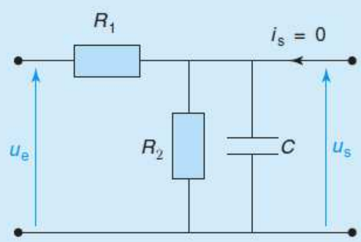
TD N° 3 D'ELECTROCINETIQUE 1

EXERCICE 1

1 – Filtre passif passe-bas

On considère le filtre de la figure suivante. On donne $C = 1{,}0\,\mu F$, $R_1 = 1{,}0\,k\Omega$ et $R_2 = 3{,}0\,k\Omega$.



1 Déterminer les comportements asymptotiques du filtre. En déduire sa nature.

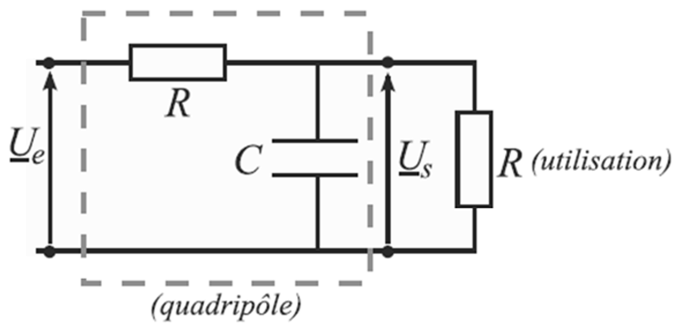
2 Exprimer la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{A_0}{1 + j\omega\tau}$. Exprimer la constante A_0 et la constante de temps τ.

3 Calculer la durée τ, la fréquence de coupure f_c, et le gain maximal G_{max}.

4 À l'entrée du filtre, on injecte la tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(2\pi f t)$ d'amplitude $U_{em} = 10\,V$ et de fréquence $f = \dfrac{f_c}{10}$. Déterminer la tension $u_s(t)$ de sortie.

EXERCICE 2

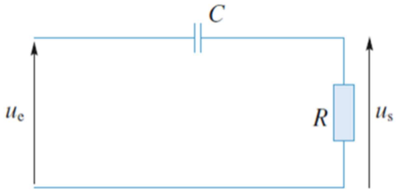
On branche en sortie du quadripôle de la question **5** une résistance R identique à la première. La tension d'entrée $u_e(t)$ est délivrée par un générateur de Thévenin non représenté, de force électromotrice $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$ et de résistance interne r_g. Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z_e}$ et l'impédance de sortie $\underline{Z_s}$.



ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC
Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

EXERCICE 3

On étudie l'action du filtre représenté ci-dessous sur différents signaux en régime forcé.
$R = 2\ \text{k}\Omega$ et $C = 1\ \mu\text{F}$



1. Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega)$ de ce filtre. Tracer le diagramme de Bode.
2. u_e est une tension constante. Déterminer us(t) en régime établi.
3. $u_e(t) = U_0[1 + \cos(2\pi ft)]$. U_0 est une constante homogène à une tension et f = 20 kHz. Déterminer us(t). Commenter le résultat.

4 • $u_e(t) = U_0 \cos3 (2\pi\ ft)$ avec $2\ \pi\ f = 250\ s^{-1}$.
Sachant que : cos3 x = [cos (3x) + 3 cos (x)], écrire l'expression de $u_s(t)$ en régime établi.
Quelle est la sortie si du bruit se superpose au signal d'entrée ?
5 • $u_e(t)$ est une fonction créneau de fréquence f telle que $2\ \pi\ f = 250\ s^{-1}$.

On ne cherchera que l'allure de la tension de sortie u_s .

Conseils

Pour tracer rapidement l'allure du diagramme de gain d'un filtre d'ordre 1, il suffit de tracer les deux asymptotes et de repérer la valeur du gain pour $\omega = \omega_0$.
Un signal constant peut être considéré comme la limite d'un signal périodique dont la fréquence serait nulle.
Pour les questions **3)** et **4)**, penser à la superposition des réponses.
Pour la question **5)**, penser au régime transitoire.

