UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET-BOIGNY
ABIDJAN-COCODY

COURS DE STATISTIQUES MATHEMATIQUES – STATISTIQUES AVANCEES – INFERENCE STATISTIQUE

Prof. AHOURE Alban A. E.
PhD en Sciences Economiques
Professeur Titulaire

PLAN DU COURS

Le Cours de Statistiques- Probabilité, dispensé en deuxième année de Licence des Sciences Economiques vise à donner aux étudiants les fondements de base sur les Probabilités, l'Echantillonnage, l'Estimation et les Tests d'Hypothèses. Il comporte 4 ECUE.

Chapitre 1. Généralités / Ensembles / Analyse combinatoire

Chapitre 2. Probabilités

Chapitre 3. Variables aléatoires

Chapitre 4. Lois de Probabilités Discrètes usuelles

Chapitre 5. Lois de Probabilités Continues usuelles

Chapitre 6. Théorie de l'échantillonnage
Chapitre 7. Estimation
Chapitre 8. Tests d'hypothèses.

Ces chapitres sont regroupés en deux (2) Unités d'Enseignement :

- UE Statistiques mathématiques et Probabilités
- UE Estimation et Tests d'Hypothèses.

Chaque UE se décompose en deux (2) Eléments Constitutifs de l'Unité d'Enseignement (ECUE).

- Pour l'UE 1, nous avons ECUE 1. Généralités/ Analyse Combinatoire et ECUE 2. Probabilités
- Pour l'UE 2, ce sont : ECUE 3. Echantillonnage et Estimation et ECUE 4. Inférence statistique / Tests d'hypothèses.

ECUE 1. GENERALITES

CHAPITRE I : GENERALITES

I-1- Définition et concepts de base

I-1-1- Définitions

Les notions de risques et de probabilités sont omniprésentes dans le monde économique. Les décisions économiques ou commerciales sont souvent prises en se basant sur l'analyse d'évènement incertain.

Exemple

La chance que les ventes baissent si on augmente les prix. La probabilité qu'une nouvelle méthode augmente la productivité. Si les probabilités étaient connues, nous pourrions déterminer **la vraisemblance** d'occurrence ou de réalisation d'un évènement. Les valeurs d'une probabilité sont toujours comprises **entre 0 et 1**.

Le calcul des probabilités fournit une modélisation efficace des situations non déterministes ou aléatoires ou stochastiques.

Les évènements aléatoires sont associés à des résultats d'expériences qui ne sont pas connus a priori.

Il existe deux manières de déterminer les probabilités dans la vie courante.

- **La probabilité a priori ou subjective qui est caractérisée par la croyance et se fonde sur les expériences vécues**.

Exemple : 80% de chance qu'il pleuve.

- **La probabilité empirique qui est assimilée à une fréquence à partir d'expériences indéfiniment renouvelées**.

Exemple : Probabilité de succès en Stat2 = Taux moyen de succès sur les 20 dernières années.

I-1-2- Expérience aléatoire

Une expérience est un processus qui génère un ensemble de résultats prédéfinis. Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat ne peut être déterminé avec certitude a priori.

L'ensemble de résultats possibles est appelé univers (ou Ω).

Exemple

L'ensemble de résultats possibles du lancer de 2 pièces de monnaie

$\Omega = \{(P,F);(F,P);(F,F);(P,P)\}$

Un résultat élémentaire d'une expérience est un ensemble possible de l'univers.

I-1-3- Operations sur les évènements

***Complémentaire de l'évènement A**

Le complémentaire de l'évènement A est l'ensemble des éléments qui ne sont pas dans A et qui ajouté à A permettent d'obtenir Ω. Il est assimilé à l'évènement contraire ou non A qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé.

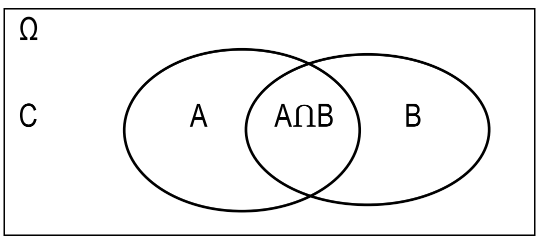
$$C^A = \overline{A} = \{w \in \Omega / w \in \overline{A} \text{ et } w \notin A\}$$

***Réunion de deux évènements A et B**

Réunion de A et B: évènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). Soit ω le résultat de l'expérience

AUB : {w Є Ω / w Є A ou w Є B}

A*U*B se réalise ssi A se réalise ou B se réalise : A ou B)



P(AUB)= P(A) + P(B)- P(A∩B)

*AU$\bar{A}$ = Ω   *AUΦ= A

*ΩUA=Ω

*AUB=BUA

*AU(BUC)= (AUB)UC   * AU(B ∩ C)= (AUB) ∩(AUC)

***Intersection de deux évènements A et B**

Evènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B. Soit ω le résultat de l'expérience

A∩B : {w Є Ω/w Є A et *w* Є B}

A∩B se réalise ssi A et B se réalisent : A et B)

* A∩$\bar{A}$ = ϕ

* A∩ϕ = ϕ

*A∩B = B∩A   commutativité

* A∩B = A si A Є B

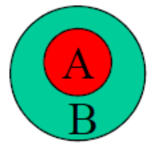
* A∩B = B si B Є A

* A∩(B∩C) = (A∩B) ∩ C associativité

*A∩(BUC) = (A∩B) U (A∩C) distributivité de l'intersection sur la réunion

***Inclusion**

A est inclus dans B ssi tout élément de A appartient à B



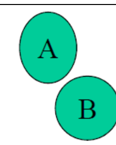
$$A \subset B \Leftrightarrow \{w \in A \Rightarrow w \in B\}$$

Si A est réalisé alors B est réalisé

***Evènements incompatibles ou disjoints**

A et B sont deux évènements incompatibles ou disjoints s'ils n'ont pas d'éléments communs.

A et *B* disjoints Û $A \cap B = \varnothing$



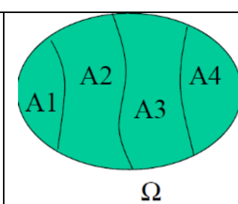
***Système complet d'évènements**

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n évènements

* Si l'ensemble $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forme une partition de Ω

* Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles

* Et si leurs réunions $A_1 U A_2 U \ldots U A_n = \Omega$; $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ alors cet ensemble d'évènements forme un système complet d'évènements.



I-2- Analyse combinatoire

Le but de l'analyse combinatoire (techniques de dénombrement) est d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini de grande cardinalité.

I-2-1 Arrangements

On appelle arrangement de p objet dans n, **toute suite ordonnée** de p objet pris parmi les n.

I-2-1-1 Permutation

Une permutation de n éléments distincts $e_1, e_2, \ldots, e_n$ est un réarrangement ordonné, sans répétition de ces n éléments.

Le nombre de permutations (N) de n éléments distincts est : $N = n!$

Exemple : "a", "b" et "c" sont trois éléments. Les arrangements possibles sont

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Le nombre d'arrangements est donc 6.

- Avec n objets différents, combien de façons de les poser les uns à côté des autres?
- Avec 5 personnes, combien de façons de s'assoir sur un banc?
- Avec 52 cartes, combien de paquets de cartes peut-on former?

1-2-1-2- Arrangements avec répétition

Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement avec répétition est $N = n^P$

n: le nombre total d'éléments P : p-objet pris dans n

Exemple :

Combien de mots de 5 lettres pouvons-nous former avec l'alphabet français

26	26	26	26	26

$N = 26^5$

I-2-1-3- Arrangements sans répétition

Lorsque chaque objet dans un arrangement ne peut être observé qu'une seule fois, le nombre d'arrangement sans répétition de p objet parmi n est N= $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ Avec p ≤ n

Exemple

Dans un pari (PMU), il y a 20 chevaux au départ,

Quel est le nombre de tiercés possible ? $N = A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20x19x18 = 6840$

I-2-2 Combinaison

Une combinaison de p éléments pris dans un ensemble à n éléments distincts est un sous-ensemble à p éléments de cet ensemble. Les éléments sont pris sans répétition et ne sont pas ordonnés.

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté $C_{n,p}$ ou C_n^p ou $\binom{p}{n}$ $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ **qui est appelé coefficient binomial.**

Propriétés :

- $C_{n,k} = C_{n,n-k}$
- Formule de récurrence $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$.
  Démonstration : Soit $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Le nombre $C_{n,k}$ est le nombre de sous-ensembles de Ω de cardinalité k. Soit Ω_k cet ensemble de sous-ensembles ; il se décompose en l'union de deux ensembles disjoints :

$$\Omega_k = \Omega_{k,w_1=a} \bigcup \Omega_{k,w_1\neq a}$$

  Or $|\Omega_k| = |\Omega_{k,w_1=a}| + |\Omega_{k,w_1\neq a}| - |\Omega_{k,w_1=a} \bigcap \Omega_{k,w_1\neq a}|$.
  Donc $|\Omega_k| = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k} - 0$. $\square$

- Le triangle de Pascal est une conséquence de la formule de récurrence :

P1 : Quatre couples doivent être assis dans une rangée de 8 chaises. Combien y a-t-il de façon de le faire si :

- Il n'y a pas de contraintes.
  R : $8! = 40'320$
- Les hommes doivent rester ensemble et les femmes aussi.
  R : $2(4!)^2 = 1'152$
- Les hommes doivent rester ensemble.
  R : $5 \cdot (4!)^2 = 2'880$
- Chaque couple marié doit rester ensemble.
  R : $2^4 \cdot (4!) = 384$

Propriétés

P_1: $C_n^0 = C_n^n = 1$ — Une seule manière de choisir zéro éléments parmi n et une seule manière de choisir n éléments parmi n.

P_2: $C_n^p = C_n^{n-p}$ — Choisir p éléments parmi n, c'est aussi choisir les n-p restants.

P_3: $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ — Propriété du triangle de Pascal : voir la ressource IEL correspondante en cliquant ici.

P_4: $(a+b)^n = \sum_{I=0}^{n} C_n^i \, a^i b^{n-i}$ — Formule du binôme. Voir la ressource IEL correspondante en cliquant ici.

P_5: $(2)^n = \sum_{I=0}^{n} C_n^i$ — Utilisation de la formule du binôme avec a=b=1. Le nombre total de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n

Une urne est une boite **opaque** contenant n objets distincts. Un(e) opérateur(trice) prélève au hasard p objets dans l'urne.

Il peut prélever les p objets **successivement et sans les remettre** dans l'urne au fur et à mesure. On parle alors de **tirages successifs et sans remise.**

Il peut prélever les p objets **successivement et en les remettant** dans l'urne au fur et à mesure. On parle alors de **tirages successifs avec remise.**

Donc si les tirages sont successifs, cela implique obligatoirement que les objets sont ordonnés.

Il peut prélever les p objets **simultanément.** On parle alors de **tirage simultané.**

Le nombre de tirages possibles est indiqué dans le tableau suivant :

Tirages successifs et sans remise de p objets parmi n.	A_n^p
Tirages successifs avec remise de p objets parmi n.	n^p
Tirage simultané de p objets parmi n	C_n^p

Exemple :

Si E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}, un arrangement de 3 éléments de E sera par exemple (2 ; 5 ; 1) ou (3 ; 6 ; 1).

(2 ; 5 ; 5) n'est pas un arrangement, c'est un 3-uplet (un triplé) dont les éléments qui le composent ne sont pas distincts.

ECUE 2. PROBABILITES

II.1. Introduction

Probabilité= fonction permettant de « mesurer » la chance de réalisation d'un évènement de $\mathcal{P}(\Omega)$ (ou plus généralement d'une tribu $\mathcal{A}$)

✓ **Définition** : Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ est une application $P:\mathcal{A}\to[0,1]$ satisfaisant les 3 axiomes suivants :

$$0\le P(A)\le 1, \forall A\in\mathcal{A}$$
$$P(\Omega)=1$$
$$P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)=\sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i), \quad \forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ ensemble dénombrable d'évènements disjoints}$$

Dès lors que P est définie, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ s'appelle un espace probabilisé.

II.2. Opérations sur les probabilités

✓ **Opérations sur les probab**

$$P(\phi)=0$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)$$
$$P(A)\leqslant P(B)\, si\, A\subset B$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(\cup A_i)\leqslant\sum P(A_i)$$
$$0\leqslant P(A_i)\leqslant 1$$

CP: Si P(A)=0 alors A est *presque* impossible. On écrit $A=\varnothing$ p.s.
Si P(A)=1 alors A est *presque* sûr. On écrit $A=\Omega$ p.s.

