

Chapitre 1

Equations non linéaires

1.1 introduction

Un des problèmes classiques en mathématiques appliquées est celui de la recherche des valeurs pour lesquelles une fonction donnée s'annule. Dans certains cas bien particuliers, comme pour les fonctions $x \mapsto x + 1$, $x \mapsto \cos(2x)$, ou encore $x \mapsto x^2 - 2x + 1$, le problème est simple car il existe pour ces fonctions des formules qui donnent les zéros explicitement. Toutefois, pour la plupart des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il n'est pas possible de résoudre l'équation $f(x) = 0$ explicitement et il faut recourir à des méthodes numériques. Ainsi par exemple une brève étude de la fonction $f(x) = \cos(x) - x$ montre qu'elle possède un zéro à proximité de 0.7 mais ce zéro ne s'exprime pas au moyen de fonctions usuelles et pour en obtenir une valeur approchée il faut recourir à des méthodes numériques.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue donnée dont on veut évaluer numériquement un ou plusieurs zéros $\hat{x}$, c'est-à-dire qu'on cherche tous les $\hat{x}$ tels que $f(\hat{x}) = 0$. Les méthodes numériques pour approcher $\hat{x}$ consistent à :

1. localiser grossièrement le (ou les) zéro(s) de f en procédant à l'étude du graphe de f et/ou à des évaluations qui sont souvent de type graphique; on note x_0 cette solution grossière;
2. construire, à partir de x_0 une suite $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} x_k = \hat{x}$ où $f(\hat{x}) = 0$. On dit alors que la méthode est convergente.

1.2 Définitions

Définition 1.1. Méthode itérative à deux niveaux

On appelle méthode itérative à deux niveaux un procédé de calcul de la forme

$$x_{k+1} = G(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

CHAPITRE 1. EQUATIONS NON LINÉAIRES

dans lequel on part d'une valeur donnée x_0 pour calculer x_1 , puis à l'aide de x_1 on calcule x_2 etc. La formule même est dite formule de récurrence. Le procédé est appelé convergent si x_k tend vers un nombre fini lorsque k tend vers $+\infty$. Il est bien évident qu'une méthode itérative n'est utile que s'il y a convergence vers les valeurs cherchées.

On peut parfaitement envisager des méthodes itératives multi-niveaux, comme par exemples les schémas à trois niveaux dans lesquels on part de deux valeurs données x_0 et x_1 pour calculer x_2 , puis à l'aide de x_1 et x_2 on calcule x_3 etc.

Définition 1.2. Ordre de convergence

Soit p un entier positif. On dit qu'une méthode (à deux niveaux) convergente est d'ordre p s'il existe une constante C telle que

$$|\hat{x} - x_{k+1}| \leq C|\hat{x} - x_k|^p$$

ou encore

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \hat{x}}{(x_k - \hat{x})^p} = C$$

Si $p = 1$ (et $C < 1$) on parle de convergence linéaire, si $p = 2$ on parle de convergence quadratique.

1.3 Localisation des zéros

Définition 1.3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $\hat{x}$ est un zéro de f si $f(\hat{x}) = 0$. Il est dit simple si $f'(\hat{x}) \neq 0$, multiple sinon. Si f est de classe C^p avec $p \in \mathbb{N}$, on dit que $\hat{x}$ est un zéro de multiplicité p si

$$\begin{cases} f^{(i)}(\hat{x}) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, p-1 \\ f^{(p)}(\hat{x}) \neq 0 \end{cases}$$

Pour localiser grossièrement le (ou les) zéro(s) de f on va d'abord étudier la fonction f , puis on va essayer d'utiliser un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection afin de trouver un intervalle qui contient un et un seul zéro.

Théorème 1.1. Des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. Autrement dit :

si $f(a) \leq f(b)$ alors pour tout $d \in [f(a); f(b)]$ il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = d$;

si $f(a) \geq f(b)$ alors pour tout $d \in [f(b); f(a)]$ il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = d$.

