www.mathsplusun.com

Une initiation au calcul tensoriel

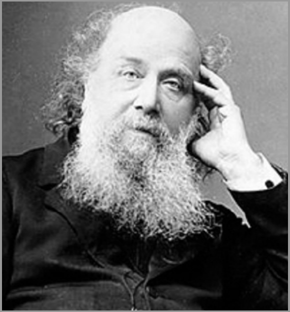
#4. Changement de base

Éric Pruvost – eric75p@yahoo.fr

Mathplusun

Avril 2020

James Joseph Sylvester



Mathématicien anglais, a travaillé sur la théorie des déterminants et a introduit en 1850 le terme « matrix »

Calcul tensoriel – 4. Changement de base

Pré-requis

Comprendre les mécanismes de changement de base et la manière dont les composantes d'un vecteur évoluent lors d'un changement de base.

Thèmes abordés

- Compléments sur les matrices ;
- Changement de base en dimension 1 ;
- Changement de base en dimension 2 ;
- Changement de base en dimension n.

Objectifs & thèmes abordés

Comprendre les mécanismes de changement de base et la manière dont les composantes d'un vecteur évoluent lors d'un changement de base.

Thèmes abordés

- Compléments sur les matrices ;
- Changement de base en dimension 1 ;
- Changement de base en dimension 2 ;
- Changement de base en dimension n.

Compléments sur les matrices

Nous nous limitons maintenant aux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, leur ensemble est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Nous nous limitons maintenant aux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, leur ensemble est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrice nulle : tous les coefficients sont nuls, elle sera notée O

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous nous limitons maintenant aux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, leur ensemble est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrice nulle : tous les coefficients sont nuls, elle sera notée O

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice identité : $I = (\delta_{ij})$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'addition présente les propriétés suivantes :

- Loi de composition interne : $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- Associativité : $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- Commutativité : $A + B = B + A$;
- Élément neutre, la matrice nulle : $A + O = A$;
- Toute matrice $A = (a_{ij})$ possède pour l'addition un symétrique $-A = (-a_{ij})$

L'addition présente les propriétés suivantes :

- Loi de composition interne : $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- Associativité : $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- Commutativité : $A + B = B + A$;
- Élément neutre, la matrice nulle : $A + O = A$;
- Toute matrice $A = (a_{ij})$ possède pour l'addition un symétrique $-A = (-a_{ij})$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maths+1

L'addition présente les propriétés suivantes :

- Loi de composition interne : $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- Associativité : $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- Commutativité : $A + B = B + A$;
- Élément neutre, la matrice nulle : $A + O = A$;
- Toute matrice $A = (a_{ij})$ possède pour l'addition un symétrique $\text{-}A = (\text{-}a_{ij})$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ **est un groupe abélien.**

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est un groupe (abélien), ceci nous permet de définir une seconde opération : la soustraction.

$$A + (-B) = A - B$$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est un groupe (abélien), ceci nous permet de définir une seconde opération : la soustraction.

$$A + (\text{-}B) = A - B$$

Tout groupe possède une seconde opération (symétrique de la première) obtenue à partir de la notion d'élément symétrique.

Maths+1

Quid de la multiplication ? $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times)$ est-il un groupe ?

Quid de la multiplication ? $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times)$ est-il un groupe ?

- Loi de composition interne : $A \times B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- Associativité : $A(BC) = (AB)C$;
- Commutativité : non, en général $AB \neq BA$
- Élément neutre, la matrice identité : $A \times I = I \times A = A$;
- Éléments symétrique ?

Dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, c'est très simple ! Soit A=[a] une matrice quelconque, cherchons une matrice A' telle que $A \times A' = I$

$$[a][d'] = [1]$$

$$[ad'] = [1]$$

$$d' = \frac{1}{a} \text{ si } a \neq 0$$

Dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, c'est très simple ! Soit A=[a] une matrice quelconque, cherchons une matrice A' telle que $A \times A' = I$

$$[a][a'] = [1]$$

$$[aa'] = [1]$$

$$a' = \frac{1}{a} \text{ si } a \neq 0$$

Dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, toute matrice non nulle admet un symétrique pour la multiplication.

