

www.mathsplusun.com

*Une initiation au calcul tensoriel*

#5. Formes linéaires

Éric Pruvost – eric75p@yahoo.fr

Mathplusun

Avril 2020

Maths+1



# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## Giuseppe PEANO




(1858-1932)

*Mathématicien et linguiste italien,  
il participa à l'axiomatisation des espaces vectoriels*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## Pré-requis

Maths-1




#01

En route vers la relativité générale

### Calcul tensoriel

L'opérateur  $\Sigma$

Maths-1




#02

En route vers la relativité générale

### Calcul tensoriel

La convention d'Einstein

Maths-1




#03

En route vers la relativité générale

### Calcul tensoriel

Espaces vectoriels

Maths-1



#04

En route vers la relativité générale

### Calcul tensoriel

Changement de base

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Objectifs & thèmes abordés*

*Comprendre les formes linéaires dans la perspective de la dualité de l'épisode 6*

### Thèmes abordés

- Morphisme en algèbre générale;
- Applications linéaires;
- Matrices et applications linéaires
- Formes linéaires.

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Objectifs & thèmes abordés*

*Comprendre les formes linéaires dans la perspective de la dualité de l'épisode 6*

### **Thèmes abordés**

- Morphisme en algèbre générale;
- Applications linéaires;
- Matrices et applications linéaires;
- Formes linéaires.

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

Nous nous limitons aux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et plus particulièrement nous raisonnerons sur  $\mathbb{R}^n$ .

Mais les résultats s'étendent aux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

## *Morphismes algèbre générale*

*Cette partie est indépendante des espaces vectoriels  
Seules les notions jugées pertinentes pour la suite sont exposées ici.*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : structures algébriques*

Une **structure algébrique** est un ensemble muni d'une ou de plusieurs opérations, exemples :

- $(\mathbb{N}, +)$
- $(\mathbb{Z}, \times)$
- $(\mathbb{R}, +, \times)$
- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$
- $(\mathbb{C}, +, \cdot, \times)$
- etc.

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : LCI & LCE*

Les « lois », les opérations sont appelées des **lois de compositions** si ce sont des applications de  $K \times E \rightarrow E$  et plus précisément des :

- **Lois de compositions internes** si  $K = E$  :

$$E \times E \rightarrow E$$

*Par exemple l'addition dans  $\mathbb{N}$*



# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : LCI & LCE*

Les « lois », les opérations sont appelées des **lois de compositions** si ce sont des applications de  $K \times E \rightarrow E$  et plus précisément des :

- **Lois de compositions internes** si  $K = E$  :

$$E \times E \rightarrow E$$

*Par exemple l'addition dans  $\mathbb{N}$*

- **Lois de compositions externes** si  $K \neq E$  :

$$K \times E \rightarrow E$$

*Par exemple la multiplication d'un vecteur par un scalaire*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : définition*

De la même façon que l'on définit des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut définir et étudier les **applications** d'un ensemble  $E \rightarrow F$ .

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : définition*

De la même façon que l'on définit des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut définir et étudier les **applications** d'un ensemble  $E \rightarrow F$ .

Plus précisément si  $(E, \star)$  et  $(F, \diamond)$  sont des structures algébriques, on va s'intéresser à un type particulier d'applications  $E \rightarrow F$ , celles qui présentent la propriété suivante :

$$\forall x, y \in E, f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : définition*

De la même façon que l'on définit des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut définir et étudier les **applications** d'un ensemble  $E \rightarrow F$ .

Plus précisément si  $(E, \star)$  et  $(F, \diamond)$  sont des structures algébriques, on va s'intéresser à un type particulier d'applications  $E \rightarrow F$ , celles qui présentent la propriété suivante :

$$\forall x, y \in E, f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

De telles applications sont appelées des **morphismes**.