Ce théorème donne alors le corollaire immédiat suivant.

Corollaire 1.1. *Soit une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe (au moins un) $\hat{x} \in]a; b[$ tel que $f(\hat{x}) = 0$*

Ce théorème garantit juste l'existence d'un zéro. Pour l'unicité on essaiera d'appliquer le théorème de la bijection dont l'énoncé est rappelé ci-dessous.

Théorème 1.2. De la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, monotone sur $f(I)$ et de même sens de variation que f .

Ayant encadré les zéros de f , la construction de suites qui convergent vers ces zéros peut se faire à l'aide de plusieurs méthodes numériques. Ci-dessous on décrit les méthodes les plus connues et on étudie leurs propriétés (convergence locale, globale, vitesse de convergence, etc.)

1.4 Méthode de dichotomie (ou bisection)

Dans les méthodes de dichotomie, à chaque pas d'itération on divise en deux un intervalle donné et on choisit le sous-intervalle où f change de signe.

Concrètement, soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une et une seule solution dans cet intervalle. On se propose de déterminer cette valeur avec une précision donnée. Soit $[a_0; b_0]$ un intervalle dans lequel $f(a_0)f(b_0) < 0$ et soit $c_0 \in]a_0; b_0[$. Si $f(a_0)f(c_0) < 0$, alors la racine appartient à l'intervalle $[a_0; c_0]$ et on reprend le procédé avec $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$. Sinon, c'est-à-dire si $f(a_0)f(c_0) \geq 0$ on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$. On construit ainsi une suite d'intervalles emboîtés $[a_k; b_k]$. Les suites a_k et b_k sont adjacentes et convergent vers $\hat{x}$.

Définition 1.4. *Soit deux points a_0 et b_0 (avec $a_0 < b_0$) d'images par f de signe contraire (i.e. $f(a_0)f(b_0) < 0$). En partant de $I_0 = [a_0; b_0]$, la méthode de dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k; b_k]$, $k \geq 0$, avec $I_k \subset I_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$.*

On découpe l'intervalle $[a_k; b_k]$ en deux intervalles de même longueur, i.e. on divise $[a_k; b_k]$ en $[a_k; c_k]$ et $[c_k; b_k]$ où $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.

Pour l'itération suivante, on pose soit $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k; c_k]$ soit $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k; b_k]$ de sorte à ce que $f(a_{k+1})f(b_{k+1}) < 0$. La suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\hat{x}$ puisque la longueur de ces intervalles tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$

Algorithme 1.4.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } k = 0, 1, 2, \dots, N, \text{ faire} \\ \quad c =: \frac{a_k + b_k}{2} \\ \quad \text{si } f(a_k) \times f(c) \leq 0, \quad a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} := c \\ \quad \text{sinon } a_{k+1} := c, \quad b_{k+1} := b_k \end{array} \right.$$

Remarque 1.1. On peut choisir le temps d'arrêt N pour que :

$$\frac{1}{2^N}(b_0 - a_0) < \epsilon = \text{précision choisie.}$$

Remarque 1.2. Avec la méthode de la dichotomie, les itérations s'achèvent à la m -ème étape quand $|x_m - \hat{x}| \leq |I_m| < \epsilon$, où ϵ est une tolérance fixée et $|I_m|$ désigne la longueur de l'intervalle I_m . Clairement $I_k = \frac{b-a}{2^k}$, donc pour avoir une erreur $|x_m - \hat{x}| < \epsilon$, on doit prendre le plus petit m qui vérifie

$$m \geq \log_2 \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right) = \frac{\ln(b-a) - \ln(\epsilon)}{\ln(2)}.$$

Notons que cette inégalité est générale, elle ne dépend pas du choix de la fonction f .

Exemple 1.1. Utiliser la méthode de la dichotomie pour calculer le zéro de la fonction

$$f(x) = x^3 + 2x - 1.$$

f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 \geq 2 > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. Le théorème de la bijection assure alors que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

De plus f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$, car sur $\mathbb{R}$, et $f(0) \times f(1) = -0,125 < 0$, le théorème de la bijection assure alors que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.

