
**COURS
DE
PROBABILITÉS**

Table des matières

1.	Cardinal d'un ensemble fini	2
2.	Principes de comptage	2
2.1.	Principe additif	2
2.2.	Principe multiplicatif	3
3.	Arrangements	3
3.1.	Arrangements avec répétition	3
3.2.	Arrangements sans répétition	4
3.3.	Permutation	4
4.	Combinaisons	5
4.1.	Combinaison sans répétition	5
4.2.	Binôme de Newton	5
4.3.	Combinaison avec répétition	5
5.	Quel modèle choisir ?	6
1	Espace probabilisé	8
1.	Expérience aléatoire	8
2.	Probabilité	10
3.	Modélisation d'une expérience aléatoire	14
4.	Probabilités conditionnelles, indépendance	14
4.1.	Probabilité conditionnelle	14
4.2.	Indépendance	16
2	Variables aléatoires réelles	18
1.	Généralités	18
2.	Variables aléatoires réelles usuelles	20
2.1.	Variables aléatoires discrètes usuelles	20
2.2.	Variables aléatoires absolument continues usuelles	22
3	Fonctions génératrice-Fonction caractéristique	24
1.	Fonction génératrice	24
1.1.	Fonction génératrice de moments d'une v.a. entière ou continue	25

2.	Fonction caractéristique	26
4	COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES	27
1.	Généralités	27
2.	Couple de variables aléatoires discrètes	28
3.	Couple de variables aléatoires continues à densité	29
4.	Conditionnement et indépendance	29
5.	Théorème de transfert	30
5	CONVERGENCE DE SUITE DE VARIABLES ALEATOIRES	31
1.	Convergence en loi	31
2.	Convergence en probabilité	32
3.	Convergence en loi et convergence en probabilité	32
3.1.	Loi des grands nombres	32
3.2.	Théorème central limite (TCL)	33

PARTIE I : DENOMBREMENT

Denombrement

Le dénombrement consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini. Ce chapitre fournit des méthodes de dénombrement particulièrement utiles en probabilités.

1. Cardinal d'un ensemble fini

Définition 0.1. Un ensemble E non vide est dit fini s'il existe un entier n et une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur E . Lorsqu'il existe, l'entier n est unique et est noté $\text{Card}(E)$. C'est le cardinal ou le nombre d'éléments de E

Définition 0.2. Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de \mathbb{N} sur E . Un ensemble E est dit infini non dénombrable s'il n'est ni fini, ni dénombrable.

Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E .

Proposition 0.1. 1. Si \bar{A} est le complémentaire de A dans E alors

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

2. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

3. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

4. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$

2. Principes de comptage

2.1. Principe additif

Soit E un ensemble fini et A_1, A_2, \dots, A_n des parties de E constituant une partition de E , c'est dire,

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$
- $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Alors nous avons $\text{Card}(E) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$.

Lorsqu'on veut dénombrer un ensemble fini E , on peut trouver une partition A_1, A_2, \dots, A_n de cet ensemble, où les cardinaux des ensembles A_i sont plus faciles déterminer. Il ne reste alors qu'à faire la somme des différents cardinaux obtenus.

Exemple 1. *J'ai dans ma bibliothèque 50 livres de mathématiques en français et 40 livres de mathématiques en anglais (et aucun dans une autre langue). Je peux donc y choisir un livre de mathématiques de $50 + 40 = 90$ façons différentes.*

2.2. Principe multiplicatif

Si une situation correspond p choix successifs ayant chacun respectivement n_1, n_2, \dots, n_p possibilités alors le nombre total de possibilités est

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p.$$

3. Arrangements

3.1. Arrangements avec répétition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini n éléments.

Définition 0.3. *Un arrangement avec répétition de p éléments (ou p -liste) de E est une partie ordonnée de p éléments de E non nécessairement distincts. Cela revient à prendre p objets dans E en tenant compte de l'ordre dans lequel on les choisit, et en pouvant prendre plusieurs fois le même.*

Proposition 0.2. *Le nombre d'arrangements avec répétition de p objets parmi n est n^p .*

En effet, on a n possibilités pour chaque place, soit $n \times n \times \dots \times n = n^p$ possibilités d'arrangement d'après le principe multiplicatif.

Exemple 2. *Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 08 ?*

Un numéro de téléphone est constitué de 8 chiffres. Les 6 numéros qui suivent le "08" sont des arrangements avec répétitions de 6 éléments de l'ensemble

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}.$$

Il y en a $10^6 = 1000000$ possibilités.

Exemple 3. *Tirer successivement p boules, en les remettant chaque fois dans l'urne, et en tenant compte de l'ordre de sortie des numéros constitue un arrangement avec répétition de p éléments parmi n . Il y a n^p possibilités.*

3.2. Arrangements sans répétition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini n éléments.

Définition 0.4. *Un arrangement de p éléments de E est une partie ordonnée de p éléments (distincts) de E . Cela revient prendre p objets distincts dans E en tenant compte de l'ordre dans lequel on les choisit.*

Proposition 0.3. *Le nombre d'arrangements de p objets parmi n est*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Nous avons n possibilités pour la première place, $n - 1$ possibilités pour la deuxième place, $n - 2$ possibilités pour la troisième place, ..., $(n - (p - 1))$ possibilités pour la dernière place. D'après le principe multiplicatif, le nombre total de possibilités est :

$$\begin{aligned} A_n^p &= n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - (p - 1)) \\ &= \frac{n!}{(n - p)!}. \end{aligned}$$

Exemple 4. Le tiercé. *Une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?*

Soit E l'ensemble des numéros des chevaux. On a $\text{Card}(E) = 20$. Un tiercé correspond un arrangement de 3 éléments de E , il y en a $A_{20}^3 = 6840$ possibilités.

Exemple 5. *Tirer successivement p boules sans remise en tenant compte de l'ordre de sortie des numéros constitue un arrangement de p éléments parmi n . Il y a A_n^p possibilités.*

3.3. Permutation

Soit E un ensemble fini n éléments.

