

COURS ET EXERCICES DE LA STATIQUE APPLIQUEE

Réalisé par Ir BTP CHIRIMWAMI
KASAMBAKANA Kefa (Peter)

EDITION 2024

COURS ET EXERCICES DE LA STATIQUE APPLIQUEE

Réalisé par Ir BTP CHIRIMWAMI
KASAMBAKANA Kefa (Peter)

EDITION 2024

Avant-propos:

Cher lecteur,

Bienvenue dans ce livre de cours et d'exercices corrigés sur la statique appliquée. La statique est une discipline fondamentale en ingénierie et en sciences appliquées, qui étudie les corps en équilibre et les forces qui agissent sur eux.

Ce livre a été conçu pour vous aider à renforcer vos connaissances et compétences en statique à travers une série d'exercices variés et progressifs.

Chaque exercice est accompagné d'une solution détaillée, vous permettant de vérifier vos réponses et de comprendre les différentes étapes de résolution. Je crois que ce livre vous sera utile dans votre apprentissage de la statique et qu'il vous aidera à maîtriser la RDM (Résistance des matériaux).

Je vous souhaite une excellente lecture et beaucoup de succès dans vos études.

auteur : Ir. BTP **CHIRIMWAMI KASAMBAKANA KEFA**

Appelé aussi : Ir. **Peter**

Numéro: **+243 899395678**

Facebook : Kefa Chirimwami

"Avec un entraînement dur et acharné même le raté peut dépasser le génie."

1. Introduction

- L'objectif du cours de statique appliquée
- Objectifs spécifiques de l'ouvrage
 - **L'objectif du cours de statique appliquée:**
Comprendre les principes fondamentaux de la statique et leur application dans l'analyse des structures et des systèmes mécaniques en équilibre.
 - **Objectifs spécifiques de l'ouvrage:**
Fournir aux étudiants des exercices variés et progressifs pour renforcer leur compréhension des concepts de statique.
Offrir des solutions détaillées pour chaque exercice afin d'aider les étudiants à vérifier leurs réponses et à comprendre les méthodes de résolution.
Présenter des applications pratiques de la statique pour illustrer son importance dans le domaine de l'ingénierie et de la mécanique.

2. Fondements de la statique

- Principes de base de la statique
- Forces et moments
- Équilibre des corps rigides
- Diagrammes de contraintes

3. Applications pratiques

- Exercices pratiques avec solutions détaillées
- Résolution de systèmes isostatiques
- Calculs de réactions aux appuis
- Forces externes et internes

- Diagrammes M,N,T
- Les treillis

Chapitre. 1

Première Partie : Théories et quelques rappels sur les propriétés Trigonométriques, Mathématiques et Physique

1. LA STATIQUE APPLIQUÉE

1.1 Définition :

La statique appliquée est une branche de la mécanique qui étudie les forces interne, externe et les moments agissant sur des objets immobiles ou en équilibre.

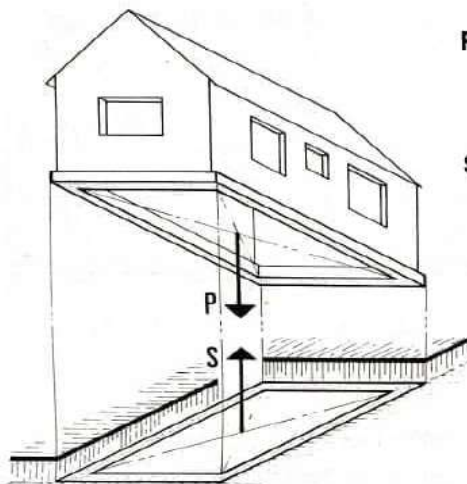
1.2 L'importance en terme d'ingénierie :

La statique appliquée est cruciale en ingénierie pour concevoir des structures et machines stables, sécurisées et fiables en calculant les forces et contraintes pour assurer l'équilibre et la résistance.

Exemple :

Principes généraux des constructions

□ PREMIER PRINCIPE : ÉQUILIBRE STATIQUE

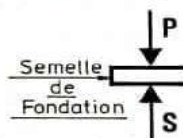


P = action des charges verticales :

- permanentes, (G)
- d'exploitation. (Q)

S = action ascendante du sol de fondation.

Schémas de principe



- La fondation sert à transmettre au sol toutes les charges

Condition d'équilibre

Principe des actions mutuelles :
Un bâtiment est en équilibre sous l'action des forces P et S .

Si ils sont égales (même intensité) et on les directions opposées.

Les charges permanentes (G) sont celles qui sont liées à la structure du bâtiment et qui restent constantes, telles que le poids des murs, du plancher(dalle), des poteaux, etc...

Les charges d'exploitation(Q), quant à elles varie et sont liées aux activités quotidiennes du bâtiment, comme les poids des meubles, des personnes, de la table, des machines, etc...

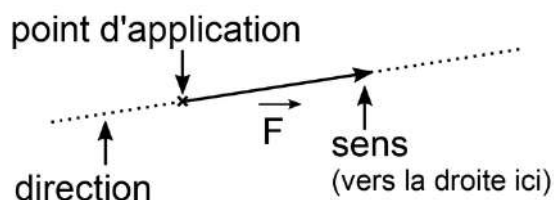
2. Fondements de la statique :

La statique est une branche de la mécanique qui étudie les corps au repos ou en mouvement rectiligne uniforme. Voici les principaux fondements de la statique :

2.1. Principes de base de la statique : En statique, on considère que les corps sont en équilibre, c'est-à-dire qu'ils ne subissent aucune accélération. Cela signifie que la somme des forces agissant sur un corps est nulle et que la somme des moments est également nulle.

2.2. Forces et moments : En statique, les forces sont des interactions qui agissent sur un corps et peuvent être représentées par des vecteurs.

- Les forces peuvent être classées en forces externes (comme la gravité, les forces de frottement, etc.) et forces internes (comme les forces de tension, de compression, etc.).



- le moment est la tendance d'une force à faire tourner un objet autour d'un point spécifique.

La formule $\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{d}$ représente le moment (M) d'une force (F) par rapport à un point donné, multiplié par la distance (d) entre le point et la ligne d'action de la force.

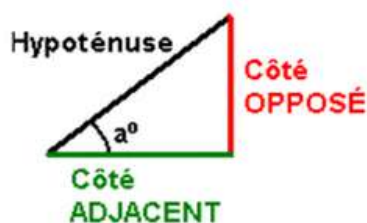
et il dépend à la fois de la force appliquée et de la distance à laquelle elle est appliquée par rapport au point de rotation.

2.3. Équilibre des corps rigides : Pour qu'un corps rigide soit en équilibre, il faut que la somme des forces qui lui sont appliquées soit nulle (principe de la première loi de Newton) et que la somme des moments par rapport à un point soit nulle (principe de la deuxième loi de Newton pour les rotations). Cela permet de déterminer les conditions d'équilibre d'un corps rigide soumis à des forces externes.

3. Quelques rappels des bases

3.1 Quelques rappels sur les propriétés trigonométriques(le triangle rectangle)

Dans le cours de Statique Appliquée nous allons utiliser quelques propriétés trigonométriques facile à comprendre et à retenir sur le triangle rectangle.



$$\sin a = \frac{\text{Côté OPPOSÉ}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos a = \frac{\text{Côté ADJACENT}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\text{Côté OPPOSÉ}}{\text{Côté ADJACENT}}$$

$$\text{Côté Adjacent} = \text{Hypoténuse} \times \cos a$$

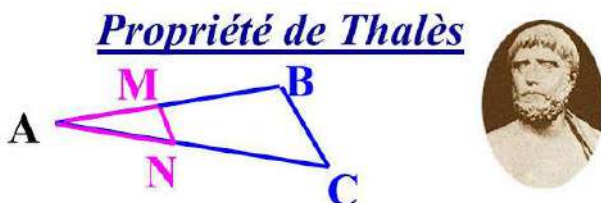
$$\text{Côté Opposé} = \text{Hypoténuse} \times \sin a$$

Et aussi à ne pas oublier la somme des deux angles dans un triangle rectangle donne 90° ou la somme des angles donne 180° donc si on a un cas où se trouve qu'un seul angle et qu'il faut trouver le deuxième angle si notre angle est par exemple $\alpha=35^\circ$ et que je ne connais pas β Je peux simplement faire :

$\alpha + \beta = 90^\circ$ or $\alpha = 35^\circ$ alors $35 + \beta = 90$ je peux directement tirer la valeur de β .

Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès est un théorème de géométrie plane, qui affirme qu'une droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle définit, avec les droites des deux autres côtés, un nouveau triangle dont les côtés sont proportionnels à ceux du premier.



Si dans les triangles **AMN** et **ABC** :

- **A, M et B sont alignés**
- **A, N et C sont alignés**
- **(MN) et (BC) sont parallèles.**

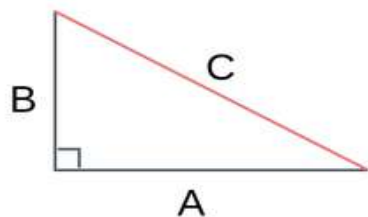
alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



Le théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est un théorème de géométrie euclidienne qui met en relation les longueurs des côtés dans un triangle rectangle. Il s'énonce fréquemment sous la forme suivante :

$$A^2 + B^2 = C^2$$



$$(C = \sqrt{A^2 + B^2})$$

3.2 Rappels sur les intégrales

3.2.1 Importance des intégrales dans le domaine d'ingénieur

Les intégrales et les dérivées jouent un rôle crucial dans le calcul des efforts intérieurs tels que l'effort tranchant et le moment fléchissant dans le domaine de l'ingénierie, en particulier en mécanique des structures.

Intégrale de fonctions usuelles

On constate que toute formule de dérivation est équivalente à une formule d'intégration. On obtient ainsi les intégrales de base :

| | |
|--|--|
| $\frac{d}{dx}(x) = 1$ | $\int dx = x + k$ |
| $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r$ | $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k$, où $r \neq -1$ |
| $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ | $\int e^x dx = e^x + k$ |
| $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ | $\int \cos x dx = \sin x + k$ |
| $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ | $\int \sin x dx = -\cos x + k$ |
| $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ | $\int \sec^2 x dx = \tan x + k$ |
| $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ | $\int \sec x \tan x dx = \sec x + k$ |
| ... | ... |

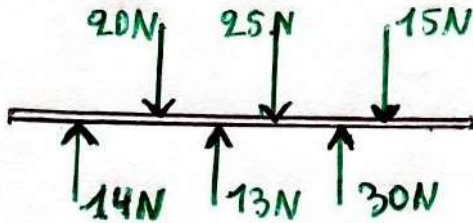
L'étudiant doit compléter et mémoriser.

3.3 Sortes de Forces

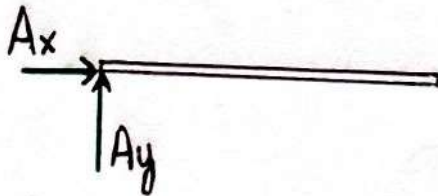
3.3.1 Forces extérieur

C'est sont les forces qui sollicitent la structure extérieurement, elles sont regroupés en deux :

- les actions : c'est sont les charges qui sollicitent la structure directement (parce que leurs valeurs sont connus). Exemple :



- les réactions : c'est sont les charges qui sollicitent la structure indirectement. Exemple :



3.3.2 Forces intérieur

Les forces intérieures, également appelées forces internes le MNT (le Moment fléchissant, l'effort normal et l'effort Tranchant) sont les forces qui agissent à l'intérieur d'une structure, telles qu'une poutre ou une poutre en treillis, en réponse aux charges externes appliquées sur la structure.

4. L'appuis

4.1 Définition : un appuis est Tout ce qui sert à maintenir quelque chose ou quelqu'un, à en assurer la solidité ou la stabilité.

4.1.2 Les équations d'équilibre indépendamment applicables

Les équations d'équilibre sont des principes fondamentaux de la statique qui permettent d'analyser les forces et les moments agissant sur un système en équilibre.

La première équation : $\sum F_x = 0$ ou $\sum F_H = 0$, exprime que la somme des forces horizontales est nulle, ce qui signifie que le système ne subit pas de déplacement horizontal.

La deuxième équation : $\sum F_y = 0$ ou $\sum F_V = 0$, indique que la somme des forces verticales est équilibrée, empêchant tout mouvement vertical.

Enfin, la troisième équation : $\sum M = 0$, stipule que la somme des moments autour d'un point est nulle, assurant la stabilité du système en rotation

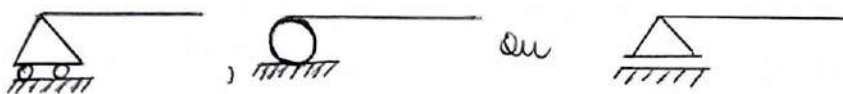
. En statique Appliquée nous allons utiliser ces trois équations d'équilibre

$$\sum F_x = 0 \text{ ou } \sum F_H = 0, \sum F_y = 0 \text{ ou } \sum F_V = 0 \text{ et } \sum M = 0$$

Ces équations sont indépendamment applicables et doivent être satisfaites pour garantir l'équilibre d'un système.