CORRECTION TD N° 1 D'ELECTROCINETIQUE 1

EXERCICE 1

1 Appliquons la méthode du cours.

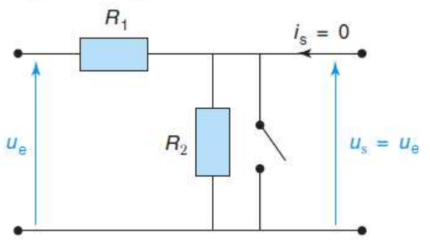
• À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert (figure a). Les deux résistors sont traversés par le même courant ; ils sont en série. La branche R_1, R_2 réalise un diviseur de tension : $\dfrac{u_s}{u_e} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \neq 0$.

• À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé (figure b) donc $u_s = 0$.

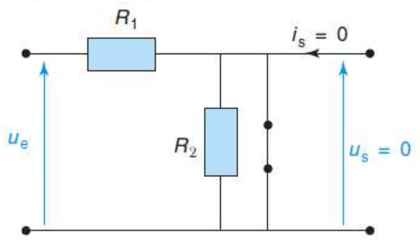
La tension de sortie est nulle seulement à haute fréquence ; le filtre est un **filtre passe-bas**.

L'étude des comportements asymptotiques d'un quadripôle peut permettre d'en connaître la nature.

a) Basse fréquence

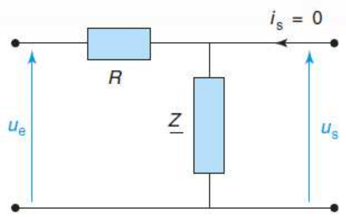


b) Haute fréquence



2 Soit $\underline{Z}$ l'impédance de l'association du condensateur et du résistor de résistance R_2, et $\underline{Y}$ son admittance.

Le courant de sortie est nul. Le résistor et le dipôle $\underline{Z}$ sont traversés par le même courant ; ils sont en série. Le circuit (figure ci-contre) réalise un diviseur de tension qui permet d'exprimer facilement la fonction de transfert :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}}{R_1 + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + R_1\underline{Y}}$$

$$= \frac{1}{1 + R_1\left[\dfrac{1}{R_2} + jC\omega\right]} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}} \; \frac{1}{1 + j\dfrac{R_1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}C\omega} = \frac{\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}C}.$$

Lorsque des éléments d'un quadripôle sont en parallèle, on simplifie souvent la détermination de la fonction de transfert en utilisant l'admittance équivalente.

Par identification, on obtient : $\boxed{A_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}$

La fonction de transfert est bien celle d'un filtre passe-bas, en accord avec la détermination rapide de la première question.

Il faut vérifier que l'expression de la fonction de transfert confirme la prévision des comportements asymptotiques d'un quadripôle.

3 $\boxed{\tau = 0{,}75 \text{ ms} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = 0{,}21 \text{ kHz}}$

$|\underline{H}|_{max} = A_0 \Rightarrow G_{max} = 20\log(A_0)$

$$\boxed{G_{max} = -2{,}5 \text{ dB}}$$

4 Avec les données on a : $\omega\tau = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c} = \frac{1}{10}$.

Travaillons en notation complexe pour déterminer la tension de sortie.

• Tension d'entrée en notation complexe :

$$u_e = E_m \cos(2\pi f t) \Rightarrow \underline{u}_e = E_m e^{j2\pi f t}.$$

• Tension de sortie en notation complexe à partir de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = \underline{H}(j\omega)\underline{u}_e = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau}\underline{u}_e = \frac{A_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}e^{j\alpha}} U_{em} e^{j2\pi f t}$$

$$\underline{u}_s = \frac{A_0 U_{em}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} e^{j(2\pi f t - \alpha)} \quad \text{avec} \quad \tan\alpha = \omega\tau.$$

• Tension de sortie réelle en prenant la partie réelle de son expression complexe :

$$u_s = \frac{A_0 U_{em}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos(2\pi f t - \alpha) = \frac{0{,}75 \cdot 10}{\sqrt{1 + 10^{-2}}} \cos(2\pi f t - \alpha) \approx 7{,}5 \cos(2\pi f t - \alpha)$$

$\tan\alpha = 0{,}10 \Rightarrow \alpha \approx 0{,}10$ rad.

Finalement : $\boxed{u_s(t) = 7{,}5 \cos(1{,}3 \cdot 10^2 t - 0{,}10) \text{ (V)}}$

en conclusion

• L'étude des comportements asymptotiques d'un quadripôle peut permettre d'en connaître la nature.
• Il faut vérifier que l'expression de la fonction de transfert confirme la prévision des comportements asymptotiques d'un quadripôle.
• Lorsque des éléments d'un quadripôle sont en parallèle, on simplifie souvent la détermination de la fonction de transfert en utilisant l'admittance équivalente.