Définition 0.5. *Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E . Cela revient prendre les n éléments de E en tenant compte de l'ordre dans lequel on les choisit.*

Proposition 0.4. *Le nombre de permutations d'un ensemble E n éléments est*

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1.$$

Nous avons n possibilités pour la première place, $n - 1$ possibilités pour la deuxième place, $n - 2$ possibilités pour la troisième place, ..., 1 possibilités pour la dernière place. D'après le principe multiplicatif, le nombre total de possibilités est :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1 = A_n^n$$

Exemple 6. De combien de façons peut-on répartir 7 personnes sur 7 chaises ?

Désignons par $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ les 7 personnes et posons

$$E = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}.$$

Une répartition peut se voir comme une permutation de E , il y en a $7! = 5040$.

Exemple 7. Une urne contient n boules distinctes. Tirer successivement les n boules en tenant compte de l'ordre de sortie des boules constitue une permutation de n éléments. Il y a $n!$ possibilités.

4. Combinaisons

4.1. Combinaison sans répétition

Définition 0.6. Une combinaison de p éléments de E est une partie non ordonnée de E formée de p éléments. Cela revient prendre p objets dans E sans tenir compte de l'ordre dans lequel on les choisit.

Proposition 0.5. Le nombre de combinaisons possibles de p objets pris parmi n est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Exemple 8. Quel est le nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.

Le nombre de comités possibles est le nombre de combinaisons de 3 personnes parmi 20, soit $C_{20}^3 = 1140$

Exemple 9. Tirer simultanément p boules parmi n constitue une combinaison de p éléments parmi n éléments. Il y a C_n^p possibilités.

4.2. Binôme de Newton

Proposition 0.6. Soient a et b deux nombres reals et n un entier naturel non nul, alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

4.3. Combinaison avec répétition

Définition 0.7. Une k -combinaison avec répétition d'un ensemble fini E de cardinal n , est une application f de E dans $\{0, 1, \dots, k\}$, telle que

$$\sum_{x \in E} f(x) = k.$$

Plus précisément, si $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors f vérifie

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = k.$$

f s'appelle aussi une combinaison de n éléments pris k à k .

Remarque 0.1. Cette application indique pour chaque élément de E le nombre de fois qu'il est choisi; et si l'application associe la valeur 0 à un élément de E , alors l'élément n'est pas choisi. De plus la somme des nombres de répétitions doit bien être égale à k , si nous voulons exactement k objets éventuellement répétés.

Théorème 0.1. Soit E un ensemble fini de cardinal n , ($n \in \mathbb{N}^*$). Alors l'ensemble $K_k(E)$ des k -combinaisons avec répétition de E est fini et son cardinal est égal à

$$\Gamma_n^k = C_{n+k-1}^k$$

qui est le nombre de k -combinaisons de $n + k - 1$ éléments

5. Quel modèle choisir ?

- Si l'énoncé contient le mot **successif**, il faut tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné. On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.
- Si l'énoncé contient les mots "**successif et avec remise**", cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété. Le modèle mathématique est la p -liste ou arrangement avec répétition.
- Si l'énoncé contient les mots **successif et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments). Le modèle mathématique est l'arrangement.
- Si l'énoncé contient le mot **simultanément**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance. Le modèle mathématique est la combinaison.

PARTIE II : PROBABILITÉ

Chapitre 1

Espace probabilisé

1. Expérience aléatoire

Activité 1. On lance un dé équilibré à 6 faces numérotés de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé après l'arrêt.

1. Quel est l'ensemble de résultats possibles ?
Peut-on prévoir avant le lancer les résultats possibles ?
2. Déterminer l'ensemble des résultats pairs.
3. Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "2" ?
4. Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "7" ?
5. Déterminer l'ensemble de résultats "obtenir un nombre inférieur 7 "
6. On considère les ensembles suivants :
 A est l'ensemble "obtenir un nombre au moins gal 4 "
 B est l'ensemble "obtenir un multiple de 2"
 C est l'ensemble "obtenir le chiffre 5"
 - (a) Déterminer l'ensemble "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins gal 4".
 - (b) Déterminer l'ensemble "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins gal 4".
 - (c) Déterminer l'ensemble "obtenir un multiple de 2 et le chiffre 5".

Correction de l'activité 1. On lance un dé équilibré de 6 faces numrotées de 1 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé après l'arrêt.

1. L'ensemble des résultats possibles appel univers des possibles est

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

On ne peut pas prévoir l'avance le résultat.

2. L'ensemble des résultats pairs est $\{2, 4, 6\}$

3. Nous avons une possibilité d'avoir le chiffre 2 est $\{2\}$.
4. Ce résultat est impossible.
5. L'ensemble des résultats "obtenir un nombre inférieur 7" est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
6. Nous avons $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{5\}$.
 - (a) On note D l'ensemble "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins égal 4" :
 $D = A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.
 - (b) On note E l'ensemble "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins égal 4".
 $E = A \cap B = \{4, 6\}$
 - (c) On note F l'ensemble "obtenir un multiple de 2 et le chiffre 5"
 Cet ensemble est $F = A \cap C = \emptyset$.

Définition 1.1. Une expérience \mathcal{E} est qualifiée d'aléatoire si on ne peut pas prévoir par avance son résultat mais on connaît l'ensemble de tous les résultats possible. Répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu des résultats différents.

Remarque 1.1. Avant toute expérimentation, on peut décrire l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire.

Définition 1.2. Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire. On appelle univers, et l'on note souvent Ω , l'ensemble des résultats possibles de \mathcal{E} . Si Ω est non vide. On notera $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . Dans toute la suite de ce chapitre, on supposera que Ω est fini.

Définition 1.3. On appelle événement associé à une expérience aléatoire, toute partie A de Ω .

