

Contents

CHAPITRE 5: LOIS DISCRÈTES USUELLES	2
5.1 Loi uniforme : \mathcal{U}	2
5.2 Loi uniforme : $\mathcal{U}1; n$	2
5.3 Application de la loi uniforme – lancer d’un dé équilibré à six faces	2
5.4 Loi de Poisson de paramètre λ : $\mathcal{P}(\lambda)$	2
5.4.1 Définition	2
5.4.2 Application de la loi de Poisson, Fiche 4, exercice 4	2
5.5 Loi de Bernoulli de paramètres 1 et p : $\mathcal{B}1; p$	3
5.5.1 Définition	3
5.5.2 Application de la loi de Bernoulli : $\mathcal{B}1; p$	3
5.6 Loi Binomiale de paramètres n et p : $\mathcal{B}n; p$	3
5.6.1 Définition	3
5.6.2 Application de la loi binomiale : $\mathcal{B}n; p$	3
5.6.3 Application de la loi binomiale $\mathcal{B}n; p$ – fiche 4 : exercices 2, 3 et 1	3
5.7 Loi hypergéométrique de paramètres N, n et p : $\mathcal{H}N, n; p$	4
5.7.1 Définition	4
5.7.2 Application de la loi hypergéométrique : $\mathcal{H}N, n; p$	4
5.7.3 Application de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}N, n; p$ – fiche 2 exercice 8	4
5.8 Tableau comparatif de la loi hypergéométrique et de la loi binomiale	5
5.9 Loi géométrique paramètres p : $\mathcal{G}p$	6
5.9.1 Définition	6
5.9.2 Application de la loi géométrique : $\mathcal{G}p$	6
5.10 loi de pascal (ou loi binomiale négative) de paramètre r et p : $\mathcal{R}(r; p)$	6
5.10.1 Définition	6
5.10.2 Application de la loi de Pascal (ou loi binomiale négative) : $\mathcal{R}(r; p)$	7
5.11 TABLEAU SYNOPTIQUE RESUMANT LES LOIS DISCRETES USUELLES	8
CONVERGENCE EN PROBABILITE	10
INEGALITE DE BIENAYME TCHEBYCHEFF	12

CHAPITRE 5: LOIS DISCRÈTES USUELLES

5.1 Loi uniforme : \mathcal{U}

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète \mathcal{U} et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}$ si :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow \text{card}X(\Omega) = n$$

$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad \text{avec } n \neq 0$$

$$E(X) = \frac{\sum_i x_i}{n}, \quad V(X) = \frac{\sum_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_i x_i}{n}\right)^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_i x_i}{n}\right)^2}$$

5.2 Loi uniforme : $\mathcal{U}_{[1;n]}$

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète $\mathcal{U}_{[1;n]}$ et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[1;n]}$ si :

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \text{card}X(\Omega) = n$$

$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad \text{avec } n \neq 0$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

5.3 Application de la loi uniforme – lancer d'un dé équilibré à six faces

$$n = 6 \rightarrow X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \text{card}X(\Omega) = 6$$

$$P(X = x) = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = 3,5; \quad V(X) = \frac{6^2-1}{12} = 5,833; \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{6^2-1}{12}} = 1,708$$

5.4 Loi de Poisson de paramètre λ : $\mathcal{P}(\lambda)$

5.4.1 Définition

Une variable aléatoire discrète X suit la loi de Poisson de paramètre λ , on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\text{Avec } X(\Omega) = \mathbb{N}, \quad E(X) = \lambda; \quad V(X) = \lambda; \quad \text{et } \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

5.4.2 Application de la loi de Poisson, Fiche 4, exercice 4

5.5 Loi de Bernoulli de paramètres 1 et p : $\mathcal{B}(1; p)$

5.5.1 Définition

Une expérience aléatoire qui donne deux résultats possibles (succès ou échec) est une épreuve de Bernoulli. La variable aléatoire X désignant le nombre de succès suit la loi de Bernoulli de paramètres 1 et p. On écrit : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1; p)$, avec :

$$X(\Omega) = \{0; 1\}.$$

$$\text{Succès} = 1 \rightarrow p = P(\text{succès}) = P(X = 1).$$

$$\text{Échec} = 0 \rightarrow q = P(\text{échec}) = P(X = 0), \text{ avec } p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p.$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1; p)$ alors la loi de probabilité de X est :

$$P(X = x) = p^x q^{1-x}$$

$$\text{avec } E(X) = p; V(X) = pq; \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{pq}$$

Exemple : le lancer d'une pièce équilibrée donne pile (succès) ou face (échec).