Et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

$$A \times A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

$$A \times A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & \text{-}b \\ \text{-}c & a \end{bmatrix}$$

Maths+1

Et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

$$A \times A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & \text{-}b \\ \text{-}c & a \end{bmatrix}$$

Seules les matrices telles que $ad - bc \neq 0$ ont un symétrique pour la multiplication. De telles matrices sont dites **inversibles**.

Et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

$$A \times A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Seules les matrices telles que $ad - bc \neq 0$ ont un symétrique pour la multiplication. De telles matrices sont dites **inversibles**.

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

$$A \times A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Seules les matrices telles que $ad - bc \neq 0$ ont un symétrique pour la multiplication. De telles matrices sont dites **inversibles**.

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

$(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe appelé **groupe linéaire**.

Maths+1

La quantité $ad - bc$ est appelée déterminant de la matrice A et se note :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

La quantité $ad - bc$ est appelée déterminant de la matrice A et se note :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

La notion de déterminant se généralise aux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Maths+1

La quantité $ad - bc$ est appelée déterminant de la matrice A et se note :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

La notion de déterminant se généralise aux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Changement de base
Problématique

Changement de base : problématique

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$

Changement de base : problématique

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$

$$u_i = \alpha_i^j v_j \qquad v_i = \beta_i^j u_j$$

Changement de base : problématique

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$

$$u_i = \alpha_i^j v_j \qquad v_i = \beta_i^j u_j$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix} \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{pmatrix}$$

Changement de base : problématique

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$

$$u_i = \alpha_i^j v_j \qquad v_i = \beta_i^j u_j$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix} \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{pmatrix}$$

$$\lambda^i = f(\mu^j)?$$

$$\mu^i = g(\lambda^j)?$$

Changement de base en dimension 1

Changement de base en dimension 1

$$\mathcal{B} = \{u_1\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_1\}$$
$$x = \lambda^1 u_1 \qquad x = \mu^1 v_1$$
$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 \qquad v_1 = \beta_1^1 u_1$$

Changement de base en dimension 1

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{B} = \{u_1\} & \mathcal{B}' = \{v_1\} \\
x = \lambda^1 u_1 & x = \mu^1 v_1 \\
u_1 = \alpha_1^1 v_1 & v_1 = \beta_1^1 u_1
\end{array}
$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^1) \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = (\mu^1)$$

$$\begin{array}{ll} \mathcal{B} = \{u_1\} & \mathcal{B}' = \{v_1\} \\ x = \lambda^1 u_1 & x = \mu^1 v_1 \\ u_1 = \alpha_1^1 v_1 & v_1 = \beta_1^1 u_1 \end{array}$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^1) \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = (\mu^1)$$

On cherche comment passer d'une base à l'autre : comment trouver μ^1 connaissant λ^1 ?

$$\mathcal{B} = \{u_1\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_1\}$$
$$x = \lambda^1 u_1 \qquad x = \mu^1 v_1$$
$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 \qquad v_1 = \beta_1^1 u_1$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^1) \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = (\mu^1)$$

On cherche comment passer d'une base à l'autre : comment trouver μ^1 connaissant λ^1 ?

$$x = \lambda^1 u_1$$
$$x = \lambda^1 \alpha_1^1 v_1 = \mu^1 v_1$$

Maths+1

Changement de base en dimension 1

$$\mathcal{B} = \{u_1\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_1\}$$
$$x = \lambda^1 u_1 \qquad x = \mu^1 v_1$$
$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 \qquad v_1 = \beta_1^1 u_1$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^1) \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = (\mu^1)$$

On cherche comment passer d'une base à l'autre : comment trouver μ^1 connaissant λ^1 ?

$$x = \lambda^1 u_1$$
$$x = \lambda^1 \alpha_1^1 v_1 = \mu^1 v_1$$

Par unicité de décomposition d'un vecteur dans une base :

$$\mu^1 = \alpha_1^1 \lambda^1$$

Maths+1

Changement de base en dimension 1

$x = \lambda^1 u_1$
$u_1 = \alpha_1^1 v_1$

$x = \mu^1 v_1$
$v_1 = \beta_1^1 u_1$

$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^1)$
$\mu^1 = \alpha_1^1 \lambda^1$

