www.mathsplusun.com

Une initiation au calcul tensoriel

#3. Espaces vectoriels

Éric Pruvost – eric75p@yahoo.fr

Mathplusun

Avril 2020

Hermann Günther Grassmann

(1809-1877)

Un niveau terminale scientifique et les deux épisodes précédents

Objectifs & thèmes abordés

Rappels sur les espaces vectoriels dans la perspective du calcul tensoriel.

Ce n'est pas un cours complet sur les espaces vectoriels !

Thèmes abordés

- Scalaires & vecteurs ;
- Espaces vectoriels ;
- Combinaisons linéaires ;
- Bases d'un espace vectoriel.

Rappels sur les espaces vectoriels dans la perspective du calcul tensoriel.
Ce n'est pas un cours complet sur les espaces vectoriels !

Thèmes abordés

- Scalaires & vecteurs ;
- Espaces vectoriels ;
- Combinaisons linéaires ;
- Bases d'un espace vectoriel.

Rappels sur les espaces vectoriels dans la perspective du calcul tensoriel.
Ce n'est pas un cours complet sur les espaces vectoriels !

Thèmes abordés

- Scalaires & vecteurs ;
- Espaces vectoriels ;
- Combinaisons linéaires ;
- Bases d'un espace vectoriel.

Vecteurs & scalaires

Un **scalaire** (un nombre seul) permet de représenter une grandeur physique comme la température par exemple.

Un **scalaire** (un nombre seul) permet de représenter une grandeur physique comme la température par exemple.

Un scalaire n'est pas suffisant pour représenter une vitesse ou un champ électrique ou gravitationnel par exemple. De telles grandeurs physiques peuvent être représentées par des **vecteurs**.

Un **scalaire** (un nombre seul) permet de représenter une grandeur physique comme la température par exemple.

Un scalaire n'est pas suffisant pour représenter une vitesse ou un champ électrique ou gravitationnel par exemple. De telles grandeurs physiques peuvent être représentées par des **vecteurs**.

Un vecteur « encapsule » plusieurs nombres et possèdent un sens, une direction et une magnitude.

Vecteurs & scalaires

Les vecteurs étudiés au lycée sont des objet sur lesquels on peut effectuer les deux opérations fondamentales suivantes :

- **Multiplication par un scalaire** (un réel) : $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$
- **Addition** de deux vecteurs : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

ne pas confondre :

- $\lambda \times \mu = \lambda\mu$
- $\lambda \cdot \vec{u} = \lambda\vec{u}$

- $\lambda + \mu$
- $\vec{u} + \vec{v}$

Propriétés de l'addition vectorielle (dans le plan ou l'espace)

1. *Commutativité* : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. *Associativité* : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. *Élément neutre* : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. *Élément symétrique* : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

On dit que $(\vec{\mathcal{P}}, +)$ est un groupe abélien

Propriétés de l'addition vectorielle (dans le plan ou l'espace)

1. *Commutativité* : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. *Associativité* : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. *Élément neutre* : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. *Élément symétrique* : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

On dit que $(\vec{\mathcal{P}}, +)$ est un groupe abélien

Propriétés de la multiplication par un scalaire

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$
   compatibilité avec la multiplication classique
2. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
   distributivité à droite sur l'addition classique
3. $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
   distributivité à gauche sur l'addition vectorielle
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
   compatibilité avec l'élément neutre de la multiplication classique

Maths+1

Propriétés de la multiplication par un scalaire

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$
   compatibilité avec la multiplication classique
2. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
   distributivité à droite sur l'addition classique
3. $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
   distributivité à gauche sur l'addition vectorielle
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
   compatibilité avec l'élément neutre de la multiplication classique

Propriétés de la multiplication par un scalaire

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$
   compatibilité avec la multiplication classique
2. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
   distributivité à droite sur l'addition classique
3. $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
   distributivité à gauche sur l'addition vectorielle
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
   compatibilité avec l'élément neutre de la multiplication classique

Maths+1

Propriétés de la multiplication par un scalaire

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$
   compatibilité avec la multiplication classique
2. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
   distributivité à droite sur l'addition classique
3. $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
   distributivité à gauche sur l'addition vectorielle
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
   compatibilité avec l'élément neutre de la multiplication classique

Espaces vectoriels

Plus généralement un ensemble E muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ sera appelé un **espace vectoriel** si les deux opérations ont les mêmes huit « bonnes » propriétés que celles des vecteurs dans le plan ou dans l'espace.

Les éléments d'un tel ensemble seront alors appelés des **vecteurs**.

C'est une définition abstraite de la notion de vecteur.

Plus généralement un ensemble E muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ sera appelé un **espace vectoriel** si les deux opérations ont les mêmes huit « bonnes » propriétés que celles des vecteurs dans le plan ou dans l'espace.

Les éléments d'un tel ensemble seront alors appelés des **vecteurs**.

C'est une définition abstraite de la notion de vecteur.

Plus généralement un ensemble E muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ sera appelé un **espace vectoriel** si les deux opérations ont les mêmes huit « bonnes » propriétés que celles des vecteurs dans le plan ou dans l'espace.

Les éléments d'un tel ensemble seront alors appelés des **vecteurs**.

C'est une définition abstraite de la notion de vecteur.