4.2 Sortes d'appuis

1. **L'APPUI MOBILE(ROULEAU)**: est un appui qui admet une seule inconnue suivant la verticale et il a 2 degré de liberté

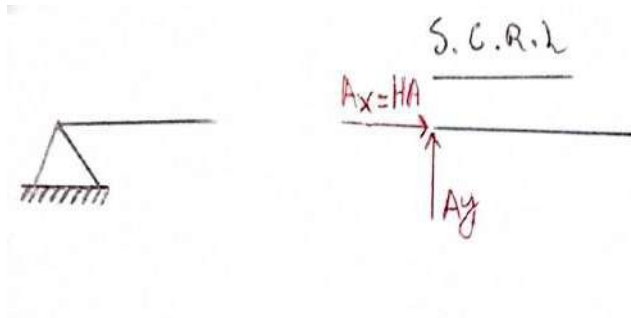


(S.C.R.L)

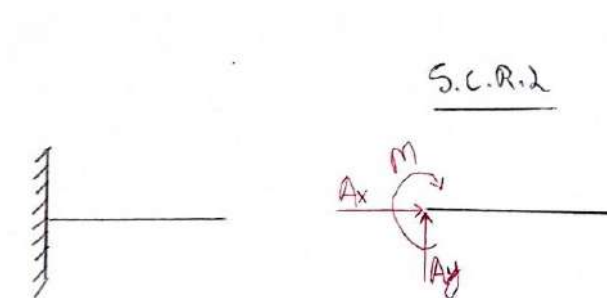
schéma du corps rendu libre

$$A = R_A = V_A = R_y$$

2. L'APPUI FIXE : est un appui qui admet 2 inconnu suivant l'horizontale et la verticale avec 1 seul degré de liberté



3. APPUI ENCASTRÉ : est un appui qui admet 3 inconnu, 2 suivant la translation (x et y) et 1 suivant la rotation (M)

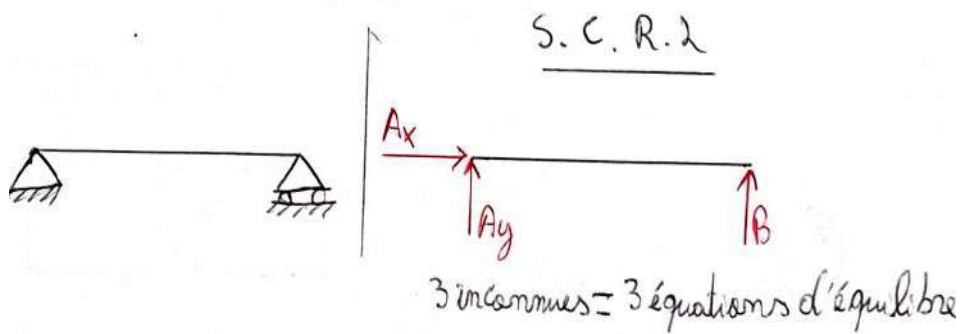


5. Sorte des structures

On a trois sortes de structures qui sont :

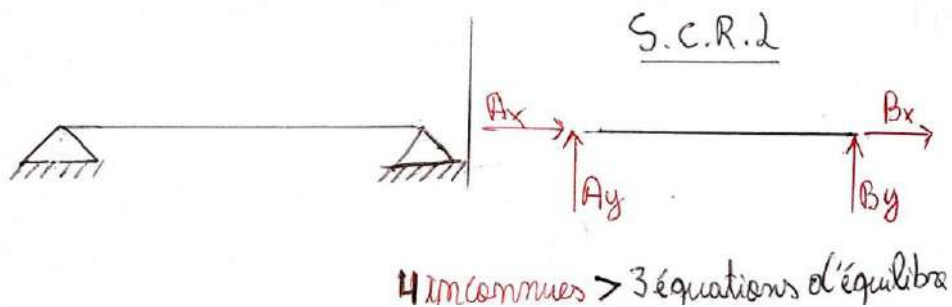
- **Structure isostatique** : c'est lorsque le nombre des composantes des réactions d'appuis est égal au nombre des équations d'équilibre indépendamment applicables

Exemple :



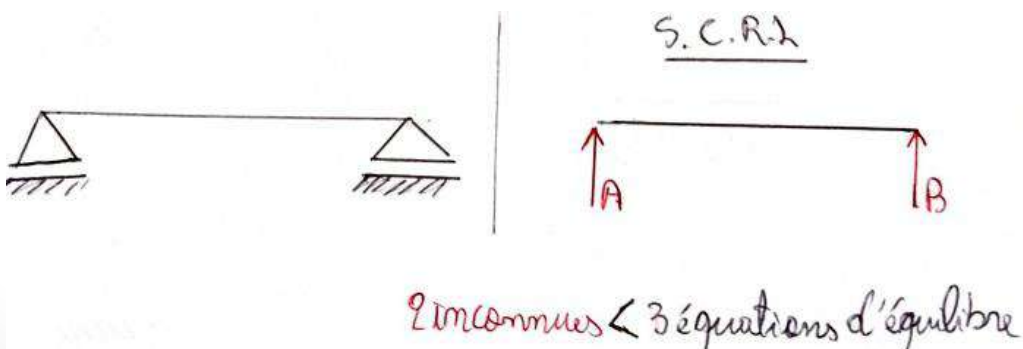
- **Structure Hyper statique** : c'est lorsque le nombre des composantes des réactions d'appuis est supérieur au nombre des équations d'équilibre indépendamment applicables.

Exemple :



- **Structure Hypostatique** : c'est lorsque le nombre des composantes des réactions d'appuis est inférieur au nombre des équations d'équilibre indépendamment applicables

Exemple :



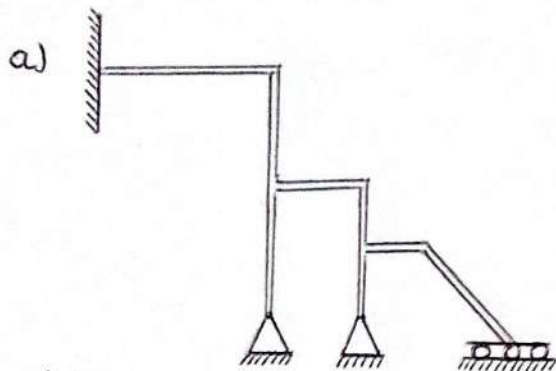
5.1. Le degré de liberté

Le degré de liberté d'une structure en génie civil représente le nombre de mouvements indépendants possibles pour la structure sans la rendre instable.

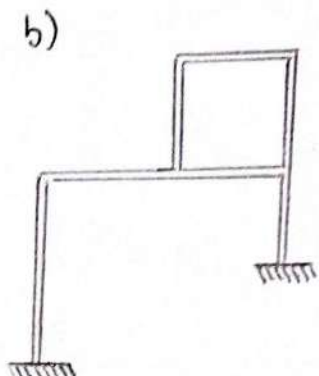
On le détermine de la manière suivante :

- **DDL = (Nombre des nœuds × 3) - (∑ des réactions d'appuis)** : Ceci représente le degré de liberté d'une structure, où chaque nœud a trois degrés de liberté potentiels (translations dans les directions x, y, et la rotation) voilà pourquoi il y a 3 et les réactions d'appui réduisent ces libertés.
- **DDL = (Nombre des nœuds × 3) - (∑ des réactions d'appuis) + 1** : Lorsqu'on ajoute une **articulation (rotule)** à la structure, cela introduit une liberté supplémentaire voilà pourquoi on fait + 1.
- **DDL = (Nombre des nœuds × 2) - (∑ des réactions d'appuis)** : Pour **un treillis**, la formule est simplifiée car les connexions entre les nœuds ne permettent que des mouvements de translation sans rotations c'est-à-dire qu'il n'y a pas des rotations dans un treillis.

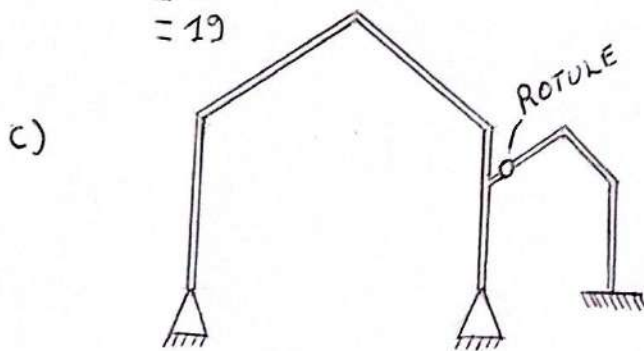
Exemple :



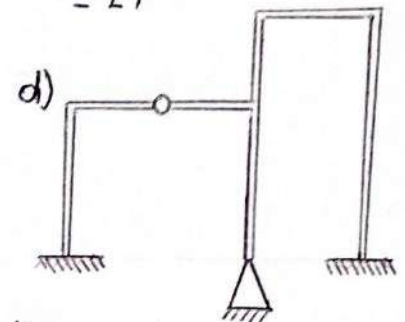
$$\begin{aligned} \text{a) } DDL &= (9 \times 3) - (3 + 2 + 2 + 1) \\ &= 27 - 8 \\ &= 19 \end{aligned}$$



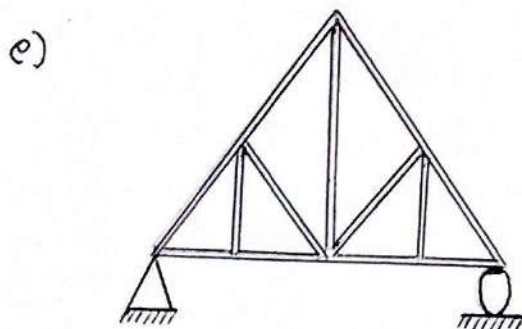
$$\begin{aligned} \text{b) } DDL &= (7 \times 3) - (3 + 3) \\ &= 21 - 6 \\ &= 15 \end{aligned}$$



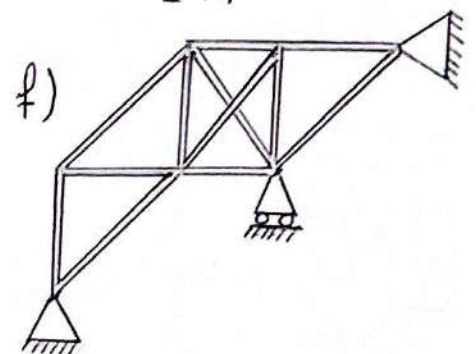
$$\begin{aligned} \text{c) } DDL &= (9 \times 3) - (2 + 2 + 3) + 1 \\ &= 27 - 7 + 1 \\ &= 21 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{d) } DDL &= (7 \times 3) - (3 + 2 + 3) + 1 \\ &= 21 - 8 + 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{e) } DDL &= (8 \times 2) - (2 + 1) \\ &= 16 - 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{f) } DDL &= (7 \times 2) - (2 + 1 + 2) \\ &= 14 - 5 \\ &= 9 \end{aligned}$$

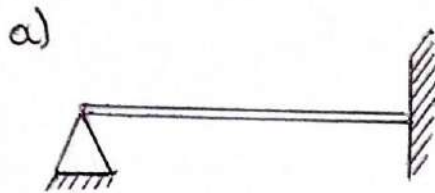
5.2. Le degré d'hyperstaticité

Le degré d'hyperstaticité en génie civil se réfère à la différence entre le nombre de réactions d'appui et le nombre minimal de ces réactions pour maintenir l'équilibre d'une structure.

Lorsqu'une structure est hyperstatique, elle a plus de supports que nécessaire pour équilibrer les charges appliquées. On l'a détermine de la manière suivante :

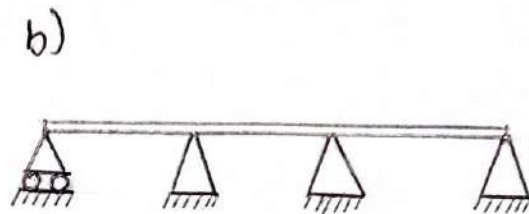
H = Nombre des réactions d'appuis - 3 : Équations d'équilibres

Exemple :



$$\begin{aligned} H &= (2+3) - 3 \\ &= 5 - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

La structure est deux fois hyperstatique.

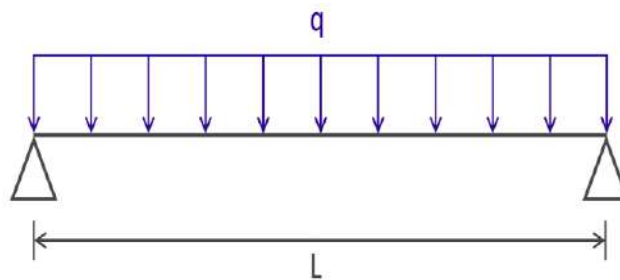


$$\begin{aligned} H &= (1+2+2+2) - 3 \\ &= 7 - 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

La structure est quatre fois hyperstatique.

6. Charge réparti, résultante et le centre de gravité

6.1 Charge réparti : c'est sont des charges qui sollicitent la structure d'une manière linéaire, mais ça dépend aussi car il y en a des charges repartis de manière triangulaire aussi et autres formes géométriques.

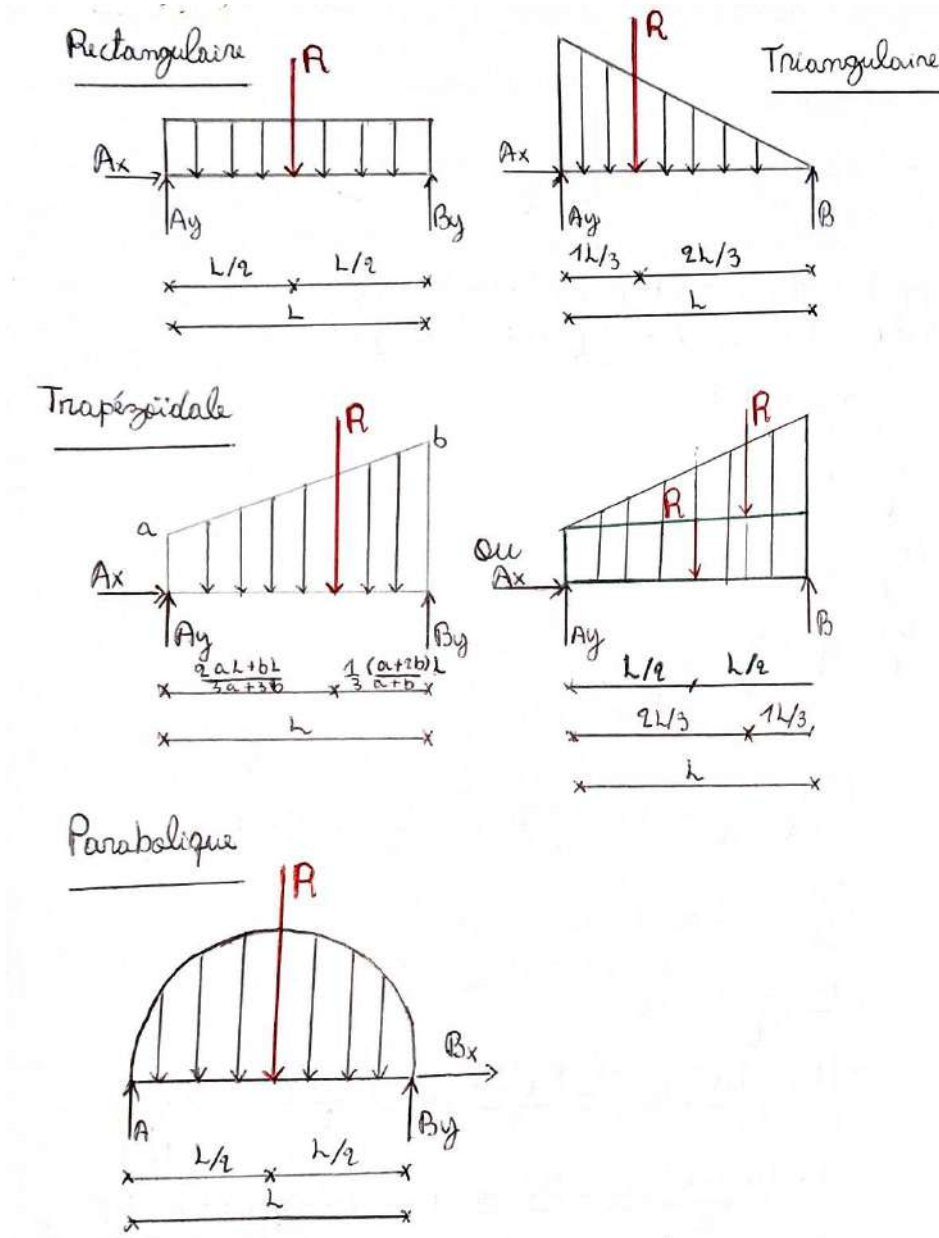


On la symplise par une lettre minuscule de l'alphabet français q ou p et a comme unité(N/m, t/m, kg/m...)

