# Sommaire

## CHAPITRE 3 - VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

### 3.1 Variables Aléatoires (va) : X

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire X toute application de $\Omega$ vers $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$, qui à tout élément $\omega_i$ de $\Omega$ associe une valeur $x_i$ de $X(\Omega)$.

$$\mathrm{X} : \Omega \longrightarrow X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$$
$$\omega_i \longrightarrow x_i \qquad \textit{telle que } X = x_i$$

$X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X. $X(\Omega)$ est aussi appelé support de la loi de probabilité de X.

NB : X : la Lettre Capitale X désigne la variable aléatoire.
$x_i$ : la lettre minuscule $x_i$ désigne une valeur prise par X.

### 3.2 Variable aléatoire discrète : X

X est appelé variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est un ensemble fini dénombrable ou un ensemble infini dénombrable.
Exemple :
Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\}$ = est un ensemble fini dénombrable $\longrightarrow X$ est discrète.
Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ =$\{1, 2, 3, \ldots\ldots, n, \ldots.\}$ est un ensemble infini dénombrable$\longrightarrow X$ est discrète.

### 3.3 Variable aléatoire continue : X

X est appelé variable aléatoire continue si $X(\Omega)$ est un intervalle réel ou une réunion d'intervalles réelles.
Exemple :
Si $X(\Omega) = \mathbb{R}^+ = [0;\ +\infty[ \longrightarrow X$ est continue.
Si $X(\Omega) = \mathbb{R} = ]-\infty; 0] \cup [0;\ +\infty[ \longrightarrow X$ est continue.

### 3.4 La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X : P

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, on appelle loi de probabilité de X (ou loi de distribution de X), toute application P de $X(\Omega)$ vers $[0; 1]$, qui à tout élément $x_i$ de $X(\Omega)$ associe une valeur $p_i$ de $[0; 1]$.

$$\mathrm{P}: X(\Omega) \longrightarrow [0; 1]$$
$$x_i \longrightarrow p_i = P(X = x_i)$$

Vérifiant les conditions suivantes :

1. $0 \leq p_i = P(X = x_i) \leq 1$ ; la probabilité est toujours positive.
2. $\sum_{x_i \in X(\Omega)} p_i = P(X = x_i) = 1$ ; la somme des probabilités est égale à 1.

Autrement dit : la loi de probabilité (ou loi de distribution) d'une variable aléatoire discrète X est l'ensemble des couples $(x_i; p_i)$ représenté sous forme de tableau comme suit :

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ................ | $x_i$ | .................. | $x_k$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | ................. | $p_i$ | .................. | $p_k$ | $\sum_{i=1}^{i=k} p_i = 1$ |

Avec $p_i = P(X = x_i)$

## 3.5 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète : F(x)

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X définie sur le support $X(\Omega)$ est une fonction F(x) de $\mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$ telle que

$$quelque\ soit\ x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Si $x < x_1$, $\qquad F(x) = 0;$
:
:
Si $x_j \leq x < x_{j+1}$, $\qquad F(x) = \sum_{i=1}^{i=j} P(X = x_i);$
:
:
Si $x \geq x_k$, $\qquad F(x) = 1$

### Propriétés de F(x)

F est croissante sur $\mathbb{R}$ : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$

Pour tous réels a et b tels que :

$$a < b, \qquad F(b) - F(a) = P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

## 3.6 Esperance mathématique d'une variable aléatoire discrète : E(X)

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

### Propriétés de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète : E(X)

Soient deux variables aléatoires discrètes : X et Y ;
Soient deux constantes réelles a et b ;

a) E(X + a) = E(X) + a
b) E(aX) = aE(X)
c) E(aX +b) = aE(X) + b
d) E(X + Y) = E(X) + E(Y)
e) E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)
f) Si E(X) = 0, on dit que X est une variable centrée.

## 3.7 Variance d'une variable aléatoire discrète X : V(X)

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 \quad ou \quad V(X) = \sum_i p_i \left[x_i - \left(\sum_i p_i x_i\right)\right]^2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad ou\ V(X) = \sum_i p_i x_i^2 - \left(\sum_i p_i x_i\right)^2$$

### 3.7.1 Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

### 3.7.2 Propriétés de la variance d'une variable aléatoire discrète : V(X)

a) $V(X) \geq 0$
b) $V(a) = 0,$ la variance d'une constante a est nulle ;
c) $V(aX) = a^2 V(X)$
d) $V(X + b) = V(X)$
e) $V(aX + b) = a^2 V(X)$
f) $V(X + Y) = V(X) + 2cov(X;Y) + V(Y)$
g) $Si\ X\ et\ Y\ sont\ indépendantes\ alors\ cov(X;Y) = 0\ \Rightarrow\ V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