II-3- Axiomes des Probabilités

* Probabilités conditionnelles

On considère deux évènements A et B tel que $B \neq \Phi$
On s'intéresse à la probabilité associée à l'évènement A en tenant compte de l'évènement B.

Cette probabilité de A sachant B est appelé probabilité conditionnelle.

$$\boxed{P(A/B) = \frac{PA \cap B}{P(B)}}$$

[P(B) > 0]

* Théorème des probabilités composées

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A/B)xP(B) = P(B/A)xP(A)}$$

Lorsque deux ensembles sont indépendants, le fait que l'un soit réalisé (parex B) n'apporte aucune information utile sur la réalisation de l'autre.

- Si A et B sont indépendants.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)xP(B)}{P(B)} => P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)xP(B)}{P(A)} => P(B/A) = P(B)$$

La connaissance de B et $\bar{B}$ ne donne aucune information utile pour la réalisation de A.

***Probabilités totales**

Si nous avons un ensemble d'évènement $\{E_1, E_2 \dots, E_n\}$ qui ferme un système complet d'évènement quelque soit B alors la probabilité de B est donné par :

$$\boxed{P(B) = P(B/E_1)xP(E_1) + P(B/E_2)xP(E_2) + \cdots + P(B/E_n)x(E_n)}$$

$P(B) = \sum_{l=1}^{n} P(B/E_i)xP(E_i)$ Théorème de la probabilité totale

Exemple
On considère un patient qui peut suivre au choix deux (2) traitements notés A et B.
La probabilité qu'il suive le traitement A est égal à 75%. On sait par ailleurs que la probabilité de succès du traitement A est de 80% tandis que celle du traitement B est égale à 90%.
On admet que la probabilité que ce patient soit guéri est de 82,5%.

Quelle est la probabilité que le patient ait suivi le traitement A sachant qu'il est guéri.

<u>Résolution</u>
$P(U_A) = 0{,}75$; $P(S_A) = P(G/A) = 0{,}80$; $P(S_B) = P(G/B) = 0{,}90$; $P(B) = 0{,}825$

$P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G/A)xP(A)}{P(B)} = \frac{0{,}80x0{,}75}{0{,}825} = 0{,}7272$
$P(A/G) = 0{,}7272$

- **Formule de l'intersection**

Soit un ens. d'évènements $(E_i) = \{E_1, E_2 \ldots, E_n\}$ tel que $P(E_1 \cap E_2 \ldots . E_n) > 0$
Alors la probabilité jointe associée à l'évènement correspondant à cette suite d'intersection :

$$P(A) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \ldots \cap E_n)$$
$$= P(E_1)xP(E_2/E_1)xP(E_3/E_1 \cap E_2)xP(E_4 \cap E_1 \cap E_2 \cap E_3/x \ldots . xP(E_1/E_1 \cap E_2 \cap E_3 \ldots \cap E_{n-1})$$

Cette formule de probabilité est particulièrement utile pour calculer des probabilités d'intersection notamment dans le cas d'une succession d'expérience aléatoire.

Exemple
On dispose d'une urne contenant n-1 boules noires et une boule rouge, on tire au hasard les boules une à une sans remise (succession d'expérience) ; et l'on cherche à calculer la probabilité d'obtenir la boule rouge à l'issue du $i^{ème}$ tirage $(1 \leq i \leq n)$.
On définit A_i « le ième tirage est un échec »
B_i « le ième tirage est un succès »

Résolution
$P(A_i) = \frac{n-1}{n}$ $P(B_i) = \frac{1}{n}$
$P(A_2/A_1) = \frac{n-1-1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}$
$P(B_i/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots . A_{i-1}) = \frac{n-1}{n} x \frac{n-2}{n-1} x \frac{n-3}{n-2} x \ldots x \frac{n-i+1}{n-i} \text{x} \frac{1}{n-i-1},$
$P(B_i/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots . A_{i-1}) = \frac{1}{n}$

II-4 Théorème de BAYES

Le théorème de Bayes est le fondement de la statistique et l'économétrie bayésienne dans laquelle $P(A_i/B)$ est appelé probabilité à postériori ($P(A_i/B)$ = Proba à postériori) et $P(A_i)$ = proba à priori.

Avec les probabilités conditionnelles, nous analysons d'abord les proba à priori tel que P(B).

Le théorème de Bayes se présente comme un corollaire du théorème des probabilités totales.

- Proba composées $P(A_i \cap B) = P(A_i \cap \lambda B)xP(B)$
- Proba totales $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)xP(A_i)$
- Proba conditonnelle $P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$
- Théorème de Bayes : $P(A_i/B)$= $\frac{P(B/A_i)\,xP(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)xP(A_i)}$

✓ **Théorème de Bayes**

➢ pour deux évènements A et B: $\boxed{P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}}$

➢ Généralisation pour un système complet d'évènements A_1 , A_2 , … , A_n :

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)} \qquad \boxed{P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}}$$

Exemple

Une entreprise manufacturière possède deux (2) fournisseurs F_1 et F_2 65% des pièces de cette entreprise viennent de F_1 et 35% des pièces de F_2. Par conséquent si une pièce est sélectionnée de façon aléatoire, on peut déterminer la probabilité à priori qu'elles proviennent de F_1 et F_2. La qualité des pièces achetés varie en fonction du fournisseur, toute pièce bonne est noté B et toute pièce défectueuse est noté D. 98% des pièces venant de F_1 sont bonnes et 2% défectueuses, tandis que 95% des pièces de F_2 sont bonnes et 5% défectueuses.

Déterminer la probabilité qu'une pièce prise de façon aléatoire et défectueuse provient de F_1.

Résolution

$$P(F_1) = 0,65$$
$$P(F_2) = 0,35$$
$$P(B / F_1) == 0,98 \qquad P(D / F_1) = 0,02$$
$$P(B / F_2) = 0,95 \qquad P(D / F_1) = 0,05$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_1, B) = P(F_1 \cap B) = P(F_1)xP(B / F_1) = 0,65x0,98 = 0,637$$
$$P(F_1 \cap D) = P(F_1)xP(D / F_1) = 0,65x0,02 = 0,0130$$
$$P(F_2 \cap B) = P(F_2)xP(B / F_1) = 0,35x0,95 = 0,3325$$
$$P(F_2 \cap D) = P(F_2)xP(D / F_2) = 0,35x0,05 = 0,0175$$

$$P(F_1 / D) = \frac{P(F_1)xP(D / F_1)}{P(F_1)xP(D / F_1) + P(F_2)xP(D / F_2)} \frac{0,65x0,02}{(0,65x0,02) + (0,35x0,05)} = 0,4262$$

Il y a 42,62% qu’une pièce provienne de F1 si elle est défectueuse.

CHAPITRE 3 : VARIABLES ALEATOIRES – LOI DE PROBABILITES

III-1 Définition

Une variable aléatoire est une description numérique du résultat d'une expérience, elle associe une valeur numérique à chaque résultat possible de l'expérience. C'est donc une application où une sorte de fonction qui pour chaque évènement de l'univers des possibles de Ω associe une valeur appartement à X(Ω).

Cette valeur peut être numérique
Ex : le nombre d'enfants ou l'âge

On parle alors de variable aléatoire quantitative
Ou non numérique
Ex : la couleur de voiture, le groupe ethnique

On parle alors de variable aléatoire qualitative. Dans la pratique, on a affecté des valeurs numériques aux variables qualitatives en vue d'un certain nombre de calcul.
Une variable quantitative peut être discrète si elle résulte d'un dénombrement ou d'une numérotation.

Ex : le nombre d'enfant, le nombre de voiture
Ou continue, si elle peut prendre différente valeur numérique dans un intervalle ou dans une suite d'intervalle.

$$X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow X(\omega)$$

III–2- Lois de probabilités

III-2-1Cas d'une variable aléatoire discrète

Une application P est une loi de probabilité d'une variable aléatoire discret si elle respecte les 2 conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ \forall x \epsilon X(\omega) & : \quad P(X = x) \geq 0 \\ 2)\ \forall x \epsilon X(\omega) & : \quad \sum_{i=1}^{n} P(X - x) = 1 \end{array}\right\} \quad 0 \leq \; P(X = x) \leq 1$$

III-2-2 : Cas d'une variable aléatoire continue

La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue est équivalente de ce qui est appelé communément fonction de probabilité. Elle permet de calculer les probabilités de toutes les valeurs de X sur son intervalle.

Une fonction quelconque f est une loi de probabilité si elle respecte les conditions suivantes :

1) $\forall_{xi} \epsilon X, f(x_i) > 0$
2) $\forall_{xi} \epsilon X, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i) = 1$

III-2-3- Fonction de répartition

La fonction de répartition de la variable aléatoire X noté $F_x(X)$ correspond à la probabilité que cette variable prenne des valeurs ou réalisation inférieur ou égal à une certaine valeur $x \epsilon \mathbb{R}$
$F_x(x) = P(X \leq x) \quad , \quad \forall\, x \epsilon \mathbb{R}$
La fonction de répartition est définie pour toutes valeurs réelles x et par uniquement des sur les valeurs des réalisables appartenant à X(Ω).

F(x=n)	0,1	0,33	0,70	0,20	0,28	1		

$F_x(0) = 0{,}1 \qquad \forall\, x \epsilon]-\infty, 0]$

$F_x(1) = 0{,}39 \qquad \forall\, x \epsilon]-\infty, 1]$

$F(1) = 0{,}39 \quad = \quad P(x \leq 1)$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discret X définie pour X(Ω) est donné par :

$F_x(x) : \; \mathbb{R} --> [0{,}1]$

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \in X(\omega)/x_i \in X} P(X = x_i)$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue définie sur $X(\Omega)\underline{C}\mathbb{R}$ correspond à la probabilité que cette variable aléatoire soit inférieur ou égal à une certaine valeur $x \in \mathbb{R}$.

$$F_x(x) = P(x \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- Quantité d'ordre

Si X est une variable aléatoire continue, la quantité d'ordre α de sa loi de probabilité noté $F_x^{-1}(\alpha)$ est la réalisation ou le résultat appartenant à $X(\Omega)\underline{C}\mathbb{R}$ correspondant à une probabilité cumulée égal à α.

$P(X \leq F_x^{-1}(\alpha)) = F_x[F_x^{-1}(\alpha)] = \alpha$

- Quelques propriétés

$P(1)\ :\ V\ a\ d\ \ :\ F_x(x) = P(x \leq x)$

$$\sum_{x_i \in X(\omega)/x_i \in X} P(X = x_i)$$

Variable aléatoire continue

$P(2)\ :\ \ V\ a\ c\ \ F_x(x) = P(x \leq x)$

$= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad , \forall\ x \in \mathbb{R}$

P(3) $P(a \leq C \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

P(4) $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$ si f est continue à droite

P(5) F(x) est dérivable $\forall\ x \in \mathbb{R}$, si f est continue

P(6) F(t) est croissante sur $\mathbb{R}$ si p ≤q , F(p)≤ F(q)

P(7) $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$) $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$

2-4- Les moments d'une variable aléatoire

2-4-1- Les moments simple

Les moments sont des indicateurs de dispersion de la loi de probabilité. On distingue les moments simple ou ordinaire,

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, le moment simple d'ordre h est :

$m_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{k} P\left(x_i^k X(X = xi)\right) = \sum x_i^k . P(X = xi)$

Exemple

X=xi	0	2	4	6		
P(X=xi)	0,1	0,3	0,4	0,2	1	
xiXP(x=xi)	0	0,6	1,6	1,2	3,4	m_1
$x_i^2 x P(X = xi)$	0	1,2	6,4	7,2	14,8	m_2

$$m_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^i . P(x = x_i)$$

$$m_1 = 0 + 0{,}6 + 1{,}6 + 1{,}2 = 3{,}4$$

m_1 = E(x)

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, le moment simple d'ordre k est :
$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k . f(x)dx$

Exemple
La densité de probabilité d'une variable aléatoire s'implique par
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & si\ non \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{0} xdx + \int_{2}^{-\infty} 0\ dx = 1$

$m_1 = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x. f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} x^2 dx$
$= \int_{-\infty}^{0} 0. dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{2} x^2 dx + \int_{2}^{+\infty} 0. dx$
= $\left[\frac{1}{6} x^3\right]_0^2$
$m_2 = E(x) = \frac{4}{3}$
Le moment simple d'ordre 1 est appelé espérance mathématique.

