OPTIMISATION LINEAIRE

INTRODUCTION GENERALE

La recherche opérationnelle peut se définir comme la mise en oeuvre de méthodes scientifiques essentiellement mathématique en vue de prendre les meilleures décisions possibles.

La recherche opérationnelle exploite les connaissances, qu'on peut classer en 4 (quatre) catégories

- les mathématique appliquées
- l'informatique
- les modèles métiers

Sous thème de mathématiques appliqués nous regroupons les méthodes qui constitues la boite à outils d'un expère en recherche opérationnelle.

Chapitre 1 : Formulation d'un programme linéaire

1-) Définition et notation

La programmation linéaire ou programme est le nom donné au problème mathématique d'optimisation. Il s'agit de rechercher l'optimum d'une fonction de variable sous des contraintes (équation ou inéquation).

Le problème le plus simple en programmation mathématique est la programmation linéaire (programme linéaire). Il consiste à optimiser une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

2-) Notation

$$\text{Min (Max) } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq (\leq)\, b_i \quad i = 1, \ldots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = m_1+1, \ldots, m \end{array}\right\} (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \quad (3)$$

(1) Fonction objectif ou économique

(2) les vraies contraintes ou contraintes structurelles

(3) Contrainte relative aux signes des variables ou contrainte de restriction.

Exemple 1

Une entreprise fabrique deux produits A et B en utilisant une machine M et deux Matières première P et Q. On dispose chaque jour de 8h de M, de 10kg de P et 36 kg de Q.
On suppose que la production d'une unité de A nécessite 2kg de P, 9kg de Q et utilise la machine M pendant 1h de temps.
la production d'une unité de B necessite 2k de P, 4kg de Q et utilise la machine M durant 2h temps.
les profits realisés sont: 50 F pour A et 60 F pour B. l'objectif que poursuit l'entreprise est de Maximiser les profits qu'elle pourra tirer chaque jour en utilisant au mieux ses ressources.
Modeliser le travail à faire sous la forme de programme linéaire.

Correction Exemple 1

1-) Nomination des Variables decisionnelle
x_1 : quantité de A à produire
x_2 : quantité de B à produire

2-) Determinons la fonction objectives
$Max(Z) = 50x_1 + 60x_2$

3-) Identification des Contraintes
* Contrainte structurelle

- Contrainte liée a P : $2x_1 + 2x_2 \leq 10$
- Contrainte liée a Q : $9x_1 + 4x_2 \leq 36$
- Contrainte liée à l'utilisation de M :
$x_1 + 2x_2 \leq 8$

* Contrainte de restriction : $x_1, x_2 \geq 0$

le problème linéaire est :

$$Max(Z) = 50x_1 + 60x_2$$

$$S.C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 2

Une eleveur souhaite que son troupeau Consomme la plus faible ration quotidienne de trois (3) elements nutritives. Les exigences quotidiennes sont deux :
16 pour A ; 12 pour B et 18 pour C.
l'eleveur achete deux types d'aliments P et Q.
- une unité de P Comprend : 2 unité de A ; 1 unité de B et 8 unité de C et Coute 20 F
- une unité de Q Comprend : 1 unité de A ; 1 unité de B ; 3 unité de C et coute 40 F

l'éleveur Cherche la Combinaison Couteuse de P et Q qui respecteront l'exigence de consommation minimale

Correction Exemple 2

1-) Nomination des Variable decisionnelles
x_1 : quantité de P à Consommer
x_2 : quantité de Q à Consommer

2-) Determinons la fonction objectives
$Min(Z) = 20x_1 + 40x_2$

3) Identification des Contraintes
* Contrainte structurelle

- Contrainte liée à A : $2x_1 + x_2 \geq 16$
- Contrainte liée à B : $x_1 + x_2 \geq 12$
- Contrainte liée à C : $8x_1 + 3x_2 \geq 18$

* Contrainte de restriction $x_1, x_2 \geq 0$

le problème linéaire est :

$$\mathrm{Min}(Z) = 20x_1 + 40x_2$$

$$\text{S.C} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1 + x_2 \geq 12 \\ 8x_1 + 3x_2 \geq 18 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Exemple 3

Vous voulez apporter à votre grand-mère un bouquet de 9 Marguerites, 6 tulipes et 12 Roses. Mais vous vous y prenez trop tard. Tous les fleuristes sont fermés et il ne reste plus qu'un marchand de fleurs dans le métro, qui propose deux types de bouquet et qui ne vend pas les fleurs à l'unité.