Conséquence : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $\alpha \in [0; 1]$.

Mettre en place sur une feuille Excel le calcul d'un encadrement à d'amplitude 10^{-3} de la solution de l'équation $f(x) = 0$, par la méthode de Dichotomie.

Déterminons N le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près. N est le plus petit m qui vérifie

$$m \geq \frac{\ln(1-0) - \ln(10^{-3})}{\ln(2)} = 9,9658.$$

Donc $N = 10$.

n	a_n	b_n	$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(a_n) \times f(c_n)$
0	0	1	0,5	-1	0,125	-0,125
1	0	0,5	0,25	-1	-0,484375	0,484375
2	0,25	0,5	0,375	-0,484375	-0,19726563	0,09555054
3	0,375	0,5	0,4375	-0,19726563	-0,04125977	0,00813913
4	0,4375	0,5	0,46875	-0,04125977	0,04049683	-0,00167089
5	0,4375	0,46875	0,453125	-0,04125977	-0,00071335	2,9433.10 ⁻⁰⁵
6	0,453125	0,46875	0,4609375	-0,00071335	0,01980734	-1,413.10 ⁻⁰⁵
7	0,453125	0,4609375	0,45703125	-0,00071335	0,00952607	-6,7954.10 ⁻⁰⁶
8	0,453125	0,45703125	0,45507813	-0,00071335	0,00440115	-3,1396.10 ⁻⁰⁶
9	0,453125	0,45507813	0,45410156	-0,00071335	0,0018426	-1,3144.10 ⁻⁰⁶
10	0,453125	0,45410156	0,45361328	-0,00071335	0,0005643	-4,0254.10 ⁻⁰⁷

$$\alpha \in [0,4531250; 0,4541016],$$

$$amplitude = 0,0009766 < 0,001.$$

1.5 Méthode de Lagrange (ou Regula falsi)

Principe 1.1. Soit deux points a_0 et b_0 (avec $a_0 < b_0$) d'images par f de signe contraire (i.e. $f(a_0) \times f(b_0) < 0$). En partant de $I_0 = [a_0, b_0]$, la méthode de LAGRANGE produisent une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$, $k \geq 0$, avec $I_k \subset I_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et tels que $f(a_k) \times f(b_k) < 0$.

Dans la méthode de LAGRANGE, plutôt que de diviser l'intervalle $[a_k, b_k]$ en deux intervalles de même longueur, on découpe $[a_k, b_k]$ en $[a_k, c_k]$ et $[c_k, b_k]$ où c_k est l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ et l'axe des abscisses, autrement dit c_k est solution de l'équation

$$\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}(c - b_k) + f(b_k) = 0$$

qui est

$$c_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k) = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}.$$

Dans les deux cas, pour l'itération suivante, on pose soit $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$ soit $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$ de sorte à ce que $f(a_{k+1}) \times f(b_{k+1}) < 0$. La suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\hat{x}$ puisque la longueur de ces intervalles tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Exemple 1.2. Utiliser la méthode de LAGRANGE pour calculer le zéro de la fonction

$$f(x) = x^3 - 4x - 8.95$$

dans l'intervalle $[2; 3]$ avec une précision de 10^{-2} .

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	2.000000	2.596666667	3.00000	-	-	+
1	2.596666667	2.690262642	3.00000	-	-	+
2	2.690262642	2.702092263	3.00000	-	-	+
3	2.702092263	2.703541518	3.00000	-	-	+
4	2.703541518	2.703718378	3.00000	-	-	+
5	2.703718378	2.703739951	3.00000	-	-	+
6	2.703739951	2.703742582	3.00000	-	-	+