6.2. La Résultante (composition)

La résultante est la somme des forces agissant sur un objet, représentant la force totale qui peut être utilisée pour calculer le mouvement de l'objet en question en prenant en compte l'intensité et la direction de chaque force individuelle.

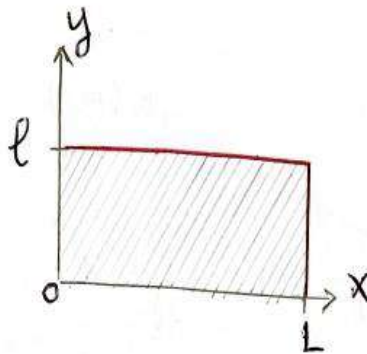
Exemple : la résultante est en rouge elle sera placé ainsi pour les charges repartis de manière :



6.3 Aire(Surface)

Pour déterminer la résultante nous aurons besoin des formules géométrie exemple : Aire du rectangle, Triangle rectangle, Trapèze...etc, Nous allons déterminer quelques Aires que nous allons beaucoup plus utiliser dans le cours de Statique on va le déterminer à l'aide des intégrales.

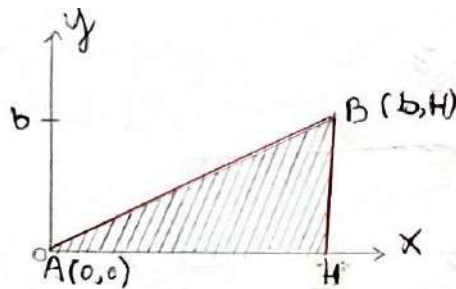
Soit l'intégrale double de la fonction représentant la surface du rectangle, déterminons son aire en intégrant sur les limites de ses côtés.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^l \int_0^L dx dy \\
 &= \int_0^l \left(\int_0^L dx \right) dy \\
 &= \int_0^l \left([x]_0^L \right) dy \\
 &= \int_0^l (L - 0) dy \\
 &= L \int_0^l dy \\
 &= L [y]_0^l \\
 &= L(l - 0)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = L \times l} \text{ ou } \boxed{Q = q \cdot l} \text{ L'aire du rectangle}$$

Pour l'aire du triangle rectangle on ne va pas utiliser l'intégrale double



On a une droite qui passe par deux point pour déterminer la fonction
On vas utiliser l'équation d'une droite passant par deux point :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{avec : } x_1 = 0, x_2 = b \text{ et } y_1 = 0, y_2 = H$$

$$y - 0 = \frac{H - 0}{b - 0} (x - 0)$$

$$y = \frac{Hx}{b}$$

On peut maintenant déterminer l'aire :

$$A = \int_0^b y \, dx = \int_0^b \frac{Hx}{b} \, dx = \frac{H}{b} \int_0^b x \, dx \quad \text{Or } x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$= \frac{H}{b} \left[\frac{x^{1+1}}{1+1} \right]_0^b$$

$$= \frac{H}{b} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b$$

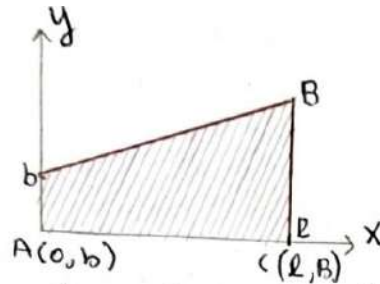
$$= \frac{H}{b} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right)$$

$$= \frac{H}{b} \cdot \frac{b^2}{2}$$

$$= \frac{H \cdot b}{2}$$

d'où $A = \frac{b \cdot H}{2}$ ou $Q = \frac{q \cdot l}{2}$ l'aire du triangle rectangle

On termine avec l'aire du trapèze :



On a l'équation d'une droite passant par 2 points:
 $A(0, b)$ et $C(L, B)$ avec: $x_1 = 0, y_1 = b$ et $x_2 = L, y_2 = B$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - b = \frac{B - b}{L - 0} (x - 0)$$

$$y = \frac{(B - b)x}{L} + b$$

$$y = \frac{Bx}{L} - \frac{bx}{L} + b$$

On peut maintenant déterminer l'aire:

$$A = \int_0^L y \, dx = \int_0^L \left(\frac{Bx}{L} - \frac{bx}{L} + b \right) dx = \int_0^L \frac{Bx}{L} dx - \int_0^L \frac{bx}{L} dx + \int_0^L b \, dx$$

$$= \frac{Bx^2}{2L} - \frac{bx^2}{2L} + bx$$

$$= \frac{Bx^2 - bx^2}{2L} + bx$$

$$= \left[\frac{Bx^2 - bx^2}{2L} + bx \right]_0^L = \frac{Bl^2 - bl^2}{2} + bl - \left(\frac{B \cdot 0^2 - b \cdot 0^2}{2L} + b \cdot 0 \right)$$

$$= l \cdot \left(\frac{Bl - bl}{2L} \right) + bl = \frac{Bl - bl}{2} + bl = \frac{Bl - bl + 2bl}{2} = \frac{Bl + bl}{2}$$

$$= \frac{Bl + bl}{2} = \frac{(B + b)l}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{A = \frac{(B + b)l}{2}} \text{ ou } \boxed{Q = \frac{(q_1 + q_2)l}{2}}$$

l'aire du Trapèze

6.4 CENTRE DE GRAVITÉ

Le centre de gravité est le point d'application de la résultante des forces de gravité ou de pesanteur.

NOTA : En statique appliquée, seule la coordonnée horizontale (X_G) du centre de gravité est souvent utilisée pour maintenir un objet stable, car seules les forces horizontales sont pertinentes dans des conditions d'équilibre statique.

$$X_G = \frac{1}{A} \int_a^b x p(x) dx$$

Avec $p(x)$ la fonction de la charge sur la structure et $A = l$ aire

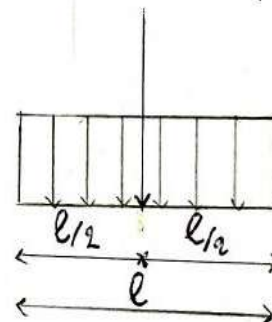
Pour un rectangle :

On sait que : $A = l \times l$ ou $Q = q \cdot l$

$P(x) = q$, avec $b = l$ et $a = 0$

$$\begin{aligned} X_G &= \frac{1}{q \cdot l} \int_0^l x q dx \\ &= \frac{1}{q \cdot l} q \int_0^l x dx \\ &= \frac{1}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l \\ &= \frac{1}{l} \cdot \frac{l^2}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{X_G = \frac{l}{2}}$$



Pour un triangle rectangle :

$$X_G = \frac{1}{\frac{q \cdot l}{2}} \int_0^l x \frac{q \cdot x}{l} dx$$

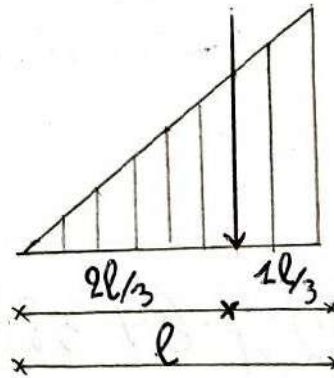
$$= 1 \cdot \frac{2}{q \cdot l} \int_0^l \frac{q x^2}{l} dx$$

$$= \frac{2}{q \cdot l} \cdot \frac{q}{l} \int_0^l x^2 dx$$

$$= \frac{2}{l^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l$$

$$= \frac{2}{l^2} \cdot \frac{l^3}{3}$$

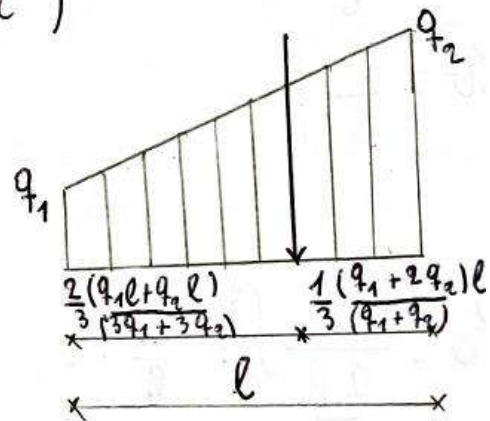
$$X_G = \frac{2l}{3}$$



Pour un trapèze :

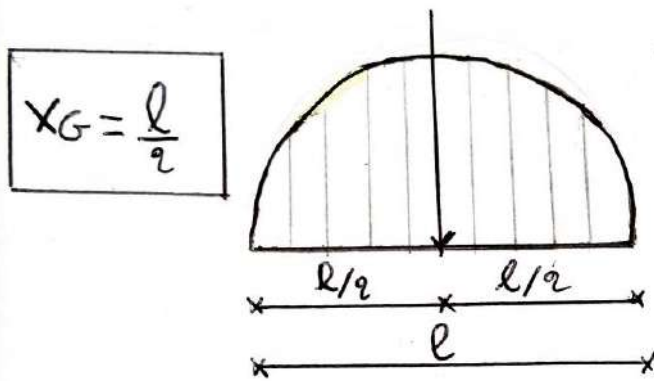
$$\begin{aligned}
 X_G &= \frac{1}{A} \int_0^l x y(x) \\
 &= \frac{1}{\frac{(q_1+q_2)l}{2}} \int_0^l x \left(\frac{q_2}{l}x - \frac{q_1}{l}x + q_1 \right) dx \\
 &= \frac{2}{q_1+q_2} \int_0^l \left(\frac{q_2}{l}x^2 - \frac{q_1}{l}x^2 + q_1x \right) dx \\
 &= \frac{2}{q_1+q_2} \left(\frac{q_2}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l - \frac{q_1}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l + q_1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l \right) \\
 &= \frac{2}{q_1+q_2} \left(\frac{q_2 l^3}{3l} - \frac{q_1 l^3}{3l} + \frac{q_1 l^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$X_G = \frac{1}{3} \frac{(q_1 + 2q_2)l}{(q_1 + q_2)}$$



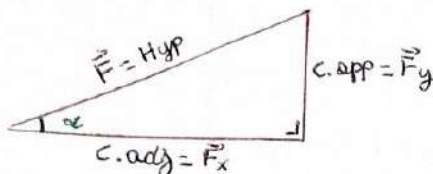
Pour un demi-cercle, le centre de gravité se situe à une distance égale de chaque extrémité du diamètre, qui est également le diamètre du cercle complet. Ainsi, **le centre de gravité du demi-cercle est situé à une distance égale à la moitié de la longueur du diamètre du cercle complet.**

C'est-à-dire :



7. Décomposition d'une force

Les ampleurs des composantes perpendiculaires d'une force peuvent être déterminées à partir des règles trigonométriques pour les triangles rectangles. Considérons la figure suivante d'un triangle rectangle qui a un angle α