- Remarque 1.2.**
1. L'événement $A = \Omega$ est appel événement certain. Il se réalise toujours.
 2. L'événement $A = \emptyset$ est appel événement impossible. Il ne se réalise jamais.
 3. L'événement $A = \{\omega\}$ constitué d'un seul élément de Ω est appel événement élémentaire.

Les événements étant des ensembles, on utilisera 3 opérateurs définies sur les ensembles :

- l'union ; l'événement $A \cup B$ se réalise si A se réalise ou B se réalise
- l'intersection ; $A \cap B$ se réalise si A se réalise et B se réalise
- le complémentaire ; \bar{A} se réalise si A ne réalise pas.

Application 1. Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire au hasard en notant nouveau sa couleur.

1. Déterminer l'univers des éventualités de cette expérience.
2. Citer un événement élémentaire et un événement non élémentaire

3. Soit A l'événement : "les deux boules sont de même couleur", B l'événement : "obtenir une boule bleue et une boule verte ", et C l'événement : "obtenir d'abord une boule rouge"

(a) Déterminer l'événement contraire de A

(b) Déterminer l'événement : " A et B "; " A et C " puis l'événement " A ou C ", Les événements A et B sont-ils incompatibles ?

Correction de l'exercice d'application 1. On note :

R ="la couleur de la boule tirée est rouge"

B ="la couleur de la boule tirée est bleue"

V ="la couleur de la boule tirée est verte"

1. L'événement élémentaire est un couple (C_1, C_2) où C_1 représente la couleur de la première boule tirée et C_2 la couleur de la deuxième. L'univers des possibles est

$$\Omega = \{(R, R), (R, V), (V, R), (R, B), (B, R), (V, V), (V, B), (B, V), (B, B)\}.$$

2. (R, V) est un événement élémentaire ; $\{(R, R), (R, V)\}$ est un événement non élémentaire.

3. Nous avons

$$A = \text{"les deux boules sont de même couleur"} = \{(R, R), (V, V), (B, B)\}$$

$$B = \text{"obtenir une boule bleue et une boule verte "} = \{(B, V), (V, B)\}$$

$$C = \text{"obtenir d'abord une boule rouge"} = \{(R, R), (R, V), (R, B)\}.$$

(a) L'événement contraire de A est

$$\bar{A} = \{(R, V), (V, R), (R, B), (B, R), (V, B), (B, V)\}.$$

(b) Nous avons :

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cap C = \{(R, R)\}$$

$$A \cup C = \{(R, R), (V, V), (B, B), (R, V), (R, B)\}$$

Les événements A et B sont incompatibles.

Définition 1.4. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de parties de Ω . Alors, le couple $(\Omega, (\Omega))$ est appelé espace probabilisable.

2. Probabilité

Activité 2. Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire en notant à nouveau sa couleur. Chaque boule a la même chance d'être tirée.

1. Quel est le nombre de résultats possibles?
2. Quelle est la fréquence d'apparition du couple (R, B) ?
3. Quelle est la fréquence d'apparition de chaque couple de l'univers.
Faire la somme de tous les résultats obtenus?
4. Quelle est la fréquence d'apparition de deux boules de même couleur?

Correction de l'activité 2. *Un sac contient trois boules de couleurs différentes; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire en notant nouveau sa couleur. Chaque boule a la même chance d'être tirée.*

1. $\text{card}(\Omega) = 9$.
2. La fréquence d'apparition du couple (R, B) est $\frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{9}$.
3. La fréquence d'apparition de chaque couple de l'univers est $\frac{1}{9}$. De plus,

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

4. Tirer deux boules de même couleur revient tirer un élément de

$$A = \{(R, R), (V, V), (B, B)\}.$$

La fréquence d'apparition de deux boules de même couleur est $\frac{3}{9}$.

Définition 1.5. *On appelle probabilité sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire \mathcal{E} l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- pour tout sous-ensemble $\{A_1, \dots, A_n, \dots\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ deux deux disjoints, nous

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Propriété 1.1. 1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

2. si $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

3. $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$

Activité 3. On lance un dé truqué numéroté de 1 à 6 tel que $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = \frac{1}{7}$ et $P_6 = \frac{2}{7}$ où P_i est la probabilité d'apparition du numéro i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Soit A l'événement "obtenir un nombre au moins égale à 4" et B ="obtenir un multiple de 2 "

1. Calculer la probabilité des événements A et B .
2. Déterminer les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$
3. Comparer $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$
4. (a) Calculer la probabilité de l'événement $C =$ "obtenir un nombre impair "
- (b) Calculer $\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$

Correction de l'activité 3. Soit A l'événement "obtenir un nombre au moins gal 4" et $B =$ "obtenir un multiple de 2 "

1. Nous avons $A = \{4, 5, 6\} = \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$. Les événements $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$ tant deux deux disjoints, nous obtenons

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = P_4 + P_5 + P_6 = \frac{4}{7}$$

De même, nous avons $B = \{2, 4, 6\}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

2. $A \cap B = \{4, 6\}$ et $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ et

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{7} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{7}.$$

3. $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B)$

4. (a) $C = \{1, 3, 5\}$

$$(b) \mathbb{P}(C) = \frac{3}{7} \text{ et } \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1.$$

Activité 4. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.45$; $\mathbb{P}(B) = 0.60$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.80$ calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(\bar{A})$

Correction de l'activité 4. 1. Nous avons

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.25.$$

2. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0.55$

Remarque 1.3. Une expérience se déroule dans les conditions équiprobables si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser. Dans ce cas, nous avons pour tout événement A ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} \sum_{\omega \in A} 1 \\ &= \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \\ \mathbb{P}(A) &= \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}. \end{aligned}$$

Exercice de fixation 1. Dans un jeu de 32 cartes il y'a 4 As, on tire au hasard 4 cartes de ce jeu.

1. Calculer la probabilité d'obtenir 2 As.
2. Quelle est la probabilité de n'avoir aucun As ?
3. Quelle est la probabilité de tirer au moins un As ?