- le bouquet 1 est composé de 3 Marguerites, 1 tulipe, 1 Rose et coûte 1 F
- le bouquet 2 est composé de 1 Marguerites, 1 tulipe, 4 Roses et coûte 2 F.

Écrire le programme correspondant à la minimisation du coût d'achat des bouquet qui vous permettra de composer le bouquet de votre grand-mère.

Correction Exemple 3

EXEMPLE 3

- Nomination des variables de decision

x_1 : La quantité du bouquet 1 à prendre

x_2 : " " " " 2 " "

- Determinat° de la fonction objectif

$$\min(Z) = x_1 + 2x_2.$$

- Identification des contraintes

  * Les contraintes structurelles

    - Liés aux marguerites : $3x_1 + x_2 \geq 9$
    - Liés aux tulipes : $x_1 + x_2 \geq 6$
    - Liés aux roses : $x_1 + 4x_2 \geq 12$

  * Les contraintes de restriction : $x_1, x_2 \geq 0$

Le programme linéaire du problème est :

$$\min(Z) = x_1 + 2x_2$$

$$\text{sous-contraintes} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

CHAPITRE 2 : RESOLUTION DES PROGRAMMES LINEAIRES

I- Methode graphique.

Elle est l'une des premières methode resolvant des programmes linéaire.

On sait que l'ensemble des solutions realisables est un polyèdre convexe fermé. Il peut être :

- Vide
- Non-vide et borné
- Non-vide et non-bornée.

La methode graphique est fondée sur le théorème suivant qui est fondamental en P.L

Theoreme : Si un problème en P.L possède une solution ~~so~~ optimale, alors (au moins) un sommet du polyèdre des solutions realisable est une solution optimale.

La methode graphique ~~q~~ car elle ~~ne~~ s'applique qu'à des PL ou le nombre de variable est faible.

II- Methode simplexe

Forme standart

Un PL est sous forme standard si les vrais contraintes sont des egalités et les variables sont "obligés" d'être non-negatif.

Forme canonique

Un PL est sous forme canonique si les ~~co~~ vraies contraintes sont des inégalités et les variables sont abstreint à être non-négatifs.

Pour les problèmes de minimisation on a :

$$\text{Min}(Z) = \sum_{j=i}^{n} C_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & , i = 1, \dots, n \\ x_j \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

inverse pour Max(Z)

Forme canonique par rapport à une base réalisable

Écrire un ~~p~~ P.L sous forme canonique par rapport à une base réalisable, ~~x~~ c'est écrire sa fonction-objectif ainsi que ses variables de base en fonction des seules variables hors base.

En d'autres termes, il s'agit d'écrire la fonction objectif ~~et~~ à l'aide des seuls variables hors base et transformer les systèmes des vrais contraintes en un système équivalent dans lequel chaque variable de base ~~q~~ n'intervient que dans une seule équation et dans celle-ci sont coefficient est égal à "1". On dira alors que cette dernière est la variable de base associée à cette eq.

Exemple

Programme linéaire

$$\min(Z) = x_1 + 2x_2$$

$$SC \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \ , \ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Forme Standard

$$\min(Z) = x_1 + 2x_2$$

$$SC \begin{cases} 3x_1 + x_2 - e_1 = 9 \\ x_1 + x_2 - e_2 = 6 \\ x_1 + 4x_2 - e_3 = 12 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max(Z) = 6x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 \geq 10 \\ x \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\max(Z) = 6x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - e_1 = 10 \\ x + e_2 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max(Z) = 50x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\max(Z) = 50x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + e_1 = 10 \\ 9x_1 + 4x_2 + e_2 = 36 \\ x_1 + 2x_2 + e_3 = 8 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

ALGORITHME PRIMAL SIMPLEXE

On suppose qu'on dispose d'une base, de départ, réalisable B. Soit I et J respectivement les ~~ve~~ ensembles des indices des variables