$\cos \alpha = \frac{c. \text{adj}}{\text{Hyp}}$ si on cherche le côté adjacant on aura :

$$\sin \alpha = \frac{c. \text{opp}}{\text{Hyp}}$$

$$\boxed{c. \text{adj} = \text{Hyp} \cdot \cos \alpha}$$

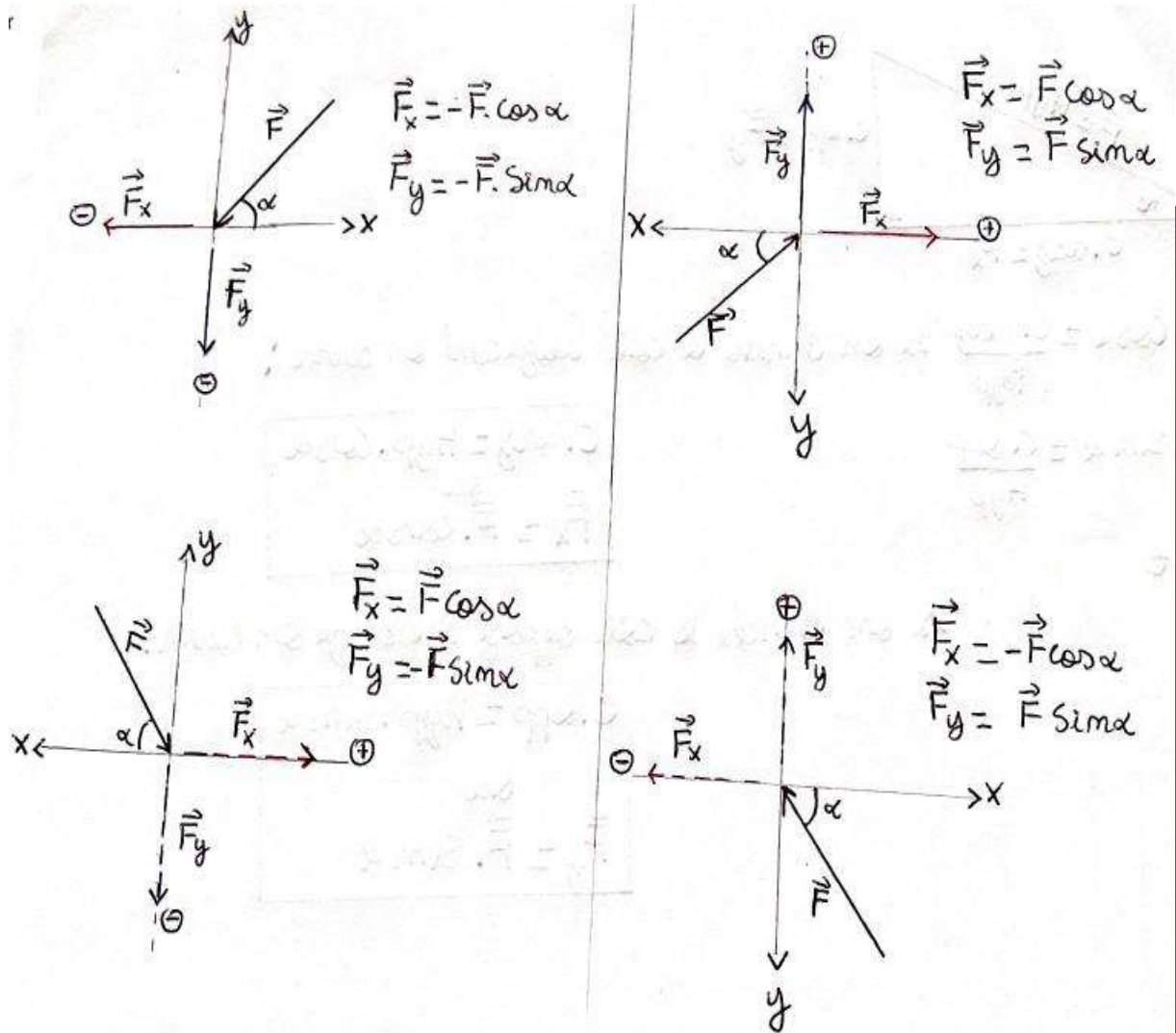
$$\vec{F}_x = \vec{F} \cdot \cos \alpha$$

si on cherche le côté opposé à l'angle on aura :

$$\boxed{c. \text{opp} = \text{hyp} \cdot \sin \alpha}$$

$$\vec{F}_y = \vec{F} \cdot \sin \alpha$$

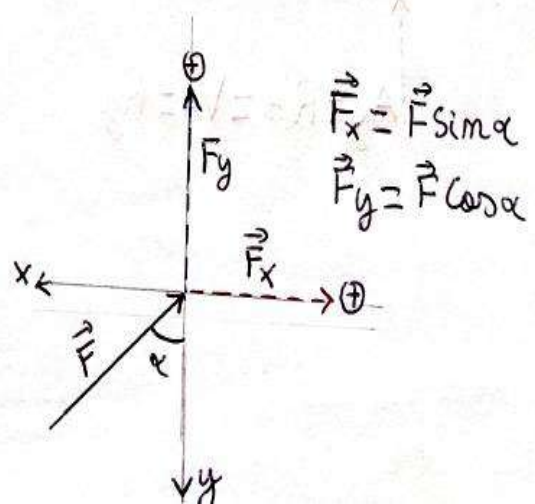
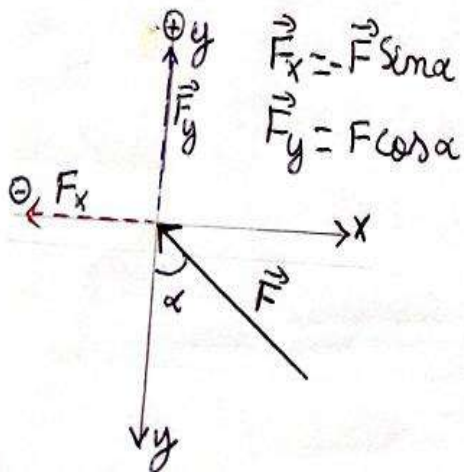
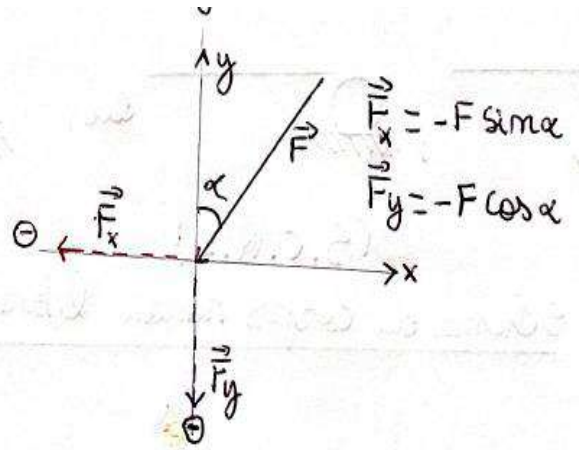
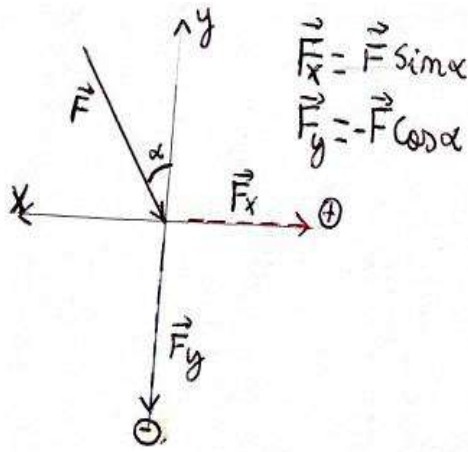
Prenons maintenant des exemples :



Les flèches représentant la force et ses composantes sont supposées se trouver dans un système de coordonnées où l'angle α est l'angle par rapport à l'axe du système.

NB: On a utilisé l'angle qui touche l'axe de x Prenons maintenant le deuxième cas si l'angle touche le côté de y.

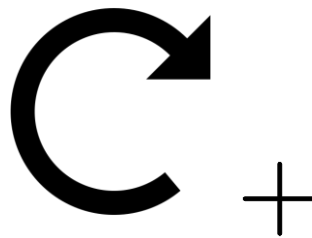
Et aussi si l'angle touche le côté des x c'est-à-dire que le côté Adjacent ce trouve sur l'axe est sur l'axe des x mais si le côté Adjacent touche l'axe des y c'est-à-dire que le côté Adjacent se trouve sur l'axe de y.



8. Calcul du moment

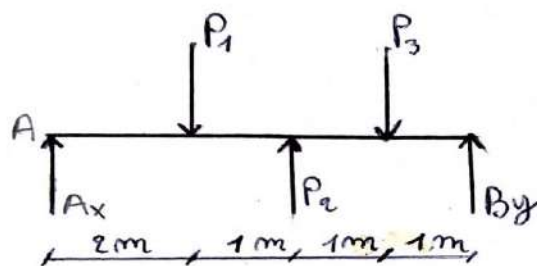
le moment est la tendance d'une force à faire tourner un objet autour d'un axe.

Il est défini comme le produit de la force appliquée par la distance perpendiculaire entre le point de rotation et la ligne d'action de la force il est aussi appelé couple de force.



NB : pour évaluer le moment, on va utiliser le sens horaire en considérant que les rotations dans le sens des aiguilles d'une montre sont positives, tandis que les rotations dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sont négatives.

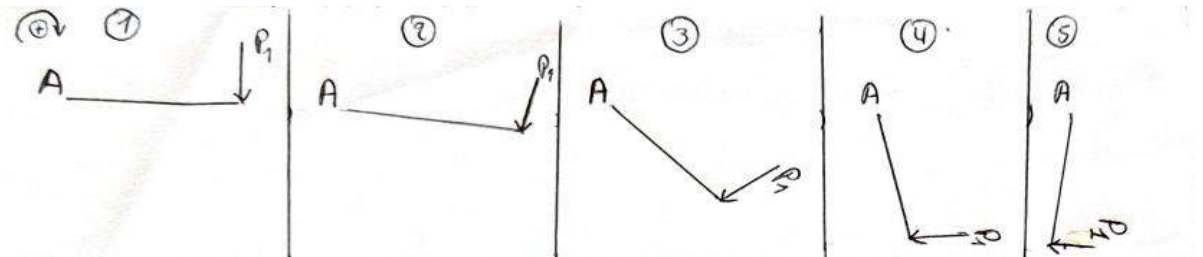
Exemple :



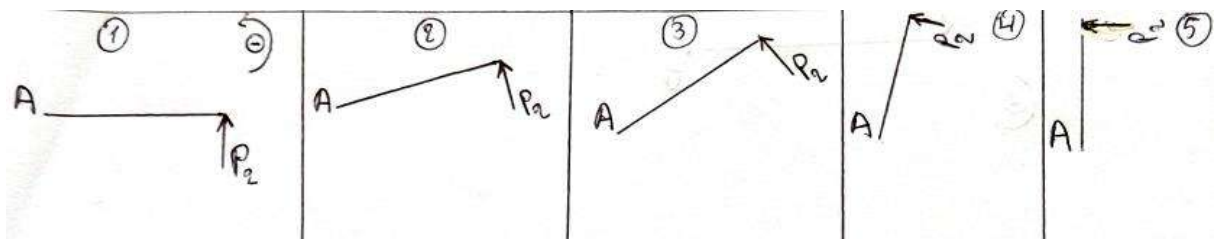
$$\sum M_A = 0,$$

$$+P_1 \times 2 - P_2 \times 3 + P_3 \times 4 - B_y \times 5 = 0$$

P_1 est positif parce que par rapport au point A la force P_1 a tendance a faire tourner la structure dans le sens des aiguilles d'une montre, petite illustration :



P_2 est négatif parce que par rapport au point A la force P_2 a tendance a faire tourner la structure dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, petite illustration :



NB : Là où on évalue le moment toutes les force qui sont appliqués dans c'est point sont nul.

A_x est annulé dans l'équation parce que on a évaluer le moment par rapport au point A et au point A on remarque que il y a une force qui s'applique qui est A_x .

Pourquoi $P_1 \times 2$ parce que la distance qui sépare la force qui est appliquée par rapport au point est de 2m

Pourquoi $P_2 \times 3$ parce que la distance qui sépare la force qui est appliquée par rapport au point est de $2\text{ m} + 1\text{ m} = 3\text{ m}$

Pourquoi $P_3 \times 4$ parce que la distance qui sépare la force qui est appliquée par rapport au point est de $2\text{ m} + 1\text{ m} + 1\text{ m} = 4\text{ m}$ ainsi de suite

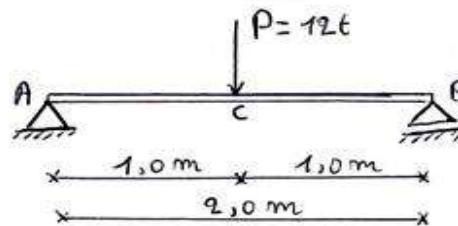
8. Marche à suivre pour déterminer les conditions d'équilibre d'une structure

- Vérification de l'isostaticité
- Schema du corps rendu libre (SCRL)
- Prélèvement des données importantes
- Faire la composition et la décomposition s'il y a lieu
- Appliquée les 3 équations d'équilibre
- Déterminer les efforts intérieur les M,N et T

Deuxième partie :
Exercices corrigés
1ère cas : Poutres horizontal,
charge réparti et calcul des
réactions d'appuis

Exercice 1

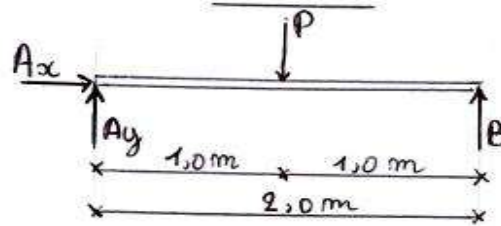
Déterminer les conditions d'équilibre de la structure suivante :



Vérification de l'isostaticité

3 réactions = 3 équations d'équilibre
La structure est isostatique

S.C.R.L



Données

$$P = 12 \text{ t}$$

Inconnues

$$A_x, A_y \text{ et } B$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$P_1 \times 1 - B \times 2 = 0$$

$$12 \times 1 - 2B = 0$$

$$12 - 2B = 0$$

$$-2B = -12$$

$$B = \frac{12}{2}$$

$$B = 6 \text{ t } (\uparrow)$$

$$2) \sum F_x = 0,$$

$$A_x = 0 \text{ t}$$

$$3) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P + B = 0$$

$$A_y - 12 + 6 = 0$$

$$A_y - 6 = 0$$

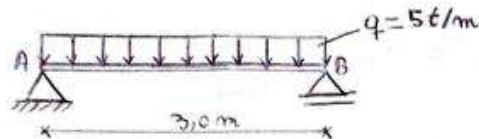
$$A_y = 6 \text{ t } (\uparrow)$$

NB: Après avoir déterminer les composantes inconnus des réactions d'appuis c'est mieux de mettre leurs vrai sens comme on l'a fait avec la composante B et A_y .

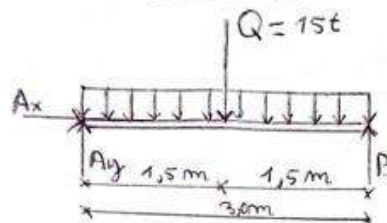
Pour l'appuie roule(simple) on peut écrire son inconnu comme B ou B_y car c'est un appui qui admet une seule inconnue pour le nommé sa dépend du point où il est.