Correction de l'exercice de fixation 1. Dans un jeu de 32 cartes il y'a 4 As, on tire au hasard 4 cartes de ce jeu. Le nombre total de possibilités est le nombre de combinaisons de 4 cartes parmi 32 :

$$\text{card}(\Omega) = C_{32}^4.$$

1. Soit l'événement $A = \text{"obtenir 2 As dans le tirage"}$. Nous avons :

- C_4^2 possibilités de tirer 2 As parmi 4
- C_{28}^2 possibilités de tirer les 2 cartes restantes parmi 28.

D'après le principe multiplicatif, le nombre de possibilités d'obtenir 2 As dans le tirage est

$$\text{card}(A) = C_4^2 \times C_{28}^2.$$

La probabilité d'obtenir 2 As est donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_4^2 \times C_{28}^2}{C_{32}^4}.$$

2. Soit l'événement $B = \text{"n'avoir aucun As"}$. Nous avons C_{28}^4 possibilités d'obtenir un tirage sans aucun As, soit $\text{card}(B) = C_{28}^4$. La probabilité de n'avoir aucun As est donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}.$$

3. Soit l'événement $C = \text{"avoir au moins un As"}$. L'événement contraire de C est B . Ainsi, nous obtenons

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}.$$

Deuxième méthode : L'événement $C = \cup_{i=1}^4 C_i$ o l'événement $C_i = \text{"avoir exactement } i \text{ As avec } i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Nous avons

- C_4^i possibilités de tirer i As parmi 4
- C_{28}^{4-i} possibilités de tirer les $4 - i$ cartes restantes parmi 28.

D'après le principe multiplicatif, le nombre de possibilités d'obtenir exactement i As dans le tirage est

$$\text{card}(A) = C_4^i \times C_{28}^{4-i}.$$

De plus C_1, C_2, C_3 et C_4 sont deux deux incompatibles. Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}(C_3) + \mathbb{P}(C_4) \\ &= \frac{C_4^1 \times C_{28}^3 + C_4^2 \times C_{28}^2 + C_4^3 \times C_{28}^1 + C_4^4}{C_{32}^4} \end{aligned}$$

3. Modélisation d'une expérience aléatoire

Lors de la modélisation d'une expérience aléatoire \mathcal{E} , on est amené à choisir :

1. un univers Ω
2. une famille de parties de Ω . Dans le cas où l'univers Ω est fini, on considère $\mathcal{P}(\Omega)$
3. une probabilité \mathbb{P} .

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

4. Probabilités conditionnelles, indépendance

4.1. Probabilité conditionnelle

Activité 5. Dans une classe de Terminale D de 36 élèves, 23 ont 18 ans, 29 sont des filles et 17 filles ont 18 ans. On choisit au hasard un élève de cette classe.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants : A ="l'élève a 18 ans", B ="l'élève est une fille", C =" l'élève est une fille de 18 ans"
2. Si l'élève est une fille, quelle est la probabilité pour qu'elle ait 18 ans ?
3. Comparer le résultat de la question 2 et $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Correction de l'activité 5. Première méthode :

	18 ans	Autres	Total
Filles	17	12	29
Garçons	6	1	7
Total	23	13	36

1. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{23}{36} \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{29}{36} \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{17}{36}.\end{aligned}$$

2. D'après le tableau, c'est parmi les 29 filles qu'on cherche celles qui ont 18 ans :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{17}{29}$$

3. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} &= \frac{\frac{17}{36}}{\frac{29}{36}} = \frac{17}{29} \\ \mathbb{P}(C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\end{aligned}$$

Deuxième méthode : arbres de choix. La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est 1. La probabilité de l'événement correspond à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet. En dehors des branches du premier niveau, les probabilités indiquées sont des probabilités conditionnelles .

Théorème 1.1. Soit une expérience aléatoire \mathcal{E} d'univers Ω , \mathbb{P} une probabilité sur Ω et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B : \mathcal{P} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω . $\mathbb{P}_B(A)$ se lit probabilité de A sachant B

Définition 1.6. L'application \mathbb{P}_B ainsi définie s'appelle "probabilité conditionnelle sachant B ". La quantité $\mathbb{P}_B(A)$ est parfois noté $\mathbb{P}(A|B)$.

Exercice de fixation 2. Une urne contient trois boules rouges et deux boules blanches. On tire successivement avec remise deux boules de l'urne en notant leur couleur. Calculer la probabilité d'avoir deux boules de même couleur sachant que la première boule est rouge.

Correction de l'exercice de fixation 2. Le cardinal de l'univers est le nombre d'arrangements avec répétition d'un ensemble 2 éléments dans un ensemble 5 éléments, soit $\text{card}(\Omega) = 5^2$.

Soit A l'événement "avoir deux boules de même couleur " ; $A = A_1 \cup A_2$ où A_1 "avoir deux boules rouges" et A_2 "avoir deux boules blanches" ; $\text{card}(A_1)$ est le nombre d'arrangements avec répétitions d'un ensemble 2 éléments dans un ensemble 3 éléments soit $\text{card}(A_1) = 3^2$; $\text{card}(A_2)$ est le nombre d'arrangements avec répétitions d'un ensemble 2 éléments dans un ensemble à 2 éléments soit $\text{card}(A_2) = 2^2$; Par suite

$$\text{card}(A) = 3^2 + 2^2.$$

Soit B l'événement "la première boule tiré est rouge" ; nous avons 3^1 possibilités de tirer une boule rouge au premier tirage et 5^1 possibilités de tirer une boule au second tirage, soit

$$\text{card}(B) = 3^1 \times 5^1.$$

$A \cap B =$ "les deux boules tirées sont rouges" ; $\text{card}(A \cap B) = 3^2$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{3^2}{5^2} \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{3^1 \times 5^1}{5^2}. \end{aligned}$$

Nous déduisons que

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3^2}{3^1 \times 5^1}.$$

Définition 1.7 ((Système complet d'événement)). *On dit qu'une famille $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements lorsque :*

1. $\forall (i, j) \in [1; n]^2, (i \neq j) B_i \cap B_j = \emptyset$ (On dit alors que les $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$, sont deux à deux disjoints ou incompatibles)
2. $\bigcup_{k=1}^n B_k = \Omega$.