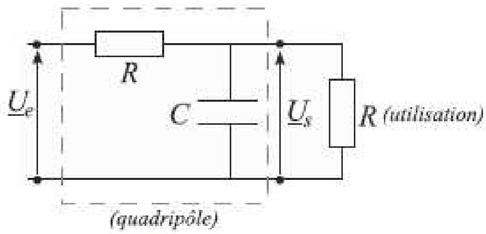
EXERCICE 2

On branche en sortie du quadripôle de la question 5 une résistance R identique à la première. La tension d'entrée $u_e(t)$ est délivrée par un générateur de Thévenin non représenté, de force électromotrice $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$ et de résistance interne r_g. Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ et l'impédance de sortie $\underline{Z}_s$.

ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC
Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

☒ a. $\underline{Z_e} = R\left(\dfrac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega}\right)$ ❒ b. $\underline{Z_e} = r_g + 2R + \dfrac{1}{jC\omega}$

❒ c. $\underline{Z_s} = r_g + R + \dfrac{1}{jC\omega}$ ☒ d. $\underline{Z_s} = \dfrac{r_g + R}{1 + jC\omega\left(r_g + R\right)}$



Vu du générateur, le circuit est formé d'une résistance R en série avec l'association parallèle (condensateur, résistance) soit $\underline{Z_e} = R + \dfrac{1}{\underline{Y_C} + \underline{Y_R}}$ donc

$$\underline{Z_e} = R + \frac{R}{\underline{Y_C}R + 1} = R + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R\left(\frac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega}\right).$$

Vu de l'utilisation, et si on transforme le circuit côté générateur, le condensateur et la résistance série totale $\left(r_g + R\right)$ sont en parallèle donc

$$\underline{Y_s} = \frac{1}{r_g + R} + jC\omega = \frac{1}{\underline{Z_s}}.$$

EXERCICE 3

1 • La relation entre u_{em} et u_{sm} s'obtient par la division de tension :

$$\underline{u}_{s_m} = \underline{u}_{e_m} \frac{R}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} \quad \text{d'où :}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{\omega_0}{j\omega}} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \qquad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} = 500\ \text{s}^{-1}.$$

Recherchons les comportements asymptotiques.

- Pour $\omega \to \infty : \underline{H} \approx 1$ donc : $G_{(\text{dB})} \approx 0$ et $\varphi \approx 0$.
- Pour $\omega \to 0 : \underline{H} = \text{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}$ donc : $G_{(\text{dB})} \approx 20 \log \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $\varphi \approx \dfrac{\pi}{2}$.

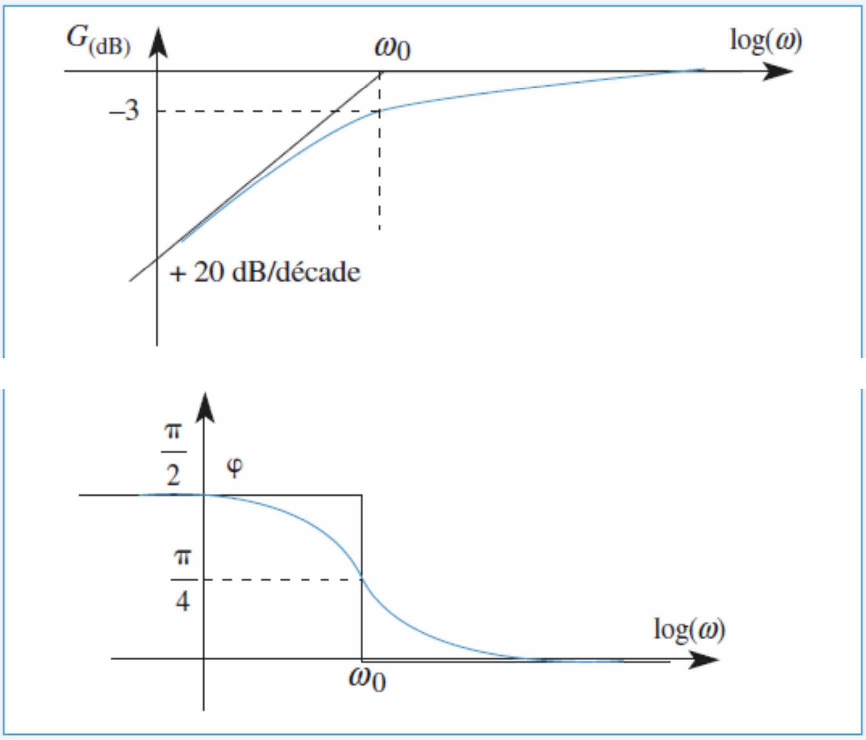
ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC
Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

• Pour $\omega = \omega_0$: $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $G_{(\text{dB})} = -3$ dB et $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

On en déduit l'allure des courbes de gain et de phase (*doc.* 1).