Dans le cours de Statique Appliquée on va travailler que avec des structures isostatique, donc ce n'est sera plus utile dans d'autres exercices de vérifier l'isostaticité car les structures sont déjà isostatique

Exercice 2



S.C.R.L



| | | |
|------------|-------------------|-----------------------|
| Données | Inconnues | composants $q = 5t/m$ |
| $q = 5t/m$ | A_x, A_y et B | $Q = q \times l$ |

$$Q = 5t/m \times 3m$$

$$= 15t$$

$$X_G \text{ par rapport au point A} = \frac{l}{2} = \frac{3m}{2} = 1,5m$$

$$\text{Ou}$$

$$X_G \text{ au point A} = \frac{l}{2} = \frac{3m}{2} = 1,5m$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$Q \times 1,5 - B \times 3 = 0$$

$$15 \times 1,5 - 3B = 0$$

$$22,5 - 3B = 0$$

$$-3B = -22,5$$

$$B = \frac{22,5}{3}$$

$$B = 7,5t (\uparrow)$$

$$2) \sum F_x = 0,$$

$$A_x = 0t$$

$$3) \sum F_y = 0,$$

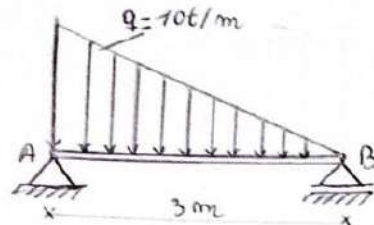
$$A_y - Q + B = 0$$

$$A_y - 15 + 7,5 = 0$$

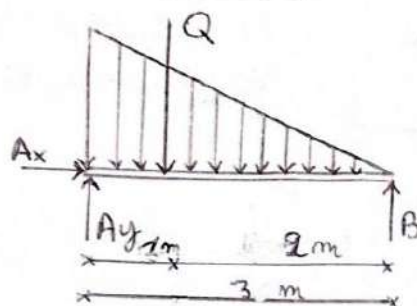
$$A_y - 7,5 = 0$$

$$A_y = 7,5t (\uparrow)$$

Exercice 3:



S.C.R.L

Données

$q = 10\text{t/m}$

Inconnues

$A_x, A_y \text{ et } B$

composons $q = 10\text{t/m}$

$$Q = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{10\text{t/m} \times 3\text{m}}{2} = 15\text{t}$$

$$X_G \text{ au point A} = \frac{1}{3} \cdot l = \frac{1 \cdot 3}{3} = 1\text{m}$$

$$X_G \text{ au point B} = \frac{2}{3} \cdot l = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2\text{m}$$

Equations d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$Q \times 1 - B \times 3 = 0$$

$$15 \times 1 - 3B = 0$$

$$-3B = -15$$

$$B = \frac{15}{3}$$

$$B = 5\text{t} (\uparrow)$$

2) $\sum F_x = 0,$

$$A_x = 0\text{t}$$

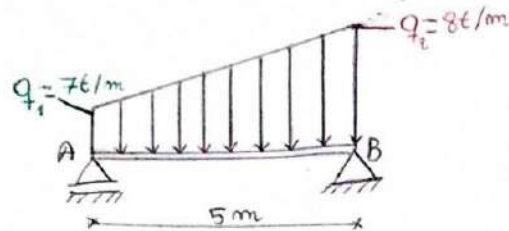
3) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - Q + B = 0$$

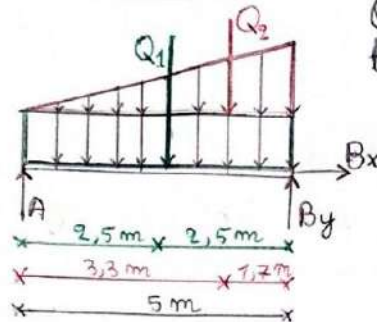
$$A_y - 15 + 5 = 0$$

$$A_y = 10\text{t} (\uparrow)$$

Exercice 4



S.C.R.L



On peut diviser notre trapèze en deux : - rectangle
- Triangle rectangle

Données

$$q_1 = 7 \text{ t/m}$$

$$q_2 = 8 \text{ t/m}$$

Inconnues

$$A, B_x \text{ et } B_y$$

Composants $q_1 = 7 \text{ t/m}$ et $q_2 = 8 \text{ t/m}$

$$Q_1 = q_1 \times l = 7 \text{ t/m} \times 5 \text{ m} = 35 \text{ t}$$

$$Q_2 = \frac{q_2 \times l}{2} = \frac{8 \text{ t/m} \times 5 \text{ m}}{2} = 20 \text{ t}$$

$$\text{Pour } Q_1 \text{ } X_G \text{ au point A} = \frac{l}{2} = \frac{5 \text{ m}}{2} = 2,5 \text{ m}$$

$$X_G \text{ au point B} = \frac{l}{2} = \frac{5}{2} \text{ m} = 2,5 \text{ m}$$

$$\text{Pour } Q_2 \text{ } X_G \text{ au point A} = \frac{2l}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3} = 3,3 \text{ m}$$

$$X_G \text{ au point B} = \frac{1}{3} l = \frac{1}{3} \cdot 5 = 1,7 \text{ m}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$Q_1 \times 2,5 + Q_2 \times 3,3 - B_y \times 5 = 0$$

$$35 \times 2,5 + 20 \times 3,3 - 5 B_y = 0$$

$$87,5 + 66 - 5 B_y = 0$$

$$-5 B_y = -153,5$$

$$B_y = 30,7 \text{ t} (\uparrow)$$

$$2) \sum F_x = 0,$$

$$B_x = 0 \text{ t}$$

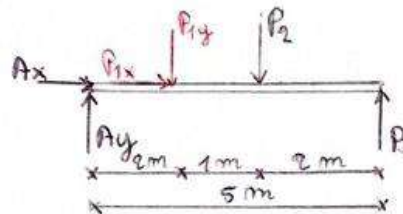
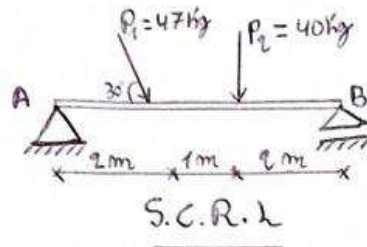
$$3) \sum F_y = 0,$$

$$A - Q_1 - Q_2 + B_y = 0$$

$$A - 35 - 20 + 30,7 = 0$$

$$A = 24,3 \text{ t} (\uparrow)$$

Exercice 5 :



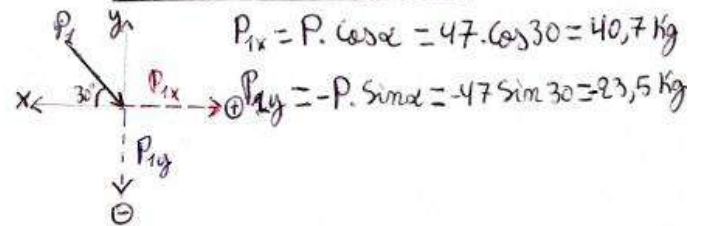
Données

$$P_1 = 47 \text{ Kg}$$

$$P_2 = 40 \text{ Kg}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Inconnues

 A_x, A_y et B Décomposition de $P_1 = 47 \text{ Kg}$ Equations d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$P_{1y} \times 2 + P_2 \times 3 - B \times 5 = 0$$

$$23,5 \times 2 + 40 \times 3 - 5B = 0$$

$$47 + 120 - 5B = 0$$

$$167 - 5B = 0$$

$$-5B = -167$$

$$B = \frac{167}{5}$$

$$B = 33,4 \text{ Kg} (\uparrow)$$

2) $\sum F_x = 0$

$$A_x + P_{1x} = 0$$

$$A_x + 40,7 = 0$$

$$A_x = -40,7 \text{ Kg} (\leftarrow)$$

3) $\sum F_y = 0,$

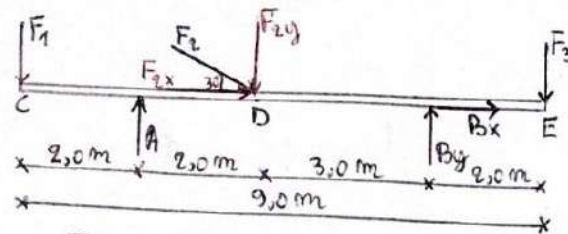
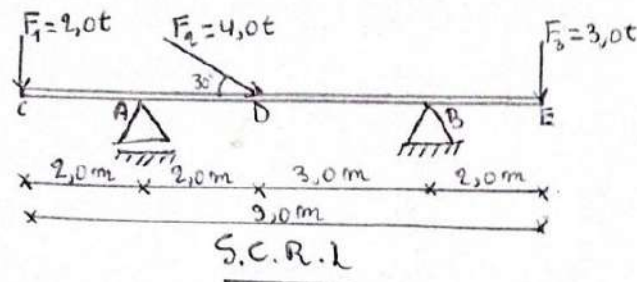
$$A_y - P_{1y} - P_2 + B = 0$$

$$A_y - 23,5 - 40 + 33,4 = 0$$

$$A_y - 30,1 = 0$$

$$A_y = 30,1 \text{ Kg} (\uparrow)$$

Exercice 6 :



Données

$$F_1 = 2,0t$$

$$F_2 = 4,0t$$

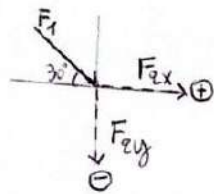
$$\alpha = 30^\circ$$

$$F_3 = 3,0t$$

Inconnues

A, B_x et B_y

Décomposition $F_2 = 4,0t$



$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha$$

$$= 4,0 \cdot \cos 30^\circ$$

$$F_{2x} = 3,4t$$

$$F_{2y} = -F_2 \sin \alpha$$

$$= -4,0 \cdot \sin 30^\circ$$

$$F_{2y} = -2,0t$$

Equations d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$-F_1 \times 2 + F_{2y} \times 2 - B_y \times 5 + F_3 \times 7 = 0$$

$$-2,0 \times 2,0 + 2,0 \times 2,0 - 5B_y + 3,0 \times 7,0 = 0$$

$$-4 + 4 - 5B_y + 21 = 0$$

$$-5B_y = -21$$

$$B_y = \frac{21}{5}$$

$$B_y = 4,2t (\uparrow)$$

2) $\sum F_x = 0$

$$B_x + 3,4 = 0 \Rightarrow B_x = -3,4t (\leftarrow)$$

3) $\sum F_y = 0$

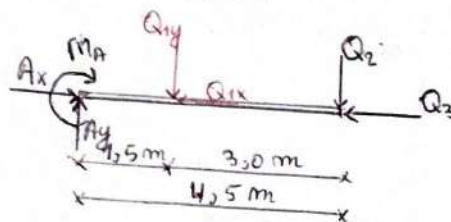
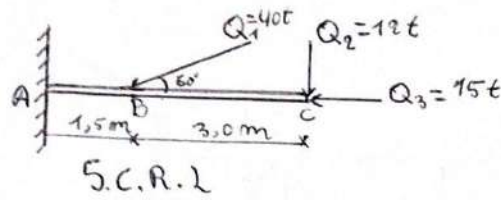
$$-F_1 + A - F_{2y} + B_y - F_3 = 0$$

$$-2,0 + A - 2,0 + 4,2 - 3,0 = 0$$

$$A - 2,8 = 0$$

$$A = 2,8t (\uparrow)$$

Exercice 7 :

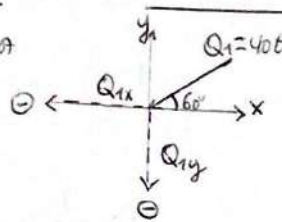
Données

$$Q_1 = 40t$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$Q_2 = 12t$$

$$Q_3 = 15t$$

Inconnues A_x, A_y et M_A Décomposons $Q_1 = 40t$ 

$$Q_{1x} = -Q_1 \cos \alpha$$

$$= -40 \times \cos 60$$

$$Q_{1x} = -20t$$

$$Q_{1y} = -Q_1 \sin \alpha$$

$$= -40 \times \sin 60$$

$$Q_{1y} = -34,6t$$

Equation d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$M_A + Q_{1y} \times 1,5 + Q_2 \times 4,5 = 0$$

$$M_A + 34,6 \times 1,5 + 12 \times 4,5 = 0$$

$$M_A + 51,9 + 54 = 0$$

$$M_A + 105,9 = 0$$

$$M_A = -105,9t.m (\curvearrowright)$$

2) $\sum F_x = 0$

$$+ A_x - Q_{1x} - Q_3 = 0$$

$$A_x - 20 - 15 = 0$$

$$A_x - 35 \Rightarrow A_x = 35t (\rightarrow)$$

3) $\sum F_y = 0$

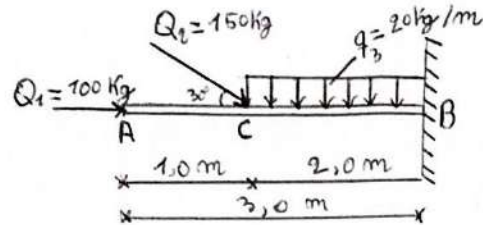
$$A_y - Q_{1y} - Q_2 = 0$$

$$A_y - 34,6 - 12 = 0$$

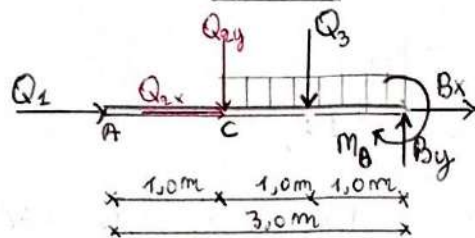
$$A_y - 46,6 = 0$$

$$A_y = 46,6t (\uparrow)$$

Exercice 8 :



S.C.R.L



Données

$$Q_1 = 100,0 \text{ kg}$$

$$Q_2 = 150,0 \text{ kg}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$q_3 = 20 \text{ kg/m}$$

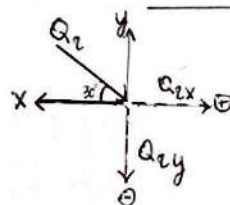
Inconnues

$$B_x, B_y \text{ et } M_B$$

Composantes $q_3 = 20 \text{ kg/m}$

$$Q_3 = q_3 \times 2,0 \text{ m} = 20 \text{ kg/m} \times 2,0 \text{ m} = 40 \text{ kg}$$