Problème de minimisation

1- Tester $\hat{C}$

a. Si $\hat{C} \geq 0$, stop "La base B est optimale"

b. S'il existe $k \in J$ tels que $\hat{C} \leq 0$ avec $\hat{A}_k \leq 0$, stop "Le problème est non-borné, c'est-à-dire la valeur optimale est infinie"

c. Autrement effectuer un changement de base

2- Changement de base

a. Test d'entrée

Soit $k \in J$ tels que $\hat{C}_k = \min [\hat{C}_j \quad j \in J : \hat{C}_j < 0]$. La variable correspondante x_k rentre dans la base : on l'appelle variable rentrante

b. Test de sortie

Soit l tels que : $$\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min \left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} : i \in I, \hat{a}_{ik} > 0 \right]$$

Problème de maximisation

1- Tester $\hat{C}$

a- Si $\hat{C} \leq 0$, stop "La base B est optimale" b- S'il existe $k \in J$ tels que $\hat{C}_k > 0$ avec $\hat{A}_k \leq 0$, stop " le problème est non-borné càd la valeur optimale est infinie "

c - Autrement effectuer un changement de base

2- Changement de base

a. Test d'entrée

Soit $k \in J$ telsque $\hat{C}_k = \max [\hat{C}_j : j \in J, \hat{C}_j > 0]$

La variable correspondante x_k, rentre dans la base les autres instructions restent valables

METHODE DES TABLEAUX

	$x_j, j \in J$	
$x_i, i \in I$	$\hat{A} = (a_{ij})$	$\hat{b}$
	$\hat{C}$	$-\hat{Z}$

1- Définition

La méthode des tableaux consiste à écrire les tableaux simplexes relatifs aux bases rencontrées dans la résolution du PL à l'aide de l'algo simplexe.

LES RÈGLES DU TABLEAU SIMPLEXE

I. Permuter les variables sortantes et entrantes.

II - Remplacer le pivot par son inverse.

III - Diviser les autres élmts de la ligne du pivot par le pivot

IV - Diviser les " " de la colonne du pivot par le pivot et changer de signe.

V - Pour tous les autres élts ~~[illegible]~~, appliquer la méthode dite la règle du rectangle.

Si une ligne intersecte la colonne du pivot pour un zero, la ligne reste inchangée.
Si une colonne intersecte la ligne du pivot par un zero, la colonne reste inchangée.

Les variables hors-bases sont nuls

Le pivot est toujours positifs dans l'algo primal simplexe.

Règle du Rectangle

Soit $l \in I$ la ligne du pivot et $k \in J$ la colonne du pivot.
Pour $i \in I - l$ et $j \in J - k$, l'élément $\hat{a}_{ij}$ est remplacé par $\hat{a}_{ij} - \frac{\hat{a}_{ik}\hat{a}_{lj}}{\hat{a}_{lk}}$

Cette règle s'applique à tous les elts du tableau

Exemple.

$$\min z = -3x_1 + 2x_2$$

$$sc : \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 2.

$$\max z = 6x_1 + 5x_2$$

$$sc : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exo (Modelisation de A et B)

METHODE DES VARIABLES ARTIFICIELS OU LA METHODE DES DEUX FACES

L'objectif de cette methode est de générer une base réalisable du problème initial si elle existe ou de mettre en evidence l'impossibilite du problème. Elle consiste à pénaliser le PL initial en introduisant des ~~de~~ élts artificiels (variables) de sorte à appliquer la methode simplexe

1- Contraintes du problème penalysé

Une variable artificielle $x_i^a \geq 0$ est ajoutée au 1r membre de chaque contrainte.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i^a = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

2- Fonction économique penalysée

On penalyse la fonction economiq de la façon suivante

$$\text{Min } Z^a = \sum_{i=1} x_i^a$$

3- Programme linéaire penalysé ou pg auxiliaire

$$\min Z^a = \sum_{i=1}^{m} x_i^a$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i^a = b_i \quad , \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0 \quad , \quad x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \text{Min } Z^a = \sum_{i=1}^{m} x_i^a$$

$$\begin{cases} A x_j + I_m x_i^a = (B) \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0 \; ; \; x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

4- Mise en oeuvre de la méthode des variables artificielle

Elle présente 2 cas:

- L'algo montre que le prbl pénalisé ne propose pas de solut° optimale ($Z^* = \infty$) ; dans ce cas, les variables artificielles sont nécessairement nuls et le prbl initial est lui aussi non borné.

