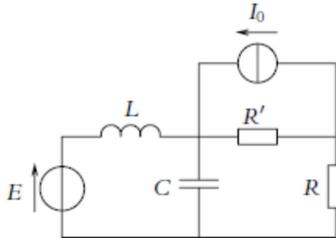


TD N° 2 D'ELECTROCINETIQUE 1

EXERCICE 1 Lois générales en régime sinusoïdal

Soit le montage :



Déterminer le courant parcourant la résistance R en appliquant :

1. les équivalences entre modèles de Thévenin et de Norton,
2. le théorème de Millman.

EXERCICE 2 Facteur de puissance d'une installation

Un moteur consomme une puissance moyenne $P_1 = 4kW$, son facteur de puissance est $\cos \varphi_1 = 0.8$. Il est branché en parallèle sur une résistance $R = 100\Omega$ modélisant des lampes en parallèle. On note P_2 la puissance active reçue par la résistance. La tension d'alimentation a pour valeur efficace $U = 240V$, et pour fréquence 50 Hz.

1. Calculer les valeurs efficaces des courants traversant le moteur et la résistance ainsi que la puissance moyenne totale P reçue par l'ensemble.
2. On désire déterminer le facteur de puissance $\cos \varphi$ de l'ensemble.

a) En utilisant la loi des nœuds, établir une expression reliant les valeurs efficaces des intensités. En déduire une expression reliant les puissances et U .

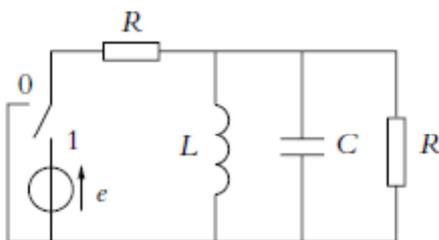
b) Montrer que le facteur de puissance est donné par

$$\cos \varphi = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{(P_1 + P_2)^2 + P_1^2 \tan^2 \varphi_1}}$$

Calculer la valeur de $\cos \varphi$

EXERCICE 3 Résonance d'un circuit R, L, C parallèle

On considère le circuit suivant :



Où e est une tension sinusoïdale de pulsation ω .

1. Donner l'expression complexe de la tension $s(t)$ aux bornes de l'association en parallèle R, L, C.

2. Etablir qu'il y a un phénomène de résonance pour la tension s . On précisera la pulsation à laquelle ce phénomène se produit.

3. Déterminer la bande passante correspondante.

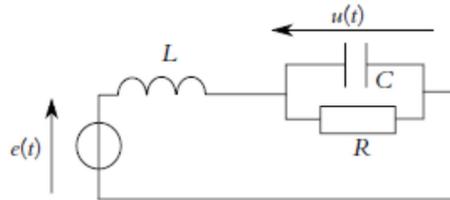
4. En déduire l'expression du facteur de qualité.

5. Que peut-on dire du déphasage à la résonance de la tension s ?

6. Comparer cette résonance avec la résonance en intensité d'un circuit R, L, C série.

EXERCICE 4 Étude d'une résonance (1)

On considère le circuit ci-dessous alimenté par une source de tension sinusoïdale de f.e.m. $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$.



1. Obtention de l'expression de $u(t)$ par deux méthodes

a) *Première méthode* : en utilisant un diviseur de tension, établir l'expression complexe de \underline{u} en fonction de E , L , R , C et ω .

b) *Deuxième méthode* : en transformant le générateur de Thévenin (e , L) en modèle de Norton retrouver l'expression de \underline{u} .

2. Étude de la réponse en fréquence du circuit

Étudier le module de \underline{u} et son argument en fonction de ω . Tracer les courbes.

EXERCICE 5 Recherche d'un circuit résonant

On dispose d'une inductance $L = 40,0$ mH, d'une résistance R variable entre $1,00$ k Ω et 100 k Ω d'une capacité variable entre $10,0$ nF et $1,00$ μ F.

On veut réaliser un circuit résonant à la fréquence $f_0 = 2,00$ kHz de gain 1 à cette fréquence.

1. Proposer des réalisations possibles d'un tel montage.
2. Étudier la sélectivité de chacun d'eux.
3. Préciser les valeurs de R et C à choisir pour obtenir la bonne fréquence de résonance et la meilleure sélectivité de résonance.
4. Quelle est la "meilleure" solution quant à la sélectivité ?