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : injection, surjection, bijection*

Une application peut être :

- **Injective**

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- **Surjective**

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

- **Bijective**

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$



*Applications, injections, surjections, bijections*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : vocabulaire*

	$(E, \star) \rightarrow (F, \diamond)$	$(E, \star) \rightarrow (E, \star)$
application	<b>(homo)morphisme</b>	<b>endomorphisme</b>
bijektivité	<b>isomorphisme</b>	<b>automorphisme</b>

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : vocabulaire*

	$(E, \star) \rightarrow (F, \diamond)$	$(E, \star) \rightarrow (E, \star)$
application	<b>(homo)morphisme</b>	<b>endomorphisme</b>
bijektivité	<b>isomorphisme</b>	<b>automorphisme</b>

### Exemples d'isomorphismes

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$$

$$\exp(x + x') = \exp(x) \times \exp(x')$$

$$(\mathbb{R}_+^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

$$\ln(xx') = \ln(x) + \ln(x')$$

### **Un théorème important**

Soient  $(E, \star)$  et  $(F, \diamond)$  deux groupes et soit  $f$  un homomorphisme de  $E \rightarrow F$  alors :

$$f(0_E) = 0_F$$

### Un théorème important

Soient  $(E, \star)$  et  $(F, \diamond)$  deux groupes et soit  $f$  un homomorphisme de  $E \rightarrow F$  alors :

$$f(0_E) = 0_F$$

### Corollaire

Sous les mêmes hypothèses l'image du symétrique de  $x$  est le symétrique de l'image de  $x$  :

$$\forall x \in E, f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : noyau & image*

### **Image**

Soient  $(E, \star)$  et  $(F, \diamond)$  deux groupes et soit  $f$  un homomorphisme de  $E \rightarrow F$ , alors  $f(E) \subset F$  est un sous-groupe de  $F$  appelé **image** de  $E$  par  $f$  et se note  $\text{Im}(f)$  :

$$\text{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E, f(x) = y\}$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : noyau & image*

### Image

Soient  $(E, \star)$  et  $(F, \diamond)$  deux groupes et soit  $f$  un homomorphisme de  $E \rightarrow F$ , alors  $f(E) \subset F$  est un sous-groupe de  $F$  appelé **image** de  $E$  par  $f$  et se note  $\text{Im}(f)$  :

$$\text{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E, f(x) = y\}$$

### Noyau

Sous les mêmes hypothèses, le sous-ensemble de  $E$  des éléments ayant pour image  $0_F$  est un sous-groupe de  $E$  appelé **noyau** de  $f$  et se note  $\text{Ker}(f)$  :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

### Attention aux notations

Notation	signification	bijektivité
$x^{-1}$	élément symétrique	
$(f(x))^{-1}$	élément symétrique de l'image	
$f^{-1}$	application réciproque	oui
$f^{-1}(x)$	antécédent de $x$	oui
$f^{-1}(\{x\})$	ensemble des antécédents	

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : groupes isomorphes*

Soient  $(E, \star)$  et  $(F, \diamond)$  deux groupes, s'il existe un isomorphisme (homomorphisme bijectif) entre ces deux groupes alors on dit que ces deux groupes sont **isomorphes** et l'on écrira :

$$E \sim F$$

On dit aussi parfois que deux ensembles  $E$  et  $F$  (sans référence à une structure algébrique particulière) sont isomorphes s'il existe une bijection entre eux.

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Morphismes : conditions d'injectivité et de surjectivité*

### **Théorème**

Soient  $(E, \star)$  et  $(F, \diamond)$  deux groupes, soit  $f: E \rightarrow F$  un morphisme de groupe alors :

- $f$  est **injective** si et seulement si :  
 $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ ;
- $f$  est **surjective** si et seulement si :  
 $\text{Im}(f) = F$ .

## *Applications linéaires* *algèbre linéaire*

*Seules les notions jugées pertinentes pour la suite sont exposées ici*  
*On se limitera aux dimensions finies*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## Applications linéaires

*En analyse réelle, on étudie les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en algèbre linéaire (théorie qui englobe l'étude des espaces vectoriels) on va également étudier des « fonctions ».*

**Applications de  $(E, +, \cdot)$  dans  $(F, +, \cdot)$ ,  $f \in F^E$**

$$f: E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x)$$

### Exemple

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x + 3, x + y^2)$$

*Mais en algèbre linéaire, on va se limiter aux **applications linéaires**.*

### ***Que veut dire linéaire ?***



# Que veut dire linéaire ?

## Définition

Un « système » est dit *linéaire* si :