2-4- Les moments centrés

Les moments contrés d'ordre k sont définis par :
$\mu_k = M_B = E\ [x - E(x)]^k$
$\mu_1 = E\ (x - E(x))$
$\mu_2 = E(x - E(x))\ ^2 = E(x)^2 - \ [E(x)]^2$
$\mu_2 = E[x^2 - 2xE(x) + [E(x)]^2] - E(x^2)\ 2E(x)E(x) + [E(x)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$
$m_2 - m_1^2$
Le moment contré d'ordre 2 est appelé variance

Cas discret

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(x)\right)^k xP(x = x_i)$$

Cas continu
$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(x)\right)^k . f(x)dx$
2-4-3- Fonction génératrice des moments (FGM)
La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire contraire est définie par :

$G_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx \qquad \forall\ t \in\ \mathbb{R}$

Si le moment simple d'ordre k existe, il correspond à la dérivée k ième de la fonction génératrice des moments, évalué au point t = 0

$$m_k = \frac{\partial^k G_x(t)}{\partial x^k} \qquad t = 0$$

Exemple

Soit une VAC Z distribué selon une loi exponentielle de paramètre sur Z(Ω) = ℝ⁺. On admet que sa FGM est $G_x(t) = (1 - \frac{t}{d})^{-1}$

TAF : Déterminez m_1 et m_2

- Skéwness = $\frac{\mu_3}{{\mu_2}^{3/2}} = \frac{E\left(x-E(x)\right)^3}{[V(x)]^{3/2}}$

  Coef. d'asymétrie

- Kurtosis = $\frac{\mu_4}{{\mu_2}^3} = \frac{E\left(x-E(x)\right)^4}{[V(x)]^2}$

  Coef. d'Aplatissement

- Ecart-type $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{m_2 - m_1^2}$

III-5- Couple de variables aléatoires

III-5-1- Loi de probabilité jointe (PJ)

La définition d'une LPJ entre deux variables aléatoires x et y implique que ses dernières soient définies sur le même espace probabiliste ou univers Ω.

Si x et y sont définie sur des espaces $\Omega_1 et\ \Omega_2$ différent, alors il faut envisager un espace qui englobe $\Omega_1 et\ \Omega_2$ appelé espace produit. La loi jointe deux variables aléatoires x et y est définie tel que :

$\begin{Bmatrix} x = x\ sur\ \Omega_1 \\ y = y\ sur\ \Omega_2 \end{Bmatrix}$ de façon simultané

$$X(\Omega)xy(\Omega) \quad , \quad P(x,y) = P(x = x.y = y) = \frac{Card(x=x_i\ et\ y=y_{i)}}{Card[x(\Omega)xy(\Omega)]}$$

Exemple

y / x	Hom	Fem	Total
Promu	288	36	324
Non promu	672	204	876
Total	960	240	1200

Quelle est la prob. pour qu'un policier choisi au hasard soit une femme non promu.
Prob(x = non promu ; y = Femme)
$P(x = x; y = y) = f(x, y)$
$P(a \leq x \leq b. c \leq y \leq d) = \frac{(card\ a \leq x \leq b\ et\ c \leq y \leq d)}{Card(\Omega)}$

2-5-2- Lois marginales et conditionnelles

Les lois marginales sont définies lorsque nous considérons une seule des 2 variables aléatoires, la 2nde étant ignorée. Il s'est donc d'étudier la distribution de probabilité de X ou celle de Y. les lois conditionnelles concernent les cas où l'on étudie la loi de probabilité d'une des variables lorsque l'autre est considéré comme fixe ou prend une valeur fixé.

Exemple :
Quelle est la probabilité d'être promu si le policier choisit est une femme (y = femme fixé, x = promu)

Exemple
1) Proba. Jointe
P(x = Promu ; y = Hom) = $\frac{288}{1200}$

2) Proba. Marginale
P(x = Femme) = $\frac{240}{1200}$

3) Proba. conditionnelle
P(x = Promu / y = Femme) = $\frac{36}{1200}$

Loi de proba. De x

X	x = x_i	P(x = x_{ii})
Hom	960	96/120
Fem	240	24/120
Total	1200	1

III-5-3- Covariance et coefficient de corrélation

Lorsqu'on considère 2 variables aléatoires de façon simultanée, tel est important de définir un indicateur de leur liaison. Si x et y sont définis sur le même univers Ω, la covariance (x, y) est donnée :
$COV(x, y) = E(xy) - E(x) - E(y)$

Cas discret

$COV(x, y) = \sum x. y. P\ (x = x; y = y)$

Cas contenu

$$COV(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.y(x,y)dxdy$$

Le coefficient de corrélation est une valeur comprise entre -1 et 1 permettant de capter le degré et le sens de la corrélation entre x et y. Quand il est proche de 1 en valeur absolue, on dit qu'il y a une forte corrélation. Quand il est proche de 0, il y en a une faible. Lorsqu'il est négatif, cela indique que x et y évolue dans la e sens opposé (qd $x \geq y\downarrow^2 x\downarrow y/$) et positif alors x et y évalue dans le même sens.

$$e_{x,y} = \frac{COV(x,y)}{6_x x 6_y}$$

CHAPITRE 4 LOIS DE PROBABILITES DISCRETES USUELLES

4-1- Loi uniforme

Une distribution de probabilité suit une loi uniforme lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables.
Si n est le nombre des différentes modalités de cette variable aléatoire X alors :

- Loi de probabilité : P(X=x)= $\frac{1}{n}$
- E(X)= $\frac{n+1}{2}$

<u>Exemple</u> 1 :

X(Ω)= $\{1; 2; 3; 4; \dots\dots..10\}$
P(X=x_i)= $\frac{1}{10}$; E(x)= $\frac{10+1}{2} = \frac{11}{2}$;

<u>Exemple</u> 2 :

X(Ω) = $\{a; a+1; \dots\dots.; b-1; b\}$
P(X=x_i) = $\frac{1}{b-a+1}$; V(x) = $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \frac{x-a+1}{b-a+1} & si \quad a \le x \le b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

E(x) =$\frac{a+b}{2}$

3-2- Loi de Bernoulli

On appelle variable de Bernoulli une variable associé à un univers constitue de 2 éventualités, SUCCÈS ou ECHEC.

- X(Ω) . {E,S}
- Loi de proba $\begin{cases} P(x=s) = P \\ P(X-E) = q \end{cases}$ $\quad p + q = 1$
- $E(X) = P$
- $V(X) = p.q$

3-3- Loi binomiale

Une variable aléatoire binomiale est associée à une expérience de Bernouilli respecté n fois.

L'expérience dite binomiale possède 4 propriétés :

1- Une série de n tirage identique avec les mêmes résultats possible à chaque tirage.
2- Seulement 2 résultats sont possibles à chaque tirage.
3- La prob. De succès p ne se modifie pas d'un tirage à l'autre.
4- Les tirages sont indépendants le uns les autres.
5- Quelle est la prob. D'obtenir le succès au bout de n tirage ?

- $X \rightsquigarrow \beta(n, p)$
- $P(X = k) = C_n^k \, P^k . q^{n-k}$
- $E(x) = np$
- $V(x) = npq$

Exemple 1

Considérons les comportements d'achat des prochains clients qui rentrent dans un magasin de prêt à porter. Sur la base, de son expérience, le vendeur estime que la prob. Qu'un client fasse un achat est 0,3. Quelle est la prob. Que 2 des 03 (trois) clients suivants face un achat ? Calculez E(X), V(X).

Exemple 2

Quelle est la prob. De deviner au moins 6 des 10 réponses à 10 questions du type vrai ou faux.

Résolution exple 1

$X \in \{0, 1, 2, 3\}$ nombre d'achat possible

Client → Achat P = 0,3

Client → Pas d'achat q = 0,7

n = 3 ; p = 0,3 k = 2

$$P(X = k) = C_n^k \, P^k . \, q^{n-k} = C_3^2 \, (0{,}3)^2 x \, (0{,}7)^1$$

$$P(x = 2) = 0{,}189$$

$$E(x) = np = 3 \; x \; 0{,}3 \quad => \quad E(x) = 0{,}9$$

On a e moyenne un achat avec 3 clients

$$V(x) = npq = 3 \; x \; 0{,}3x0{,}7 \quad => \quad V(x) = 0{,}63$$

Résolution exemple 2

N = 10

$$\text{Question} \begin{cases} \nearrow \text{Juste } P = \frac{1}{2} \\ \searrow \text{Se tromper } q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$P(x \geq 6) = P(x = 6) + P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$
$P(x = 6) = \ C_{10}^{6} x\ (0{,}5)^{6} x\ (0{,}5)^{4}$ = $\quad P(x = 7) = \ C_{10}^{7} x\ (0{,}5)^{7} x\ (0{,}5)^{3}$
$P(x = 8) = \ C_{10}^{8} x\ (0{,}5)^{8} x\ (0{,}5)^{2}$ = $P(x = 9) = \ C_{10}^{9} x\ (0{,}5)^{9} x\ (0{,}5)^{1}$
$P(x = 10) = \ C_{10}^{10} x\ (0{,}5)^{10} x\ (0{,}5)^{0}$ =

$P(x \geq 6) =$

Exercice 1
Parmi 800 familles de 5 enfants, combien devraient comporter ?
A = 8 garçons
B = 5 filles
C = 2 ou garçons
Montrez que si une distribution binomiale de n = 100 est symétrique, son coefficient d'aplatissement est 2,9.

3-4- Loi hypergéométrique
Cette loi est étroitement lié à la loi binomiale. La différence majeure est que dans la loi hypergéométrique, les tirages ne sont pas indépendant et la probabilité change d'un tirage à l'autre.
Cette loi est utilisée pour calculer la probabilité que dans un échantillon de n élément sélectionné aléatoirement sans remise, nous obtenions x élément considéré comme des succès et n-x considéré comme des échecs.
On effectue par exemple, tirage sans remise dans une urne contenant deux catégories de boulons.
N_1 : boules blanches et N_2 : boules rouges
Le nombre total initial de boule est : $N = N_1 + N_2$
Soit x le nombre de boule blanche tiré, x la variable aléatoire associé à x.

- X ⇝ H(N ; n ; p)
- Loi P(X = x) = $\frac{C_{N_1}^{x} x\ C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$
- E(X) = np = $nx\,\frac{N_1}{N}$
- $V(X) = \frac{N-n}{N-1} x\ npq$

Approximation

La loi hypergéométrique H de paramètre (N, n, p) peut être approché par la loi binomiale de β paramètre (n, p) ssi :

$N_1 \rightarrow +\infty$ et $\frac{N_1}{N}$ et $\frac{N_2}{N}$ $sont\ finis$

$N_2 \rightarrow +\infty$

Exemple

Les fusibles électriques qu'une entreprise produit sont conditionné par boite de 12.

Supposons qu'un inspecteur choisit aléatoirement 3 tes 12 fusibles d'une boite donné. Si la boite contenait exactement 5 fusibles défectueuses, quelle est la probabilité que l'inspecteur trouve exactement un fusible défectueux parmi les 3 sélectionnés au hasard ?

Résolution

N = 12 , N_1 = 5 , N_2 = 7 , n = 3 , $p = \frac{5}{n}$

$P(x = 1) = \frac{C_5^1\ x\ C_7^2}{C_{12}^3}$

$E(x) = 3x\frac{5}{12} = \frac{15}{12} = 1{,}25$

$V(x) = \frac{12-3}{12-1}\ x\ 3\ x\frac{5}{12}x\frac{7}{12}$

3-5 Loi binomiale négative

A partir d'une expérience de Bernoulli on désire obtenir k succès et l'on considère la variable aléatoire x qui représente le nombre d'épreuve indépendante n nécessaire à l'obtention des k succès.

- Loi $P(X = n) = C_{n-1}^{k-1}\ x\ C_1^1 x\ p^k.\ q^{n-k}$
- $E(X) = \frac{k}{p}$
- $V(X) = \frac{k.q}{p^2}$

3- 6 Loi géométrique

Elle est un cas spécifique de la loi binomiale négative.