Le filtre est bien un passe-haut :

• à très haute fréquence $(\omega \to \infty)$, le condensateur se comporte comme un court-circuit, d'où $u_s \to u_e$;
• à très basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où $u_s \to 0$.



Doc. 1

2 • Une tension constante peut être vue comme le cas limite d'une tension périodique de fréquence nulle. Dans ce cas $\underline{H} = 0$: le signal d'entrée est éliminé en sortie.

En continu, la capacité se comporte comme une impédance infinie.

Il n'y a aucun courant dans la résistance, donc la d.d.p. à ses bornes est nulle.

<u>Remarque</u> : La fonction de transfert représente le rapport entre u_{e_m} et u_{s_m} en régime forcé. Il est clair que pendant le régime transitoire, u_s est non nulle.

3 • $u_e(t) = u_{e_1}(t) + u_{e_2}(t)$, avec :

$u_1(t) = U_0$ et $u_2(t) = U_0 \cos \omega t$, avec $\dfrac{\omega}{\omega_0} = 80\pi$.

L'équation différentielle qui relie u_s à u_e étant linéaire, la réponse en régime forcé à $u(t)$ est égale à la somme des réponses à $u_{e_1}(t)$ et $u_{e_2}(t)$.

- $u_{e_1} \rightarrow u_{s_1} = 0$
- Pour u_{e_2} :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(80\pi)^2}}} = 1{,}00 \text{ et } \varphi = \arctan \frac{1}{80\pi} = 0{,}23 \text{ degré}$$

donc : $u_{s_2}(t) = 1{,}00\, U_0 \cos(\omega t + \varphi) \approx U_0 \cos \omega t$.

Conclusion : Le filtre laisse pratiquement intacte la composante alternative du signal d'entrée, de fréquence très supérieure à f_0 et coupe totalement la composante continue.

Remarque : Un filtre passe-haut coupe la composante continue du signal d'entrée.

4 • Comme $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$, le signal donné comporte deux pulsations $\omega = 2\pi f = \dfrac{\omega_0}{2}$ et $3\omega = \dfrac{3\omega_0}{2}$.

On superpose les réponses forcées aux deux composantes sinusoïdales du signal d'entrée :

- Pour $\omega = \dfrac{\omega_0}{2}$:

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2}} = 0{,}45 \text{ et } \varphi_1 = \arctan(2) = 1{,}1 \text{ rad.}$$

- Pour $\omega = \dfrac{3\omega_0}{2}$:

ESATIC ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC
Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = 0{,}83 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}59 \text{ rad.}$$

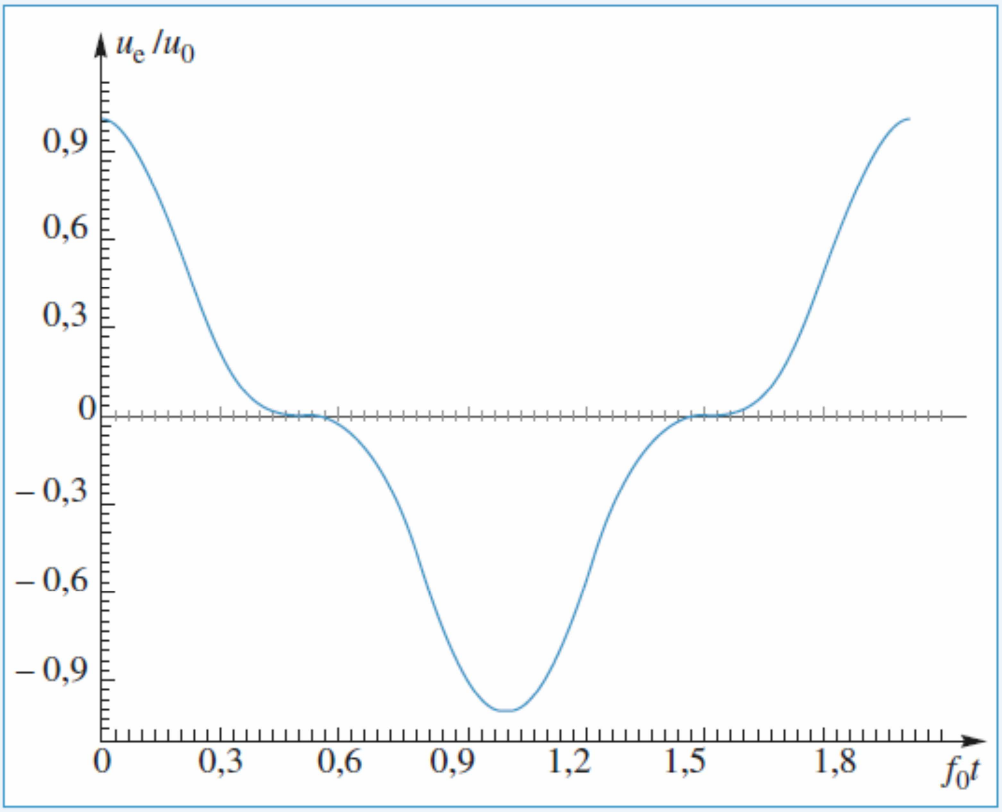
D'où :