Décomposons $Q_2 = 150 \text{ kg}$



$$Q_{2x} = Q_2 \times \cos \alpha = 150 \times \cos 30^\circ$$

$$Q_{2x} = 129,9 \text{ kg}$$

$$Q_{2y} = -Q_2 \times \sin \alpha = -150 \times \sin 30^\circ = -75,0 \text{ kg}$$

Equation d'équilibre

$$1) \sum M_B = 0,$$

$$-Q_{2y} \times 2,0 - Q_3 \times 1,0 + M_B = 0$$

$$-75 \times 2,0 - 40 \times 1,0 + M_B = 0$$

$$-150 - 40 + M_B = 0$$

$$-190 + M_B = 0$$

$$M_B = 190 \text{ kg.m} (\curvearrowright)$$

$$2) \sum F_x = 0,$$

$$Q_1 + Q_{2x} + B_x = 0$$

$$100 + 129,9 + B_x = 0$$

$$B_x = -229,9 \text{ kg} (\leftarrow)$$

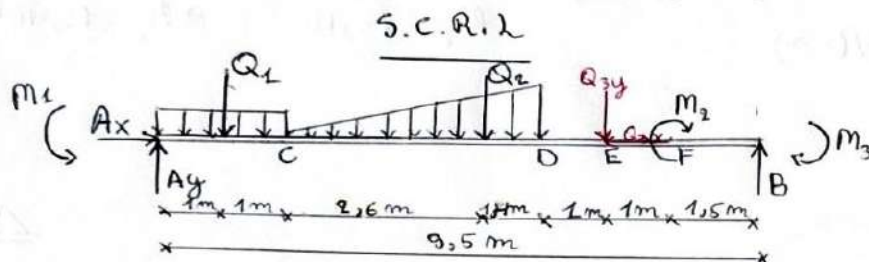
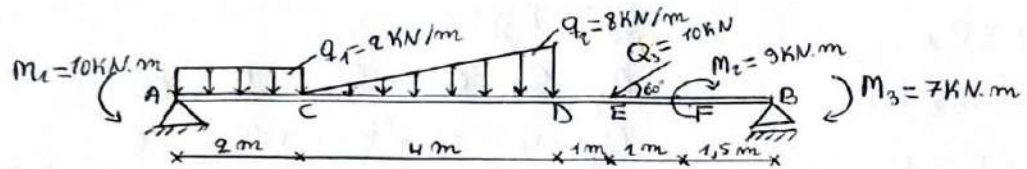
$$3) \sum F_y = 0,$$

$$-Q_{2y} - Q_3 + B_y = 0$$

$$-75 - 40 + B_y = 0$$

$$B_y = 115 \text{ kg} (\uparrow)$$

Exercice 9 :



Données

$$M_1 = C_1 = 10 \text{ kN.m}$$

$$q_1 = 2 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = 8 \text{ kN/m}$$

$$Q_3 = 10 \text{ kN}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$M_2 = C_2 = 9 \text{ kN.m}$$

$$M_3 = C_3 = 7 \text{ kN.m}$$

Inconnues

$$A_x, A_y \text{ et } B$$

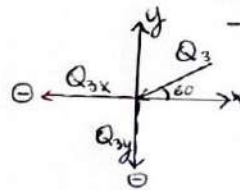
Décomposons $q_1 = 2 \text{ kN/m}$ et
 $q_2 = 8 \text{ kN/m}$

$$Q_1 = q_1 \times 2 = 2 \text{ kN/m} \times 2 \text{ m} = 4 \text{ kN}$$

$$Q_2 = q_2 \times 4 / 2 = \frac{8 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m}}{2} = 16 \text{ kN}$$

$$X_G \text{ au point H} = \frac{l}{2} = \frac{4}{2} = 1 \text{ m}$$

$$X_G \text{ au point C} = \frac{q \cdot l}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3} = 2,6 \text{ m}$$

Décomposons $Q_3 = 10 \text{ kN}$ 

$$Q_{3x} = -Q_3 \times \cos \alpha$$

$$= -10 \times \cos 60$$

$$Q_{3x} = -5 \text{ kN}$$

$$Q_{3y} = -Q_3 \times \sin \alpha$$

$$= -10 \times \sin 60$$

$$Q_{3y} = -8,66 \text{ kN}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$-M_1 + Q_1 \times 1 + Q_2 \times 4,6 + Q_{3y} \times 7 + M_2 - B \times 9,5 + M_3 = 0$$

$$-10 + 4 \times 1 + 16 \times 4,6 + 8,66 \times 7 + 9 - 9,5B + 7 = 0$$

$$-10 + 4 + 73,6 + 60,62 + 9 - 9,5B + 7 = 0$$

$$144,22 - 9,5B = 0$$

$$-9,5B = -144,2$$

$$B = \frac{144,2}{9,5} \Rightarrow B = 15,2 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$2) \sum F_x = 0,$$

$$A_x - Q_3x = 0$$

$$A_x - 5 = 0$$

$$A_x = 5 \text{ KN} (\rightarrow)$$

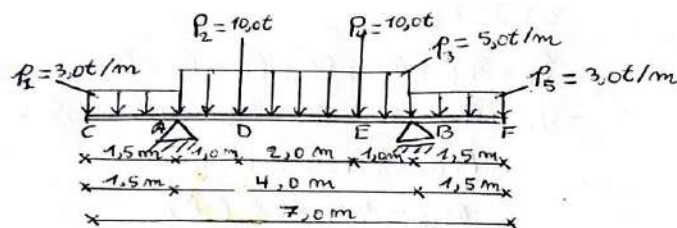
$$3) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_1 - Q_2 - Q_3y + B = 0$$

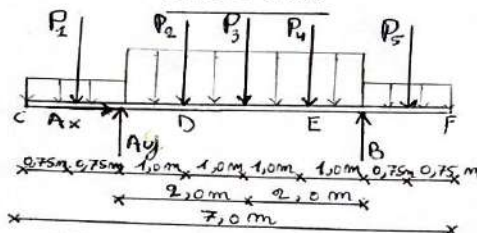
$$A_y - 4 - 16 - 8,66 + 15,2 = 0$$

$$A_y - 13,46 = 0 \Rightarrow A_y = 13,46 \text{ KN} (\uparrow)$$

Exercice 10 :



S.C.R.L



Données

$$P_1 = 3,0 \text{ t/m}$$

$$P_2 = 10,0 \text{ t}$$

$$P_3 = 5,0 \text{ t/m}$$

$$P_4 = 10,0 \text{ t}$$

$$P_5 = 3,0 \text{ t/m}$$

Inconnues

A_x, A_y et B

Composantes $P_1 = 3,0 \text{ t/m}$, $P_3 = 5,0 \text{ t/m}$
et $P_5 = 3,0 \text{ t/m}$

$$P_1 = P_1 \times 1,5 = 3,0 \text{ t/m} \times 1,5 \text{ m} = 4,5 \text{ t}$$

$$X_G \text{ au point A} = \frac{l}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ m}$$

$$P_3 = P_3 \times 4,0 = 5,0 \text{ t/m} \times 4,0 \text{ m} = 20 \text{ t}$$

$$X_G \text{ au point A} = \frac{l}{2} = \frac{4,0}{2} = 2,0 \text{ m}$$

$$P_5 = P_5 \times 1,5 = 3,0 \text{ t/m} \times 1,5 \text{ m} = 4,5 \text{ t}$$

$$X_G \text{ au point B} = \frac{l}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ m}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0$$

$$-P_1 \times 0,75 + P_2 \times 1 + P_3 \times 2 + P_4 \times 3 - B \times 4 + P_5 \times 4,75 = 0$$

$$-4,5 \times 0,75 + 10 \times 1 + 20 \times 2 + 10 \times 3 - 4B + 4,5 \times 4,75 = 0$$

$$-3,375 + 10 + 40 + 30 - 4B + 21,375 = 0$$

$$98 - 4B = 0$$

$$-4B = -98$$

$$B = \frac{98}{4}$$

$$B = 24,5 \text{ t} (\uparrow)$$

$$2) \sum F_x = 0,$$

$$A_x = 0 \text{ t}$$

$$3) \sum F_y = 0,$$

$$-P_1 + A_y - P_2 - P_3 - P_4 + B - P_5 = 0$$

$$-4,5 + A_y - 10 - 20 - 10 + 24,5 - 4,5 = 0$$

$$A_y - 24,5 = 0$$

$$A_y = 24,5 \text{ t } (\uparrow)$$

On remarque que la structure au coin des appuis les charges sont repartis de manière uniforme et au milieu il y a deux charges uniforme pour ces genres de cas on utilise la formule suivante pour déterminer A_y et B :

$$A_y = B = \frac{1}{2} \times \sum P$$

Essayez et vous allez trouver la même réponse

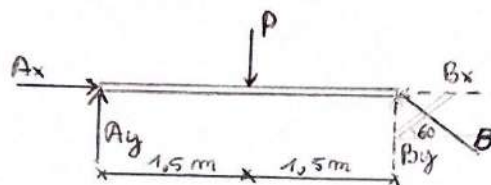
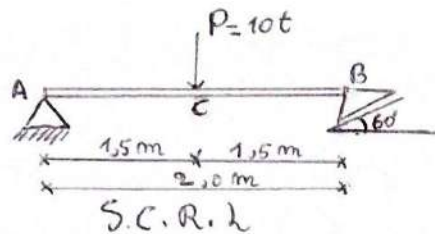
2ème cas structure avec appuis simple(rouleau) incliné



Pour c'est cas je vais choisir deux exercices qui vont permettre à tout le monde de pouvoir décomposer les composantes de l'appui simple lorsqu'il est incliné.

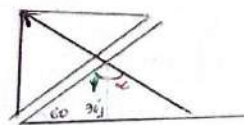
NB : les démonstration que je vais mettre comment trouver l'angle ne sera pas important de le mettre dans vos devoirs, TP, Interrogation et examen.

Exercice 11 :

Données

$$P = 10 \text{ t}$$

$$B = 60^\circ$$

Inconnues A_x, A_y et B Décomposons B

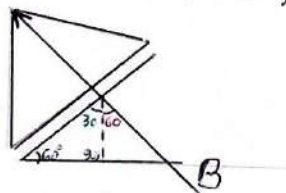
On doit trouver α l'angle que fait B par rapport à l'axe du système.

Trouvons d'abord φ on sait que la somme des angles dans un triangle rectangle $= 180^\circ$:

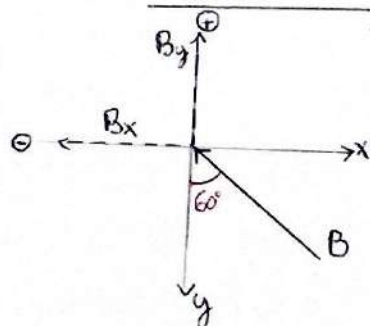
$$60 + 90 + \varphi = 180, \quad 150 + \varphi = 180, \quad \varphi = 30^\circ$$

On peut maintenant trouver α :

$$\alpha + \varphi = 90, \quad \alpha + 30 = 90, \quad \alpha = 60$$



On peut maintenant décomposer B

Décomposons B

$$B_x = -B \cdot \sin \alpha = -B \cdot \sin 60 = -0,866 B$$

$$B_x = -0,866 B \quad (1)$$

$$B_y = B \cdot \cos \alpha = B \cdot \cos 60 = 0,5 B$$

$$B_y = 0,5 B \quad (2)$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$P_x 1,5 - B_y \times 3 = 0, \text{ Or } B_y = 0,5 B$$

$$10 \times 1,5 - 0,5 B \times 3 = 0$$

$$15 - 1,5 B = 0$$

$$-1,5 B = -15$$

$$B = \frac{15}{1,5}$$

$$B = 10 \text{ t } (\nwarrow) \quad (3)$$

(3) dans (1) et (2) :

$$B_x = -0,866 \times 10 = -8,66 \text{ t } (\leftarrow)$$

$$B_y = 0,5 \times 10 = 5 \text{ t } (\uparrow)$$

$$2) \sum F_x = 0,$$

$$A_x - B_x = 0$$

$$A_x - 8,66 = 0$$

$$A_x = 8,66 \text{ t } (\rightarrow)$$

$$3) \sum F_y = 0,$$

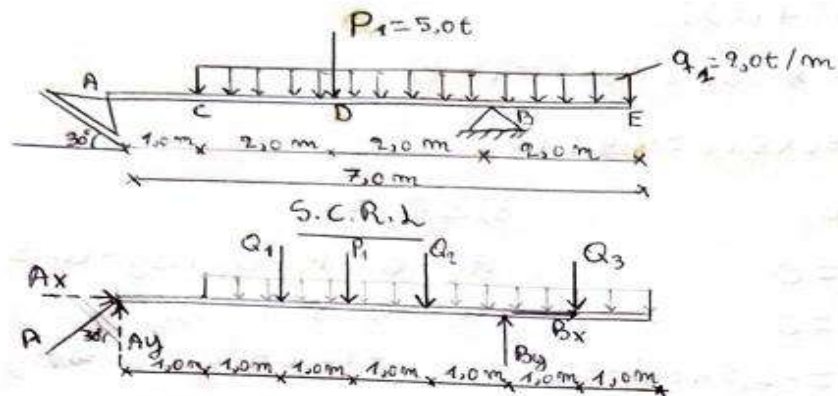
$$A_y - P + B_y = 0$$

$$A_y - 10 + 5 = 0$$

$$A_y - 5 = 0 \Rightarrow A_y = 5 \text{ t } (\uparrow)$$

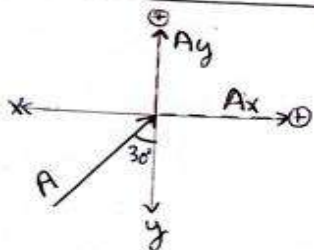
NB: lorsque vous vous rencontrez avec ces genres de cas où tu as un appui simple incliné ne perdez pas du temps à démontrer comment trouver l'angle alpha prenez directement l'angle qu'on vous a donné au départ car même si vous démontrez vous allez toujours trouver le même angle du départ.

