# Chapitre 2

# Interpolation et approximation polynômiale

Dans ce chapitre, on dispose d'une fonction $f$, connue par exemple uniquement par ses valeurs en certains points, et on cherche à remplacer ou à approcher $f$ par une fonction plus simple, le plus souvent par un polynôme. Nous verrons dans ce contexte, l'interpolation qui consiste à rechercher un polynôme qui passe exactement par les points donnés, l'interpolation par morceaux, en particulier les fonctions splines où l'expression du polynôme est différente sur chaque sous-intervalle, l'approximation uniforme ou l'approximation au sens des moindres carrés ou on cherche à approcher au mieux la fonction, soit pour la norme uniforme (ou norme infnie), soit pour la norme euclidienne.

## 2.1 Interpolation de lagrange

Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ connue en $n + 1$ points distincts $x_0, x_1, ...x_n$ de l'intervalle $[a; b]$. Il s'agit de construire un polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$ tel que

$$\forall i = 0, 1, \cdots, n, \quad P(x_i) = f(x_i) \tag{2.1}$$

**Théorème 2.1.** *Il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ solution de* (2.1). *Le polynôme s'écrit*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \tag{2.2}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{k=0 \quad k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \tag{2.3}$$

**Remarque 2.1.** *Le polynôme $P_n$ est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f$ aux points $x_0, x_1, ...x_n$. Les polynômes $L_i(x)$ sont appelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.*

*Démonstration.* **Preuve Existence** On vérifie directement que le polynôme donné par (2.2) est solution de (2.1) (on utilise le fait que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$).
**Unicité** Soit $Q$ un autre polynôme solution. Alors $\forall i = 0, 1, \cdots n Q(x_i) - P(x_i) = 0$. Ainsi $Q - P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ s'annulant en $n + 1$ points. Il est donc identiquement nul. $\square$

**Exemple 2.1.** ***Interpolation linéaire*** *On applique* (2.2) *avec* $n = 1$ *pour trouver*

$$P_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

ceci s'écrit encore

$$P_1(x) = f(x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \tag{2.4}$$

**Exemple 2.2.** *Pour exprimer le polynôme d'interpolation sous la forme de Lagrange, il faut définir les polynômes associés à chacun des points, $L_i(x)$. Par exemple pour la série de points suivante :*

| $x$ | *0* | *11* | *2* |
|---|---|---|---|
| $y$ | *2,6* | *2,7* | *2,9* |

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} = -x^2 + 2x$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

*On obtient alors le polynôme d'interpolation :*

$$\begin{aligned} P_n(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i L_i(x) &= y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 \\ &= 2,6(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1) + 2,7(-x^2 + 2x) + 2,9(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) \\ P_n(x) &= 0,05x^2 + 0,05x + 2,6 \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.** *L'écriture* (2.2) *du polynôme d'interpolation est intéressante au point de vue théorique, mais peu du point de vue numérique : elle a un caractère peu algorithmique. De plus, son évaluation requiert trop d'opérations élémentaires (le calcul d'un des polynômes de Lagrange de degré $n$ nécessite $4n^2$ opérations). On lui préfère la formule de Newton. On rappelle qu'il n'existe qu'un seul polynôme d'ordre $n - 1$ interpolant $n$ points.*

## 2.2 Interpolation de Newton et différences divisées

On veut maintenant déterminer une nouvelle forme du polynôme d'interpolation $P$ qui ne nécessite pas de recalculer toutes les fonctions de base lors de l'ajout d'un nouveau point. Si l'on a qu'un point d'interpolation $x_0$ alors,

$$P(x) = f(x_0).$$

Si l'on ajoute un point $x_1$ alors

$$P(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0)$$

et

$$P(x_1) = f(x_1)$$

implique

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Si l'on a $n + 1$ points $x_0, x_1 \cdots, x_n$, on cherche

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)$$

Remarquer que si l'on a déterminé $a_0, a_1, ..., a_{i-1}$ alors de l'égalité,

$$P(x_i) = f(x_i) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_i(x_i - x_0)(x_i - x_1) + \cdots (x_i - x_{i-1})$$

on déduit que $a_i$ est déterminé par la formule :

$$a_i = \frac{f(x_i) - a_0 - a_1(x_i - x_0) - \cdots a_{i-1}(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-2})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})}.$$

Ce qui montre que $a_i$ ne dépend que des points $x_0, \cdots, x_i$. On pose alors pour tout $k \in \{1,\ 2,\ \cdots n\}$

$$a_k = f[x_0, \cdots, x_k].$$

Où $f[.]$ désigne les différences divisées de f définies par :

$$i = 0, \cdots, n \ \ f[x_i] = f(x_i) \tag{2.5}$$

$$f[x_{i-1}, x_i] = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f[x_0, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{2.6}$$

Avec cette notation, on a la formule d'interpolation de Newton

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n] \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) && (2.7) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \cdots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k) && (2.8) \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.** *Par convention* $\prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k) = 1$ *si* $i < 1$

**Lemme 2.1.** *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soient* $x_0, x_1 \cdots, x_n$, $n+1$ *réels distincts, pour toute permutation* $\sigma$ *sur* $\{0,\ 1,\ \cdots n\}$, *on a :*

$$f[x_0, \cdots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \cdots, x_{\sigma(n)}]$$