1.6 méthode de la sécante

Soit f admettant un zéro dans l'intervalle $[x_{-1}; x_0]$. Pour obtenir une première approximation de ce zéro, l'idée est de remplacer f par son interpolé linéaire sur $[x_{-1}; x_0]$, soit par :

$$Y(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{x_0 - x_{-1}}$$

l'unique fonction linéaire dont les valeurs coïncident avec celles de f en x_{-1} et x_0 . Pour calculer x_1 on prend l'intersection de l'axe des abscisses avec la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_{-1}, f(x_{-1}))$. L'approximation x_1 est alors obtenue en résolvant

$$Y(x_1) = 0$$

soit

$$x_1 = x_0 - f(x_0) \frac{x_0 - x_{-1}}{f(x_0) - f(x_{-1})}$$

Définition 1.5. Méthode de la Sécante

Il s'agit d'une méthode à trois niveaux : approcher les zéros de f se ramène à calculer la limite de la suite récurrente

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_1 \text{ donné} \\ x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \end{cases}$$

Algorithme 1.6.1. x_0 et x_{-1} étant donnés,

$$\begin{cases} \text{pour } k = 0, 1, 2; \dots \\ x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \end{cases}$$

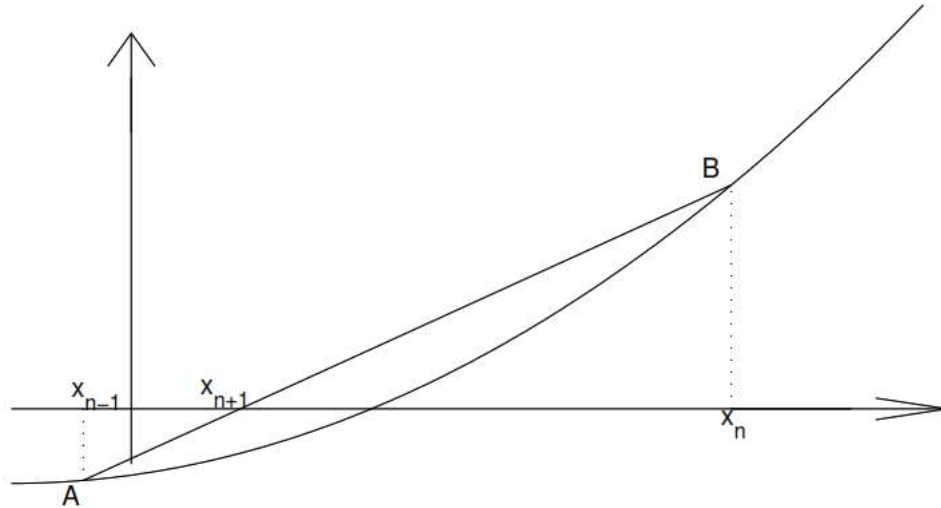


Figure : Méthode de la sécante

1.6.1 Critère d'arrêt

Cet algorithme n'est évidemment pas complet tant qu'on n'a pas précisé un critère d'arrêt. Nous verrons plus loin que, généralement, x_n converge vers la solution $\hat{x}$ cherchée ce qui signifie que pour n grand, x_n est voisin de $\hat{x}$.

Un critère d'arrêt souvent utilisé consiste à choisir a priori une tolérance ϵ et à terminer l'algorithme lorsque

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| < \epsilon.$$

Pour éviter à l'ordinateur de tourner sans s'arrêter lorsqu'il n'y a pas convergence, il est évidemment indispensable de toujours mettre un critère limitant le nombre total d'itérations.

Exemple 1.3. Approximation de $\sqrt{10}$. Soit f définie par $f(x) = x^2 - 10$, f continue, strictement croissante et convexe sur $[0, +\infty[$.

