de 7% (assurance comprise). 1^{er} remboursement le 01.01.2007 (remboursements par annuités)

Présenter le tableau d'amortissement correspondant à chacune des trois modalités possibles de remboursement, les annuités étant perçus tous les 1^{er} janvier. Calculer la somme des intérêts versés.

Exercice 4

On considère deux investissements :

I1 : Investissement de 100 (date 0) et flux de 90, 20 et 20 aux dates 1, 2 et 3.

I2 : Investissement de 100 (date 0) et flux de 10, 20 et 130 aux dates 1, 2 et 3.

- 1) Calculez les TRI et les VAN à 8%.
- 2) Déterminez le taux d'indifférence qui est le taux pour lequel la VAN de I1 est égale à celle de I2.
- 3) Comment comparer ces projets ?

Exercice 5

Un projet d'investissement est caractérisé par les données suivantes :

- Capital investi : 380 HT
- Cash-flows annuels en progression de 20 %
- Durée de vie : 5ans
- Valeur résiduelle nulle
- Indice de profitabilité à 6% : 1,130812.

- 1) Déterminez la série des cash-flows.
- 2) Le taux d'actualisation étant variable, résolvez l'équation : $I_p = 1$ et interprétez le résultat obtenu.
- 3) Sachant que les cash-flows sont réinvestis au taux de 14%, calculez le taux de rentabilité interne global.