- L'algo défini une solut. optimale fini du prbl pénalisé. Alors :
  - S'il existe une variable artificielle non nul dans cette solution alors il est impossible d'annuler toutes les variables artificielles. Dans ce cas le prbl initial est impossible.
  - Si toutes les var artificielles sont nulles alors cette solut est une solution ~~optimale~~ réalisable de base optimale du PL initial.

REMARQUE :

- Il n'est pas tjr nécessaire d'introduire m var artificielles. Il suffit d'ajouter suffisament pour créer une solution réalisable de base initiale.
- Dans la méthode des Tab. lorsqu'une variable sort des variables de base c'est certain qu'elle ne peut plus y revenir. La colonne devient superflu et peut être supprimée

CHAPITRE 3 : DUALITÉ EN P.L

Étant donné un PL, on peut tjrs lui associer un autre prgme linéaire appellé programme dual du programme initial : dans ce cas le prgme initial est appelé programme initial. Ces 2 prgme sont appelé programme Duaux ou Duals ou en dualité

I- Définition

Étant donné un prog. linéaire sous la forme generale (P) ci-dessous :

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(P) \quad \text{S.C} : \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i , & i = 1, \dots, p \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , & i = p+1, \dots, m \\ x_j \geq 0 , & j = 1, \dots, q \\ x_j \text{ libre} , & j = q, \dots, n. \end{cases}$$

on peut tjrs lui associé un autre prog (D) appelé prgm dual de (P)

$$\text{Max } W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$(D) \quad \text{S.C.} \begin{cases} y_i \geq 0 , & i = 1, \dots, p \\ y_i \text{ libre} , & i = p, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j , & j = 1, \dots, q \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j , & j = q+1, \dots, n \end{cases}$$

Cette def est caractérisé par les règles suivants:

- à un prgm. primal de minimisation (de maximisation) correspon d un prgm dual.
- à toute vrai contrainte primal correspond une variable dual : si la vrai contrainte est une inegalité, la variable dual est soumise à une contrainte de non-negativité. Si la contrainte est une egalité, la variable dual est libre (càd ~~qu'elle~~ quelconque

Par convention, en dualité, les contraintes d'inegalité d'un problème de minimisation (maximisatº) sont tjrs considéré de la forme " $\geq$ " (" $\leq$ ")

- à toutes variables primales correspond une contrainte dual : si la variable primale est soumise à un contrainte de non-negativité, la contrainte duale est une inégalité. Si la variable primale est libre alors la contrainte est une egalité.
- Les coef. de fonction objectif du primal deviennent les second membre ~~de~~ ~~pro~~ des contraintes vrais et les seconds membre ~~de~~ des vrais contraintes ~~de~~ primal deviennent les coef de la f. objectif dual.
- La matrice des vrais contraintes du dual est la transposée ~~des~~ ~~vrais~~ de la matricee des vrais contraints du ~~de~~ primal.

On à la propriété suivante

~~Dm~~

II - Propention

L'operation de la dualite est involutible càd le dual du dual est egal au primale. ~~A~~
En pratique, pour determiner un dual, on peut utiliser

les règles de TF suivant permettant de déterminer le type de variables et de contraintes

PROPRIETES DE DUALITE

Primal (Dual)	Dual (Primal)
Fonction-objectif à max	Fonction-objectif à minimiser
i^{eme} contrainte $\geq$	i^{eme} variable ≤ 0
" " $\leq$	" " ≥ 0
" " $=$	" " $\gtrless 0$
j^{eme} variable ≥ 0	j^{eme} contrainte $\geq$
" " ≤ 0	" " $\leq$
" " $\gtrless 0$	" " $=$

EXEMPLE :

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$sc \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \max W = 5y_1 + 9y_2$$
$$sc \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ y_1 \gtrless 0, \ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.4 Algorithme dual Simplexe

On considère le programme linéaire :

$$Z^* = \min\ Z = cx \qquad \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \qquad (PL)$$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; $c \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ et $b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$
On suppose que $rg(A) = m < n$.

On a la définition suivante :

Définition 3.4.1 *Soit B une base de (PL). Cette base est dite duale réalisable si $\widehat{c} = c - c_B B^{-1} A \geq 0$.*
Par opposition, B est primale réalisable si $\widehat{b} = B^{-1} b \geq 0$.