Intervalle $[3, 4]$: $f(3) \leq 0$ et $f(4) \geq 0$, donc $\sqrt{10} \in [3, 4]$

$a_0 = 3$	$\epsilon_0 \leq 0,1666\dots$
$a_1 = 3,14285714285\dots$	$\epsilon_1 \leq 0,02040\dots$
$a_2 = 3,16000000000\dots$	$\epsilon_2 \leq 0,00239\dots$
$a_3 = 3,16201117318\dots$	$\epsilon_3 \leq 0,00028\dots$
$a_4 = 3,16224648985\dots$	$\epsilon_4 \leq 3,28\dots \cdot 10^{-5}$
$a_5 = 3,16227401437\dots$	$\epsilon_5 \leq 3,84\dots \cdot 10^{-6}$
$a_6 = 3,16227723374\dots$	$\epsilon_6 \leq 4,49\dots \cdot 10^{-7}$
$a_7 = 3,16227761029\dots$	$\epsilon_7 \leq 5,25\dots \cdot 10^{-8}$
$a_8 = 3,16227765433\dots$	$\epsilon_8 \leq 6,14\dots \cdot 10^{-9}$

1.7 Méthode de Newton

Ici, au lieu d'assimiler la courbe $y = f(x)$ à une sécante, on l'assimile à la tangente en un point $(x_n, f(x_n))$ soit, la droite d'équation :

$$Y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Son intersection avec l'axe des abscisses fournit une approximation de la solution $\hat{x}$. A nouveau, on renouvelle le procédé jusqu'à obtenir une approximation suffisante.

Algorithme 1.7.1. x_0 étant donné

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } k = 0, 1, 2; \dots \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{array} \right.$$

Remarque 1.3. Cet algorithme est initié à l'aide d'un seul point. Il peut être vu comme une modification de l'algorithme précédent où le quotient $\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ a été remplacé par $\frac{1}{f'(x_k)}$.

1.8 Méthode de point fixe

Définition 1.6. Point fixe

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si $\hat{x}$ est tel que $\varphi(\hat{x}) = \hat{x}$, on dit qu' $\hat{x}$ est un point fixe de φ .

La méthode du point fixe consiste à d'abord remplacer l'équation

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

par l'équation

$$\varphi(x) = x \tag{1.2}$$

ayant mêmes solutions. On est ainsi ramené à la recherche des points fixes de l'application φ . Le remplacement de (1.1) par (1.2) est toujours possible en posant, par exemple, $\varphi(x) = f(x) + x$. Ce n'est évidemment pas forcément le meilleur choix.

L'équation étant sous la forme (1.2), on a alors l'algorithme suivant :

Algorithme 1.8.1. On choisit x_0

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } k = 0, 1, 2; \dots \\ x_{k+1} = \varphi(x_k) \end{array} \right.$$

CHAPITRE 1. EQUATIONS NON LINÉAIRES

cette méthode est justifiée par

Proposition 1.1. Soit $\varphi : [a; b] \rightarrow [a; b]$ continue et $x_0 \in [a; b]$. Si x_n converge vers $\hat{x}$ alors $\varphi(\hat{x}) = \hat{x}$.

La démonstration est immédiate en passant à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et en utilisant la continuité de φ au point $\hat{x}$.

Exemple 1.4. Commençons par un exemple simple. On cherche à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 2x - 3 = 0$. Il n'est pas nécessaire de recourir aux méthodes numériques pour résoudre ce problème, dont les deux solutions sont $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$. Cet exemple permet cependant de mieux comprendre ce qui se passe lorsqu'on utilise l'algorithme des points fixes. Puisqu'il y a une infinité de façons différentes de transformer cette équation sous la forme $x = \varphi(x)$, nous en choisissons trois au hasard. Vous pouvez bien sûr recourir à d'autres.

$$x = \sqrt{2x + 3} = \varphi_1(x) \text{ (en isolant } (x^2))$$

$$x = \frac{3}{x - 2} = \varphi_2(x)$$

$$x = \frac{x^2 - 3}{2} = \varphi_3(x)$$

Si on applique l'algorithme des points fixes à chacune des fonctions $\varphi_i(x)$ en partant de $x_0 = 4$ on obtient pour $\varphi_1(x)$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & \varphi_1(4) & = & 3,3166248 \\ x_2 & = & \varphi_1(3,3166248) & = & 3,1037477 \\ x_3 & = & \varphi_1(3,1037477) & = & 3,0343855 \\ x_4 & = & \varphi_1(3,0343855) & = & 3,0114402 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{10} & = & \varphi_1(x_9) & = & 3,0000157 \end{array}$$