Exercice 12 :



| Données | Inconnues | Composantes q_1, q_2 et $q_3 = 2,0t/m$ |
|---------------------|-------------------|--|
| $P_1 = 5,0t$ | A, B_x et B_y | $Q_1 = q_1 \times 2 = 2,0t/m \times 2m = 4t$ |
| $q_1 = 2,0t/m$ | | $Q_2 = q_1 \times 2 = 2,0t/m \times 2m = 4t$ |
| $\alpha = 30^\circ$ | | $Q_3 = q_1 \times 2 = 2,0t/m \times 2m = 4t$ |
| | | $XG \frac{0}{2}$ au point B = $\frac{l}{2} = \frac{2}{2} = 1m$ |

Décomposons A



$$A_x = A \cdot \sin \alpha = A \cdot \sin 30 = 0,5A$$

$$A_x = 0,5A \quad (1)$$

$$A_y = A \cdot \cos \alpha = A \cdot \cos 30 = 0,866A$$

$$A_y = 0,866A \quad (2)$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_B = 0,$$

$$A_y \times 5 - Q_1 \times 3 - P_1 \times 2 - Q_2 \times 1 + Q_3 \times 1 = 0$$

$$5A_y - 4 \times 3 - 5 \times 2 - 4 \times 1 + 4 \times 1 = 0$$

$$5A_y - 12 - 10 - 4 + 4 = 0, \text{ or } A_y = 0,866A$$

$$5 \cdot (0,866A) - 22 = 0$$

$$4,33A = 22$$

$$A = \frac{22}{4,33} \Rightarrow A = 5,08t \quad (\nearrow) \quad (3)$$

(3) dans (1) et (2):

$$A_x = 0,5 \times 5,08 = 2,54 \text{ t } (\rightarrow)$$

$$A_y = 0,866 \times 5,08 = 4,4 \text{ t } (\uparrow)$$

$$2) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$2,54 + B_x = 0$$

$$B_x = -2,54 \text{ t } (\leftarrow)$$

$$3) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_1 - P_1 - Q_2 + B_y - Q_3 = 0$$

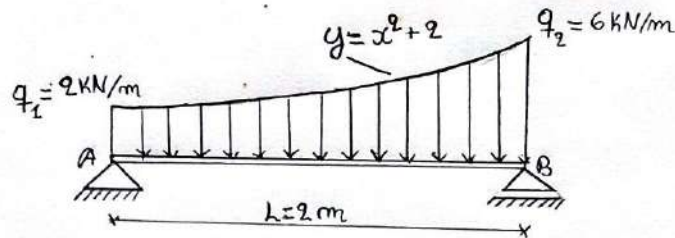
$$4,4 - 4 - 5 - 4 + B_y - 4 = 0$$

$$-12,6 + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 12,6 \text{ t } (\uparrow)$$

On peut évaluer le moment par rapport à n'importe quel point pour cette fois-ci j'ai évalué le moment par rapport au point B.

On va résoudre aussi deux cas particulier de structure avec des charges parabolique, Hyperbolique et une droite.

Exercice 13 :



Données :

$$q_1 = 2 \text{ kN/m}$$

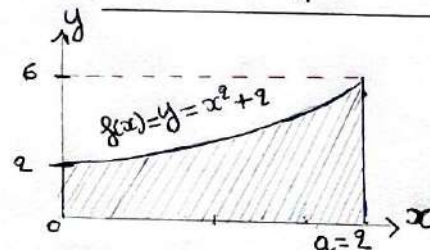
$$q_2 = 6 \text{ kN/m}$$

$$f(x) = y = x^2 + 2$$

$$L = 2 \text{ m}$$

Inconnues

$$A_x, A_y \text{ et } B$$

Composants $q_1 = 2 \text{ kN/m}$ et $q_2 = 6 \text{ kN/m}$ 

$$A = \iint dx dy$$

$A = \text{Aire} = Q$, il faut placer les bornes

$$A = \int_0^2 \int_0^y dx dy$$

$$= \int_0^2 dx \left(\int_0^y dy \right)$$

$$= \int_0^2 dx [y]_0^y$$

$$= \int_0^2 y dx \text{ ; or } y = x^2 + 2$$

$$= \int_0^2 (x^2 + 2) dx$$

$$= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^2$$

$$= \frac{2^3}{3} + 2(2) = \frac{8}{3} + 4 = \frac{8+12}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\text{d'où } A = 6,66 \text{ kN ou } Q = 6,66 \text{ kN}$$

On doit trouver maintenant le X_G (Le centre de gravité):

$$X_G = \frac{M_{stay}}{A} = \text{Moment statique}$$

il faut d'abord déterminer le moment statique (M_{stay})

$$M_{stay} = \int_0^a xy dx, \text{ or } a=2 \text{ et } y=x^2+2$$

$$= \int_0^2 x(x^2+2) dx$$

$$= \int_0^2 (x^3+2x) dx$$

$$= \int x^3 dx + \int 2x dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^2}{2} \right]_0^2$$

$$= \frac{(2)^4}{4} + (2)^2 = \frac{16}{4} + 4 = \frac{16+16}{4} = \frac{32}{4}$$

$$M_{stay} = 8 \text{ KN/m}$$

$$X_G = \frac{M_{stay}}{A}$$

$$= \frac{8 \text{ KN/m}}{6,66 \text{ KN}}$$

$$X_G = 1,2 \text{ m}$$

$$A_y = \frac{A \cdot (L-L')}{L}$$

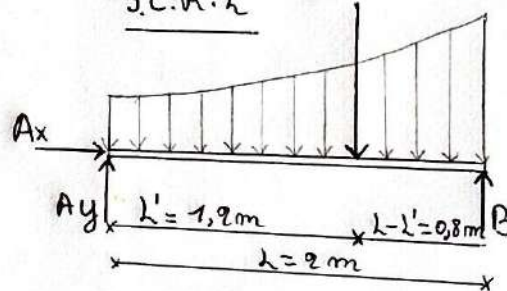
$$= \frac{6,66 \cdot (2-1,2)}{2}$$

$$= \frac{6,66(0,8)}{2}$$

$$= \frac{5,328}{2}$$

$$A_y = 2,66 \text{ KN}(\uparrow)$$

$$\text{S.C.R.L} \quad A=Q=6,66 \text{ KN}$$



$$B = \frac{A \cdot L'}{L}$$

$$= \frac{6,66(1,2)}{2}$$

$$= \frac{7,992}{2}$$

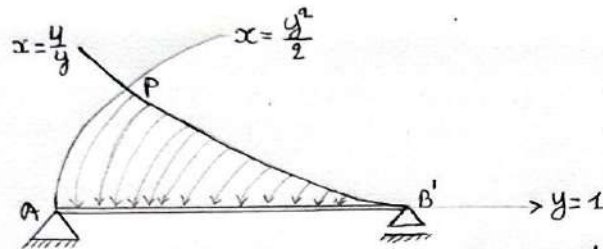
$$B = 4 \text{ KN}(\uparrow)$$

Pour A_x on fait:

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0 \text{ KN}$$

Exercice 14 :

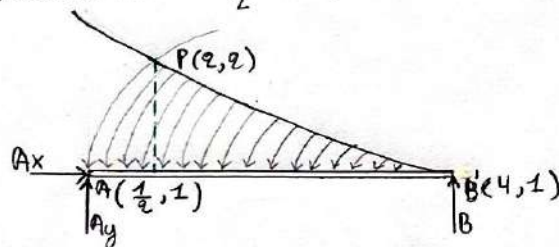


On va chercher les coordonnées de tous les points
 On commence par l'intersection de la parabole et de la droite
 On a : $x = \frac{y^2}{2}$, $y = 1$ & l'intersection donne le point $A(\frac{1}{2}, 1)$

$$x = \frac{4}{y}, y = 1 \rightarrow B'(4, 1)$$

$$(1) x = \frac{4}{y}, x = \frac{y^2}{2} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^3 = 8, y = \sqrt[3]{8} = 2 \quad (2)$$

(2) dans (1): $x = \frac{4}{2} = 2$, & l'intersection donne le point $P(2, 2)$



Calcul de la surface ou composition

$$x = \frac{4}{y} \text{ ou } y = \frac{4}{x}$$

$$x = \frac{y^2}{2} \text{ ou } y = \sqrt{2x}$$

$$A = \int_D y dx \text{ ou } A = \int_D x dy$$

$$A = \int_1^2 \left(\frac{4}{y} - \frac{y^2}{2} \right) dy = \int_1^2 \frac{4}{y} dy - \int_1^2 \frac{y^2}{2} dy, \text{ or } \int \frac{a}{x} dx = a \ln(|x|)$$

$$= 4 \ln(|y|) - \frac{1}{2} \int y^2 dy, \text{ or } \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$= 4 \ln(|y|) - \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} \right)$$

$$= \left[4 \ln(|y|) - \frac{y^3}{6} \right]_1^2 = \left(4 \ln 2 - \frac{2^3}{6} \right) - \left(4 \ln 1 - \frac{1^3}{6} \right)$$

$$= 4 \ln 2 - \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = 1,6059$$

$$A = 1,6059 \text{ U.S}$$

On va maintenant déterminer le moment statique par rapport à l'axe principale: $M_{stay} = \int_0^4 xy dx$, on va calculer le M_{stay} pour les deux surfaces. (Voir la page précédente)

$$\begin{aligned} M_{stay} &= \int_{1/2}^2 x(\sqrt{2x}-1) dx + \int_2^4 x\left(\frac{4}{x}-1\right) dx \\ &= \int_{1/2}^2 (\sqrt{2} \cdot x^{3/2} - x) dx + \int_2^4 (4-x) dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{2} x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^2}{2} \right]_{1/2}^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_2^4 \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^5}}{5} - \frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{2\sqrt{2} \sqrt{(\frac{1}{2})^5}}{5} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} \right) + \left((4 \cdot 4 - \frac{4^2}{2}) - (4 \cdot 2 - \frac{2^2}{2}) \right) \\ &= \left[\frac{2\sqrt{2^6}}{5} - 2 - \frac{2}{5} \sqrt{(\frac{1}{2})^4} + \frac{1}{8} \right] + [16 - 8 - 8 + 2] \\ &= 1,225 + 2 \end{aligned}$$

$$M_{stay} = 3,225$$

$$X_G = \alpha = \frac{M_{stay}}{A} = \frac{3,225}{1,6059} = 2,0091$$

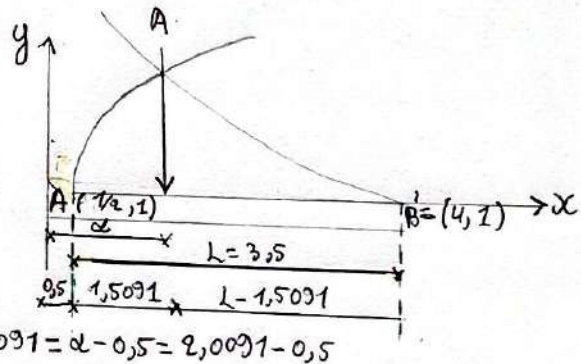
$$X_G = 2,0091$$

$$\begin{aligned} A_y &= \frac{A(L-1,5091)}{L} \\ &= \frac{1,6059(3,5-1,5091)}{3,5} \\ &= \frac{1,6059(1,9909)}{3,5} \\ &= \frac{3,1971}{3,5} \end{aligned}$$

$$A_y = 1 \text{ U.F}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{A \cdot 1,5091}{L} \\ &= \frac{1,6059 \cdot 1,5091}{3,5} \\ &= \frac{2,4234}{3,5} \end{aligned}$$

$$B = 0,69 \text{ U.F}$$



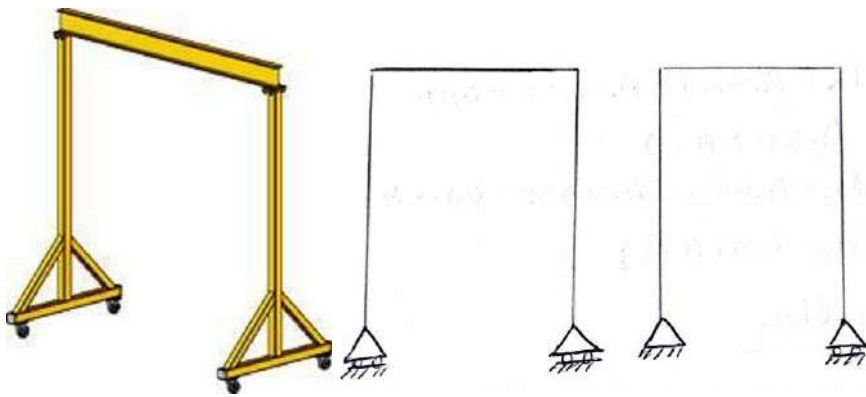
Pour A_x on fait :

$$\sum F_x = 0,$$

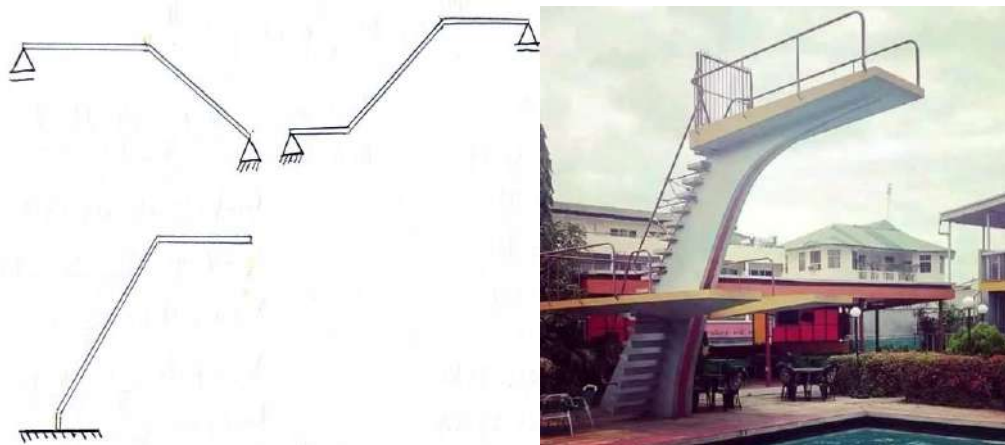
$$A_x = 0$$

3 ème cas : Structure à l'axe brisé et les portiques

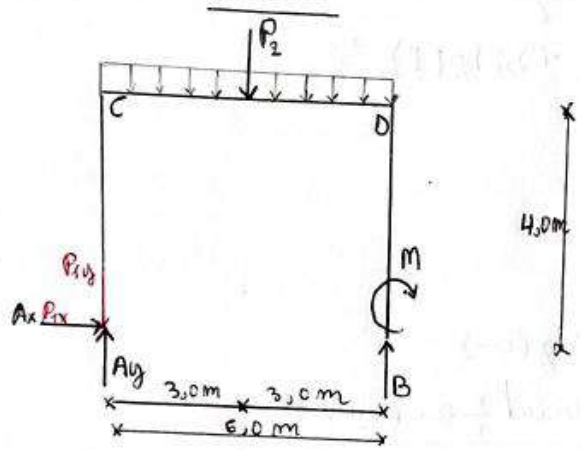
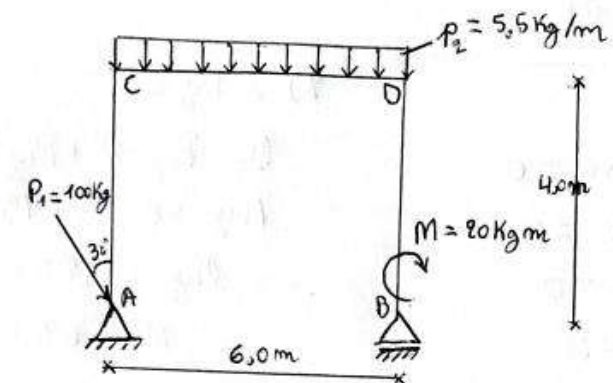
- **Le portique** : Structure élémentaire composée d'une traverse (parfois brisée) et de deux montants, parfaitement encastrés en tête ; peut être encastree ou articulée en pied.