$[x]_{\mathcal{B}'} = (\mu^1)$
$\lambda^1 = \beta_1^1 \mu^1$

Changement de base en dimension 1

$$x = \lambda^1 u_1 \qquad x = \mu^1 v_1$$
$$u_1 = \alpha^1_1 v_1 \qquad v_1 = \beta^1_1 u_1$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^1) \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = (\mu^1)$$
$$\mu^1 = \alpha^1_1 \lambda^1 \qquad \lambda^1 = \beta^1_1 \mu^1$$

$$(\mu^1)_{\mathcal{B}'} = [\alpha^1_1](\lambda^1)_{\mathcal{B}}$$
$$(\lambda^1)_{\mathcal{B}} = [\beta^1_1](\mu^1)_{\mathcal{B}'}$$

Maths+1

Changement de base en dimension 1

$$x = \lambda^1 u_1 \qquad x = \mu^1 v_1$$
$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 \qquad v_1 = \beta_1^1 u_1$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^1) \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = (\mu^1)$$
$$\mu^1 = \alpha_1^1 \lambda^1 \qquad \lambda^1 = \beta_1^1 \mu^1$$

$$(\mu^1)_{\mathcal{B}'} = [\alpha_1^1](\lambda^1)_{\mathcal{B}}$$
$$(\lambda^1)_{\mathcal{B}} = [\beta_1^1](\mu^1)_{\mathcal{B}'}$$

$$(\mu^1)_{\mathcal{B}'} = [\alpha_1^1][\beta_1^1](\mu^1)_{\mathcal{B}'}$$

Maths+1

Changement de base en dimension 1

$$x = \lambda^1 u_1 \qquad x = \mu^1 v_1$$
$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 \qquad v_1 = \beta_1^1 u_1$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^1) \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = (\mu^1)$$
$$\mu^1 = \alpha_1^1 \lambda^1 \qquad \lambda^1 = \beta_1^1 \mu^1$$

$$(\mu^1)_{\mathcal{B}'} = [\alpha_1^1](\lambda^1)_{\mathcal{B}}$$
$$(\lambda^1)_{\mathcal{B}} = [\beta_1^1](\mu^1)_{\mathcal{B}'}$$

$$(\mu^1)_{\mathcal{B}'} = [\alpha_1^1][\beta_1^1](\mu^1)_{\mathcal{B}'}$$
$$[\alpha_1^1][\beta_1^1] = I$$

Maths+1

$$x = \lambda^1 u_1 \qquad x = \mu^1 v_1$$
$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 \qquad v_1 = \beta_1^1 u_1$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^1) \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = (\mu^1)$$
$$\mu^1 = \alpha_1^1 \lambda^1 \qquad \lambda^1 = \beta_1^1 \mu^1$$

$$(\mu^1)_{\mathcal{B}'} = [\alpha_1^1](\lambda^1)_{\mathcal{B}}$$
$$(\lambda^1)_{\mathcal{B}} = [\beta_1^1](\mu^1)_{\mathcal{B}'}$$

$$(\mu^1)_{\mathcal{B}'} = [\alpha_1^1][\beta_1^1](\mu^1)_{\mathcal{B}'}$$
$$[\alpha_1^1][\beta_1^1] = I$$

$$([\alpha_1^1])^{-1} = [\beta_1^1]$$

Maths+1

$x = 4u_1$
$u_1 = 0,5v_1$

$x = 2v_1$
$v_1 = 2u_1$

$[x]_{\mathcal{B}} = (4)$

$[x]_{\mathcal{B}'} = (2)$

$(\mu^1)_{\mathcal{B}'} = [\alpha^1_1](\lambda^1)_{\mathcal{B}}$
$(\lambda^1)_{\mathcal{B}} = [\beta^1_1](\mu^1)_{\mathcal{B}'}$