L'algorithme semble donc converger vers la racine $r_1 = 3$. Reprenons l'exercice avec $\varphi_2(x)$, toujours en partant de $x_0 = 4$:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & \varphi_2(4) & = & 1,5 \\ x_2 & = & \varphi_2(1,5) & = & -6,0 \\ x_3 & = & \varphi_2(-6,0) & = & -0,375 \\ x_4 & = & \varphi_2(-0,375) & = & -1,2631579 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{10} & = & \varphi_2(x_9) & = & -1,0003387 \end{array}$$

On remarque que contrairement au cas précédent, les itérations convergent vers la racine $r_2 = -1$. En dernier lieu essayons l'algorithme avec la fonction φ_2

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \varphi_3(4) = 6,5 \\ x_2 & = & \varphi_3(6,5) = 19,625 \\ x_3 & = & \varphi_3(19,625) = 191,0703 \\ x_4 & = & \varphi_3(191,0703) = 18252,43 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Visiblement, les itérations tendent vers l'infini et aucune des deux solutions possibles ne sera atteinte.

Cet exemple montre clairement que l'algorithme des points fixes, selon le choix de la fonction itérative $\varphi(x)$, converge vers l'une ou l'autre des racines et peut même diverger complètement dans certains cas. Il faut donc une analyse plus fine afin de déterminer dans quelles conditions la méthode des points fixes est convergente.

1.9 Convergence des algorithmes

1.9.1 Méthodes de point fixe

Théorème 1.3. Convergence (globale) des itérations de point fixe

Considérons une fonction $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. On se donne $x_0 \in [a; b]$ et on considère la suite $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ pour $k \geq 0$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. **condition de stabilité** $\varphi(x) \in [a; b]$ pour tout $x \in [a; b]$.
2. **Condition de contraction stricte** IL existe $K \in [0, 1]$ tel que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$, pour tout $x, y \in [a; b]$, alors :
 - φ est continue,
 - φ a un seul point fixe $\hat{x}$ dans $[a; b]$,
 - la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers $\hat{x}$ pour tout choix de x_0 dans $[a; b]$.

preuve. Continuité La condition de contraction stricte implique que φ est continue puisque, si on prend une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in [a; b]$ qui converge vers un élément x de $[a; b]$, alors nous avons $|\varphi(x) - \varphi(y_n)| \leq K|x - y_n|$ et par suite $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(y_k) = \varphi(x)$.

Existence : Commençons par prouver l'existence d'un point fixe de φ . La fonction $g(x) = \varphi(x) - x$ est continue dans $[a; b]$ et, grâce à la condition de stabilité, on a $g(a) = \varphi(a) - a \geq 0$ et $g(b) = \varphi(b) - b \leq 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que g a au moins un zéro dans $[a; b]$, i.e. φ a au moins un point fixe dans $[a; b]$.

unicité : L'unicité du point fixe découle de la condition de contraction stricte. En effet, si on avait deux points fixes distincts $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$, alors

CHAPITRE 1. EQUATIONS NON LINÉAIRES

$$|\hat{x}_1 - \hat{x}_2| = |\varphi(\hat{x}_1) - \varphi(\hat{x}_2)| \leq K|\hat{x}_1 - \hat{x}_2| < |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|$$

ce qui est impossible.