$$u_{e_1} = \frac{3U_0}{4}\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \rightarrow u_{s_1} = 0{,}34\, U_0 \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + \varphi_1\right);$$

$$u_{e_2} = \frac{U_0}{4}\cos\left(\frac{3\omega_0 t}{2}\right) \rightarrow u_{s_2} = 0{,}21\, U_0 \cos\left(\frac{3\omega_0}{2} + \varphi_2\right).$$

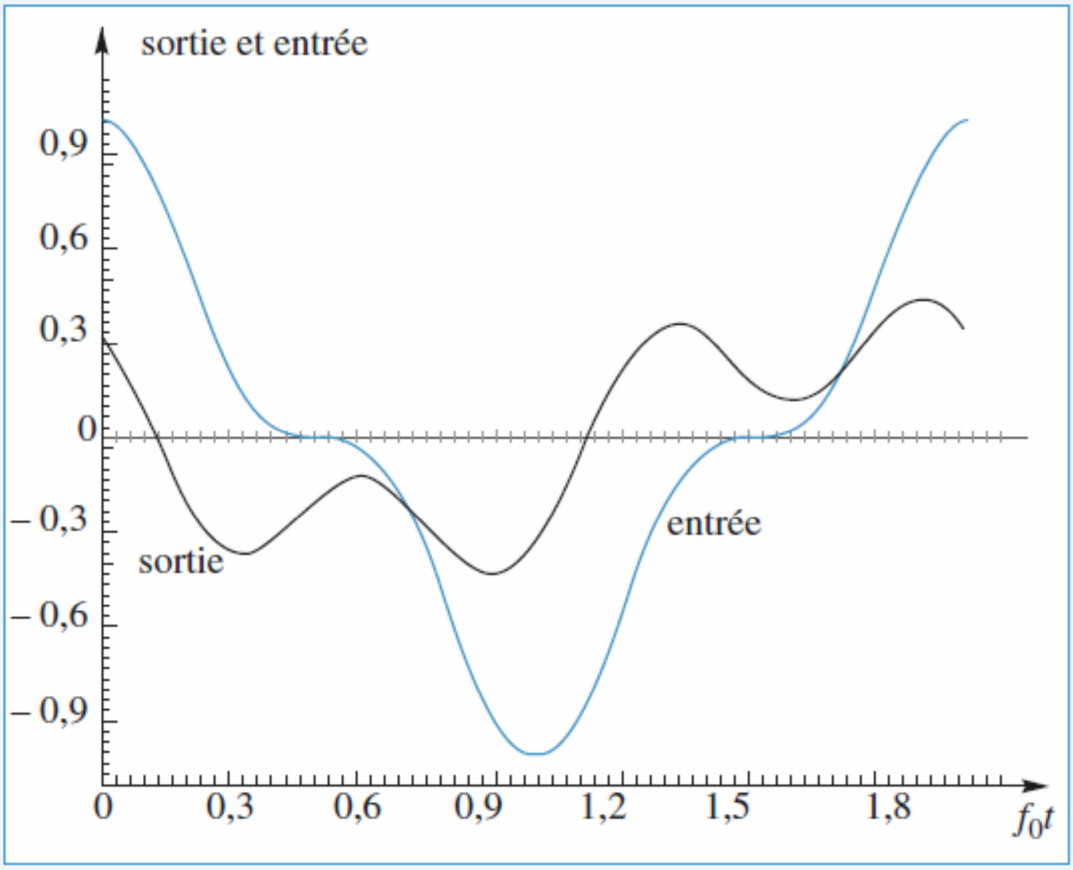
Donc :