CORRECTION TD N° 2 D'ELECTROCINETIQUE 1

EXERCICE 1

A.2 1. On transforme l'association de l'inductance L et de la source idéale de tension en un modèle de Norton d'impédance $jL\omega$ et de courant de court-circuit $\frac{E}{jL\omega}$. On associe ensuite la capacité C

et l'inductance L en parallèle, on obtient une impédance $\frac{jL\omega \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$. On transforme

alors les deux modèles de Norton en modèles de Thévenin : l'un d'impédance $\frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$ et de force électromotrice $\frac{E}{1 - LC\omega^2}$, l'autre d'impédance R' et de force électromotrice $R'I_0$. On remarque que les forces électromotrices sont en opposition. Il suffit alors d'appliquer une loi des mailles pour obtenir

$$i = \frac{\frac{E}{1 - LC\omega^2} - R'I_0}{(R + R') + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}$$

2. On choisit la masse sur la ligne du bas et on appelle A le nœud entre R et R' , B le nœud entre R' et C . On calcule le potentiel en A en appliquant le théorème de Millman soit

$$v_A = \frac{\frac{v_B}{R'} - I_0}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}} = \frac{Rv_B - RR'I_0}{R + R'}. \text{ De même, pour le potentiel en } B, \text{ on a}$$

$$v_B = \frac{\frac{I_0}{R'} + \frac{v_A}{jL\omega} + \frac{E}{jL\omega}}{\frac{1}{R'} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{R'I_0 + jR'L\omega I_0 + jL\omega v_A}{R'(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

En reportant l'expression de v_B dans celle de v_A , on obtient après simplification

$$v_A = \frac{R(\frac{E}{1 - LC\omega^2} - R'I_0)}{(R + R') + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} \text{ et } i = \frac{v_A}{R}.$$

EXERCICE 2

B.1 1. On adopte les notations de la figure (S17.1).

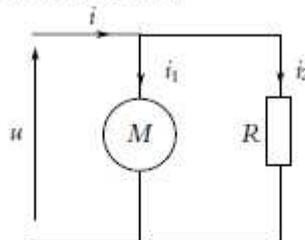


Figure S17.1

La valeur moyenne de la puissance reçue par l'ensemble de l'installation est la somme de celle reçue par le moteur et celle reçue par les lampes soit $P = P_1 + P_2$ or $P_2 = U^2/R = 576 \text{ W}$, d'où $P = 4 576 \text{ W}$.

La puissance reçue par le moteur est $P_1 = UI_1 \cos \varphi_1$, ce qui permet de déterminer l'intensité efficace traversant le moteur : $I_1 = 20,8 \text{ A}$.

En ce qui concerne, l'intensité efficace traversant les lampes, il suffit d'écrire $I_2 = U/R = 2,4 \text{ A}$.

2. a) Attention, il ne faut surtout pas additionner les valeurs efficaces des intensités, mais les valeurs instantanées. Ainsi, on peut écrire : $i = i_1 + i_2$ ou

$$I\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi)} = I_1\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi_1)} + I_2\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi_2)}$$

où φ , φ_1 et φ_2 sont les déphasages des intensités par rapport à \underline{u} pour chaque branche. La branche dans laquelle circule i_2 est constituée de résistors donc $\varphi_2 = 0$. On obtient, en simplifiant l'expression :

$$Ie^{-j\varphi} = I_1e^{-j\varphi_1} + I_2$$

On multiplie cette expression par son complexe conjugué, ce qui revient à calculer le module au carré : $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos \varphi_1$. On exprime ensuite les puissances moyennes : $P = UI \cos \varphi$, $P_1 = UI_1 \cos \varphi_1$ et $P_2 = UI_2$ ce qui entraîne :

$$\frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi} = \frac{P_1^2}{U^2 \cos^2 \varphi_1} + \frac{P_2^2}{U^2} + 2 \frac{P_1 P_2}{U^2}$$

- b) Dans l'expression précédente, on peut simplifier par U .

