www.mathsplusun.com

Une initiation au calcul tensoriel
#2. La convention d'Einstein

Éric Pruvost – eric75p@yahoo.fr

Mathplusun

Avril 2020

Objectifs, public visé

Comprendre la convention de sommation d'Einstein et le symbole de Kronecker.

Étudiants en second cycle scientifique.

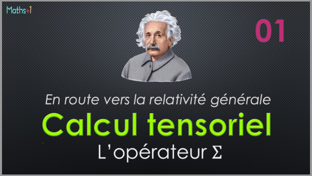
Toute personne désirant s'initier au calcul tensoriel de manière progressive.

Thèmes abordés

- Matrices et double indice ;
- Indice libre, indice muet ;
- Le symbole de Kronecker ;
- La convention d'Einstein.

Eric Pruvost – eric75p@yahoo.fr

Pré-requis



- Notions sur les matrices (addition, multiplication...)
- Idéalement un niveau Bac+1, Bac+2.

Mais beaucoup de « rappels » seront faits...

Matrices et double indice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrices et double indice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Matrices et double indice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$a_{ligne,\ colonne}$$

Matrices et double indice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$$

Un « tableau » de n lignes et de p colonnes

Matrices et double indice

$$A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$$

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$$

$$A = (a_{ij})$$

Indices libres & muets

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$S_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}$$

$$S_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}$$

$$S_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}$$

Maths+1

$$S_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}$$

Indice libre : i

Indices muets : j et k

Opérations sur les matrices

Opérations sur les matrices : l'addition

$$S = A + B$$

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!], s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Les deux matrices doivent avoir la même taille

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Maths+1

Opérations sur les matrices : la multiplication par un scalaire

$$C = \lambda A$$

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices : la multiplication

A : n lignes et p colonnes

B : p lignes et q colonnes

Le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B

$$C = A \times B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 5 & 1 \times 4 + 2 \times 6 \\ 3 \times 3 + 4 \times 5 & 3 \times 4 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 29 & 36 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices : la multiplication

$$C = A \times B$$

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;q]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Indices libres : i et j

Indice muet : k

Opérations sur les matrices : la multiplication

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Maths+1

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; q]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_k$$

Maths+1

Opérations sur les matrices : un cas particulier de multiplication

$$c_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_k = \sum_{l=1}^{n} a_{1l} b_l$$

$$c_2 = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_k = \sum_{l=1}^{n} a_{2l} b_l$$

$$\cdots$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_k = \sum_{l=1}^{n} a_{nl} b_l$$

Opérations sur les matrices : un cas particulier de multiplication

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$c_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_i$$

k est un **indice libre** (*running index*)
alors que i est un **indice muet** (*dummy index*)

Symbole de Kronecker

$$\delta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$$

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \delta_j^i = \delta(i, j)$$

Maths+1

Symbole de Kronecker

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = (\delta_{ij})_{i,j\,\in\{1,2,3\}}$$

La convention d'Einstein

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b^i = \sum_{i=1}^{n} a_i b^i = a_i b^i$$

$$a_{ii}b_j = a_{11}b_j + a_{22}b_j + \cdots + a_{nn}b_j$$

La convention d'Einstein

$$x^j y_j = \sum_{j=1}^{n} x^j y_j$$

Maths+1

La convention d'Einstein (somme double)

$$x_{ij}y_iz_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_iz_j$$

$$a_{ik}\, b^{k}{}_{l}\, c^{l}{}_{j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b^{k}_{l} c^{l}_{j}$$

Maths+1

La convention d'Einstein (substitution)

$$A = x_{ij} y_i z_j \qquad y_i = a_{ij} z_j$$

Maths+1

La convention d'Einstein (substitution)

$$A = x_{ij} y_i z_j \qquad y_i = a_{ij} z_j$$

$$A = x_{ij} (a_{ij} z_j) z_j$$

Maths+1

$$A = x_{ij} y_i z_j \qquad y_i = a_{ij} z_j$$

$$A = x_{ij} (a_{ij} z_j) z_j$$

$$A = x_{ij} (a_{ik} z_k) z_j$$

$$A = x_{ij}y_iz_j \qquad y_i = a_{ij}z_j$$

$$A = x_{ij}(a_{ij}z_j)z_j$$

$$A = x_{ij}(a_{ik}z_k)z_j$$

$$A = a_{ik}x_{ij}z_jz_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{ij}z_jz_k$$