Nous cherchons à déterminer le nombre d'épreuve nécessaire pour détenir le 1er succès

Lorsqu'elle est définie sur N, elle correspond à la distribution du nombre d'échec y = n – 1 avant le 1er succès.

- $X(\Omega) = \{1; 2; \dots.; n; \dots\}$
- $X\ \rightsquigarrow G(P)$
- $P(X = n) = p \times q^{n-1}$
- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $V(X) = \frac{q}{p^2}$

3-7- Loi de Poisson

La loi de poisson du nom du mathématicien français Denis Bissan (1781 – 1840), est une loi de prob. discrète définie sur l'ensemble des entiers N.
Elle est utilisée pour représenter un nombre d'évènement se produisant dans un laps de temps donné. C'est une loi permettant de modéliser des variables de comptages ou des phénomènes d'occurrence rare tels que : le nombre de dépôt de brevet sur une année, le nombre de voiture arrivant à un péage pendant un intervalle de temps.
La loi de Poisson dépendant d'un paramètre réel strictement positif noté **λ** qui correspond à la fois à E(x) et la V(x) de la distribution :

- $X \rightsquigarrow P(\boldsymbol{\lambda})$
- P(X = x) $= \frac{e^{-\lambda}.\ \lambda^{x}}{x!}$
- $E(X) = \boldsymbol{\lambda}$
- $P(X) = \boldsymbol{\lambda}$

Exemple
Nous nous intéressons au nombre d'arrivées au guichet automatique d'une banque au cours d'un intervalle de 15 mn en semaine le matin. La probabilité d'arrivé est la même pour deux intervalles de longueurs égales et les arrivées sont indépendantes les unes des autres ; le nombre moyen d'arriver est de 10.
Quelle est la probabilité d'avoir 5 arrivées en 15 minutes.

Résolution
λ = 10 nombres d'arrivées
X = 5
$P(x = 5) = \frac{e^{-10} x 10^{5}}{5!}$

3-8- Quelques propriétés

P$_1$ l'espérance et la variance d'une loi binomiale β (n, p) sont égales à l'espérance et la variance d'une loi Bernoulli multiplié par n.

P$_2$ La somme de variable de Bernoulli indépendante suit une loi binomiale
$z_1, z_2, \dots z_n \overset{lid}{\rightsquigarrow} \beta(p)$

$$\sum_{t=1}^{n} z_i \rightsquigarrow \beta(n,p)$$

P$_3$ La loi binomiale est additive

$X \rightsquigarrow \beta(n,p)$

$Y \rightsquigarrow \beta(m, p)$

P_4

$X \rightsquigarrow \beta(n, p)$
Si n —> +∞ alors X => N (mp ; npq)

P_5 La somme de n variable indépendantes distribuées selon une loi géométrique de paramètre P
$X_1, X_2, \ldots X_n \overset{lid}{\rightsquigarrow} G(P)$ Loi géométrique de paramètre p

$\sum_{t=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \beta n(n, p)$ banomiale négative

P_6 La somme de n variables indépendantes distribuées selon une loi de poisson, suit une loi de poisson avec d = ∑di
$X_1, X_2, \ldots X_n \rightsquigarrow P(di)$

$\sum_{t=1}^{n} X_i \rightsquigarrow P(d)$ avec $d = \sum_{t=1}^{n} di$

CHAPITRE 4 - LOIS DE PROBABILITE CONTINUES USUELLES

4-1- Loi uniforme

La loi uniforme continue est une loi de probabilité définie sur un intervalle [a,b] C Ω et caractérisé par une fonction de densité constante pour toutes les valeurs réelles $x \epsilon [a,b]$.

- $X \rightsquigarrow U(a,b)$
- $fonction\ densité\ de\ probabilité$

$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \forall\, x \,\epsilon\, [a,b] \quad ; \quad f(x) = 0 \qquad \forall\, x \,\notin\, [a,b]$

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $F(X) = P(X \leq x$
- $F(X) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & si \ \ x > b \end{cases}$

4-2- Loi normale

La loi la plus importante pour décrire une variable aléatoire continue est la loi normale. Elle utilisée dans de nombreuses applications pratiques et dans le domaine de l'inférence et des tests statistiques.
Elle est représentée par une courbe en forme de clocher et caractérisée par deux paramètres, l'espérance mathématique noté μ et l'écart-type noté Ϭ $\left(E(X) = \mu\,, \quad Ϭ_x = \sqrt{V(X)} = Ϭ\right)$.
Il existe donc une famille entière de loi normale qui se différencie les uns et les autres par leur E(X) et leur V(X) ou Ϭ.
Elle aussi appelé loi de Laplace-Gauss.

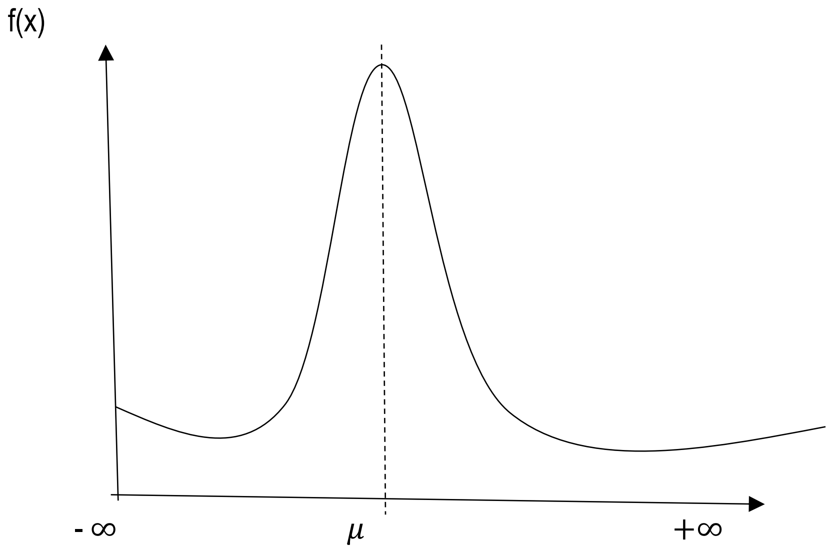
- $X \rightsquigarrow N(\mu, Ϭ^2)$
  $[X \rightsquigarrow N(\mu, Ϭ)]$
- $X(\Omega) = \mathbb{R}$
- $fdp \quad : \qquad f(x) = \frac{1}{Ϭ\sqrt{2\pi}}.\exp\left[\!\left[-\frac{1}{2}.\left(\frac{x-\mu}{Ϭ}\right)^2\right]\!\right], \quad \forall\, x \,\epsilon\, \mathbb{R}, \ \ \mu \,\epsilon\, \mathbb{R}\,, \ \ Ϭ \in \mathbb{R}^*$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}Ϭ}.\exp\left[\!\left[-\frac{1}{2} - \left(\frac{x-\mu}{Ϭ^2}\right)^2\right]\!\right]$

Propriétés

$(P_1) \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$(P_2) \qquad f(\mu + x) = f(\mu - x)$

(P_3) $\quad f(x)\ atteint\ son\ a\grave{u}mxium\ en\ x = \mu$



Le mode de la distribution est égal à son espérance
$\int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = 1$

(P4) Loi normale contrée réduite

$X \rightsquigarrow N(\mu, б)$
$Z = \frac{X-\mu}{б} \rightsquigarrow N(0,1)$

Z : suit une loi normale contrée réduite $(E(Z) = 0\ ;\ б_Z = 1)$
Une variable aléatoire X suit une loi normale contrée réduite si :
$P(X \geq 40\ 000) = \ P(Z \geq 0{,}7$
= 1 - $P(Z \leq 0{,}7$
= 1 – 0,758
$P(X \geq 40\ 000) = 0{,}242$

4-3 Loi exponentielle

Elle peut être utilisée pour décrire des variables aléatoires tels que le temps entre l'arrivé à un lavage et la fonction de la tache, le temps nécessaire pour changer un camion, la distance entre les défauts majeurs sur une autoroute.

- $X \rightsquigarrow exp(\theta)$ X suit une loi exponentielle de paramètre P
- $fdp\ :\ \ f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

- $E(X) = \frac{1}{\theta}$; $* V(X) = \frac{1}{\theta^2}$

Si nous posons

$\mu = E(x) = \frac{1}{\theta} \quad => \quad \theta = \frac{1}{\mu}$

⇨ $f(x) = \frac{1}{\mu}\, e^{\frac{-x}{u}}$ si $x \geq 0$

$E(X) = \mu \quad , \quad V(X) = \mu^2$

Exemple

Supposons que le temps d'un camion au suit une distribution exponentielle. Si le temps moyen de chargement est de 15 mn, quelle est la probabilité pour que qu'un camion soit chargé en u temps maximale de 6 mn ? Quelle est la probabilité pour un temps maximal de 15 mn ?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x}{2}) \ , \qquad \forall\, x \,\epsilon\, \mathbb{R},$$

Fonction de répartition

1) $X \rightsquigarrow N(\mu, E)$

$F(X) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{б\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{б}\right)^2\right] dz$

2) $X \rightsquigarrow N(0,1)$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz$

Exemple

A priori des tests des routes effectués avec des pneus, les ingénieurs de l'Ageroute ont estimés le kilométrage moyen des pneus à 36 500 km avec un $б = 405.000\ km$. Des données indiquent que la distribution est normale.

Quel est le pourcentage de pneu qui peut affectueux plus de 40.000 km ou quelle est la probabilité que le kilométrage effectué par u pneu excède 40.00 km.

Résolution

X : le kilométrage parcouru par le pneu

$X \rightsquigarrow N(36\,500, 5000)$

$E(X) = 36\,500 \quad ; \quad б = 5000$

$P(X \geq 40\,000)$

$Z = \frac{X-\mu}{б} = \frac{X-36\,500}{5000} \rightsquigarrow N(0,1)$

$Z = 0,7$

$P(x240.000) = P\left(Z \geq \frac{40.000-36.500}{5000}\right)$

X: mesure le temps de chargement
$E(X) = 15\, min$
$P(X \leq б) = F(б)$
$fdp: f(x) = \frac{1}{15} e^{-\frac{x}{15}}$
$F(x) =: P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{u}} \quad = \left[\frac{1}{\mu} \ell^{-\frac{x}{\mu}}\right]$
$= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{15}}$
$F(б) = 1 - e^{-\frac{6}{15}} = \ 1 - e^{-\frac{2}{5}} = 0{,}3297$
$F(18) = 1 - e^{-\frac{6}{18}} = \ 1 - e^{-\frac{2}{9}} = 0{,}6988$

4-4- Loi du Khi-deux

Elle est utilisée dans le cadre de comparaison de proportion et de test de conformité d'une distribution observé par rapport à une distribution théorique.
Elle permet de faire des test d'indépendance de 2 caractères qualitatifs. Sa densité dépend d'un paramètre appelé nombre de degré de liberté qui est un entier non nul.
La loi de Khi-deux correspond à la loi de la somme de carrés de variable normale.
$X_1, X_2, \dots X_n \underset{\rightsquigarrow}{lid} \ N(\mu_i б_i)$
$\partial^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \cdots + X_n^3 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$
$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \rightsquigarrow \ \partial^2(n)$ loi de Khi-2 à n degré de liberté
$fdp : f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - x^{\frac{n}{2}-1}.\exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad \forall x \in X(\Omega)$

Fonction gamma $\Gamma(Z)$
$\Gamma(Z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}.\exp(-t)dt$

- $\forall\, Z \in \mathbb{N}, \Gamma(Z) = (Z-1)!$
- $\forall\, Z \in \mathbb{R}, \Gamma(Z) = (Z-1)\, \Gamma(Z-1)$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $E(X) = n$
- $V(X) = \ 2n \quad , \quad * б_x = \ \sqrt{2n}$

* Approximation

Pour $30 \leq n \leq 100$
$\sqrt{2\partial^2} \rightsquigarrow N(0,1)$

Pour $n \geq 100$
$\partial^2(n) \rightsquigarrow N(n, \sqrt{2n})$

* Additivité
$(X_1, X_2, \ldots X_n \overset{lid}{\rightsquigarrow} \partial^2(ki)$
$X_i \rightsquigarrow \partial^2(ki)$
$\sum_{i=1}^{n} X_i \partial^2(\sum_{i=1}^{n} ki)$

4-5- Loi de Student

Elle est utilisée dans la construction d'intervalle de confiance pour établir la distribution la distribution de certaines statistiques de test et notamment pour le test de student ou le t-tes.
La densité d'une loi de student dépend d'un paramètre appelé nombre de degré de liberté. Elle est la loi associée au quotidien d'une loi normale centre réduite sur une loi de Khi-deux.