Convergence : Prouvons à présent que la suite x_k converge vers l'unique point fixe $\hat{x}$ quand k tend vers $+\infty$ pour toute donnée initiale $x_0 \in [a; b]$. On a

$$|x_{k+1} - \hat{x}| = |\varphi(x_k) - \varphi(\hat{x})| \leq K|x_k - \hat{x}|$$

où $K < 1$ est la constante de contraction. En itérant $k + 1$ fois cette relation on obtient :

$$|x_{k+1} - \hat{x}| \leq K^{k+1}|x_0 - \hat{x}|$$

i.e., pour tout $k \geq 0$

$$\frac{|x_{k+1} - \hat{x}|}{|x_0 - \hat{x}|} \leq K^{k+1}.$$

En passant à la limite quand k tend vers $+\infty$ on obtient $|x_{k+1} - \hat{x}|$ tend vers zéro.

□

Il est important de disposer d'un critère pratique assurant qu'une fonction φ est contractante stricte. Pour cela, rappelons quelques définitions.

Théorème 1.4. Si $\varphi(x) : [a; b] \rightarrow [a; b]$ est de classe $\mathcal{C}^1([a; b])$ et si $|\varphi'(x)| < 1$ pour tout $x \in [a; b]$ alors la condition de contraction stricte est satisfaite avec $K = \max_{[a; b]} |\varphi'(x)|$.

Proposition 1.2. Soit $\hat{x}$ un point fixe d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^{p+1}$ pour un entier $p \geq 1$ dans un intervalle $[a; b]$ contenant $\hat{x}$. Si $\varphi^i(x) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$ et $\varphi^{p+1}(x) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction d'itération φ est d'ordre $p + 1$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \hat{x}|}{|(x_{k+1} - \hat{x})^{p+1}|} = \frac{\varphi^{p+1}(x)}{(p+1)!}.$$

Remarque 1.4. Il est clair qu'une convergence est d'autant plus rapide que son ordre est grand. En effet si $|x_k - \hat{x}|$ est petit $|x_k - \hat{x}|^2$ est encore plus petit...

Remarque 1.5. En particulier on a :

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (K^{n+p-1} + K^{n+p-2} + \cdots + K^n)|x_1 - x_0| \\ &\leq K^n \frac{1 - K^p}{1 - K} |x_1 - x_0| \text{ or } 0 < 1 - K^p \leq 1 \\ &\leq \frac{K^n}{1 - K} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

CHAPITRE 1. EQUATIONS NON LINÉAIRES

faisons tendre p vers l'infini, on obtient :

$$|\hat{x} - x_n| \leq \frac{K^n}{1 - K} |x_1 - x_0|,$$

et que $\frac{K^n}{1 - K}$ est une estimation de l'erreur entre la solution $\hat{x}$ et le n -ième itéré de la suite x_n . Donc plus K est proche de 0, plus $\hat{x}$ est proche de x_n .

Remarque 1.6. La convergence d'une méthode de points fixes est également assujettie au choix de la valeur initiale x_0 . En effet, un mauvais choix de x_0 peut résulter en un algorithme divergent même si les conditions du théorème 1.3 sont respectées.

Cela nous amène à définir le bassin d'attraction d'une racine $\hat{x}$.

Définition 1.7. Le bassin d'attraction de la racine $\hat{x}$ pour la méthode de points fixes $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ est l'ensemble des valeurs initiales x_0 pour lesquelles x_k tend vers $\hat{x}$ lorsque k tend vers l'infini.

Définition 1.8. Un point fixe $\hat{x}$ de la fonction $\varphi(x)$ est dit attractif si

$$|\varphi'(\hat{x})| \leq 1$$

et répulsif si

$$|\varphi'(\hat{x})| > 1$$

le cas où $|\varphi'(\hat{x})| = 1$ est indéterminé.

1.9.2 Méthode de Newton

Revenons un instant à la méthode du point fixe. D'après la formule de Taylor à l'ordre 2, on a, en supposant φ suffisamment régulière :

$$x_{k+1} - \hat{x} = \varphi(x_k) - \varphi(\hat{x}) = (x_k - \hat{x})\varphi'(\hat{x}) + \frac{1}{2}(x_k - \hat{x})^2\varphi''(\hat{x})(\xi_n)$$

où $\xi_n \in [x_k; \hat{x}]$. Pour k grand on a donc

$$x_{k+1} - \hat{x} \approx (x_k - \hat{x})\varphi'(\hat{x})$$

et la vitesse de convergence sera d'autant plus grande que $\varphi'(\hat{x})$ est plus petit. Le cas le plus favorable est celui où $\varphi'(\hat{x}) = 0$.