$(2)_{\mathcal{B}'} = [\frac{1}{2}](4)_{\mathcal{B}}$
$(4)_{\mathcal{B}} = [2](2)_{\mathcal{B}'}$

Changement de base en dimension 2

$\mathcal{B} = \{u_1, u_2\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$

$x = \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 \qquad x = \mu^1 v_1 + \mu^2 v_2$

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$$
$$x = \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 \qquad x = \mu^1 v_1 + \mu^2 v_2$$

$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_1^2 v_2 \qquad v_1 = \beta_1^1 u_1 + \beta_1^2 u_2$$
$$u_2 = \alpha_2^1 v_1 + \alpha_2^2 v_2 \qquad v_2 = \beta_2^1 u_1 + \beta_2^2 u_2$$

Maths+1

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$$
$$x = \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 \qquad x = \mu^1 v_1 + \mu^2 v_2$$

$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_1^2 v_2 \qquad v_1 = \beta_1^1 u_1 + \beta_1^2 u_2$$
$$u_2 = \alpha_2^1 v_1 + \alpha_2^2 v_2 \qquad v_2 = \beta_2^1 u_1 + \beta_2^2 u_2$$

$$x = \lambda^1(\alpha_1^1 v_1 + \alpha_1^2 v_2) + \lambda^2(\alpha_2^1 v_1 + \alpha_2^2 v_2)$$
$$x = (\lambda^1\alpha_1^1 + \lambda^2\alpha_2^1)v_1 + (\lambda_1\alpha_1^2 + \lambda^2\alpha_2^2)v_2$$

Maths+1

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$$
$$x = \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 \qquad x = \mu^1 v_1 + \mu^2 v_2$$

$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_1^2 v_2 \qquad v_1 = \beta_1^1 u_1 + \beta_1^2 u_2$$
$$u_2 = \alpha_2^1 v_1 + \alpha_2^2 v_2 \qquad v_2 = \beta_2^1 u_1 + \beta_2^2 u_2$$

$$x = \lambda^1(\alpha_1^1 v_1 + \alpha_1^2 v_2) + \lambda^2(\alpha_2^1 v_1 + \alpha_2^2 v_2)$$
$$x = (\lambda^1\alpha_1^1 + \lambda^2\alpha_2^1)v_1 + (\lambda_1\alpha_1^2 + \lambda^2\alpha_2^2)v_2$$

$$\mu^1 = \alpha_1^1\lambda^1 + \alpha_2^1\lambda^2$$
$$\mu^2 = \alpha_1^2\lambda^1 + \alpha_2^2\lambda^2$$

Maths+1

$$[u_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix} \qquad [u_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu^1 &= \alpha_1^1 \lambda^1 + \alpha_2^1 \lambda^2 \\ \mu^2 &= \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda^2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

Matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ (terminologie américaine) :

$$[u_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix} \quad [u_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix}$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix}$$

$$[x]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} [x]_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\beta^1_1 & \beta^1_2\\ \beta^2_1 & \beta^2_2\end{bmatrix} \begin{pmatrix}\mu^1\\ \mu^2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\begin{pmatrix}\mu^1\\ \mu^2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}\alpha^1_1 & \alpha^1_2\\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2\end{bmatrix} \begin{pmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}\alpha^1_1 & \alpha^1_2\\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2\end{bmatrix} \qquad P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\beta^1_1 & \beta^1_2\\ \beta^2_1 & \beta^2_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\beta^1_1 & \beta^1_2\\ \beta^2_1 & \beta^2_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha^1_1 & \alpha^1_2\\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2\end{bmatrix} \begin{pmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)^{-1}$$

Maths+1

$$u_1 = (\text{-}1, 2) \qquad v_1 = (1, 0)$$
$$u_2 = (2, 1) \qquad v_2 = (1, 1)$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Étape 1 : chercher les composantes des vecteurs de la première base dans la seconde base :
$[u_1]_{\mathcal{B}'} \quad [u_2]_{\mathcal{B}'}$