- $y \rightsquigarrow N(0,1)$ k : le degré liberté $(k\epsilon x^*$
- $Z \rightsquigarrow \partial^2\ (k)$
- $X = \frac{y}{\sqrt{Z/k}} = \frac{N(0,1)}{\partial^2(k)} \rightsquigarrow t\ (k)$
- $fdp: \quad f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}.\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \ \forall\ x\epsilon\mathbb{R}$
- $E(X) = 0 \quad si \quad k \geq 2$
- $V(X) = \frac{k}{k-2} \quad k \geq 3$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- $f(x) = f(-x)\ , \quad \forall\ x\epsilon\mathbb{R}$
- F(x) atteint son maximum en $x = 0$
- F(0) = 0,5
- F(-x) = 1 – F(x) $\forall\ x\epsilon\mathbb{R}$

4-6- Loi de Fisher Snédécor

Cette loi est utilisée pour comparer deux variances observées et sont surtout dans de très nombreux test d'analyse de variance et de covariance observées et soit surtout dans de très nombreux test d'analyse de variance et de covariance. Elle représente, le ratio de $2\partial^2$ chacun divisé par son degré de liberté.

- $X \rightsquigarrow \partial^2\ (m)$
- $Y \rightsquigarrow \partial^2\ (n)$

- $F = \frac{X/m}{\sqrt{y/n}} \rightsquigarrow F\ (m;n)$

m : degré de liberté du numéroteur
n : degré de liberté du dénominateur

- $fdp: \quad f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{.\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)} . m^{\frac{m}{2}} . n^{\frac{n}{2}} . \left(\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}}\right) , \qquad \forall\ x \epsilon \mathbb{R}^+$
- $E(X) = \frac{m}{n-2}$
- $V(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \qquad \forall\ n > 4$

La loi de student peut être approché par une loi normale pou $n \geq 30,\ t(n) \rightsquigarrow N(0,1)$

TAF : - Echantillonnage
- Estimation
- Estimation ponctuelle * moyenne
  - Fréquence
  - Difference
- Méthode des moindres carré ordinaire
- Méthode du maxi de vraisemblance
- Méthode des moments
- Estimation par intervalle de confiance

4-7- théorème centrale limite

Soit une suite de variable aléatoire de même loi, de même espérance mathématique μ, de même écart-type $\sigma\sqrt{n} \quad (\sqrt{\sigma^2 n})$.

Z = $\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi ou en prob. Vers une variable aléatoire normale contrée réduite.
Le théorème centrale limite permet d'étudier la convergence en loi d'une transformation de la moyenne empirique de variables aléatoires indépendantes. C'est sans doute, le théorème fondamental de la statistique mathématique.
Ce théorème est utilisé ou théorie de l'estimation et en théorie à l'inférence.

1-5 Approximation

- La loi binomiale peut être approchée par la loi Normale.

$-n \geq 30$

$\beta(n,p) \quad \rightsquigarrow \quad N(np, \sqrt{npq})$

Où n grand et p petit

Exemple

$X \rightsquigarrow \beta(50{,}0{,}3)$
$X \rightsquigarrow N\left(50x0{,}3,\ \sqrt{50}x0{,}3x0{,}7\right)$
$Z = \frac{X-15}{б} = \frac{X-15}{\sqrt{50x0{,}3x0{,}7}} \rightsquigarrow N(0{,}1)$

$* P(q) \overset{q>0}{\rightsquigarrow} N(q\,;\sqrt{q})$

- **Correction de continuité**

Pour approcher une loi discrète par une loi continue, la difficulté majeure à surmonter est que pour une loi continue la probabilité en un point est nul. Ce qui n'est pas forcement vrai pour les lois discrètes. Il faut donc améliorer la précision des calculs en utilisant les formes dites de correction de continuité.

$X \rightsquigarrow \beta(n, p) \quad , x \in \{0,1,2, \dots, n\}$
$P(X \leq x) \simeq \pi\left(\frac{x+0{,}5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$
$\frac{x-np}{\sqrt{npq}} \rightsquigarrow N(0{,}1)$

$P(X = h) = P(x \leq k) - P(X < x)$
$P(X = h)$ doit se réécrire $P(h - 0{,}52\ x < k + 0{,}5)$ pour qu'on puisse effectivement calculer l'air.

$P(X \leq x) \simeq \pi\left(\frac{x+0{,}5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \pi\left(\frac{x-0{,}95-np}{\sqrt{npq}}\right)$

4-9- Inégalité de Bienaymé Tchebychev
Soit X une variable aléatoire tel que :

- E(X) = μ existe et soit finie et de $V(x) = \delta^2$ alors pour tout $k \in \mathbb{R}^+$
  $Prob(|X - \mu| > k.б) \leq \frac{1}{k^2}$ qd h, F(x)est élevé

DEUXIEME SEMESTRE

UE 2- ECHANTILLONNAGE, ESTIMATION ET TESTS D'HYPOTHESE

ECUE 3- ECHANTILLONNAGE ET ESTIMATION (2 séances de 4h chacune)

CHAPITRE 5 : THEORIE DE L'ECHANTILLONNAGE

5-1- Introduction

En statistique, une population est un ensemble total d'objet ou d'unité d'observation. Alors qu'un échantillon est une sous ensemble d'une population sélectionnée pour une étude particulière.
Le plus souvent parce qu'il est difficile et couteux d'étudier la population entière, nous allons tirer un échantillon de cette population.

A travers ce chapitre, nous voulons répondre à la question suivante : comment établir certains faits concernant la population à partir d'information de résultats obtenus en étudiant un échantillon ?

5-2- Echantillon aléatoire

Il faut rappeler qu'un recensement consiste à mesurer ou observer là où les caractéristiques d'intérêt $(E(X), V(X) \dots)$ de façon exhaustive pour tous les individus de la population.
Un échantillon est dit non exhaustif lorsque le tirage se fait avec remise. Il est par contre exhaustif dans le cas d'un tirage sans remise.
Si la population est très grande ou infinie, les tirages opérés sont non exhaustifs, le fait de remettre ou non l'élément tiré devient sans importance dans ce cas.
Un échantillon est dit aléatoire lorsque chaque individu de la population à la même probabilité d'être tiré. C'est donc un échantillon dont les individus sont tirés au hasard parmi la population.
Du fait du tirage au sort des individus, les caractéristiques associées à l'échantillon sont des variables aléatoires.

5-3- Distribution d'échantillonnage

Une statistique d'échantillonnage (moyenne, écart-type, variance fréquence) calculée à partir de x_1 à x_n est une fonction de ses variables aléatoires et par conséquent une variable aléatoire elle-même.
La fonction de distribution d'une statistique d'échantillonnage est appelé distribution d'échantillonnage de la statistique.
L'échantillonnage est en fait la méthode de construction d'un échantillon.

5-4 Moyenne d'échantillon

Si $X_1, X_2, \dots X_n$ sont des valeurs obtenues pour un échantillon particulier de taille n alors la moyenne de l'échantillon est :

$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots ..... + X_n}{n}$

- Distribution d'échantillonnage des moyennes

Soit $f(x)$ la distribution de probabilité d'une population donnée dont nous tirons un échantillon de taille n. Il est alors possible de déterminer, la distribution d'échantillonnage des moyennes noté $\bar{X}$.

- **Théorème 1**

La moyenne de la distribution d'échantillonnage des moyennes $\mu_{\bar{X}}$ s'exprime par :
$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$ où μ est la moyenne de la population.
La valeur espérée de la moyenne de l'échantillon est donc la moyenne de la population.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots ..... + X_n}{n}$$

- **Théorème 2**

Si une population est infinie ou si l'échantillonnage est non exhaustif, la variance de la distribution des moyennes est obtenue par :
$E[(\bar{X} - \mu)^2] = Ꞓ_{\bar{x}}^2 = \frac{б^2}{n}$
Où $б^2$ = Variance de la population
$б_{\bar{x}} = \frac{б}{\sqrt{n}}$ ($б$: $Ecart - type\ de\ la\ population$)

- **Théorème 3**

Si la taille d'une population est N donc finie et nous avons un échantillonnage exhaustif avec un échantillon de taille $n \leq N$.
Variance de l'échantillon : $Ꞓ_{\bar{x}}^2 = \frac{б^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
$б^2$: Variance de la population

- **Théorème 4**

Si la population dont en extrait les échantillons est normalement distribué avec une moyenne μ et d'une variance Où $б^2$ alors la moyenne de l'échantillon $(\mu_{\bar{X}})$est normalement distribué avec une moyenne μ et d'une variance $б^2/n$.
$E(\bar{X}) \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{б^2}{n}\right)$

- **Théorème 5**

Supposons que la population dont sont extraits les échantillons possède une distribution de probabilité de moyenne μ et de variance $б^2$ qui ne soit pas nécessairement normale.
Dans ces conditions, la variable réduite associée à $\bar{X}$ noté.

Asymptotiquement
Normale

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{б\sqrt{n}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$Pmil = \lim_{n\to\infty} P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \bar{e}^{\mu/2} du$$

Ce théorème est une conséquence du théorème central limite et il est fait l'hypothèse selon laquelle, la population est infinie.

5-5- Distribution d'échantillonnage des fréquences

Soit une population infinie et normalement distribué, p et $q = 1 - p$ étant respectivement les probabilités pour un nombre de la population de présenter ou non une propriété donnée.
Exemple : Être une femme ou un homme

Considérons tous les échantillons de taille n, extraits de cette population et pour chacun d'entre eux, déterminons la statistique qui représente la proposition p de succès.
Nous obtenons une distribution d'échantillon des fréquences avec pour caractéristique la moyenne de la proposition de la population.

- $\mu_P = p$
- $б_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$

5-6 Distribution d'échantillonnage des différences et des sommes

Soient deux populations pour lesquelles nous calculons une statistique s_1 pour chaque échantillon de taille n_1 tiré de première population, et de façon similaire s_2 de taille n_2 tiré de la deuxième. Nous obtenons ainsi une distribution d'échantillonnage pour s_1 de moyenne μ_{s_1} et $б_{s_1}$ (écart-type de s_1) de même s_2 avec μ_{s_1} et $б_{s_1}$. En prenant toutes les combinaisons possibles de ces échantillons nous pouvons obtenir une distribution des différences statistiques. La moyenne et l'écart type de cette distribution d'échantillonnage sont donnée par :

$$\mu_{s_1-s_2} = \mu_{s_1} - \mu_{s_2}$$

$$б_{(s_1-s_2)} = \sqrt{б_{s_1}^2 - б_{s_2}^2}\left(б_{(s_1-s_2)}^2 = б_{s_1}^2 - б_{s_2}^2\right)$$

Si s_1 et s_2 sont les moyennes d'échantillonnage de deux populations notées : $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$! La distribution d'échantillonnage de la différence des moyennes pour des populations infinies de moyenne et d'écart-type respectivement μ_1; $б_1$ et μ_2; $б_2$ est donnée par :

$$Pop_1 : \bar{X}_1 \to \mu_1, б_1$$

$$Pop_2 : \bar{X}_2 \to \mu_2, б_2$$

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2}$$

$$б_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{б_{\bar{X}_1}^2 + б_{\bar{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{б_1^2}{n_1} + \frac{б_2^2}{n_2}}$$

Ses résultats sont également valables pour des populations finies si l'échantillonnage est exhaustif.

$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{б_1^2}{n_1} + \frac{б_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow N(0\,;1)$

Dans le cas de deux distributions binomiales de paramètre p_1, q_1 et p_2, q_2

La différence de fréquence a pour moyenne et écart-type.