- Lorsqu'une entrée est multipliée par un nombre, alors la sortie correspondante est multipliée par ce même nombre  
 $s(\lambda x) = \lambda s(x)$
- La transformée de la somme de deux entrées est la somme des deux sorties associées :  $s(x_1 + x_2) = s(x_1) + s(x_2)$

# Que veut dire linéaire ?

## Définition

Un « système » est dit *linéaire* si :

- Lorsqu'une entrée est multipliée par un nombre la sortie correspondante est multipliée par ce même nombre  
 $s(\lambda x) = \lambda s(x)$
- La transformée de la somme de deux entrées est la somme des deux sorties associées :  $s(x_1 + x_2) = s(x_1) + s(x_2)$

## Questions

Quelles sont les entrées qui donnent zéro en sortie du système ?

Quelles sont toutes les sorties possibles du système ?

### Giuseppe PEANO



(1858-1932)

*Il est le premier mathématicien à axiomatiser les espaces vectoriels en dimension finie dès 1888, on lui doit également l'axiomatisation des applications linéaires et le lien entre applications linéaires et matrices.*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Applications linéaires*



*Publié en 1888, c'est dans cet ouvrage que Peano axiomatise les applications linéaires en dimension finie.*

**Une application de  $(E, +, \cdot)$  dans  $(F, +, \cdot)$**

$$f: E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x)$$

**Une application linéaire de  $E$  dans  $F$**

$$\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Une application linéaire est donc un (homo)morphisme de groupe additif (donc :  $f(0_E) = 0_F$ ) compatible avec la multiplication externe.

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Applications linéaires*

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel  $E \rightarrow F$  est noté :  $\mathcal{L}(E, F)$ .

$$\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$$

$(\mathcal{L}(E, E), \circ)$  est un magma

La composée d'une AL par une AL est une AL

$(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est un espace vectoriel.

### Définition importante

On appelle **rang** d'une application linéaire la dimension de l'image de  $f$ :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Applications linéaires*

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel  $E$  sur lui-même est noté :  $\mathcal{L}(E)$ .

L'ensemble des automorphismes sur un espace vectoriel est noté  $GL(E)$  car  $(GL(E), \circ)$  est un groupe.

### **Théorème fondamental dans $\mathbb{R}^p$**

Une application  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est linéaire si et seulement si il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_{np}$  telle que :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, [f(\mathbf{x})] = A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Avec  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$  et  $f(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_n)$ .

### **Théorème fondamental**

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie  $p$  et  $n$ .

Soit  $\mathcal{B}_E$  une base de  $E$  et soit  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ .

Soit  $f: E \rightarrow F$ , alors  $f$  est une application linéaire si et seulement si il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_{np}$  telle que :

$$\forall \mathbf{x} \in E, [f(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}_F} = A \times [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_E}$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## Applications linéaires : lien matrice & applications linéaires

### Théorème fondamental

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie  $p$  et  $n$ .

Soit  $\mathcal{B}_E$  une base de  $E$  et soit  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ .

Soit  $f: E \rightarrow F$ , alors  $f$  est une application linéaire si et seulement si il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_{np}$  telle que :

$$\forall x \in E, [f(x)]_{\mathcal{B}_F} = A \times [x]_{\mathcal{B}_E}$$

### Corollaire

Une application linéaire  $f: E \rightarrow F$  est définie entièrement et de manière unique par les images des vecteurs d'une base de  $E$ .

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

*Applications linéaires : convention de sommation*

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{u}_i \quad (1 \leq i \leq p)$$

$$f(\mathbf{x}) = f(x^i \mathbf{u}_i)$$

$$f(\mathbf{x}) = x^i f(\mathbf{u}_i)$$

$$f(\mathbf{x}) = x^i f_i \quad \text{avec } f_i = f(\mathbf{u}_i)$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

*Applications linéaires : deux notations équivalentes*

$$[f(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}_F} = A \times [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_E}$$

$$f(\mathbf{x}) = x^i f_i$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

*Applications linéaires : un peu de « concret »*

Les applications linéaires  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont exactement de la forme :

$$x \mapsto ax ; \quad a \in \mathbb{R}$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Applications linéaires : un peu de « concret »*