Calcul tensoriel – 3. Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

Les propriétés deviennent ici des axiomes (définition axiomatique)

On appelle **espace vectoriel** tout ensemble E muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ telles que :

$\forall u, v, w \in E, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. *Commutativité* : $u + v = v + u$
2. *Associativité* : $u + (v + w) = (v + v) + w$
3. *Élément neutre* : $u + 0_E = u$
4. *Élément symétrique* : $u + (-u) = 0_E$
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
6. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8. $1 \cdot u = u$

Exemples

- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot), (\mathbb{R}^3, +, \cdot), (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ suites numériques réelles
- $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ avec $X \subset \mathbb{R}$ fonctions de $X \to \mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ polynômes formels à coefficients réels
- $(\mathcal{M}_n[\mathbb{R}], +, \cdot)$ matrices carrées d'ordre n
- etc.

Remarque

On peut définir des espaces vectoriels sur d'autres ensembles que $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{C}$ par exemple mais nous n'en parlerons pas dans cet épisode.

Nous nous limiterons aux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Remarque

On peut définir des espaces vectoriels sur d'autres ensembles que $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{C}$ par exemple mais nous n'en parlerons pas dans cet épisode.

Nous nous limiterons aux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Combinaisons linéaires

$\vec{w} = 5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$ au lycée

$\vec{w} = 5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$ au lycée

$$w = 5u + 3v$$

Combinaisons linéaires

$\vec{w} = 5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$ au lycée

$$w = 5u + 3v$$

$$\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}$$

$\vec{w} = 5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$ au lycée

$w = 5u + 3v$

$w = \lambda u + \mu v$

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Maths+1

$\vec{w} = 5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$ au lycée

$w = 5u + 3v$

$w = \lambda u + \mu v$

$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$

$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$

$\vec{w} = 5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$ au lycée

$w = 5u + 3v$

$w = \lambda u + \mu v$

$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$

$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$

$w = \lambda_i u_i$ convention d'Einstein

Bases d'un espace vectoriel

Les espaces vectoriels les plus « immédiats » sont les espaces $\mathbb{R}^n$:

- La droite vectorielle : $\mathbb{R}^1$ (dimension 1) ;
- Le plan : $\mathbb{R}^2$ (dimension 2) ;
- L'espace : $\mathbb{R}^3$ (dimension 3).

Un élément (un vecteur) de $\mathbb{R}^n$ est un *n*-uplet.

Conventions générales

- Les scalaires seront notés avec des lettres grecques minuscules : $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mais δ désignera le symbole de Kronecker ;
- Les vecteurs seront notés avec des lettres latines minuscules : $a, b, c, \ldots, u, v, w, y, y$;
- Les matrices seront notées avec des lettres latines majuscules : $A, B, C \ldots$.

Chaque vecteur de $\mathbb{R}^1$ peut s'exprimer sous la forme d'un 1-uplet (4) par exemple.

Soit le vecteur $u = (1)$

Alors, par exemple le vecteur $x = (3)$ va s'écrire $x = 3u$

Plus généralement si u est un vecteur non nul, alors pour tout vecteur x de la droite vectorielle, il existe un unique scalaire λ tel que : $x = \lambda u$

Comment cela se passe-t-il en dimension 2 ?

Étant donnés deux vecteurs non nuls u_1 et u_2 et un vecteur quelconque x existe-t-il un unique jeu de deux scalaires λ^1, λ^2 tel que :

$$x = \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2$$

La réponse est non, il faut que les deux vecteurs ne soient pas colinéaires, exemple :

$$u_1 = (1, 0) \quad u_2 = (0, 1)$$

Bases d'un espace vectoriel : dimension 2

$u_1 = (1, 0) \quad u_2 = (0, 1)$

$\mathcal{B} = [u_1, u_2]$

$x = (5, 3)$

$x = 5(1, 0) + 3(0, 1)$

$x = 5u_1 + 3u_2$

$x \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$$\boldsymbol{x} = (5,3) \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Sous quelles conditions une famille de trois vecteurs $[u_1, u_2, u_3]$ est-elle une base ?

- La famille doit être **génératrice** :
  $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \exists \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in \mathbb{R}, x = \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3$

Maths+1

Sous quelles conditions une famille de trois vecteurs $[u_1, u_2, u_3]$ est-elle une base ?

- La famille doit être **génératrice** :
  $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \exists \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in \mathbb{R}, x = \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3$
- La famille doit être **libre** :
  $\forall \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R},$
  $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 = (0,0,0) \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{B} = [u_1, \ldots, u_n]$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{B}$ est une famille **libre** si :

$$\forall \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}, \mu_i u_i = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$$

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{B} = [u_1, \ldots, u_n]$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{B}$ est une famille **génératrice** si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \lambda^1, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{R}, x = \lambda^i u_i$$

Maths+1

Soit $\mathcal{B} = [u_1, \ldots, u_n]$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Si $\mathcal{B}$ est libre et génératrice, elle on dit que c'est une **base** de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ si $x = \lambda^i u_i$ on dit que les scalaires $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$ sont les **composantes contravariantes** du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

$$x \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Dans une base donnée, les composantes d'un vecteur x sont uniques.

Quelques exemples de bases

- $[1, X, X^2]$
  base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

- $\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]$
  Base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Maths+1

Prochain épisode

Aider la chaîne

- Pouce bleu ;
- S'abonner à la chaîne ;
- Partager sur les réseaux sociaux ;
- Commenter la vidéo ;
- Nous rejoindre sur FB, Instagram, Twitter ;
- Nous aider sur `tipeee.com`

Maths+1