Si M_2 est un majorant de $\varphi''(x)$ sur $[a; b]$, on a alors,

$$|x_{k+1} - \hat{x}| \leq \frac{M_2}{2} |x_k - \hat{x}|$$

CHAPITRE 1. EQUATIONS NON LINÉAIRES

La convergence est alors au moins d'ordre 2 !

Si on revient à l'algorithme de Newton, on voit qu'il s'agit en fait d'un algorithme de point fixe pour la fonction $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Théorème 1.5. Soit f deux fois continument différentiable sur un intervalle ouvert de centre $\hat{x}$ vérifiant

$$f(\hat{x}) = 0 \text{ et } f'(\hat{x}) \neq 0$$

Alors, si x_0 est choisi assez près de $\hat{x}$, la méthode de Newton :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \forall k$$

produit une suite x_k convergeant au moins quadratiquement vers $\hat{x}$.

1.9.3 Méthode de la sécante

Théorème 1.6. Soit f deux fois continument différentiable sur un intervalle ouvert de centre $\hat{x}$ vérifiant

$$f(\hat{x}) = 0 \text{ et } f'(\hat{x}) \neq 0$$

Alors, si x_0 et x_1 sont choisis assez près de $\hat{x}$, l'algorithme de la sécante :

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \forall k$$

converge vers $\hat{x}$ et la convergence est au moins d'ordre $p = 1,618\dots$.

1.10 Résumés

1.10.1 Méthode de la dichotomie :

[suite d'intervalles encadrant la racine]

1. $[a_0, b_0] = [a, b]$.
2. $[a_n, b_n](\text{connu}) \Rightarrow w = \frac{(a_n + b_n)}{2}$.
3. — $f(a_n) \cdot f(w) < 0 \Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, w]$
— $f(a_n) \cdot f(w) > 0 \Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] = [w, b_n]$
— $f(a_n) \cdot f(w) = 0 \Rightarrow w = \text{racine}$

4. **Avantages :**

- Convergence certaine vers la racine (si elle est unique sur l'intervalle), si f est continue.
 - Pour une précision ε , il faut faire n itération avec $n > \ln \frac{b-a}{\ln 2}$ (car l'intervalle après n itérations est de longueur $\frac{b-a}{2^n}$).
5. **Inconvénients :**
- Convergence linéaire (lente).
 - Nécessité du changement de signe sur l'intervalle.

1.10.2 Méthode de la sécante

[suite de valeurs tendant vers racine]

1. Fixer x_0 et x_1
2. Calculer

$$x_{n+2} = x_{n+1} - f(x_{n+1}) \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

3. **Avantages :**
 - Pour une fonction à un seul zéro peu d'hypothèses de départ.
 - Convergence rapide (pour racines simples, avec bon choix de x_0 et x_1)
4. **Inconvénients :**
 - Lente convergence.
 - Manque de précision pour une racine multiple.
 - Risque d'une division par zéro.

1.10.3 Méthode du point fixe / d'itération

1. Choisir x_1
2. Calculer

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

3. Choisir $g(x)$ tel que $x = g(x)$.
4. **Avantages :** Facile à mettre en oeuvre, $g(x)$ qui converge rapidement n'est souvent pas trop difficile trouver.
5. **Inconvénients :**
 - Bien choisir $g(x)$, tel que $g(x) = x$. Il faut parfois différents $g(x)$ pour trouver différentes racines d'une même équation.
 - Convergence si $|g'(x_0)| < 1$ (vérifier graphiquement si graphe de $g'(x) < 1$ pente $y = x$). (divergence si $g(x)$ pas bonne)
 - Convergence lente (si $g(x)$ est valable).