Autrement dit les $B_k, k = 1, \dots, n$, constituent une partition de Ω .

Exemple 1.1. *Soit A une partie non trivial de Ω . Alors la paire $\{A, \bar{A}\}$ est un système complet d'événement.*

Théorème 1.2 ((Probabilité totale)). *Soit $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ un système complet d'événement. Alors pour tout événement A , on a :*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)$$

Corollaire 1.1 ((Formule de Bayes)). *Soit $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ un système complet d'événement. Alors pour tout événement A , on a $\forall j \in [1; n]$,*

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}.$$

4.2. Indépendance

Définition 1.8. *Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants lorsque la réalisation (ou non) de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'autre : $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ ou $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.*

Théorème 1.3. *Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$*

Exercice de fixation 3. *On lance une pièce de monnaie non truquée deux fois de suite et on note le couple de côtés qui apparaît.*

1. *Les événements : $A =$ "face apparaît au premier lancer " et $B =$ "pile apparaît au deuxième lancer" sont-ils indépendants ?*
2. *Les événements : $C =$ "le même côté apparaît deux fois" et $D =$ " le nombre d'apparition de " face " est différent de deux " sont-ils indépendants ?*

Correction de l'exercice de fixation 3. *On lance une pièce de monnaie non truquée deux fois de suite et on note le couple de côtés qui apparaît. L'univers est*

$$\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, F), (F, P)\}$$

1. $A = \{(F, F), (F, P)\}$ $B = \{(P, P), (F, P)\}$ $A \cap B = \{(F, P)\}$. Nous avons

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{4}.$$

On note que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. On déduit que A et B sont indépendants.

2. $C = \{(F, F), (P, P)\}$ $D = \{(P, P), (F, P), (P, F)\}$ $C \cap D = \{(P, P)\}$. Nous avons

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} \quad \mathbb{P}(D) = \frac{3}{4}.$$

On note que $\mathbb{P}(C \cap D) \neq \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$. On déduit que C et D ne sont pas indépendants.

Chapitre 2

Variables aléatoires réelles

On fait une expérience aléatoire qui est traduite par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Maintenant on s'intéresse à certaines conséquences de cette expérience.

1. Généralités

Définition 2.1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (E, \mathcal{B}) un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire toute application X définie sur Ω à valeurs dans E telle que

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}.$$

Remarque 2.1. 1. (i) Si $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, X est une variable aléatoire réelle

2. (ii) Soit X une variable aléatoire réelle. Si $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini ou infini dénombrable de \mathbb{R} , alors la v.a.r X est dite discrète. Sinon, elle est dite continue.

Définition 2.2. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valeurs dans l'espace probabilisable (E, \mathcal{B}) . On appelle loi de probabilité de X , la probabilité \mathbb{P}_X définie sur \mathcal{B} par :

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Définition 2.3. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition de la v.a.r X , la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}_X([-\infty, x]). \end{aligned}$$

Propriété 2.1. 1. (i) F est une fonction non décroissante

2. [b] $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

3. (c) F est continue à droite et limitée à gauche.

Définition 2.4. Soit X une variable aléatoire réelle. Supposons que la fonction de répartition F soit continue et strictement croissante. Pour $0 \leq \alpha \leq 1$; on note x_α l'unique nombre réel vérifiant

$$F(x_\alpha) = \mathbb{P}(X < x_\alpha) = \alpha.$$

On dit X_α est le quantile d'ordre α .

Remarque 2.2. Pour connaître la loi d'une variable aléatoire discrète X , il faut connaître l'ensemble de ses valeurs possibles, et la probabilité avec laquelle elle réalise chaque valeur i.e

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R} \text{ et } P(X = x_i).$$

Pour toute fonction h , on définit l'espérance de $h(X)$ par

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=1}^n h(x_i)P(X = x_i).$$

En particulier

si $h(x) = |x|^p$, $p \geq 1$ alors on parle de moment d'ordre p de la v.a. X . Le moment d'ordre 1 est appelé l'espérance de X .

si $h(x) = |x - \mathbb{E}(X)|^p$, $p \geq 1$ alors on parle de moment centré d'ordre p de la v.a. X . Le moment centré d'ordre 2 est appelé la variance de X .

Remarque 2.3. 1. (i) X une variable aléatoire continue est absolument continue s'il existe une fonction définie sur \mathbb{R} , positive, vérifiant $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

La fonction f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X .

2. (ii) Pour toute fonction continue h , on définit l'espérance de $h(X)$ par

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx.$$

En particulier

si $h(x) = |x|^p$, $p \geq 1$ alors on parle de moment d'ordre p de la v.a. X . Le moment d'ordre 1 est appelé l'espérance de X .

si $h(x) = |x - \mathbb{E}(X)|^p$, $p \geq 1$ alors on parle de moment centré d'ordre p de la v.a. X . Le moment centré d'ordre 2 est appelé la variance de X .

Remarque 2.4. La loi d'une variable aléatoire est complètement déterminée via sa fonction de répartition, ou via sa densité de probabilité.

Proposition 2.1. (*Inégalité de Markov*)

Soient X une v.a.r telle que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. Alors pour tout $c \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{P}(|X| > c) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{c}.$$

Proposition 2.2. (*Inégalité de Tchebychev*)

Soient X une v.a.r $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ est définie. Alors pour tout $c > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > c) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2}.$$

Remarque 2.5. Cette formule montre quantitativement que "plus l'écart type est faible, plus la probabilité de s'écarter de la moyenne est faible".

2. Variables aléatoires réelles usuelles

2.1. Variables aléatoires discrète usuelles

Loi uniforme discrète

Une variable aléatoire discrète X est dite uniforme si $X(\Omega) = \{1; 2; \dots; n\}$. On note

$$p = \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \quad \forall k \in \{1; 2; \dots; n\}$$

Exemple

Tire une lettre de l'alphabet français parmi les 26 lettres si elle ont indiscernable au toucher.