$$u_s(t) = U_0\left(0{,}34\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + \varphi_1\right) + 0{,}21\cos\left(\frac{3\omega_0 t}{2} + \varphi_2\right)\right).$$



Doc. 2. $u_e(t)$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main
ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC

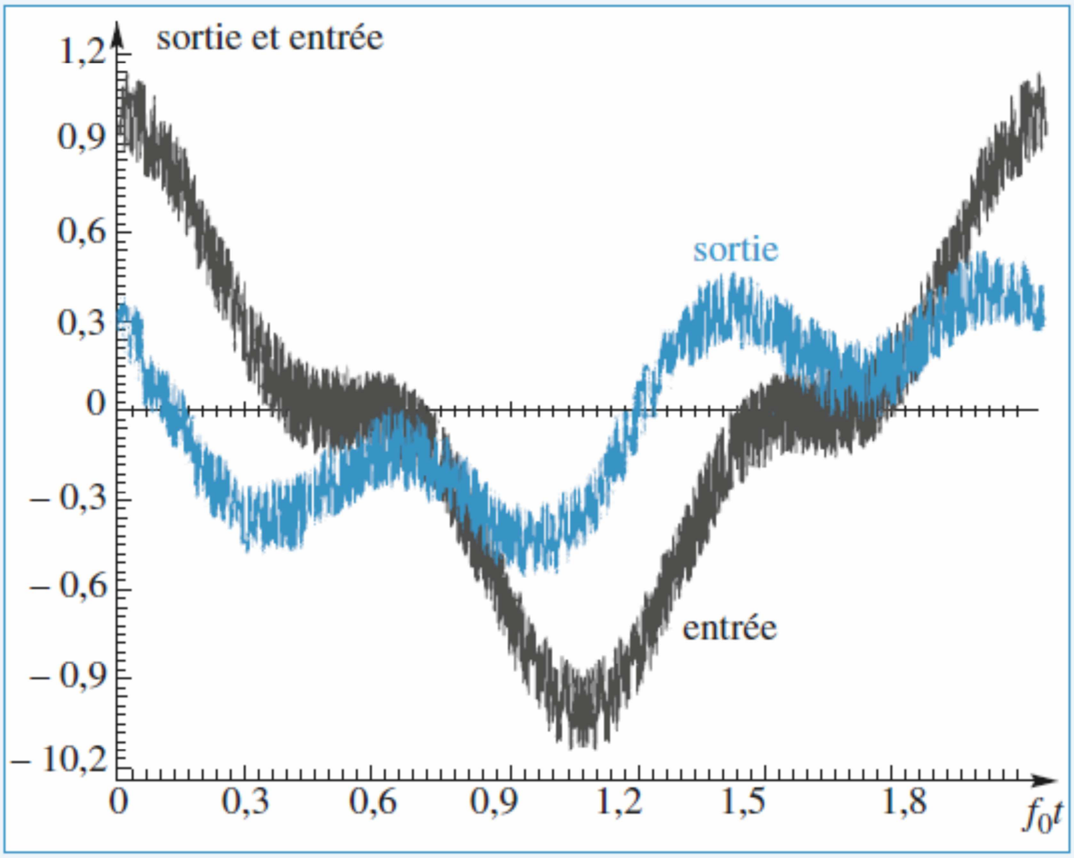


Doc. 3. *$u_s(t)$ en régime forcé*

La composante de fréquence inférieure à f_0 a donc été plus atténuée que la composante de fréquence supérieure.

Sur les graphes (*doc*. 2 et 3), on constate une atténuation de l'amplitude globale du signal, ainsi qu'une déformation de celui-ci. Il ne faudrait pas en conclure que le filtre a un effet non linéaire, ce qui est en contradiction avec notre étude. En fait, le signal d'entrée n'est pas sinusoïdal, et les amplitudes de ses deux harmoniques sont traitées de façons différentes par le filtre passe-haut.