### 3.7.3 Variable centrée et réduite

Soit X : variable aléatoire et a une constante réelle non nulle telles que :
$E(X) = a,\ \ avec\ a \neq 0$ ;
Soit Y : une autre variable aléatoire telle que :

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \Longrightarrow \begin{cases} E(Y) = 0, \longrightarrow & Y\ est\ dite\ centrée; \\ \sigma(Y) = 1, \longrightarrow & Y\ \ est\ dite\ réduite; \end{cases}$$

**Montrer que $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$**

Y est dite centrée si son espérance mathématique est nulle ; elle est dite réduite si son écart-type est égal à 1.
Toute variable aléatoire peut être transformée en une variable centrée réduite par le changement de variable $\frac{X - E(X)}{\sigma}$.

### 3.8 Moments simples d'ordre r : $m_r$

$$m_r = E(X^r) = \sum_i p_i x_i^r$$

$$r = 1 \longrightarrow m_1 = E(X) = \sum_1 p_i x_i$$

$$r = 2 \longrightarrow m_2 = E(X^2) = \sum_1 p_i x_i^2$$

### 3.9 Moments centrés d'ordre r : $\mu_r$

$$\mu_r = E[X - E(X)]^r = \sum_i p_i \left[ x_i - \left( \sum_i p_i x_i \right) \right]^r$$

$$r = 1 \longrightarrow \mu_1 = E[X - E(X)] = \sum_1 p_i \left[ x_i - \left( \sum_i p_i x_i \right) \right] = 0$$

$$r = 2 \longrightarrow \mu_2 = E[X - E(X)]^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = m_2 - m_1^2$$

<u>Exercice d'application</u> - Une variable aléatoire discrète a pour distribution de probabilité :

| x | -2 | -1 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| P(X = x) | 1 /3 | 1 / 4 | 1 / 4 | 1 / 6 |

a. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
b. Calculer les mêmes quantités dans le cas où toutes les valeurs sont augmentées de 2 et dans le cas où toutes les valeurs sont multipliées par 2.
c. Déterminer la fonction de répartition (F) de la variable aléatoire X.

**CORRIGE :**

**Loi de probabilité de X : c'est l'ensemble des couples $(x_i; p_i)$**

a) Espérance mathématique de X (ou moyenne de X) : $E(X) = \sum x_i p_i$

Variance de X : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, avec $E(X^2) = \sum x_i^2 p_i$

La loi de probabilité de la v.a. X est donnée dans le tableau ci-dessous

| $x_i$ | -2 | -1 | 5 | 10 | Total : $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | 1 /3 | 1 / 4 | 1 / 4 | 1 / 6 | $\sum p_i = 1$ |
| $x_i p_i$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{10}{6}$ | $\sum x_i p_i = 2 = E(X)$ |
| $x_i^2 p_i$ | $^4/_3$ | $^1/_4$ | $^{25}/_4$ | $^{100}/_6$ | $\sum x_i^2 p_i$ =24,5= $E(X^2)$ |

$E(X) = \sum x_i p_i = 2$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 24{,}5 - 2^2 = 20{,}5$

Ecart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{20{,}5} \cong 4{,}53$

b) Calculer les mêmes quantités dans le cas où toutes les valeurs sont augmentées de 2 et dans le cas où toutes les valeurs sont multipliées par 2.

✓ Cas où toutes les valeurs sont augmentées de 2 : $Y = X + 2$

Rappel des propriétés de E(X) et V(X) : posons Y = aX+b, a et b des réels

$$\begin{cases} E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b \\ V(Y) = V(aX+b) = a^2 V(X) \end{cases}$$

$Y = X + 2$, on a : $\begin{cases} E(Y) = E(X+2) = E(X) + 2 = 2 + 2 = 4 \\ V(Y) = V(X+2) = V(X) = 20{,}5 = 20{,}5 \end{cases} \Rightarrow \sigma(Y) = \sqrt{20{,}5} \cong 4{,}53$

✓ Cas où toutes les valeurs sont multipliées par 2 : $Y = 2X$

Pour Y=2X, on a : $\begin{cases} E(Y) = E(2X) = 2E(X) = 2 \times 2 = 4 \\ V(Y) = V(2X) = 2^2 V(X) = 4 \times 20{,}5 = 82 \end{cases} \Rightarrow \sigma(Y) = \sqrt{82} \cong 9{,}055$

c) Fonction de répartition (F) de la variable aléatoire X : $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