Étape 2 : appliquer la formule de changement de base :
$[x]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[x]_{\mathcal{B}}$

$$u_1 = (\text{-}1, 2) \qquad v_1 = (1, 0)$$
$$u_2 = (2, 1) \qquad v_2 = (1, 1)$$

Étape 1 : exprimons les vecteurs des deux bases dans la base canonique, on peut alors écrire que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\text{-}1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\text{-}1} \begin{pmatrix} \text{-}1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{-}1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{-}1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = (\text{-}1, 2) \qquad v_1 = (1, 0)$$
$$u_2 = (2, \text{-}1) \qquad v_2 = (1, 1)$$

Étape 1 : tous calculs faits :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \text{-}3 & 3 \\ 2 & \text{-}1 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : $[x]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[x]_{\mathcal{B}}$

$$\begin{pmatrix} \text{-}3 & 3 \\ 2 & \text{-}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \text{-}1 \end{pmatrix}$$

Changement de base en dimension n

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$
$$x = \lambda^i u_i \qquad x = \mu^i v_i$$

Maths+1

Changement de base en dimension n

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$

$$x = \lambda^i u_i \qquad x = \mu^i v_i$$

$$u_i = \alpha_i^j v_j \qquad v_i = \beta_i^j u_j$$

Maths+1

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$
$$x = \lambda^i u_i \qquad x = \mu^i v_i$$
$$u_i = \alpha_i^j v_j \qquad v_i = \beta_i^j u_j$$

$$x = \lambda^i(\alpha_i^j v_j)$$

Maths+1

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$
$$x = \lambda^i u_i \qquad x = \mu^i v_i$$
$$u_i = \alpha_i^j v_j \qquad v_i = \beta_i^j u_j$$

$$x = \lambda^i (\alpha_i^j v_j)$$
$$x = (\alpha_i^j \lambda^i) v_j$$

Maths+1

Changement de base en dimension n

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$

$$x = \lambda^i u_i \qquad x = \mu^i v_i$$

$$u_i = \alpha_i^j v_j \qquad v_i = \beta_i^j u_j$$

$$x = \lambda^i(\alpha_i^j v_j)$$

$$x = (\alpha_i^j \lambda^i) v_j$$

$$\mu^j = \alpha_i^j \lambda^i$$

$$\mathcal{B} = \{u_i\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_i\}$$
$$x = \lambda^i u_i \qquad x = \mu^j v_j$$
$$u_i = \alpha_i^j v_j \qquad v_i = \beta_i^j u_j$$

$$x = \lambda^i(\alpha_i^j v_j)$$
$$x = (\alpha_i^j \lambda^i) v_j$$

$$\mu^j = \alpha_i^j \lambda^i$$
$$\mu^i = \alpha_j^i \lambda^j$$

$$u_i = \alpha_i^k v_k \qquad\qquad v_k = \beta_k^j u_j$$

Maths+1

$$u_i = \alpha_i^k v_k \qquad v_k = \beta_k^j u_j$$

$$u_i = \alpha_i^k (\beta_k^j u_j)$$
$$u_i = (\alpha_i^k \beta_k^j) u_j$$

$$u_i = \alpha_i^k v_k \qquad v_k = \beta_k^j u_j$$

$$u_i = \alpha_i^k(\beta_k^j u_j)$$
$$u_i = (\alpha_i^k \beta_k^j) u_j$$

$$u_i = \delta_i^j u_j$$

$$u_i = \alpha_i^k v_k \qquad v_k = \beta_k^j u_j$$

$$u_i = \alpha_i^k (\beta_k^j u_j)$$
$$u_i = (\alpha_i^k \beta_k^j) u_j$$

$$u_i = \delta_i^j u_j$$

$$\alpha_i^k \beta_k^j = \delta_i^j$$

Prochain épisode

Préparation à la dualité (espace dual, base duale, bidual...)

Aider la chaîne

- Pouce bleu ;
- S'abonner à la chaîne ;
- Partager sur les réseaux sociaux ;
- Commenter la vidéo ;
- Nous rejoindre sur FB, Instagram, Twitter ;
- Nous aider sur `tipeee.com`