$Pop_1 \quad Pop_2$

$\mu_{p_1 - p_2} = \mu_{p_1} - \mu_{p_2} = p_1 - p_2$

Distribution Distribution

Des #ces entre Des proportion

les 2 pop des pop

$б_{p_1 - p_2} = \sqrt{б_{p_1}^2 + б_{p_2}^2} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$

Si nous sommes intéressés par la somme des statistiques alors la moyenne et l'écart-type de distribution de l'échantillonnage de cette somme sont données par :

$\mu_{s_1 + s_2} = \mu_{s_1} + \mu_{s_2}$

$б_{s_1 + s_2} = \sqrt{\frac{б_{s1}^2}{n_1} + \frac{б_{s2}^2}{n_2}}$

5-7 Variance des échantillons

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$,

Les variables aléatoires d'un échantillonnage de taille n. la variable donnant la variance de l'échantillon est :

$S^2 = \frac{(X_1 - \bar{X}_1)^2 + (X_2 - \bar{X}_2) + \cdots + (X_n - \bar{X}_n)^2}{n}$

$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_i)^2$ * $E(\bar{X}) = \mu$

* $E(S^2) = \mu_{S^2} = \frac{n-1}{n} . б^2$ * $б^2 : Variance\ de\ la\ population)$

* $\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1} . S^2$ ($\hat{S}$: Estimateur sans biais de la variance de l'échantillon)

* $E(\hat{S}^2) =. б^2$

Dans le cas de tirage exhaustif sur une population finie.

* $E(S^2) = \left(\frac{N}{N-1}\right) x \left(\frac{n-1}{n}\right) б^2$ (N : taille de la pop finie)

5-8- Distribution d'échantillonnage des variances

En prenant tous les échantillons possibles de taille n extrait d'une population ; nous pouvons obtenir la distribution d'échantillonnage des variances.

*$\frac{nS^2}{б^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{б^2} \rightsquigarrow ɣ^2(n-1)$

Correspondant à la variation de la distribution de l'échantillon.

Dans le cas où la variance de la population est connue, nous allons considérer d'abord la variable réduite $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{б/\sqrt{n}}$ normalement distribuée si les échantillons sont normalement distribuée ou asymptotiquement normale pour $n \geq 30$.

Si la variance de la population est inconnue, il est préférable de remplacer б par $\hat{S}$ (écart type sans biais de l'échantillon) on a alors :

$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}-1} \rightsquigarrow t(n-1)$

EXERCICE

Une population comprend les nombres 2, 3, 6, 8, 11 $\begin{cases} N = 5 \\ n = 2 \end{cases}$

Considérons tous les échantillons possibles de taille 2 de façon non exhaustif.

a) Calculer la moyenne de la pop
b) Ecart-type de la pop
c) Calculer la moyenne de la distribution d'échantillonnage des moyennes $\mu_{\bar{X}}$
d) Ecart-type de la distribution d'échantillonnage des moyennes ($б_{\bar{X}}$: erreur type)

Résolution

a) $\mu = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} \quad => \ \mu = 6$

b) $б^2 = \frac{(2-6)^2-(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)+(11-6)^2}{5} => б^2 = 10{,}8$

$б = \sqrt{б^2} = \sqrt{10{,}8}$ = $б = 3{,}29$

c) Nombre de moyenne d'échantillon

$б_5^2 = 5^2 = 25$ échantillons

$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;6)$	$(2{,}8)$	$(2;11)$
2	2,5	4	5	6,5
$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;6)$	$(3{,}8)$	$(3;11)$
2,5	3	4,5	5,5	7

$\mu_{\bar{X}} = \frac{2+2{,}5+4+5+6{,}5+2{,}5+\cdots}{25}$

$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu = б$

d) $б_{\bar{X}}^2 = \frac{б^2}{n} = \frac{10{,}8}{2} = 5{,}4$

EXERCICE 2

Résoudre le même dans le cas d'un tirage exhaustif

$NE = C_5^2 = 10 \ échantillons$

EXERCICE 3

Supposons que les poids de 300 étudiants d'une université sont distribués normalement avec une moyenne de 68 kilogramme et un écart-type de 3 kilogramme.

Si l’on tire 80 échantillons de 25 étudiants, quelles x sont des valeurs espérer de la moyenne et de l’écart type de la distribution d’échantillonnage résultante si l’échantillonnage est :

a- Non exhaustif
b- Exhaustif
c- Dans combien d’échantillon peut-on s’attendre à trouver une moyenne comprise entre 66,8 et 68,3 kg.

RESOLUTION

Exercice 2

Population 2, 3, 6, 8, 11 ; N= 5 ; t’aille de l’échantillon n = 2

Tirage exhaustif : $C_5^2 = 10$

$$\begin{cases} \mu = 6 \\ б^2 = 10{,}8 \quad б = 3{,}29 \end{cases}$$

$(2;3)$ $(2;6)$ $(2{,}8)$ $(2;11)$
2,5 4 5 6,5
$(3;6)$ $(3{,}8)$ $(3;11)$
4,5 5,5 7
$(6;8)$ $(6;11)$
7 8,5
(8 ;11)
9,5

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{2{,}5+4+5+6{,}5+\cdots+9{,}5}{10}$$

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = б$$

$$б_{\bar{X}}^2 = \frac{(2{,}5-6)^2+(4-6)^2+\cdots+(9{,}5-6)^2}{10}$$

$$б_{\bar{X}}^2 = 4{,}05$$

$$б_{\bar{X}} = \sqrt{б_{\bar{X}}^2} = 2{,}01$$

Vérification

$$б_{\bar{X}} = \frac{б^2}{n}\left(\frac{N-1}{N-1}\right)$$

$$= \frac{10{,}8}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right)$$

$$б_{\bar{X}} = 4{,}05$$

EXERCICE 3

Population N=3000 ,   taille d'échantillon   n = 25
Nombre d'échantillon = 80

a) Tirage non exhaustif

Nb = 3000^{25}

- $\mu_{\bar{X}} = \mu = 68$
- $б_{\bar{X}} = \frac{б}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

b) Tirage exhaustif

Nb = C_{3000}^{25}

- $\mu_{\bar{X}} = \mu = 68$
- $б_{\bar{X}}^2 = \frac{б^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
- $б_{\bar{X}}^2 = \frac{9}{25}\left(\frac{3000-25}{3000-1}\right)$ => $б_{\bar{X}}^2 =$ d'où $б_{\bar{X}} \simeq 0{,}6$

c) Nbre d'échantillons pour $66{,}8 \leq \mu_{\bar{X}} \leq 68{,}3$
forme réduite de $\bar{X}$ (moyenne d'un échantillon)

$Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{б_{\bar{X}}}$

$Z = \frac{\bar{X} - 68}{0{,}6}$

Pour $\bar{X} = 66{,}8$ => $Z = \frac{66{,}8 - 68}{0{,}6}$ => $Z = -2$

Pour $\bar{X} = 68{,}3$ => $Z = \frac{68{,}3 - 68}{0{,}6}$ => $Z = 0{,}5$

Aire sous la courbe normale réduite entre -2 et 0,5
Aire = Aire (-2 ;0) + Aire (0 ; 0,5).
= 0,4772 + 0,1915
Aire = 0,6687
Nombre d'échantillons recherchés
Nbre d'échantillons recherchés
Nb = 80 x 0,6687 = 53

* Aire (-2,02)
Aire 0 - Aire (-2)
0,5 - 83
- 0,0228
= 0,4772

EXERCICE 4

Quelle est la probabilité pour qu'en 120 lancés d'une pièce, la proportion des faces soit :

a- Comprise entre 40 et 60%

b- De $\frac{5}{8}$ au plus

Résolution

a- $p = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

40% pour 120 lancers => 48
60% pour 120 lancers => 72

Puisse que le nbre de face est une variable discrète, nous allons plutôt chercher, la probabilité pour que le nbre de face soit comprise entre 47,5 et 72,5/P $(47{,}5 \ \leq X \leq 72{,}5)$

E(X) = np = $120x\frac{1}{2}$

$\mu = E(X) = 60$ = nbre espacé de face = moyenne de proportions

$\text{б} = \sqrt{npq} = \sqrt{120x\frac{1}{2}\ x\frac{1}{2}} =>\ \text{б} = 5{,}48$

- Pour $X = 47{,}5$ $\qquad Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\text{б}}$

$Z = \frac{47{,}5-60}{5{,}48} = \ -2{,}28$

- Pour $X - 72{,}5$

$Z = \frac{72{,}5\ -\ 60}{5{,}48} = \ 2{,}28$

Aire entre (- 2,28 et 2,28)

= 2 x Aire entre Z = 0 et Z = 2,28

= 2 x 0,4887

Aire = 0,9884

(-2,28 et 2,28)

P$(47{,}5 \ \leq X \leq 72{,}5) = 0{,}9774$

b- Au plus $\frac{5}{8}$

$P\left(X \leq 120 \leq \frac{5}{8}\right) = P(X \leq 75)$

Corriger $\qquad P(X \leq 7570{,}5)$

$P(X \leq 75) = 0{,}004)$

CHAPITRE 6 : THEORIE DE L'ESTIMATION

6-1 DEFINITION

L'objectif de cette partie du cours, est de répondre à la problématique suivante : comment à partir d'informations (moyenne, Ecart-type, proportion…) calculer sur un échantillon pouvons-nous déterminer ou estimer celle relative à une population entière ?

L'estimation est donc le problème réciproque de l'échantillonnage.

L'estimation d'un paramètre de pop par une valeur unique est dite estimation ponctuelle de paramètre. Par contre une estimation d'un paramètre de population par des valeurs comprises entre deux valeurs données est dite estimation par intervalle de confiance.

Quand nous disons une distance est de 5,28 km, nous donnons une estimation ponctuelle de la distance réelle avec une marge d'erreur possible. Par contre quand nous disons que la distance est de 5,28 ± 0,03 km, c'est-à-dire qu'elle est comprise entre 5,25 km et 5,31 km, nous faisons une estimation par intervalle de confiance avec un seuil de confiance ou une marge d'erreur donnée.

6-2- Méthode d'estimation ponctuelle

Une méthode d'estimation consiste en un programme mathématique permettant de déterminer le valeurs estimées d'un paramètre à partir d'une formule donnée.

Un estimation d'un paramètre Φ est une fonction des variables aléatoires $X_{1,} \dots, X_n$ de l'échantillon noté $\widehat{\theta}$.

$\widehat{\theta} = g(X_{1,} \dots, X_n)$.

L'idée est de trouver une fonction qui combine les réalisations de l'échantillon de sorte à révéler de l'information sur le paramètre d'intérêt θ.

Un estimateur est une variable aléatoire puisse que c'est une fonction des variables aléatoires de l'échantillon.

La distribution de probabilité d'un estimateur est appelé distribution d'échantillonnage.

Une valeur calculée de l'estimateur $\widehat{\theta}$ associée à une réalisation $\left(X_{1,} \dots, X_n\right)$ de l'échantillon correspond à une estimation ponctuelle du paramètre $\widehat{\theta}$.

Les méthodes d'estimation les plus courantes en économétrie sont la méthode des moindres carrés ordinaires $(M\check{C}O)$, la méthode des moindres carrées généralisés (MCG), la méthode du maximum de vraisemblance $(MM\dot{V})$, méthode des moments généralisés $(MM\dot{G})$, méthode des variables instrumentales (MVI), méthode des doubles moindres carrés ordinaires (MDMCD).

6-2-1- La méthode des moindres carrés ordinaires (MCO)

La méthode des moindres carrés ordinaires consiste à minimiser la somme des carrées des écarts entre la valeur observée d'une variable (expliquée) et sa valeur prédite va obtenu à partir de l'équation de la droite de régression.

Supposons que nous ayons collecté des données à partir d'un échantillon pour deux variables Y et X. nous nous intéressons à la relation entre ses deux variables.

Est-ce que les variations dans x permettent d'expliquer les variations dans Y.

Supposons que cette relation soit linéaire $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_{\dot{e}}$

ε_i : Terme d'erreur

$\varepsilon_i : y_i - \widehat{y_\imath}$

$\varepsilon_2 : y_2 - \hat{y}_2$

$\varepsilon_n : y_n - \hat{y}_n$

Méthode des M.C.O

$$\underset{\alpha_0 \alpha_1}{Min} \sum \mathcal{E}_i^2 = Min \sum (y_i \hat{y}_i)^2 = Min \sum (y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i)^2$$

$$\frac{\partial \sum (y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i)^2}{\partial \alpha_1} = 0 <=> -2X_i \sum (y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i)^2 = 0$$

$$\sum (X_i y_i - \hat{\alpha}_0 X_i - \hat{\alpha}_1 {X_i}^2) = 0 => \sum X_i y_i - \hat{\alpha}_0 \Sigma X_i - \hat{\alpha}_1 \Sigma {X_i}^2 = 0$$

$$\sum X_i y_i - n\hat{\alpha}_0 \bar{X} - \hat{\alpha}_1 \Sigma {X_i}^2 = 0 => \hat{\alpha}_1 = \frac{\Sigma X_i y_i - n\hat{\alpha}_1 \bar{X}}{\Sigma X_i^2}$$

$$\frac{\partial \sum (y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i)^2}{\partial \hat{\alpha}_0} = 0 <=> -2 \sum (y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i) = 0$$

$$\Sigma y_i - \Sigma \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 \Sigma X_i = 0$$

$$n\bar{y} - n\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 n\bar{X} = 0$$

$$\hat{\alpha}_0 = \bar{y} - \hat{\alpha}_1 \bar{X}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\alpha}_{1_{MCO}} = \frac{\Sigma X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2} \quad donc \quad \alpha_{0_{MCO}} = \bar{y} - \alpha_1 \bar{X}$$

Exemple

Nous nous intéressons à l'effet de l'éducation mesuré par le nombre d'année d'étude sur les salaires mensuels.