Les applications linéaires  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont exactement de la forme :

$$x \mapsto ax ; \quad a \in \mathbb{R}$$

Les applications linéaires de  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont exactement de la forme :

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2, a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}\mathbf{x}_2) ; \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$


$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

## *Formes linéaires*

*Le cours sur les tenseurs commence ici!*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

Maths-1




#01

En route vers la relativité générale

## Calcul tensoriel

L'opérateur  $\Sigma$

Maths-1




#02

En route vers la relativité générale

## Calcul tensoriel

La convention d'Einstein

Maths-1




#03

En route vers la relativité générale

## Calcul tensoriel

Espaces vectoriels

Maths-1



#04

En route vers la relativité générale

## Calcul tensoriel

Changement de base

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires



# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

Les formes linéaires constituent un cas particulier d'applications linéaires. Elles sont *a priori* très simples, presque banales.

Alors pourquoi s'y intéresser ? Qu'apportent-elles d'intéressant ?

D'ailleurs en premier cycle elles jouent un rôle mineur !

*Nous allons voir qu'elles représentent une autre façon de considérer les vecteurs, **un autre type de vecteur.***

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

- Formes & formes linéaires, exemples;
- Coefficients d'une forme linéaire;
- Matrice d'une forme linéaire;
- Noyau & image d'une forme linéaire;
- Changement de base.

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## Formes linéaires : définition d'une forme

Une **forme**  $\psi$  sur un  $\mathbb{K}$ -ev est une application :

$$\begin{aligned}\psi : E &\rightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{x} &\mapsto \psi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$\psi \in \mathbb{K}^E$$

Exemple :  $\psi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$

Exemple :  $\phi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  où  $\mathbf{y}$  est fixé

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## Formes linéaires : définition d'une forme linéaire

Une **forme linéaire**  $\phi$  sur un  $\mathbb{K}$ -ev est une forme qui vérifie :

$$\forall x, y \in E, \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$$

Contre-exemple :  $\psi(x) = \|x\|$  (inégalité triangulaire)

Contre-exemple :  $\psi((x, y)) = 3x^2 + y$

Contre-exemple :  $\psi((x, y)) = x + y + 1$  (image du vecteur nul)

Exemple :  $\phi(x) = \langle x, y \rangle$  où  $y$  est fixé

Exemple :  $\psi((x, y, z)) = x + y - z$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

*Formes linéaires : ensemble des formes linéaires*

L'ensemble des formes linéaires sur un  $\mathbb{K}$ -ev est noté :

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$$

*Nous verrons en détail le pourquoi de la deuxième notation dans l'épisode 6 consacré à la dualité algébrique.*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## Formes linéaires : groupe additif des formes linéaires

$(E^*, +)$  est un groupe commutatif,  $\forall \phi, \psi, \chi \in E^*$

- $\phi + \psi \in E^*$

*Loi de composition interne*

- $\phi + \psi = \psi + \phi$

*Commutativité*

- $\phi + (\psi + \chi) = (\phi + \psi) + \chi$

*Associativité*

- $\phi + \mathcal{O} = \phi$

*Élément neutre*

- $\exists \phi' \in E^*, \phi + \phi' = \mathcal{O}$

*Élément symétrique*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Formes linéaires : multiplication par un scalaire*

La multiplication d'une forme linéaire par un scalaire possède les propriétés suivantes :  $\forall \phi, \psi \in E^*, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

- $(\lambda\mu) \cdot \phi = \lambda \cdot (\mu \cdot \phi)$

*Compatibilité avec la multiplication dans  $\mathbb{K}$*

- $(\lambda + \mu) \cdot \phi = \lambda \cdot \phi + \mu \cdot \phi$

*Distributivité à droite sur l'addition dans  $\mathbb{K}$*

- $\lambda \cdot (\phi + \psi) = \lambda \cdot \phi + \lambda \cdot \psi$

*Distributivité à gauche sur l'addition vectorielle*

- $1_{\mathbb{K}} \cdot \phi = \phi$

*Compatibilité avec l'élément neutre de la multiplication dans  $\mathbb{K}$*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