Si le signal d'entrée est bruité, le signal de sortie sera aussi bruité. En effet le bruit étant constitué de hautes fréquences sera intégralement transmis avec un gain égal à 1, ce qui se vérifie sur le *document* 4.



Doc. 4

5 • Soit $u_e(t)$ une fonction créneau symétrique d'amplitude égale à 1, et de pulsation $\omega = \dfrac{\omega_0}{2}$, de fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$:

$$\begin{cases} 0 \leqslant ft < 0{,}5 \Rightarrow u_e = U_0 \\ 0{,}5 \leqslant ft < 1 \Rightarrow u_e = -U_0 \end{cases}$$

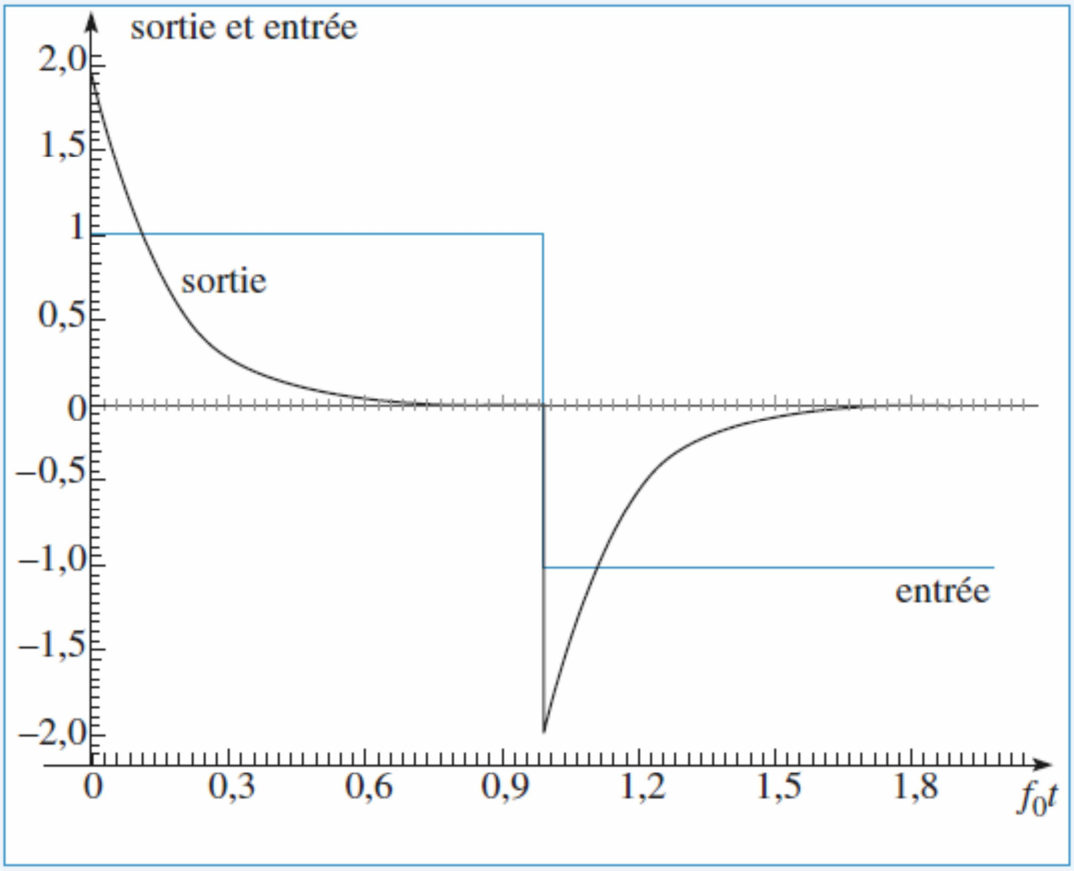
Les divers harmoniques du signal qui composent le créneau sont soit atténués, soit conservés : il est impossible de prévoir simplement la sortie.

La tension de sortie peut, en revanche, s'obtenir en étudiant le régime transitoire de l'équation différentielle associée à la fonction de transfert :

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{du_s}{dt} + u_s = \frac{1}{\omega_0}\frac{du_e}{dt}.$$

ESATIC ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC
Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main

La tension aux bornes de la capacité C étant continue, toute discontinuité de u_e est intégralement transmise à u_s.
À ces discontinuités se superposent des évolutions en $e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$, ce que l'on observe sur le *document* 5.



Doc. 5