Nous disposons d'un échantillon de 10 observations.

	X	Y		
	Nbre d'année d'études	**Salaire mensuel (x1000fcfa)**	$\boldsymbol{X_iY_i}$	$\boldsymbol{X_i^2}$
1	5	96	5 x 96= 480	25
2	8	120	8 x 120 =960	64
3	2	80	160	4
4	13	180	2340	169
5	16	340	5440	256
6	4	95	380	16
7	3	100	300	9
8	0	50	0	0
9	6	65	390	36
10	10	130	1300	100
Total	67	1256	11750	679

X = Variable expliquée

Y = Variable explicative

$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + \mathcal{E}_i$

Avec $\hat{\alpha}_{1_{MCO}} = \frac{\Sigma X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2}$

Et $\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n}$, $\bar{Y} = \frac{\Sigma Y_i}{n}$, $\bar{X}^2 = (\bar{X})^2$

Avec $\hat{\alpha}_{1_{MCO}} = \bar{Y} - \alpha_1 \bar{X}$

$\bar{Y} = \hat{\alpha}_1 + \alpha_1 \bar{X}$

A.N

$\bar{X} = \frac{67}{10}$ => $\bar{X} =$ 6,7

$\bar{Y} = \frac{1286}{10}$ => $\bar{Y} =$ 125,6

$\bar{X}^2 = (6{,}7)^2$ => $\bar{X}^2 =$ 44,89

$\hat{\alpha}_{1_{MCO}} = \frac{11750 - 10 \ x \ 6{,}7 \ x \ 125{,}6}{679 - 10 \ x \ 44{,}89}$

$\hat{\alpha}_{1_{MCO}} = 14{,}49$

$\hat{\alpha}_{1_{MCO}} = \bar{Y} - \alpha_1 \bar{X}$

= 125,6 – 14,46 x 6,7

$\hat{\alpha}_{1_{MCO}} = 25{,}517$

$Y_i = 28{,}517 + 14{,}49X_i$

6-2-2- La méthode du maximum de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance repose sur la loi de probabilité qui permet de générer les observateurs obtenus soit :

$f(X,\theta) = f(X_{1,}X_2, \dots, X_n, \theta)$.

Θ un paramètre à estimer

$f(X,\theta)$: la densité de probabilité jointe de $X_{1,}X_2, \dots, X_n$

- Fonction de Vraisemblance

  $L(X,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X,\theta)$

- Log de la fonction de Vraisemblance
  ℓn L(X,θ)

- Maximiser le ℓn L(X,θ)
  $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}$ = 0

⇨ $\hat{\theta}_{MV} = g(X)$ = estimation du maximum de vraisemblance

- $C.S.D.O$
  $\frac{\partial^2 \ln L(X,\theta)}{\partial \theta^2}$ < 0

6-2-3- La méthode des moments

Elle permet d'estimer les paramètres recherchés en égalisant certains moments théoriques avec leurs équivalents empiriques.

$E(X^k) = mk \qquad \bar{X} = \frac{\Sigma xi}{n}$

L'égalisation se justifie par la loi des grands nombres qui implique que l'on peut approcher une espérance mathématique E(X) par une moyenne empirique $\bar{X}$.

$E(X) = m_1 = g_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) => \theta_1 = h_1(m_1, \dots, m_k)$

$E(X^2) = m_2 = g_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) => \theta_2 = h_2(m_1, \dots, m_k)$

$E(X^k) = m_k = g_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) => \theta_k = h_k(m_1, \dots, m_k)$

L'estimateur de $\theta : (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ par la méthode des moments est obtenu en remplaçant dans ces expressions, les moments théoriques par les moments empiriques de X calculés à partir d'un échantillon n.

$\widehat{m}_1 = \frac{\Sigma X_i}{n}$

$\widehat{m}_2 = \frac{\Sigma {X_i}^2}{n}$

.

$\widehat{m}_k = \frac{\Sigma {X_i}^k}{n}$

EXERCICE

Un assureur étudie la distribution du coût d'un certain type d'assurés.

Les modèles classiques permettent de comprendre que ce coût suit une loi Γ dont la densité dépend de 2 paramètres strictement positif α et β.

$l(x, \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta}$ avec Γ(α)

$E(X) = \alpha\beta$, $V(X) = \alpha\beta^2$

$$\begin{cases} E(X) = \alpha\beta \ (1) \ => \ \alpha = \frac{E(X)}{\beta} \\ V(X) = \alpha\beta^2 \ \ (2) \end{cases}$$

- Déterminer les moments thermique E(X) , V(X)
- Ecrire les paramètre en fonction des moments théoriques
- Remplacer les moments théoriques

(2) => $V(X) = \frac{E(X)}{\beta} . \beta^2$

$V(X) = \frac{E(X)}{\beta} . \beta$ => $\beta = \frac{V(X)}{E(X)}$

Dans (1) $\alpha = \frac{E(X)}{\frac{V(X)}{E(X)}}$ => $\alpha = \frac{[E(X)]^2}{V(X)}$

$$\begin{matrix} E(X) \\ V(X) \end{matrix} \begin{cases} \bar{X} = \frac{1}{n}\Sigma X_i \\ S^2 = \frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

$$\hat{\beta} = \frac{S^2}{\bar{X}} = \frac{\frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{n}\Sigma X_i} => \hat{\beta} = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{\Sigma X_i}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}^2}{S^2} = \frac{(\frac{1}{n}\Sigma X_i)^2}{\frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\frac{1}{n^2}(\Sigma X_i)^2}{\frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2} => \hat{\alpha} = \frac{1}{n} . \frac{\Sigma(X_i)^2}{\Sigma(X_i - \bar{X})}$$

6-3- Propriétés des estimateurs

6-3-1- Estimateur sans biais

L'estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ est dit sans biais, si l'espérance mathématique de $\hat{\theta}$ est égal à θ $(E(\hat{\theta}) = \theta$

La valeur espérée de $\hat{\theta}$ est égale à la vrai valeur de θ.

6-3-2- L'Estimateur efficace

Un estimateur $\hat{\theta}_1$ est dit plus efficace qu'un estimateur $\hat{\theta}_e$ si pour le paramètre θ ssi : * $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_1$ sont tous deux des estimateurs sans biais de θ.

* $V(\hat{\theta}_1) < V\ (\hat{\theta}_1)$

<u>$\hat{\Theta}$ est l'estimateur efficace de θ s'il a la plus petite variance dans la classe des estimateurs sans biais de θ</u>

L'efficacité de $\widehat{\Theta}$ peut-être déterminer à partir de la quantité d'information de Fischer associé à l'échantillon $(X_{1,}X_2, \dots, X_n)$ dans le cas d'une estimation par la M.M.V.

$$In\left(\widehat{\Theta}\right) = -E\left(\frac{\mathrm{d}^2 \ln L(X,\widehat{\Theta})}{0\theta^2}\right)$$

$\widehat{\Theta}$ est efficace si $V\left(\hat{\Theta}\right) = \frac{1}{In(\widehat{\Theta})}$

6-3-3- L'Estimateur convergent

Un estimateur est dit convergent s'il est asymptotiquement sans biais et si V(X) ——> 0 quand n —> +∞

$$\begin{cases} * \lim\limits_{n\to+\infty} \hat{\Theta}n = \theta \\ * \lim\limits_{n\to+\infty} V(\hat{\Theta}n) = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 2

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ \ x > 0 \end{cases} \quad \theta > 0$$

On prélève un échantillon $(X_{1,}X_2, \dots, X_n)$

1) Vérifions que f est une densité de probabilité

* $f(x,\theta) \geq 0$; $\forall \in \mathbb{R}$

* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)dx = 1$

* $\forall\ x > 0,\ f(x,\theta) = \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}$

$\frac{2x}{\theta} \geq 0$ et $e^{-\frac{x^2}{\theta}} > 0$

$=> f(x,\theta) \geq 0$; $\forall \in R$

* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}$ dx = $\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}$

Posons $U = \frac{x^2}{\theta} => du^* = \frac{2x}{\theta}$

= $\int_{0}^{+\infty} e^{-u}du$

= $[-e^{-u}]_0^{+\infty}$

$\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} = 1$

Conclusion : $f(x,\theta)$ est une d.dp

2) Estimateur

* fonction de vraisemblance

$L(X,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{2x_i}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]$

Cas spécifique

$\left(\frac{2x_1}{\theta} e^{-\frac{x_1^2}{\theta}}\right) x \left(\frac{2x_2}{\theta} e^{-\frac{x_2^2}{\theta}}\right)$

$\frac{2x_1}{\theta} x \frac{2x_2}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{2} x_i^2}$

$L(X,\theta) = \left(\frac{2}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i\ x\, e^{-\frac{n}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

ℓn de la fonction de vraisemblance

$\ell n\ L(n,\theta) = \ell n \left[\left(\frac{2}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]$

$= \ell n\left(\frac{2}{\theta}\right)^n x\ \ell n(\prod_{i=1}^{n} x_i)\ x\ \ell n\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$= \ell n[\ell n2 - \ell n\theta] + \sum_{i=1}^{n} \ell nxi - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

* Maximisation de ℓn L(x,θ)

$\frac{\partial \ell n\, L(x,\theta)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} x \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

6-4- Estimation par intervalle de confiance (EIC)

Les estimateurs ponctuels sont des statistiques d'échantillon utilisés pour estimer les paramètres de la population. Ils ne sont exactement égaux aux paramètres considérés. Une estimation par intervalle de confiance est souvent réalisée en ajoutant et en soustrayant une marge d'erreur à l'estimation ponctuelle. La formé générale d'une estimation par intervalle de confiance est donnée par : EIC = Est. Ponctuelle ± Marge d'erreur

6-4-1- EIC des moyennes

- Cas des grands échantillons n ≥ 30

Nous voulons estimer S la moyenne de la pop par intervalle de confiance à partir de la moyenne $\bar{X}$ d'échantillon.

Pour n grand, la statique étudiée (ou la moyenne) va suivre asymptotiquement une loi normale.

$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq S \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Un estimateur ponctuel de la moyenne de la propre moyenne d'échantillon

$EIC :\ \bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ pop infinie et tirage non exhaustif

$\bar{X}$: moyenne population α : Seuil de confiance

ϭ : Ecart-type de la population n : taille de l'échantillon

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$: valeur lue dans la table N(0,1) pour α/2

$EIC :\ \bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ .\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ — pop finie (taille N) et tirage exhaustif

En général, l'écart-type ϭ de la page est donnée, sinon, nous allons utiliser son estimateur.

Exemple : Conseils pratique 8.1.2 p.382

Supposons que les poids de 100 étudiants de l'UFHB représentent un échantillon aléatoire des poids de t ensemble des étudiants.

Donner les intervalles de confiance à 95%, puis à 99% des estimations de poids des étudiants. Nous faisons l'hypothèse que le nombre total des étudiants est 1546.

Le poids moyen estimé de 67,45 kg avec un écart-type estimé de 2,93.

Résolution

Seuil de confiance 95%, seuil d'erreur α : 5% => $\frac{\alpha}{2} = 2{,}5\%$ d'où le seuil de confiance à retenir 97,50% soit 0,975 ⇔ 1,96

Alors : $Z_{\alpha/2}$ $\quad Z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$67{,}45 - 1{,}96\,.\frac{2{,}93}{\sqrt{100}} \leq S \ \leq 67{,}45 + 1{,}96\,.\frac{2{,}93}{\sqrt{100}}$$

$$66{,}87 \leq S \ \leq 68{,}02$$

Cas de petits échantillons (n ≤ 30)

On utilise la distribution de Student pour obtenir les niveaux de confiance

$EIC\ :\ \bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\text{б}}{\sqrt{n}}$ S = $\sqrt{\frac{\Sigma(xi-\bar{X})^2}{n-1}}$ S = Ecart-type de l'échantillon

Exemple 2

Même exemple mais n = 20 et intervalle de confiance 95%.