Remarque 3.4.1 *1) Pour un problème de maximisation une base B est dite duale réalisable si $\widehat{c} = c - c_B B^{-1} A \leq 0$. Elle est primale réalisable si $\widehat{b} = B^{-1} b \geq 0$.*
2) Une base B qui est à la fois primale et duale réalisable est optimale.

L'algorithme dual simplexe contient deux phases :

Phase 1 : Procédure d'initialisation
On détermine une première base duale réalisable. Si cette procédure échoue, cela signifie qu'une telle base n'exite pas. C'est-à-dire que le polyèdre de la solution réalisable du dual est, vide, et donc (PL) est impossible soit non borné $Z^* = -\infty$.

Phase 2 : Procédure itérative

1) On considère B une base, on note I (*resp.* J) l'ensemble des indices des variables de base (resp. hors-base). On écrit le programme linéaire sous forme canonique par rapport à B. On dispose donc $\widehat{A} = B^{-1}A$, $\widehat{c} = c - c_B B^{-1} A$ et $\widehat{b} = B^{-1}b$.

Si B est duale réalisable alors :

2) Tester $\widehat{b} = B^{-1}b$.

a) Si $\widehat{b} \geq 0$, stop : (la solution courante est optimale).

b) Si $\exists i \in I$ tel que $\widehat{b}_i < 0$ et $\widehat{a}_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J$, stop : (le problème (PL) est impossible).

c) Autrement, on effectue un changement de base.

3) Changement de base

a) **Test de sortie :** Soit $l \in I$ telle que

$$\widehat{b}_l = \min_i [\widehat{b}_i : i \in I, \ b_i < 0].$$

La variable correspondante x_l sort de la base.

b) **Test d'entrée :** Soit $k \in J$ telle que

$$\left|\frac{\hat{c}_k}{\hat{a}_{lk}}\right| = \min \left[\left|\frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{lj}}\right| : \ j \in J, \ \hat{a}_{lj} < 0\right].$$

La variable x_k rentre dans la base.

c) On pose $I := I - l + k$ et $J := J + k + l$; aller à 1).

Remarque 3.4.2 *Dans le cas d'un problème de maximisation cet algorithme reste valable*

EXEMPLE

$$\min\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard de (P_1) est :

$$\min\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

L'ensemble $I = \{4,5\}$ est une base évidente. La forme canonique par rapport à I est :

$$\min\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = -5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

On a $\hat{c} \geq 0$ donc I est une base duale réalisable.

On a les tableaux simplexes successifs suivants.

TS1

	x_1	x_2	x_3		
x_4	-1	2	-1	-6	$\leftarrow$
x_5	-1	-3	1	-5	
	8	6	2	0	
			$\uparrow$		

TS2

	x_1	x_2	x_4		
x_3	1	-2	-1	6	
x_5	-2	-1	1	-11	$\leftarrow$
	6	10	2	-12	
	$\uparrow$				

TS3

	x_5	x_2	x_4	
x_3	1/2	-5/2	-1/2	1/2
x_1	-1/2	1/2	-1/2	11/2
	3	7	5	-45

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée une solution optimale du problème est $x^* = (\frac{11}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 45$.

Exemple 3.4.2

$$\max\ Z = -5x_1 - 21x_3 \quad 1$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard est :

$$\max\ Z = -5x_1 - 21x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

L'ensemble $I = \{4, 5\}$ est une base évidente. La forme canonique par rapport à I est :

$$\max\ Z = -5x_1 - 21x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

On a $\hat{c} \leq 0$ donc I est une base duale réalisable.

On a les tableaux simplexes successifs suivants.

TS1

	x_1	x_2	x_3		
x_4	-1	1	-6	-2	$\leftarrow$
x_5	-1	-1	-2	-1	
	-5	0	-21	0	
			$\uparrow$		

TS2

	x_1	x_2	x_4		
x_3	1/6	-1/6	-1/6	1/3	
x_5	-2/3	-4/3	-1/3	-1/3	$\leftarrow$
	-3/2	-21/6	-21/6	7	
	$\uparrow$				

TS3

	x_5	x_2	x_4	
x_3	1/2	-1/2	-1/4	1/4
x_1	-3/2	2	1/2	1/2
	-9/4	-1/2	-11/4	31/4

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée une solution optimale du problème est $x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = -\frac{31}{4}$.