5.5.2 Application de la loi de Bernoulli : $\mathcal{B}(1; p)$

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher dont six boules blanches et quatorze boules noires. On tire une boule au hasard de l'urne.

- Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
- Soit X , la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches obtenues après tirage. Déterminer la loi de probabilité de X et $X(\Omega)$; calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

5.6 Loi Binomiale de paramètres n et p : $\mathcal{B}(n; p)$

5.6.1 Définition

La loi binomiale décrit une expérience aléatoire qui consiste à faire n répétitions indépendantes (ou avec remise) de l'épreuve de Bernoulli. La variable aléatoire X désignant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et p. On écrit : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$, avec :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\} \rightarrow \text{card}X(\Omega) = n + 1.$$

$$p = P(\text{succès}) \text{ et } q = P(\text{échec}), \text{ avec } p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p.$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ alors la loi de probabilité de X est :

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$\text{avec } E(X) = np; V(X) = npq; \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

5.6.2 Application de la loi binomiale : $\mathcal{B}(n; p)$

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher dont six boules blanches et quatorze boules noires. On tire successivement avec remise sept boules. Soit X , la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches obtenues après tirage.

- Déterminer la loi de probabilité de X et $X(\Omega)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.
- Calculer la probabilité d'obtenir au moins trois boules blanches.
- Calculer la probabilité d'obtenir entre deux et quatre boules blanches.

5.6.3 Application de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ – fiche 4 : exercices 2, 3 et 1

5.7 Loi hypergéométrique de paramètres N, n et $p : \mathcal{H}(N, n; p)$

5.7.1 Définition

La loi hypergéométrique décrit une expérience aléatoire qui consiste à faire n répétitions non-indépendantes (ou sans remise) de l'épreuve de Bernoulli. La variable aléatoire X désignant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et p . On écrit : $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n; p)$, avec : $X(\Omega) = \{Max(0; n - Nq); \dots; Min(n; Np)\}$.

$$P(X = x) = \frac{C_{Np}^x \times C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n}$$

avec : $\begin{cases} p = P(\text{succès}) \\ q = P(\text{échec}) \\ p + q = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} N = \text{taille de la population et } n = \text{taille de l'échantillon} \\ Np = N \times p = \text{nombre de succès dans la population} \\ Nq = N \times q = \text{nombre d'échecs dans la population} \\ N = Np + Nq \end{cases}$

avec $E(X) = np$; $V(X) = npq \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$; et $\sigma(X) = \sqrt{npq \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

5.7.2 Application de la loi hypergéométrique : $\mathcal{H}(N, n; p)$

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher dont six boules blanches et quatorze boules noires. On tire successivement sans remise sept boules. Soit X , la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches obtenues après tirage.

- Déterminer la loi de probabilité de X et $X(\Omega)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.
- Calculer la probabilité d'obtenir au moins trois boules blanches.
- Calculer la probabilité d'obtenir entre deux et quatre boules blanches.

5.7.3 Application de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n; p)$ – fiche 2 exercice 8

5.8 Tableau comparatif de la loi hypergéométrique et de la loi binomiale

Critères	Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$
Probabilité d'un succès : p	$p = P(\text{succès})$	$p = P(\text{succès})$
Probabilité d'un échec : q	$q = P(\text{échec})$ avec $q = 1 - p$	$q = P(\text{échec})$ avec $q = 1 - p$
Taille de la population	N	inconnu
Taille échantillon	n	n
Tirage (ou prélèvement)	Tirage non indépendant ; ou tirage sans remise ; ou tirage exhaustif ;	Tirage indépendant ; ou tirage avec remise ; ou tirage non exhaustif ;
Taux de sondage	$\frac{n}{N} \geq 0,05$	$\frac{n}{N} < 0,05$
Coefficient d'exhaustivité (ou facteur d'exhaustivité)	$\frac{N - n}{N - 1}$	Inconnu ; (ou on admet que N très grand et $\frac{N-n}{N-1} \approx 1$)
Nombre de succès dans la population : Np	$Np = N \times p$	inconnu
Nombre d'échecs dans la population : Nq	$Nq = N \times q$ avec $N = Np + Nq$	inconnu
Variable aléatoire : X	X = nombre de succès	X = nombre de succès
$X(\Omega)$	$X(\Omega) \subseteq [0; n]$ ou $X(\Omega) = \{Max(0; n - Nq); \dots; Min(n; Np)\}$	$X(\Omega) = [0; n]$ ou $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$
Loi de probabilité de X	$P(X = x) = \frac{C_{Np}^x \times C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n}$	$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$
Espérance mathématique $E(X)$:	$E(X) = np$	$E(X) = np$
Variance : $V(X)$	$V(X) = npq \frac{N - n}{N - 1}$	$V(X) = npq$
Ecart-type : $\sigma(X)$	$\sigma(X) = \sqrt{npq \frac{N - n}{N - 1}}$	$\sigma(X) = \sqrt{npq}$