Théorème

Soit X une v.a de loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Loi de Bernoulli

C'est la plus simple des lois de probabilité. Une variable aléatoire X est dite de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0; 1\}$. On note

$$p = \mathbb{P}(X = 1); q = 1 - p = \mathbb{P}(X = 0)$$

Exemple

Le jeu de pile ou face (non truqué, $p = 0,5$, truqué, $p \neq 0,5$).

Théorème

Soit X une v.a de loi de Bernoulli. Alors

$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\text{Var}(X) = p(1 - p)$$

Loi Binomiale

Une variable aléatoire S suit une loi binomiale de paramètre (n, p) si $S(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots, n\}$, et pour $0 \leq k \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k};$$

où $p \in [0, 1]$, $q = 1 - p$.

— L'espérance d'une variable de Binomiale est $\mathbb{E}(S) = np$.

— La variance est $V(S) = npq = np(1 - p)$.

Remarque 2.6. *C'est la loi d'une somme de n variables X_i de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .*

Exemple

On joue n fois à pile ou face avec une pièce non truquée. On suppose les lancers indépendants. Soit S la variable "nombre de pile obtenus". Si on note X_i la variable définie par $X_i = 1$ si "pile" au i -ème lancer, on a

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Les variables X_i sont de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$, indépendantes, et S suit une loi Binomiale de paramètre $(n, p = 1/2)$.

Loi géométrique

Une variable aléatoire S suit une loi géométrique de paramètre $(0 \leq p \leq 1)$ si $S(\Omega) = \{1; 2; \dots; n; \dots + \infty\}$, et pour $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(S = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

— L'espérance d'une variable géométrique est

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{p}$$

— La variance est

$$V(S) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Remarque 2.7. *Si on réalise un nombre infini d'épreuves de Bernoulli de paramètre p de manière indépendante, le rang du premier succès est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p .*

Loi hypergéométrique

Une variable aléatoire S suit une loi hypergéométrique si $S(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$, et pour $0 \leq k \leq K$, on a

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n},$$

où $0 \leq K \leq N$ sont des entiers, avec $n \leq N$.

— L'espérance d'une variable hypergéométrique est

$$\mathbb{E}(S) = n \frac{K}{N}$$

— La variance est $V(S) = n \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \left(\frac{N-K}{N} \right)$.

Exemple

Une urne contient N boules avec K blanches et $N - K$ noires. On tire $n \leq N$ boules sans remise. Alors la variable $S =$ "nombre de boules blanches" suit une loi hypergéométrique.

Loi de Poisson

Une variable X suit une loi de Poisson de paramètre μ si $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots; +\infty\}$ et on a pour $k = \{0; 1; \dots; +\infty\}$

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu};$$

où $\mu > 0$ est le paramètre de la loi.

L'espérance d'une variable de Poisson est $\mathbb{E}(X) = \mu$.

La variance est aussi $V(X) = \mu$.

Exemple

Le nombre de pannes d'un système mécanique durant une période donnée : μ est le taux moyen de pannes \times la durée de la période.

2.2. Variables aléatoires absolument continues usuelles

Loi uniforme continue

Une v.a. X continue suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si sa fonction de répartition a pour densité f où

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq u \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— L'espérance d'une variable uniforme est $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

— La variance est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

— L'écart type est $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Loi Normale

Une v.a. X continue suit une loi Normale de paramètre (μ, σ^2) si sa fonction densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

- L'espérance d'une variable de Gauss de paramètre (μ, σ^2) est $\mathbb{E}(X) = \mu$.
- La variance est $V(X) = \sigma^2$.
- L'écart type est $\sigma(X) = \sigma$

Remarque 2.8. *La loi Normale $(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ est appelée la loi Normale centrée réduite ou loi de Gauss. Elle admet une table.*

Théorème 2.1. *Si X suit la loi Normale (μ, σ^2) alors $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi de Gauss.*

Chapitre 3

Fonctions génératrice-Fonction caractéristique

1. Fonction génératrice

Définition 3.1. (Fonction génératrice des probabilités) Soit X v.a.r discrète. On appelle fonction génératrice de X , la fonction $G_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n \geq 1} s^{x_n} \mathbb{P}(X = x_n).$$

Remarque 3.1. — Comme $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$, le rayon de convergence R_G de la série entière $\sum_{n \geq 1} s^{x_n} \mathbb{P}(X = x_n)$ est au moins égal à 1.
— Si X et Y ont même f.g.p, elles ont même loi.

Théorème 3.1. Si $\mathbb{E}(X^r)$, le moment d'ordre r de la v.a. X , existe, la dérivé $G^{(r)}$ de la f.g.p de X vérifie

$$G^{(r)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1) \cdots (X-r+1)].$$

Exemple 10. Fonction génératrice des probabilités d'une v.a. de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

On sait $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$G(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

D'où $G'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$, et donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$. Plus généralement, $G^{(r)}(s) = \lambda^r e^{\lambda(s-1)}$, et donc $\mathbb{E}[X(X-1) \cdots (X-r+1)] = G^{(r)}(1) = \lambda^r$. Particulier, $\lambda^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, donc $\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda$, d'où $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Proposition 3.1. Si X et Y sont deux v.a. indépendantes, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$.

Exemple 11. — **V.a de la loi Binomiale** On sait que la loi Binomiale est la loi de la somme de n v.a de Bernoulli indépendante. Ceci explique que la f.g.p d'une v.a. Binomiale, $G(s) = ((1 - p) + ps)^n$, est la puissance n -ième de la f.g.p. $(1 - p + ps)$ d'une v.a. de Bernoulli.