Pour expliciter le processus récursif, les différences divisées peuvent être calculées en les disposant de la manière suivante dans un tableau :

| i | $x_i$ | $y_i$ | $f[x_{i-1}, x_i]$ | $f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$ | $f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$ | $f[x_{i-4}, x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_0$ | $\boxed{y_0}$ | | | | | |
| 1 | $x_1$ | $y_1$ | $\boxed{f[x_0, x_1]}$ | | | | |
| 2 | $x_2$ | $y_2$ | $f[x_1, x_2]$ | $\boxed{f[x_0, x_1, x_2]}$ | | | |
| 3 | $x_3$ | $y_3$ | $f[x_2, x_3]$ | $f[x_1, x_2, x_3]$ | $\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$ | | |
| 4 | $x_4$ | $y_4$ | $f[x_3, x_4]$ | $f[x_2, x_3, x_4]$ | $f[x_1, x_2, x_3, x_4]$ | $\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\boxed{\ddots}$ |

Si on reprend l'exemple de la section précédente :

**Exemple 2.3.**

| $x$ | *0* | *11* | *2* |
|---|---|---|---|
| $y$ | *2,6* | *2,7* | *2,9* |

*on obtient :*

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{2,6 - 2,7}{0 - 1} = 0,1 \\ f[x_1, x_2] &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2,7 - 2,9}{1 - 2} = 0,2 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{0,2 - 0,1}{2 - 0} = 0,05 \end{aligned}$$

*ou en utlisant le tableau*

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $f[x_{i-1}, x_i]$ | $f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$ | $f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\boxed{2.6}$ | | | |
| 1 | 1 | 2.7 | $f[x_0, x_1] = \boxed{0.1}$ | | |
| 2 | 2 | 2.9 | $f[x_1, x_2] = 0.2$ | $f[x_0, x_1, x_2] = \boxed{0.05}$ | |

*d'où*

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \cdots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 2,6 + 0,1(x - 0) + 0,05(x - 0)(x - 1) \\ &= 2,6 + 0,05x + 0,05x^2 \end{aligned}$$

**Algorithme 2.2.1.**

## 2.3 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Le but de l'interpolation étant de remplacer l'évaluation de $f(x)$ par celle de $P(x)$, il est important de connaître l'erreur. Soit $P_n$ le polynôme d'interpolation de $f$ aux points $x_0, x_1 \cdots, x_n$. On pose

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

**Proposition 2.1.** *Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$e_n(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{ si } x \in \{x_0, \ \cdots, \ x_n\} \\ f[x_0, \cdots, x_n, x] \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \textit{ sinon} \end{cases}$$

**Preuve 1.** *On suppose que $x \notin \{x_0, \ \cdots, \ x_n\}$. Soit $P_{n+1}$ le polynôme d'interpolation de $f$ aux points $\{x_0, \ \cdots, \ x_n\}$. Alors*

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x) = f[x_0, \cdots, x_n, x] \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

**Théorème 2.2.** *Soient $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ , de classe $C^k$ et $x_0, \ \cdots, \ x_n$, des réels distincts. On pose $a = min\{x_0, \ \cdots, \ x_n\}$ et $b = max\{x_0, \ \cdots, \ x_n\}$. Alors il existe $\xi \in ]a; b[$ tel que*

$$f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{f^k(\xi)}{k!}$$

**Preuve 2.** *Dans le cas où $k = 1$, c'est une application du théorème des accroissements finis. Supposons $k > 1$ quelconque. Soit $P_k$ le polynôme d'interpolation de $f$ aux points $x_0, \cdots, x_k$. Alors, la fonction :*

$$e_k(x) = f(x) - P_k(x)$$

*s'annule au moins en $k + 1$ points distincts : $x_0, \cdots, x_k$. Donc, d'après le théorème de Rolle, la fonction $e_k'$ s'annule au moins en $k$ points dans $]a, b[$. La fonction $e_k''$ s'annule au moins en $k - 1$ points dans $]a, b[$. De même, la fonction $(e_k)^{(k)}$ s'annule en au moins un point dans $]a, b[$. Donc :*

$$\exists \xi \in ]a; b[ \text{ tel que } (e_k)^{(k)}(\xi) = f^k(\xi) - P_k^{(k)}(\xi) = 0.$$

*Or*

$$P_k^{(k)}(\xi) = k!f[x_0, \cdots, x_k].$$

*Donc*

$$f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{f^k(\xi)}{k!}$$

**Théorème 2.3.** *Soient $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ , de classe $C^{n+1}$ sur $]a, b[$, $x_0, \cdots, x_n$, des réels distincts de $[a, b]$ et $P_n$ le polynôme d'interpolation de $f$ sur le support $x_0, \cdots, x_n$. Alors pour tout $x$ dans $[a, b]$ il existe $\xi \in [a, b]$ tel que*

$$e_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

**Preuve 3.** *Elle découle de la proposition et du Théorème précédents.*

**Théorème 2.4.** *Soient $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ , de classe $C^{n+1}$ sur $]a, b[$, $x_0, \cdots, x_n$, des réels distincts de $[a, b]$ et $P_n$ le polynôme d'interpolation de $f$ sur le support $x_0, \cdots, x_n$. Alors*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\pi_n(x)| \tag{2.9}$$

*où*

$$M_{n+1} = max_{a \leq x \leq b}|f^{n+1}(x)| \tag{2.10}$$

*et*

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \tag{2.11}$$

**Lemme 2.2.** *Sous les hypothèses du théorème, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que*

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^n(\xi)}{n!}$$