N – 1 degrés de liberté

CHAPITRE 7 : TESTS STATISTIQUES

7-1 INTRODUCTION

Un test statistique ou test d'hypothèse est un procédé d'inférence permettant de contrôler ou de valider (accepter ou rejeter) à partir de l'étude d'un ou de plusieurs échantillons aléatoires une hypothèse relative à une ou plusieurs populations. C'est donc une règle de décision relative à une hypothèse sur la distribution d'une variable d'intérêt dans la population qui se fonde sur les observations, d'un échantillon.

On distingue deux classes de tests :
- Les tests paramétriques qui requièrent un modèle à forte contrainte : normalité des distributions ou approximation normale des grands échantillons.
Les hypothèses sont plus difficiles à vérifier lorsque les effectifs étudier sont réduites.

Distribution est normale	Distribution n'est pas normale
$n < 30$	$N < 30$??? student
$n \geq 30$	$n \geq 30$

- Les tests non paramétriques sont des tests dont le model ne précisent pas les conditions que doivent remplir les paramètres de la population dont a été extrait l'échantillon. Il n'y a pas d'hypothèse de normalité au préalable.

Quand les conditions sont remplies, les tests paramétriques sont plus puissants que les tests non paramétriques. Ces derniers sont utilisés pour les échantillons de très faible taille.

Il existe différents types de tests : tests de conformité, comparé à un paramètre calculé sur l'échantillon à une valeur préalable. Test d'ajustement ou d'adéquation : vérifier la compatibilité des données avec une distribution choisit à priori.

Test d'homogénéité ou de comparaison : vérifier que deux ou plusieurs échantillons proviennent de la même population.

Test d'indépendance ou d'association : vérifier l'existence d'une liaison entre deux variables.

7-2- Hypothèses nulle et alternative

Un tests statistique commerce par la détermination des deux hypothèses que sont : hypothèse nulle ou de référence d'hypothèse alternative.

Hypothèse nulle noté H_o est celle que l'on désire vérifier. C'est une affirmation au sujet de la valeur d'un paramètre de la population, qui est considéré comme vraie.

Hypothèse alternative noté H_0 ou H_1 correspond à l'opposé de ce qui est établit dans l'hypothèse nulle. Elle est équivalente à dire H_0 est fausse. Selon la forme de H_A nous distinguons un test bilatéral d'un test unilatéral.

Tests bilatéral : $Z_{\alpha/2}$ Tests bilatéral : $Z_{\alpha/}$ $t_{\alpha/}$

Seuil est divisé en 2 Seuil est consacré

* H_0 : $\theta_e = \theta_0$ (valeur fixée)
* H_A : $\theta_e \not\approx \theta_0$ test bilatéral

$\theta_e < \theta_0$ test unilatéral gauche

$\theta_e > \theta_0$ test unilatéral droit.

7-3 Seuil de significativité

Le seuil de significativité noté α est une valeur fixée qui permet d'évaluer le niveau de risque en prenant la décision de rejeter ou d'accepter H_0. En économie le risque maximal acceptable est de 10%. Lorsque nous prenons la décision, nous commettons deux types d'erreur.

Une erreur de type 1 au risque de 1ère espèce correspondant ou risque de rejeter l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est effectivement vrai dans la population.

Une erreur de type 2 ou risque de 2nde espèce correspond au risque de ne pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 ou de l'accepter alors qu'elle est effectivement fausse et alors l'hypothèse alternative H_A est valide dans la population.

La probabilité de commettre une erreur de type 1 noté α est ainsi appelé seuil de significativité.

	Accepter H_0	Rejeter H_0
H_0 est vraie	Correcte (1 – α)	Erreur de type I ou risque de 1ère espèce (α)
H_0 est fausse	Erreur de type II ou risque de 2ème espèce (β)	Correcte (1 – β) = puissance du test

Exercice

Pour vérifier l'hypothèse une pièce est bonne : on adopte la règle : l'hypothèse est acceptée si le nombre de face dans un échantillon unique est comprise entre 40 et 60 inclus, au cours de 100 jets. L'hypothèse est rejetée dans tous les autres cas. Quelle est la probabilité de rejeter l'hypothèse alors qu'elle serait tout à fait convenable ?

Résolution

$$P(X = 40) = C_{100}^{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$$

$$P(40 \leq x \leq 60),\ E(X) = np = 50$$

$$Z = \frac{X-m}{б} \qquad б\sqrt{npq} = 5$$

Pour x = 40
$Z = \frac{39,5-50}{5} = -2,1$

Pour x = 60
$Z = \frac{60,5-50}{5} = 2,1$

$P(-2,1 \leq x \leq 2,1) = \pi(2,1) - \pi(-2,1)$
$= 2\pi(2,1)^{-1} = 0,9642$

A= 1 – 0,9642 => α = 0,0358

7-4- La statistique du test

Elle est une fonction d'un échantillon aléatoire utilisée pour déterminer s'il faut rejeter H_0 ou non, dans la mesure où la loi de probabilité suivit par le paramètre étudié est connu pour la population. Une statistique du test sera le plus souvent, un estimateur ou une fonction d'un estimateur du paramètre d'intérêt, c'est donc une variable aléatoire définie comme une fonction des variables de l'échantillon.

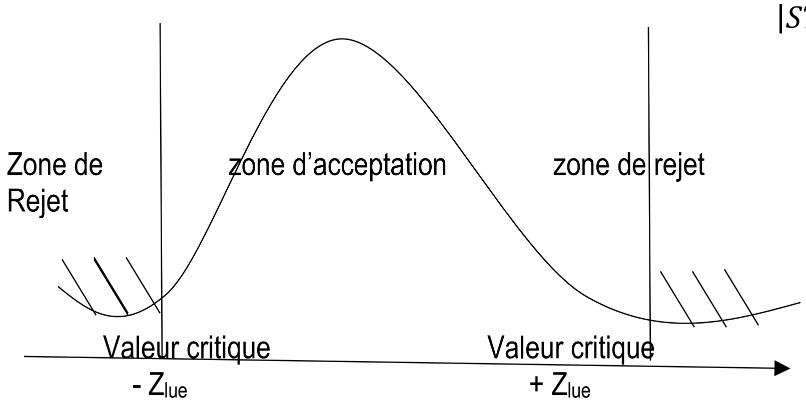
Valeur calculer $ST = \frac{\pi_e - \pi_p}{\hat{\sigma}_p} \rightsquigarrow$ N(0,1)

Valeur lue : $Z_{\alpha/2}$ Z_α Σ/$\begin{cases} (ST) > Z_{lue} & , H_{0\ est\ rejeter} \\ (ST) < Z_{lue} & , H_{0\ est\ accepter} \end{cases}$

7-5 La Région critique

La région critique d'un test est un ensemble de la réalisation de la statistique du test pour lesquels l'hypothèse nulle H_0 du test rejeté

$|ST| > Z_{lue}$: H_0 Rejeté



7-6- Règle de décision

Elle indique les conditions sous lesquelles H_0 est rejeté en faveur de H_A

- Si $|ST| > stat_{lue} => rejet\ de\ H_0$, acceptation de H_A

- Si $|ST| < stat_{lue} => acceptation\ H_0$

Exercice

La bouteille de Channel n°5 est considérée comme la plus prestigieux parfum du monde. Les bouteilles de 100ml sont remplies avec une machine particulière si bien que la quantité du produit dans les bouteilles suit une loi normale avec $\bar{X} = 100\ ml$ et $\sigma = 0,2\ ml$

Nous considérons un échantillon de 50 bouteilles qui révèlent que la moyenne des quantités est de 100,66 ml. Avec un seuil de significativité de 5%, pouvons deviser que la qualité contenue dans chaque bouteille est en moyenne différente de 100 ml ?

Résolution

- $\begin{cases} H_0 : \bar{x}_e = \mu = 100ml \\ H_A : \bar{x}_e \neq \mu = 100ml \end{cases}$

$$Z_c = \frac{\bar{x}_e - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ => \ Z_c = \frac{100{,}66 - 100}{\frac{0{,}2}{\sqrt{50}}} \ => \ Z_c = 2{,}12$$

- Seuil α = 5%
- Comme $\bar{x}_e \neq \mu$ alors le test est bilatéral d'où α est divisé par 2.
  $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$

  $|Z_c| > \ Z_{\alpha/2}, on\ rejet\ H_0$

Interprétation : avec un risque de 5%, nous pouvons affirmer que les bouteilles de Channel ont une contenance en moyenne différente de 100ml.

7-7- Démarche d'un test statistique

Elle peut se résumer de la façon suivante
Etape 1 : Poser l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_A ou H_1.

Etape 2 : Définir la forme de la région critique, cela revient à définir la statistique du test (ST) ainsi que la zone de rejet de H_0.

Etape 3 : A partir des hypothèses faites sur la variable d'intérêt et sur l'échantillon, déduire la distribution exacte où la distribution asymptotique de la statistique du test sous l'hypothèse nulle H_0.

Etape 4 : Déterminer là où les valeurs critiques en fonction du niveau de risque α. (valeur critique α)

Etape 5 : Calculer la valeur de la statistique en fonction des observations de l'échantillon.

Etape 6 : Comparer les valeurs calculées de la statistique à la valeur lue (valeur critique) et décider

- Si $|SC| > V_{lue}: zone\ de\ rejet => on\ rejete\ H_0$ au seuil de α
- Si $|SC| < V_{lue}: zone\ d'acceptation => on\ accepte\ H_0$ au seuil de α

7-8- P-Value ou valeur P

Pour décider du rejet ou non de H_0 nous comparons les valeurs calculées de la statistique à la région critique. Une autre façon de décider ou de conclure consiste à utiliser P ou P-value. Ce qui consiste à déterminer le plus petit niveau de α pour lequel on peut rejeter H_0.

Exemple :
On considère n échantillons de variable iid (indépendant et identiquement distribué) de paramètre $X_i \rightsquigarrow N(m, б^2)$ avec : $б^2 = 1$, n = 100
On souhaite tester : $\begin{cases} H_0 : m = m_0 = 1{,}2 \\ H_1 : m = m_1 = 1 \quad (m + m_0)\ m_0 > m_1 \end{cases}$

La moyenne empirique des observations est $\bar{x}_n = 1{,}13$
P-value va correspondre à une probabilité

P-value = prob $\left[\frac{\bar{X}_n - m_0}{б/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}_n - m_0}{б/\sqrt{n}}\right]$
= prob ($\bar{X}_n < \bar{X}_n$)
= $\Phi\ \left(\frac{\bar{X}_n - m_0}{б/\sqrt{n}}\right)$
= $\Phi\ \left(\frac{1{,}13 - 1{,}2}{1/\sqrt{100}}\right)$
= $\Phi\ (-0{,}7)$
= $1 - \Phi\ (0{,}7)$
= $1 - 0{,}7580$
P-value = 0,242 soit 24,2%
Si α = 5%, on accepte H_0

P-value < α : on rejette H_0
P-value > α : on accepte H_0

Recap
I/ la pop suit une loi normale
$X \rightsquigarrow N(\mu, б^2)$

- $б^2$ est connue
  $Z_c \rightsquigarrow N(0; 1) \quad Z_c = \frac{\bar{X} - m_0}{б/\sqrt{n}}$
- $б^2$ est inconnue
  $б^2 = \frac{ns^2}{n-1}$

$t_c = \frac{\bar{X} - m_0}{s/\sqrt{n-1}} \rightsquigarrow t_{(n-1)}$

II/ la pop suit une loi quelconque

- n ≥ 30 et $ɓ^2$ connue

  $Z_c = \frac{\bar{X}-m_0}{ɓ/\sqrt{n}} \rightsquigarrow N(0;1)$

- n ≤ 30 et $ɓ^2$ inconnue

Suite à compléter

7.9. Tests sur une moyenne

7.10. Tests sur une proportion

7.11. Tests de comparaison

7.11.1 Tests de comparaison de moyennes de 2 populations

7.11.2. Tests de comparaison de proportions de 2 populations