— **Somme aléatoire de v.a. i.i.d.** Soit $N, X_1, \dots, X_k, \dots$ des variables entière indépendantes, les X_k étant i.i.d. Notons respectivement G_N et G_X les f.g.p. de N et X_k . Soit $T = \sum_{k=1}^N X_k$ (un modèle possible pour le coût annuel des sinistres pour une compagnie d'assurance : N désigne le nombre de sinistre annuel et X_k représente le coût de k -ième sinistre) Alors $G_T = G_N \circ G_X$.

1.1. Fonction génératrice de moments d'une v.a. entière ou continue

Définition 3.2. On appelle fonction génératrice des moments de X la fonction M_X définie par

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Théorème 3.2. Supposons que les moments $\mu_X(k) = \mathbb{E}(X^k)$ d'une v.a X soient définis et que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu_X(k)}{k!} t^k$ converge avec un rayon de convergence non nul. Alors pour tout $|t| < R$, $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe et est égal à $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$, et

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu_X(k)}{k!} t^k, \quad (|t| < R).$$

Remarque 3.2. — Les hypothèses sur la convergence de la série formée à partir des moments n'est utile que pour assurer une représentation de M_X par une série en puissances entières de t .

— Si X est à valeurs entières positives, en posant $s = e^t$, on obtient $M_X(t) = G_X(e^t)$.

— Si X est absolument continue, de (fonction de) densité de probabilité (f.d.p) f_X , nous avons

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

Dans ce cas l'application $t \mapsto M_X(-t)$ est appelée la transformé de Laplace de f .

— Par la formule de Taylor nous savons que le coefficient de t_k dans la série entière de M_X n'est autre que la valeur de $\frac{M^{(k)}(0)}{k!}$, donc $\mu_x(k) = M_X^{(k)}(0)$, d'ou

$$\mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0).$$

Exemple 12. — $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$. On a $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$. Donc on

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \int e^{tx} \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_a^b = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} \end{aligned}$$

— $X_n = \frac{1}{n}Y_n$ où $Y_n \hookrightarrow \mathcal{U}(1, \dots, n)$. On a

$$\mathbb{P}(X_n = \frac{i}{n}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Donc

$$M_{X_n}(t) = \mathbb{E}(e^{tX_n}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} e^{\frac{t}{n}i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e^{\frac{t}{n}})^i = \frac{e^t - 1}{n(1 - e^{\frac{t}{n}})}.$$

— $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Calculer M_X et M_Y .

Proposition 3.2. Si X et Y sont deux v.a. indépendantes, $M_{X+Y}(s) = M_X(s)M_Y(s)$.

2. Fonction caractéristique

Définition 3.3. Soit X une v.a.r discrète. On appelle fonction caractéristique de X , la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{n \geq 1} e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n),$$

où $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.

Chapitre 4

COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES

1. Généralités

On considère toujours une expérience aléatoire qui est traduite par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ici on s'intéresse à deux conséquences d'intérêts liées à cette expérience.

Définition

Soit Ω l'univers fini ou infini dénombrable d'une expérience aléatoire \mathcal{E} et (E, \mathcal{T}) un espace probabilisable. On appelle couple de variables aléatoires tout couple d'applications mesurables (X, Y) de (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans $E \times E$, i.e pour tout $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, $(X, Y)^{-1}(T_1 \times T_2) \in \mathcal{F}$.

Remarque

1. Si $E = \mathbb{R}$, (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles i.e pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(X, Y)^{-1}(]-\infty, x] \times]-\infty, y]) \in \mathcal{F}$.
2. Soit (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles. Si $(X, Y)(\Omega)$ est un sous-ensemble fini ou infini dénombrable de \mathbb{R}^2 , alors couple de variables aléatoires réelles (X, Y) est dite discrète. Sinon, il est dite continue.

Définition(Loi de probabilité conjointe et marginales)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

1. (Loi de probabilité conjointe)

On appelle loi de probabilité conjointe de (X, Y) , la probabilité $\mathbb{P}_{X,Y}$ définie sur $\mathcal{B}((X, Y)(\Omega))$ par : $\forall (A, B) \in \mathcal{B}((X, Y)(\Omega))$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) &= \mathbb{P}((X, Y)^{-1}(A \times B)) \\ &= \mathbb{P}(X \in A, Y \in B).\end{aligned}$$

2. (Loi de probabilité marginale)

On appelle lois marginales du couple (X, Y) les lois P_X et P_Y de X et de Y définies par : pour

tous intervalles A et B ,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_{X,Y}(A \times \mathbb{R})$$

$$\mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}_{X,Y}(\mathbb{R} \times B).$$

Définition(Fonction de répartition)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 . On appelle fonction de répartition du couple de v.a.r (X, Y) , la fonction F définie par :

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longrightarrow F(x, y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y) = \mathbb{P}_{X,Y}([-\infty, x[\times]-\infty, y[).$$

Proposition Soit F la fonction de répartition de (X, Y) . Les fonctions de répartition marginales de X et Y sont définies par :

1. $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y)$

2. $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y)$

2. Couple de variables aléatoires discrètes

Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes si $X, Y(\Omega) = \{(x_n, y_n), n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Dans ce cas :

1. la loi conjointe de (X, Y) est définie par :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \forall i, j \geq 1.$$

tel que $0 \leq p_{i,j} \leq 1$ et

$$\sum_{i,j \geq 1} p_{i,j} = 1$$

2. Les lois marginales sont définies par :

$$p_{i,\cdot} = \sum_{j \geq 1} p_{i,j} = \sum_{j \geq 1} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \forall i \geq 1,$$

$$p_{\cdot,j} = \sum_{i \geq 1} p_{i,j} = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \forall j \geq 1$$

3. Si X et Y sont indépendants, alors $p_{i,j} = p_{i,\cdot} \times p_{\cdot,j}, \forall i, j \geq 1$.

Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.r discrète. Pour toute fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on définit l'espérance de $h(X, Y)$ par

$$\mathbb{E}[h(X, Y)] = \sum_{i,j \geq 1} h(x_i, y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Cependant le vecteur espérance de (X, Y) est donnée par le vecteur $(\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))$.