Sachant que $1 + \tan^2 \varphi_1 = 1 / \cos^2 \varphi_1$, on a :

$$\frac{P^2}{\cos^2 \varphi} = P_1^2(1 + \tan^2 \varphi_1) + P_2^2 + 2P_1 P_2 = (P_1 + P_2)^2 + P_1^2 \tan^2 \varphi_1$$

En écrivant que $P = P_1 + P_2$, en inversant l'expression et en prenant la racine carrée, on arrive à l'expression demandée.

EXERCICE 3

- A.1** 1. L'association en parallèle de R , L et C admet pour impédance

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega - RCL\omega^2}$$

On obtient alors l'expression de la tension s en utilisant la relation du pont diviseur de tension soit $s = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + r} \underline{e} = \frac{jRL\omega}{rR + jL\omega(r + R) - rRCL\omega^2} \underline{e}$.

2. On a résonance si l'amplitude passe par un maximum. Or l'amplitude s'obtient en déterminant le module soit $|s| = \frac{|\underline{e}|}{\sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 + r^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$. Le dénominateur est toujours plus grand que

$1 + \frac{r}{R}$ et prend cette valeur pour $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. On a donc résonance pour ω_0 .

3. La bande passante s'obtient en résolvant $|s| \leq \frac{|s|_{\max}}{\sqrt{2}}$ avec $|s|_{\max} = \frac{R|\underline{e}|}{r + R}$. La résolution s'effectue comme dans le cours et on obtient $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ avec

$$\omega_1 = \frac{-(r + R)L + \sqrt{(r + R)^2 L^2 + 4R^2 r^2 LC}}{2rRLC}$$

et

$$\omega_2 = \frac{(r + R)L + \sqrt{(r + R)^2 L^2 + 4R^2 r^2 LC}}{2rRLC}$$

On en déduit $\Delta\omega = \frac{r + R}{rRC}$.

4. Le facteur de qualité s'obtient par $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{rR}{r + R} \sqrt{\frac{C}{L}}$.

5. Pour $\omega = \omega_0$, on a $s = \frac{R\underline{e}}{r + R}$ et il n'y a pas de déphasage.

6. On obtient la même pulsation de résonance que pour le circuit R, L, C série mais un facteur de qualité variable en fonction de la valeur de r .

EXERCICE 4

B.1 1. a) On note Z_{eq} l'impédance équivalente à R et C en parallèle et $Y_{eq} = \frac{1}{R} + jC\omega$ l'admittance. Le diviseur de tension entre \underline{u} et \underline{e} donne :

$$\underline{u} = \frac{Z_{eq}}{jL\omega + Z_{eq}} \underline{e} = \frac{1}{j\omega Y_{eq} + 1} \underline{e} = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R}}$$

b) On transforme le dipôle $(e(t), L)$ en série (modèle de Thévenin) en modèle de Norton ce qui donne une source de courant, de courant de court-circuit $i_0 = \underline{e}/(jL\omega)$ avec une bobine d'inductance L en parallèle. On obtient alors le circuit de la figure (S16.1).

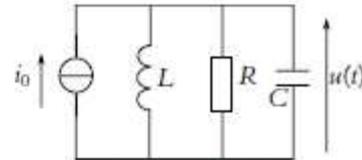


Figure S16.1

On détermine l'admittance des trois dipôles en parallèle :

$$Y = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} + jC\omega$$

La tension \underline{u} est alors $\underline{u} = i_0/Y$. On retrouve alors le résultat précédent.

2. On pose $\underline{u} = U\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)}$. Avec l'expression précédente, on obtient :

$$U = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}} = \frac{E}{\sqrt{f(\omega)}}$$

Étant donné que le numérateur est constant, U a les variations inverse de $f(\omega)$: on étudie donc cette dernière fonction.

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(1 + (LC)^2 \omega^4 - 2LC\omega^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2} \right) = 4(LC)^2 \omega^3 - 4LC\omega + 2\frac{L^2}{R^2} \omega$$

La dérivée de f est nulle pour $\omega = 0$ sans condition et pour $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{2R^2C}}$ si $R > \sqrt{\frac{L}{2C}}$.

Dans le cas $R > \sqrt{\frac{L}{2C}}$, on peut vérifier, avec le signe de la dérivée, que $\omega = 0$ correspond à un maximum pour $f(\omega)$ donc à un minimum pour U tandis que ω_r correspond à un minimum pour $f(\omega)$ donc à un maximum pour U .