$$P = AB \qquad Q = CD \qquad R = PQ$$

$$P = AB \qquad Q = CD \qquad R = PQ$$

$$p^i_j = a^i_k b^k{}_j \qquad q^i_j = c^i_k d^k{}_j$$

Maths+1

$$P = AB \qquad Q = CD \qquad R = PQ$$

$$p^i_j = a^i_k b^k{}_j \qquad q^i_j = c^i_k d^k{}_j$$

$$r^i_j = p^i_k q^k{}_j = a^i_k b^k{}_j \, c^i_k d^k{}_j$$

$$P = AB \qquad Q = CD \qquad R = PQ$$

$$p^i_j = a^i_k b^k_j \qquad q^i_j = c^i_k d^k_j$$

$$r^i_j = p^i_k q^k_j = a^i_k b^k_j \; c^i{}_k d^k{}_j$$

$$r^i_j = p^i_k q^k_j = a^i_k b^k_j \; c^i{}_l d^l{}_j$$

Maths+1

$$P = AB \qquad Q = CD \qquad R = PQ$$

$$p^i_j = a^i_k b^k_j \qquad q^i_j = c^i_k d^k_j$$

$$r^i_j = p^i_k q^k_j = a^i_k b^k_j \; c^i_k d^k_j$$

$$r^i_j = p^i_k q^k_j = a^i_k b^k_j \; c^i{}_l d^l_j$$

$$r^i_j = p^i_k q^k_j = a^i_k b^k_m c^m{}_l d^l_j$$

La convention d’Einstein & le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} a_i a_j$$

$$\delta_{ij}a_ia_j$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}a_ia_j$$

$$\delta_{ij}a_ia_j$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}a_ia_j$$

$$a_ia_i = \sum_{i=1}^{n} a_ia_i = a_1a_1 + \cdots + a_na_n$$

Maths+1

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} y_s \quad y_i = b_{ir} x_r \quad a_{ir} b_{rj} = \delta_{ij}$$

Maths+1

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} y_s \quad y_i = b_{ir} x_r \quad a_{ir} b_{rj} = \delta_{ij}$$

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} (b_{sr} x_r)$$

Maths+1

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} y_s \quad y_i = b_{ir} x_r \quad a_{ir} b_{rj} = \delta_{ij}$$

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} (b_{sr} x_r)$$

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} b_{st} x_t$$

Maths+1

La convention d'Einstein & le symbole de Kronecker

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} y_s \qquad y_i = b_{ir} x_r \qquad a_{ir} b_{rj} = \delta_{ij}$$

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} (b_{sr} x_r)$$

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} b_{st} x_t$$

$$A_i = \alpha_{ir} \delta_{rt} x_t = \sum_{r=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \alpha_{ir} \delta_{rt} x_t$$

Maths+1

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} y_s \qquad y_i = b_{ir} x_r \qquad a_{ir} b_{rj} = \delta_{ij}$$

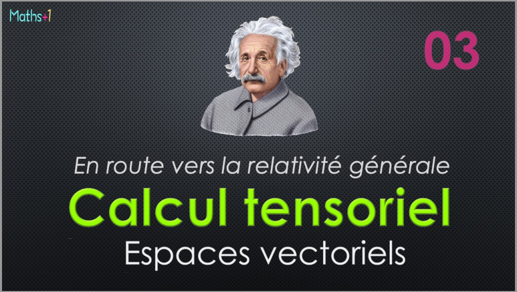
$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} (b_{sr} x_r)$$

$$A_i = \alpha_{ir} a_{rs} b_{st} x_t$$

$$A_i = \alpha_{ir} \delta_{rt} x_t = \sum_{r=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \alpha_{ir} \delta_{rt} x_t$$

$$A_i = \alpha_{ir} x_r = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} x_r$$

Maths+1



Vecteurs & espaces vectoriels

Aider la chaîne

- Pouce bleu ;
- S'abonner à la chaîne ;
- Partager sur les réseaux sociaux ;
- Commenter la vidéo ;
- Nous rejoindre sur FB, Instagram, Twitter ;
- Nous aider sur `tipeee.com`