3. Couple de variables aléatoires continues à densité

Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. (X, Y) est un couple de variables aléatoires continues à densité si $(X, Y)(\Omega)$ est un ensemble infini de \mathbb{R}^2 . Dans ce cas :

1. la loi conjointe de (X, Y) est définie par :

$$f(x, y)dxdy = \mathbb{P}(X \in [x, x + dx[, Y \in [y, y + dy[).$$

tel que

— f est continue et positive sur $(X, Y)(\Omega)$

— $\int_{(X, Y)(\Omega)} f(x, y)dxdy = 1$

2. Les lois marginales sont définies par :

$$\forall x \in X(\Omega), f_X(x) = \int_{Y(\Omega)} f(x, y)dy,$$

$$\forall y \in Y(\Omega), f_Y(y) = \int_{X(\Omega)} f(x, y)dx.$$

3. Si X et Y sont des variables à densité indépendantes alors $f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$

Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.r continue à densité f . Pour toute fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on définit l'espérance de $h(X, Y)$ par

$$\mathbb{E}[h(X, Y)] = \int_{(X, Y)(\Omega)} h(x, y)f(x, y)dxdy.$$

Cependant le vecteur espérance de (X, Y) est donnée par le vecteur $(\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))$.

4. Conditionnement et indépendance

Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On appelle loi conditionnelle de X sachant Y (resp. Y sachant X la quantité

$$\mathbb{P}(X \in A|Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)}$$

(resp.

$$\mathbb{P}(Y \in A|X \in B) = \frac{\mathbb{P}(Y \in A, X \in B)}{\mathbb{P}(X \in B)}.$$

Précisément,

— si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, on a $\forall x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x|Y = y) &= \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} \\ \mathbb{P}(Y = y|X = x) &= \frac{\mathbb{P}(Y=y, X=x)}{\mathbb{P}(X=x)}.\end{aligned}$$

— Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires continues à densité f , on a

$$\begin{aligned}f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.\end{aligned}$$

Théorème

Soit X et Y deux variables aléatoire indépendante, alors on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A|Y \in B) &= \mathbb{P}(X \in A) \\ \mathbb{P}(Y \in A|X \in B) &= \mathbb{P}(Y \in A)\end{aligned}$$

i.e

— Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes indépendante, on a $\forall x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x|Y = y) &= \mathbb{P}(X = x) \\ \mathbb{P}(Y = y|X = x) &= \mathbb{P}(Y = y)\end{aligned}$$

— Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires continues à densité f , on a

$$\begin{aligned}f_{X|Y}(x|y) &= f_X(x) \\ f_{Y|X}(y|x) &= f_Y(y).\end{aligned}$$

5. Théorème de transfert

Théorème

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire à densité f et ϕ un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 à valeur dans \mathbb{R}^2 . Si on pose $(U, V) = \phi(X, Y)$, alors (U, V) admet une densité g définie par

$$g(u, v) = f(\phi^{-1}(u, v))|J_{\phi^{-1}}(\phi^{-1}(u, v))|\mathbf{1}_{\Delta}(u, v),$$

où J_{ϕ} est le déterminant de la matrice Jacobienne de ϕ et $\Delta = \phi((X, Y)(\Omega))$.

Chapitre 5

CONVERGENCE DE SUITE DE VARIABLES ALEATOIRES

- On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (éventuellement $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$) une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et X (éventuellement Y) une variable aléatoire définie sur le même espace.
- On note $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions de répartition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et F celle de X .
- On note $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions caractéristiques de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et φ celle de X .

Remarque Les résultats de ce cours s'appliquent aussi à des vecteurs aléatoires

1. Convergence en loi

Définitions

— **Définition 1**

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x) \text{ en tout point de continuité de } F.$$

— **Définition 2 : Théorème de Paul Lévy**

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = \phi(x).$$

— **Définition 3 : Lemme de Portmanteau**

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall g \text{ continue et bornée, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X)).$$

— **Théorème**

$$\forall c \in \mathbb{R}, X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et } Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c).$$

— **Théorème**

$$\forall c \in \mathbb{R}, X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et } Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Rightarrow$$

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$
2. $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$
3. $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X/c, c \neq 0.$
4. $\forall g \text{ continue, } X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X).$

Remarque $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ n'implique pas que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$

— **Exemples**

1. Soit X_n une suite de v.a. de loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Alors, lorsque n tend vers l'infini, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
2. Soit X_N une suite de v.a. de loi $\mathcal{H}(N, n, p)$. Alors, lorsque N tend vers l'infini $X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

2. Convergence en probabilité

Définition

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$

Condition suffisante de convergence en probabilité

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = c$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c.$

Propriétés

1. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$
2. $\forall g$ continue, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X).$

Exemple

1. Soit Z_n une suite de variable aléatoire de loi du Chi 2 à n ddl. Alors $X_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$
2. Soit X_n une suite de v.a. de loi $\mathcal{T}(n)$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1).$

3. Convergence en loi et convergence en probabilité

Théorème

- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$ La réciproque est fautive en général.
- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c.$
- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $|X_n - Y_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Rightarrow Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance m et de variance σ^2 . Soit

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

3.1. Loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$$

. **Loi forte des grands nombres**

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s} m$$

. **Exemple**

Soit \mathbb{F}_n la fonction de répartition empirique de (X_1, \dots, X_n) ,

$$\forall, x \in \mathbb{R}, \mathbb{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i < x}.$$

Alors, lorsque n tend vers l'infini

$$\mathbb{F}_n(x) \xrightarrow{\mathbb{P}} F(x)$$

en tout point x de \mathbb{R} .

3.2. Théorème central limite (TCL)

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exemple 1 : Loi de la somme de n variables aléatoires i.i.d.

Soit

$$S_n = n\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i. \text{ Alors } \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exemple 2 : Théorème de Moivre-Laplace

Soit X_n une suite de v.a. de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Alors,

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exemple 3 : Convergence en loi d'une suite Z_n de loi $\chi^2(2)$.

$$\frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$