5.9 Loi géométrique paramètres $p : \mathcal{G}(p)$

5.9.1 Définition

La loi géométrique décrit une expérience aléatoire qui consiste à faire n répétitions indépendantes (ou avec remise) de l'épreuve de Bernoulli. La variable aléatoire X désignant le nombre d'essais (ou de tentatives) nécessaires pour obtenir un succès suit la loi géométrique de paramètres p . On écrit : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, avec :

$$X(\Omega) = \{1; 2; \dots; n, \dots\} = \mathbb{N}^*$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors la loi de probabilité de X est :

$$P(X = n) = pq^{n-1}$$

$$\begin{cases} p = P(\text{succès}) \\ q = P(\text{échec}) \text{ avec } E(X) = \frac{1}{p} ; V(X) = \frac{q}{p^2} ; \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\frac{q}{p^2}} \\ p + q = 1 \end{cases}$$

5.9.2 Application de la loi géométrique : $\mathcal{G}(p)$

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher dont six boules blanches et quatorze boules noires. On tire successivement avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. Soit X , la variable aléatoire désignant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche.

- Déterminer la loi de probabilité de X et $X(\Omega)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- Calculer la probabilité de faire trois tirages pour obtenir une boule blanche.
- Calculer la probabilité de faire au moins trois tirages pour obtenir une boule blanche.
- Calculer la probabilité de faire entre deux et quatre tirages pour obtenir une boule blanche.

5.10 loi de pascal (ou loi binomiale négative) de paramètre r et $p : \mathcal{R}(r; p)$

5.10.1 Définition

La loi géométrique décrit une expérience aléatoire qui consiste à faire n répétitions indépendantes (ou avec remise) de l'épreuve de Bernoulli. La variable aléatoire X désignant le nombre d'essais (ou de tentatives) nécessaires pour obtenir r succès suit la loi de Pascal (ou loi binomiale négative) de paramètres r et p . On écrit : $X \hookrightarrow \mathcal{R}(r; p)$, avec :

$$X(\Omega) = \{r, r + 1, r + 2, \dots, n, \dots\}$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{R}(r; p)$ alors la loi de probabilité de X est :

$$P(X = n) = C_{n-1}^{r-1} p^r q^{n-r}$$

$$\begin{cases} p = P(\text{succès}) \\ q = P(\text{échec}) \text{ avec } E(X) = \frac{r}{p} ; V(X) = \frac{rq}{p^2} ; \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\frac{rq}{p^2}} \\ p + q = 1 \end{cases}$$

5.10.2 Application de la loi de Pascal (ou loi binomiale négative) : $\mathcal{R}(r; p)$

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher dont six boules blanches et quatorze boules noires. On tire successivement avec remise jusqu'à l'obtention de sept boules blanches. Soit X , la variable aléatoire désignant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir sept boules blanches.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X et $X(\Omega)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- b) Calculer la probabilité de faire huit tirages pour obtenir sept boules blanches.
- c) Calculer la probabilité de faire au moins huit tirages pour obtenir sept boules blanches.
- d) Calculer la probabilité de faire entre huit et dix tirages pour obtenir sept boules blanches.

5.11 TABLEAU SYNOPTIQUE RESUMANT LES LOIS DISCRETES USUELLES

Loi de Probabilité discrète	X : Variable aléatoire	$P(X = x)$ Probabilité	$E(X)$	$V(X)$	$\sigma(X)$
Loi uniforme discrète (formule générale) $X \hookrightarrow \mathcal{U}$	$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $\text{card}X(\Omega) = n$	$P(X = x) = \frac{1}{n}$ $n \neq 0$	$\frac{\sum_i x_i}{n}$	$\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_i x_i}{n}\right)^2$	$\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_i x_i}{n}\right)^2}$
Loi uniforme discrète (cas particulier) $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[1;n]}$	$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$ $\text{card}X(\Omega) = n$	$P(X = x) = \frac{1}{n}$ $n \neq 0$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
Loi de Poisson : $\mathcal{P}(\lambda)$ $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
Loi de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ Succès = 1 Echec = 0	X = nombre de succès $X(\Omega) = \{0; 1\}$ $\text{card}X(\Omega) = 2$	$P(X = x) = p^x q^{1-x}$ avec : $\begin{cases} p = P(\text{Succès}) \\ q = P(\text{Echec}) \\ p + q = 1 \end{cases}$	p	pq	\sqrt{pq}
Loi Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ n répétitions identiques et indépendantes (avec remise ou tirage non exhaustif) de l'épreuve de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$	X = nombre de succès $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ $\text{card}X(\Omega) = n + 1$	$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$ avec : $\begin{cases} p = P(\text{succès}) \\ q = P(\text{echec}) \\ p + q = 1 \end{cases}$	np	npq	\sqrt{npq}