Dans le cas $R < \sqrt{\frac{L}{2C}}$, on peut vérifier, avec le signe de la dérivée, que $\omega = 0$ correspond à un minimum pour $f(\omega)$ donc à un maximum pour U .

Dans les deux cas, $U(\omega = 0) = E$ et $U(\omega \rightarrow \infty) = 0$.

Comme E est un réel positif, la phase φ est telle que :

$$\varphi = \text{Arg} \left(\frac{1}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R}} \right) = -\text{Arg} \left(1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R} \right)$$

On en déduit $\tan \varphi = -\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}$. Il est plus intéressant ici de considérer le signe de la partie imaginaire qui est constant et négatif, donc $\sin \varphi < 0$ et $\varphi \in [-\pi, 0]$.

On calcule la dérivée :

$$\frac{d \tan \varphi}{d\omega} = -\frac{L}{R} \frac{1 - LC\omega^2 + 2LC\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2} = -\frac{L}{R} \frac{1 + LC\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2} < 0$$

$\tan \varphi$ est donc une fonction décroissante de ω , or sur $[-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ et $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ la fonction \tan est croissante ; on en déduit que φ est une fonction décroissante de ω sur $[-\pi, 0]$. On peut examiner les limites :

- Pour $\omega = 0$, $\tan \varphi \rightarrow 0^-$ et donc $\varphi \rightarrow 0$.
- Pour $\omega = 1/\sqrt{LC}$, $\tan \varphi \rightarrow \pm\infty$ et $\varphi = -\pi/2$.
- Pour $\omega \rightarrow +\infty$, $\tan \varphi \rightarrow 0^+$ et donc $\varphi \rightarrow -\pi$.

On a tracé $U(\omega)$ sur la figure (S16.2) et φ sur la figure (S16.3) pour deux cas :

- Cas (1) $R > \sqrt{\frac{L}{2C}}$.
- Cas (2) $R < \sqrt{\frac{L}{2C}}$.

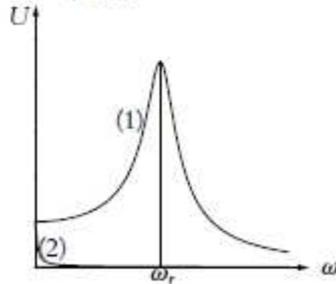


Figure S16.2

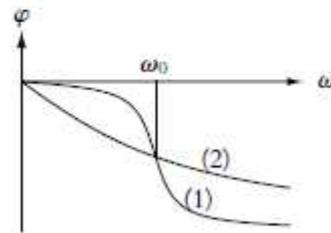


Figure S16.3

EXERCICE 5

A.2 1. On aura un montage du type pont diviseur de tension avec deux impédances Z_1 et Z_2 . Par conséquent, on a $\xi = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} e$. On veut un gain de 1 à la résonance, ce qui offre deux possibilités : $Z_1(\omega_0) = 0$ ou $Z_2(\omega_0)$ infinie.

Pour le premier cas, on associe en série L et C soit $Z_1 = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ qui s'annule pour $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ soit $C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 158 \text{ nF}$. Dans ce cas, on a $Z_2 = R$.

Pour le deuxième cas, Z_2 s'obtient par une association en parallèle de L et C soit $Z_2 = \frac{1}{j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$ qui tend vers l'infini pour $\omega = \omega_0$. Dans ce cas, $Z_1 = R$.

2. Pour étudier la sélectivité, il faut déterminer la bande passante et le facteur de qualité.

Pour le premier cas, par une étude analogue à celle du cours, on trouve $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Pour le second $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$.

La sélectivité est meilleure pour le second montage car on peut augmenter la valeur de R tandis que diminuer sa valeur est difficile.

3. On a déjà déterminé la valeur $C = 158 \text{ nF}$.

Pour le premier cas, on prend la valeur la plus faible pour R soit $1 \text{ k}\Omega$ pour ne pas être gêné par les résistances internes des sources de tension. On en déduit $Q = 0,50$.

Pour le second cas, on choisit la valeur la plus grande possible pour R soit $100 \text{ k}\Omega$ pour ne pas être gêné par les impédances d'entrée des appareils de mesure. Dans ce cas, $Q = 199$.

4. Le deuxième montage est donc meilleur d'après ce qui précède.