*Formes linéaires : espace vectoriel des formes linéaires*

$(E^*, +, \cdot)$  est un espace vectoriel

Conséquence : *les formes linéaires sont des vecteurs*

Un autre regard sur les  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :

$$(E, +, \cdot)$$

$$((E, +, \cdot), (\mathbb{K}, +, \times))$$

Exemples :  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \dots$  (corps commutatifs)

Remarque : les  $\mathbb{Q}$ -ev sont assez exotiques, par exemple  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 1 mais un  $\mathbb{Q}$ -ev de dimension infinie!

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

*Coefficients d'une forme linéaire relativement à une base*

$$\mathcal{B} = (u_i)$$

$$x = \lambda^i u_i$$

$$\phi(x) = \phi(\lambda^i u_i)$$

$$\phi(x) = \lambda^i \phi(u_i)$$

$$\phi(x) = \lambda^i a_i \quad \text{avec } a_i = \phi(u_i)$$

$$\phi \equiv_{\mathcal{B}} (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

### **Théorème fondamental**

$$\mathcal{B} = (u_i)$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\lambda^i)$$

Les formes linéaires  $\phi$  d'un espace vectoriel  $E$  sont exactement de la forme (où  $a_i = \phi(u_i)$ ) :

$$\phi(x) = a_1\lambda^1 + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$$

Les formes linéaires correspondent donc à des expressions de type :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Formes linéaires : matrice d'une forme linéaire*

La matrice d'un forme linéaire est une matrice ligne :

$$[\phi(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = A \times [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = (a_1 \quad \dots \quad a_n) \times \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix}$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Formes linéaires : exemple*

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto 2x + y\end{aligned}$$

$$\text{Ker}(\phi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y = 0\} = \text{Vect}((1, -2))$$

Droite vectorielle passant par l'origine.

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Formes linéaires : exemple*

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto 5x + y - z\end{aligned}$$

$$\text{Ker}(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 5x + y - z = 0\}$$

Équation d'un plan vectoriel passant par l'origine.

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## *Formes linéaires : noyau et hyperplan*

Théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\text{Im}\phi) + \dim(\text{Ker}\phi)$$

$$\text{Im}\phi \subset \mathbb{R}$$

$\dim(\text{Im}\phi) = 0$ ,  $\phi$  est l'application nulle.

$$\dim(\text{Im}(\phi)) = 1$$

$\text{Im}\phi = \mathbb{R}$ ,  $\phi$  est surjective.

$\dim(\text{Ker}\phi) = n - 1$ , le noyau est un hyperplan

*Une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.*

### **Théorèmes**

*Tout hyperplan vectoriel est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

*$H$  est un hyperplan d'un  $ev$   $E$  s'il existe une forme linéaire non nulle  $\phi$  telle que  $H = \text{Ker}\phi$ .*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

## Formes linéaires : changement de base

$$\mathcal{B} = (u_i)$$

$$\mathcal{B}' = (v_i)$$

$$u_i = \beta_i^j v_j$$

$$v_i = \alpha_i^j u_j$$

$$x = \lambda^i u_i$$

$$x = \mu^i v_i$$

$$\phi(x) = \phi(\lambda^i u_i) = \phi(\mu^i v_i)$$

$$\phi(x) = \lambda^i \phi(u_i) = \mu^i \phi(v_i)$$


$$\phi(x) = \lambda^i a_i = \mu^i b_i$$

$$a_i = \beta_i^j b_j$$


$$b_i = \alpha_i^j a_j$$

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires


*Prochain épisode*



Maths+1



#05'



En route vers la relativité générale

## Calcul tensoriel

Covariance & contravariance

*vecteur, covecteur, composantes covariantes & contravariantes...*

# Calcul tensoriel – 5. Formes linéaires

*Aider la chaîne*

- Pouce bleu;
- S'abonner à la chaîne;
- Partager sur les réseaux sociaux;
- Commenter la vidéo;
- Nous rejoindre sur FB, Instagram, Twitter;
- Nous aider sur [tipeee.com](https://tipeee.com)