- ✓ si $x < -2$, $F(x) = 0$;
- ✓ $si -2 \leq x < -1$, $F(x) = P(X = -2) = \frac{1}{3}$;
- ✓ $si -1 \leq x < 5$, $F(x) = P(X = -2) + P(X = -1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$;
- ✓ $si\ 5 \leq x < 10$, $F(x) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 5)$
  $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{12}$;
- ✓ $si\ x \geq 10$, $F(x) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 5) + P(X = 10)$
  $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{12}{12} = 1$

En résumé F(x) est :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{3}, & si -2 \leq x < -1 \\ \frac{7}{12}, & si -1 \leq x < 5 \\ \frac{10}{12}, & si\ 5 \leq x < 10 \\ 1, & si\ x \geq 10 \end{cases}$$

## CHAPITRE 4 - VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

### 4.1 Définition : une variable aléatoire X est continue si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$

### 4.2 Propriété : Si X est une variable aléatoire continue alors la probabilité d'être en un point est nulle : $P(X = x) = 0$ pour $x \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$.

Dans le cas d'une variable continue réelle on ne peut déterminer que la probabilité associée à des intervalles de réalisations.

Exemple :

- $P(X < x) = P(X \leq x) = P(X \in ]-\infty\,; x])$
- $P(X > x) = P(X \geq x) = P(X \in [x\,;\, +\infty[)$
- Pour a et b appartenant à $X(\Omega)$, tels que $x \in [a\,; b]$, on a
  $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(X \in [a\,; b])$
- $\boldsymbol{mais\ P(X = x) = 0}$

### 4.3 Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X (on note la ddp de X) : $f(x)$

Soit f une fonction définie et intégrable sur $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ; f est une densité de probabilité de la variable aléatoire continue X si :

1. $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$
2. $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$.

### 4.4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X : F(x)

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}, \qquad pour\ \ x \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$$

Par conséquent : $F'(x) = f(x)$

#### 4.4.1 Propriétés de la fonction de répartition : F(x)

- F(x) est croissante avec x :

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x} \geq 0, \qquad pour\ x \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$$

- $0 \leq F(x) \leq 1, \quad pour\ x \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$

- $\lim_{-\infty} F(x) = 0$ ;
- $\lim_{+\infty} F(x) = 1$
- Pour a et b appartenant à $X(\Omega)$, tels que $x \in [a\,;b]$, on a :

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = \boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx}$$

### 4.4.2 Quantile d'ordre $\alpha$ : $x_\alpha$

On appelle quantile d'ordre $\boldsymbol{\alpha}$**,** la valeur $\boldsymbol{x_\alpha}$ de la variable aléatoire continue X telle que :

$$\boldsymbol{F(x_\alpha) = \alpha}$$

## 4.5 Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue : E(X)

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}$$

## 4.6 Variance d'une variable aléatoire continue : V(X)

$$\boldsymbol{V(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^2 f(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{V(X)} = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x^2 f(x)dx} - [E(X)]^2$$

## 4.7 Exemple

Soit une variable aléatoire continue X définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} k\ (k > 0) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est une ddp si f(x) ≥ 0 et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

a) k > 0 ⇒ $f(x) \geq 0$
b) Pour déterminer la constante k, il faut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 k \times dx = 1 \quad \Rightarrow \quad k \times x]_0^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit par intégration la fonction de répartition F(x) :

Si x < 0 : F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \times dt = 0$

Si 0 ≤ x ≤ 1 : F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \times dt + \int_0^x 1 \times dt = x$

Si x > 1 : F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \times dt + \int_0^1 1 \times dt + \int_1^x 0 \times dt = 1$

Donc :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Calcul de $E(X)$ Application à partir de l'exemple précédent

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x(0)dt + \int_{0}^{1} x(1)dt + \int_{1}^{+\infty} x(0)dt$

$E(X) = 0 + \int_{0}^{1} x(1)dt + 0 \Rightarrow E(X) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Calcul de $V(X)$ Application à partir de l'exemple précédent

$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2(0)dt + \int_{0}^{1} x^2(1)dt + \int_{1}^{+\infty} x^2(0)dt$

$V(X) = 0 + \int_{0}^{1} x^2(1)dt + 0$

$V(X) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

## 4.8 Moments d'une variable aléatoire continue X

### 4.8.1 Moment simple d'ordre r :

$$m_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$$

$$\text{pour } r = 1, \text{on a } m_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\text{pour } r = 2, \text{on a } m_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

### 4.8.2 Moment centré d'ordre r :

$$\mu_r = E[(X - E(X))^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^r f(x)dx$$

$$\text{pour } r = 2, \quad \mu_2 = E[X - E(X)]^2 = V(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$