TABLEAU SYNOPTIQUE RESUMANT LES LOIS DISCRETES USUELLES (SUITE)

<p>Loi Hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ n répétitions identiques et non indépendantes (sans remise ou tirage exhaustif) de l'épreuve de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$</p> <p>$N_1 = Np; N_2 = Nq$</p>	<p>X = nombre de succès $X(\Omega) \subseteq$ $\{0, 1, 2, \dots, n\};$</p> <p>Précisément : $X(\Omega)$ $= [Max(0; n$ $- Nq); Min(n; Np)]$</p>	<p>$P(X = x) = \frac{C_{Np}^x \times C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n}$</p> <p>avec :</p> $\begin{cases} p = P(\text{succès}) \\ q = P(\text{échec}) \\ p + q = 1 \end{cases}$	<p>np</p>	<p>$npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$</p>	<p>$\sqrt{npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right)}$</p>
<p>Loi Géométrique : $\mathcal{G}(p)$ $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$</p> <p>On répète l'épreuve de Bernoulli $\mathcal{B}(1; p)$ de façon indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.</p>	<p>X = nombre d'essais (ou de tentatives) nécessaires pour obtenir un succès $X(\Omega)$ $= \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$</p>	<p>$P(X = n) = pq^{n-1}$</p> <p>avec :</p> $\begin{cases} p = P(\text{succès}) \\ q = P(\text{échec}) \\ p + q = 1 \end{cases}$	<p>$\frac{1}{p}$</p>	<p>$\frac{q}{p^2}$</p>	<p>$\sqrt{\frac{q}{p^2}}$</p>
<p>Loi de Pascal: $\mathcal{R}(r; p)$ $X \hookrightarrow \mathcal{R}(r; p)$</p> <p>Répétitions indépendantes de Bernoulli $\mathcal{B}(1; p)$ jusqu'à l'obtention de r succès.</p>	<p>X = nombre d'essais (ou de tentatives) nécessaires pour obtenir r succès $X(\Omega)$ $= \{r, r+1, r$ $+ 2, \dots, n, \dots\}$ $X(\Omega) = [r; +\infty[$</p>	<p>$P(X = n) = C_{n-1}^{r-1} p^r q^{n-r}$</p> <p>avec : $n \geq r$ et</p> $\begin{cases} p = P(\text{succès}) \\ q = P(\text{échec}) \\ p + q = 1 \end{cases}$	<p>$\frac{r}{p}$</p>	<p>$\frac{rq}{p^2}$</p>	<p>$\sqrt{\frac{rq}{p^2}}$</p>

CONVERGENCE EN PROBABILITE

On dit qu'une variable aléatoire X_n converge en probabilité vers une constante a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 0$$

Ceci signifie que l'écart entre le paramètre calculé à partir de l'échantillon et la vraie valeur du paramètre de la population est très faible quand la taille de l'échantillon est grande. Cet écart peut être mesuré par la variance. Ainsi on parle de convergence en probabilité si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(X_n) = 0$$

Exemple 1 :

Soit X_n une variable aléatoire qui désigne le nombre de succès obtenus lors de n prélèvements dans une population finie de taille N et dont la proportion de succès est p .

Désignons par $f_n = \frac{X_n}{n}$ la fréquence relative (pourcentage) des succès.

- Cas des prélèvements sans remise :

Dans ce cas la variable aléatoire X_n suit une loi hypergéométrique de paramètre N , n et p .

On sait que :

$$E(X_n) = n p \quad \text{et} \quad V(X_n) = \frac{N-n}{N-1} n p q$$

On démontre :

$$E(f_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n} n p = p$$

$$V(f_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{1}{n^2} \frac{N-n}{N-1} n p q = \frac{N-n}{N-1} \frac{pq}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(f_n) = 0$$

La fréquence relative f_n converge en probabilité vers p .

- Cas des prélèvements avec remise :

Dans ce cas la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètre n et p .

On sait que :

$$E(X_n) = n p \quad \text{et} \quad V(X_n) = n p q$$

On démontre :

$$E(f_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n} n p = p$$

$$V(f_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{1}{n^2}n p q = \frac{pq}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(f_n) = 0$$

La fréquence relative f_n converge en probabilité vers p .

Exemple 2 :

Soient X_i ($i=1$ à n) n variables aléatoires indépendantes et ayant la même loi de probabilité.

$$E(X_i) = m \quad \text{et} \quad V(X_i) = \sigma^2$$

Désignons par : $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ la moyenne calculée à partir d'un échantillon de taille n .

- Cas des prélèvements sans remise :

On démontre :
$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \times n \times m = m$$

$$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{N-n}{N-1} \times \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\bar{X}_n) = 0$$

La moyenne $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ calculée à partir d'un échantillon de taille n converge en probabilité vers m .

- Cas des prélèvements avec remise :

On démontre :
$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \times n \times m = m$$

$$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\bar{X}_n) = 0$$

La moyenne $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ calculée à partir d'un échantillon de taille n converge en probabilité vers m .

INEGALITE DE BIENAYME TCHEBYCHEFF

Cette inégalité concerne des probabilités relatives à des écarts par rapport à l'espérance mathématique supérieurs à k fois écart type, c'est à dire à des écarts centrés réduits $\frac{X-E(X)}{\sigma}$.

Quelle que soit la variable aléatoire X , la probabilité d'un intervalle $[E(X)-k\sigma, E(X)+k\sigma]$ a pour borne inférieure $1 - \frac{1}{k^2}$.

$$P(E(X)-k\sigma < X < E(X)+k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Demonstration :

Si on pose $k = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ l'inégalité peut être écrite :

$$P(E(X)-\varepsilon < X < E(X)+\varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{ou} \quad P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$V(X) = \sum (x - E(X))^2 p(x)$$

On peut décomposer la variance en trois sommes :

$$V(X) = S1 + S2 + S3$$

Avec :

- $S1 \Rightarrow$ pour $x < E(X)-k\sigma$
- $S2 = \sum (x - E(X))^2 p(x)$ pour $E(X)-k\sigma \leq x \leq E(X)+\sigma$
- $S3 = \sum (x - E(X))^2 p(x)$ pour $x > E(X)+\sigma$

$$V(X) = S1 + S2 + S3$$

$$V(X) \geq S1 + S3$$

- Pour $S1$ $x < E(X) - k\sigma \Rightarrow x - E(X) < -k\sigma \Rightarrow (x - E(X))^2 > k^2\sigma^2$

$$\Rightarrow \sum (x - E(X))^2 p_1(x) \geq \sum k^2\sigma^2 p_1(x) \quad \Rightarrow \quad S1 \geq k^2\sigma^2 \sum p_1(x)$$

- Pour $S3$ $x > E(X) + k\sigma \Rightarrow x - E(X) > k\sigma \Rightarrow (x - E(X))^2 > k^2\sigma^2$

$$\Rightarrow \sum (x - E(X))^2 p_3(x) \geq \sum k^2\sigma^2 p_3(x) \quad \Rightarrow \quad S3 \geq k^2\sigma^2 \sum p_3(x)$$

$$V(X) \geq S1 + S3 \Rightarrow V(X) \geq k^2\sigma^2 \sum p_1(x) + k^2\sigma^2 \sum p_3(x) \Rightarrow \\ V(X) \geq k^2\sigma^2 \times (\sum p_1(x) + \sum p_3(x))$$

$$\text{Or } \sum p_1(x) + \sum p_3(x) = 1 - \sum p_2(x)$$

$$\text{On note: } \sum p_2(x) = p$$

$$\sum p_2(x) = p(E(X) - k\sigma \leq X \leq E(X) + k\sigma)$$

Or $V(X) = \sigma^2$

On a donc :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\geq k^2 \sigma^2 \times (1 - p) \Rightarrow 1 \geq k^2 \times (1 - p) \Rightarrow \frac{1}{k^2} \geq 1 - p \Rightarrow \\ p &\geq 1 - \frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

L'inégalité de Bienaymé Tchebycheff est donc :

$$p(E(X) - k\sigma \leq X \leq E(X) + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Ou encore : $P(E(X) - \varepsilon < X < E(X) + \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ ou $P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé Tchebycheff à la fréquence relative $f_n = \frac{X_n}{n}$ et à la moyenne $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ on obtient :

$$P(|f_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad P\left(\left|\bar{X} - m\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$