- **Structures à l'axe brisé** : Les structures à l'axe brisé se caractérisent par des formes non linéaires ou rectilignes, avec des angles ou des courbes brisées, apportant un effet visuel dynamique et original à l'architecture moderne.



Exercice 15 :



Données

- $P_1 = 100 \text{ kg}$
- $P_2 = 5,5 \text{ kg/m}$
- $M = 20 \text{ kg.m}$
- $\alpha = 30^\circ$

Inconnues

- $A_x, A_y \text{ et } B$

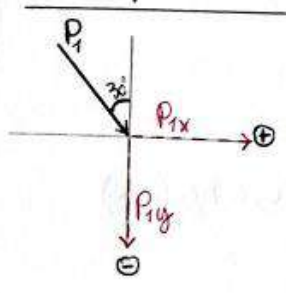
composants $P_2 = 5,5 \text{ kg/m}$

$$P_2 = P_2 \times 6,0 = 5,5 \text{ kg/m} \times 6,0 \text{ m}$$

$$P_2 = 33 \text{ kg}$$

$$X_G = \frac{l}{2} \text{ au point A} = \frac{l}{2} = \frac{6}{2} = 3,0 \text{ m}$$

Décomposons $P_1 = 100 \text{ kg}$



$$P_{1x} = P_1 \times \sin \alpha = 100 \times \sin 30$$

$$P_{1x} = 86,6 \text{ kg}$$

$$P_{1y} = -P_1 \times \cos \alpha = -100 \times \cos 30$$

$$P_{1y} = -50 \text{ kg}$$

Equations d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$P_2 \times 3 + M - B \times 6 = 0$$

$$33 \times 3 + 20 - 6B = 0$$

$$99 + 20 - 6B = 0$$

$$119 - 6B = 0$$

$$B = \frac{119}{6}$$

$$B = 19,8 \text{ Kg} (\uparrow)$$

2) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - P_{1y} - P_2 + B = 0$$

$$A_y - 50 - 33 + 19,8 = 0$$

$$A_y - 63,2 = 0$$

$$A_y = 63,2 \text{ Kg} (\uparrow)$$

3) $\sum F_x = 0,$

$$A_x + P_{1x} = 0$$

$$A_x + 86,6 = 0$$

$$A_x = -86,6 \text{ Kg} (\leftarrow)$$

Evaluons le moment $\frac{\circ}{\circ}$ au point B

Equations d'équilibre

1) $\sum M_B = 0,$

$$+M - P_2 \times 3 - P_{1y} \times 6 + A_y \times 6 = 0$$

$$20 - 33 \times 3 - 50 \times 6 + 6A_y = 0$$

$$20 - 99 - 300 + 6A_y = 0$$

$$-379 + 6A_y = 0$$

$$A_y = \frac{379}{6}$$

$$A_y = 63,2 \text{ Kg} (\uparrow)$$

2) $\sum F_y = 0$

$$A_y - P_{1y} - P_2 - B = 0$$

$$63,2 - 50 - 33 - B = 0$$

$$-19,8 - B = 0$$

$$B = 19,8 \text{ Kg}$$

3) $\sum F_x = 0,$

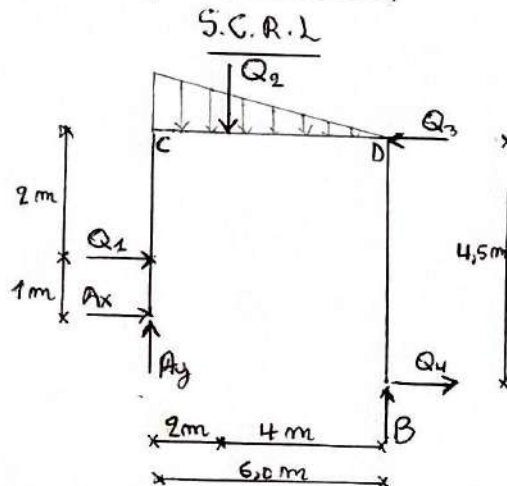
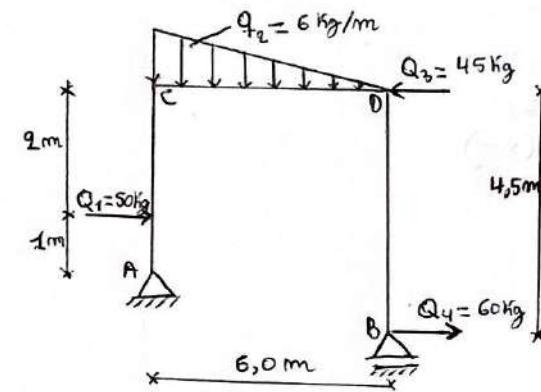
$$A_x + P_{1x} = 0$$

$$A_x + 86,6 = 0$$

$$A_x = -86,6 \text{ Kg} (\leftarrow)$$

On aura toujours les même réponses,
l'évaluation du moment dépend de
chacun.

Exercice 16:

Données

$$Q_1 = 50 \text{ kg}$$

$$q_2 = 6 \text{ kg/m}$$

$$Q_3 = 45 \text{ kg}$$

$$Q_4 = 60 \text{ kg}$$

Inconnues

$$A_x, A_y \text{ et } B$$

Composantes $q_2 = 6 \text{ kg/m}$

$$Q_2 = \frac{q_2 \times 6}{2} = \frac{6 \text{ kg/m} \times 6 \text{ m}}{2} = 18 \text{ kg}$$

$$X_G \text{ au point A} = \frac{1}{3} \cdot l = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ m}$$

$$X_G \text{ au point B} = \frac{2}{3} \cdot l = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ m}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$Q_1 \times 1 + Q_2 \times 2 - Q_3 \times 3 + Q_4 \times 1,5 - B \times 6 = 0$$

$$50 \times 1 + 18 \times 2 - 45 \times 3 + 60 \times 1,5 - 6B = 0$$

$$50 + 36 - 135 + 90 - 6B = 0$$

$$41 - 6B = 0$$

$$B = \frac{41}{6} \Rightarrow B = 6,8 \text{ kg} (\uparrow)$$

$$2) \sum F_y = 0$$

$$A_y - Q_2 + B = 0$$

$$A_y - 18 + 6,8 = 0$$

$$A_y - 11,2 = 0$$

$$A_y = 11,2 \text{ kg} (\uparrow)$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + Q_1 - Q_3 + Q_4 = 0$$

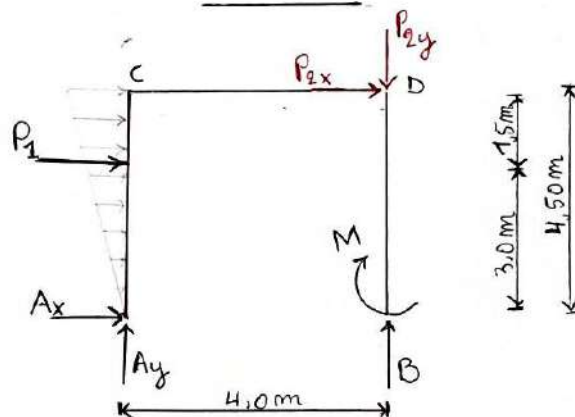
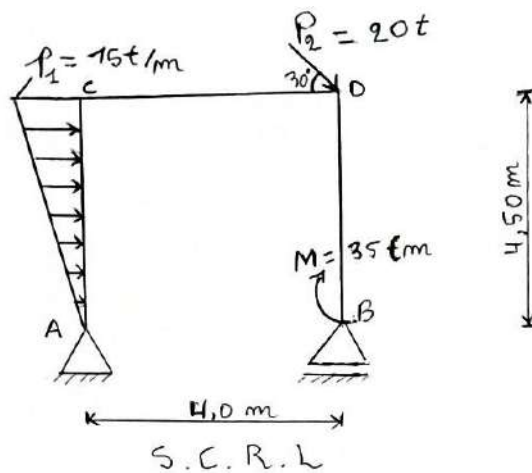
$$A_x + 50 - 45 + 60 = 0$$

$$A_x = -65 \text{ Kg} (\leftarrow)$$

Pour les équations d'équilibre chacun peut procéder de sa manière ce n'est pas obligatoire de procéder de la manière suivante : $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$ ne faut pas être figé sur les notations ou les procédures.

On va continuer de procéder de la manière suivante pour les équations d'équilibre : $\sum M = 0$, $\sum F_y = 0$ et $\sum F_x = 0$

Exercice 17 :



Données

- $p_1 = 15 \text{ t/m}$
- $P_2 = 20 \text{ t}$
- $M = 35 \text{ t.m}$
- $\alpha = 30^\circ$

Inconnues

- A_x, A_y et B

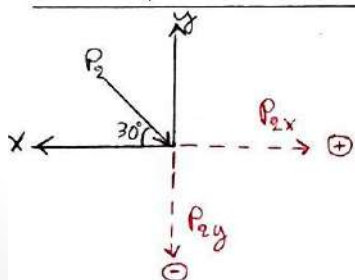
Composants $p_1 = 15 \text{ t/m}$

$$P_1 = \frac{p_1 \times 4.5}{2} = \frac{15 \text{ t/m} \times 4.5 \text{ m}}{2} = 33.75 \text{ t}$$

$$X_G \text{ au point A} = \frac{2l}{3} = \frac{2 \times 4.5}{3} = 3.0 \text{ m}$$

$$X_G \text{ au point C} = \frac{1}{3}l = \frac{1}{3} \times 4.5 = 1.5 \text{ m}$$

Décomposons $P_2 = 20 \text{ t}$



$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 30 = 20 \cos 30 = 10\sqrt{3} = 17.3 \text{ t}$$

$$P_{2y} = -P_2 \cdot \sin 30 = -20 \sin 30 = -10 \text{ t}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum MA = 0,$$

$$P_1 \times 3,0 + P_{2x} \times 4,5 + P_{2y} \times 4,0 + M - B \times 4,0 = 0$$

$$33,75 \times 3,0 + 17,3 \times 4,5 + 10 \times 4,0 + 35 - 4B = 0$$

$$101,25 + 77,85 + 40 + 35 - 4B = 0$$

$$254,1 - 4B = 0$$

$$-4B = -254,1$$

$$B = \frac{254,1}{4}$$

$$B = 63,5 \text{ t } (\uparrow)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_{2y} + B = 0$$

$$A_y - 10 + 63,5 = 0$$

$$A_y + 53,5 = 0$$

$$A_y = -53,5 \text{ t } (\downarrow)$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

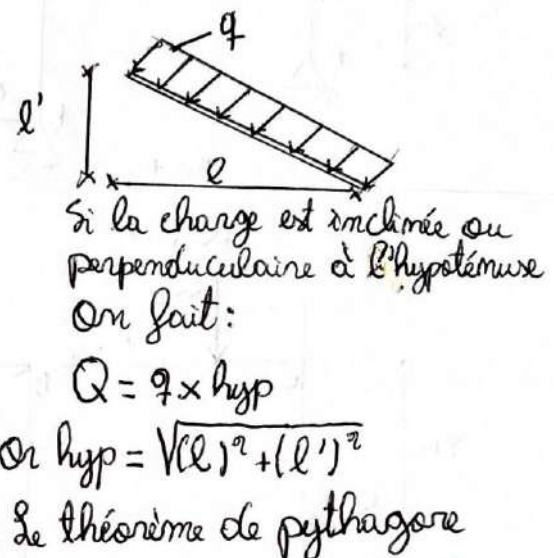
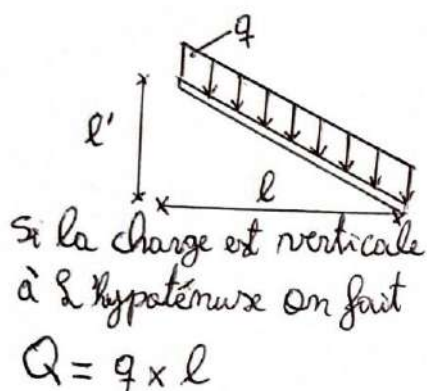
$$A_x + P_1 + P_{2x} = 0$$

$$A_x + 33,75 + 17,3 = 0$$

$$A_x + 51,05 = 0$$

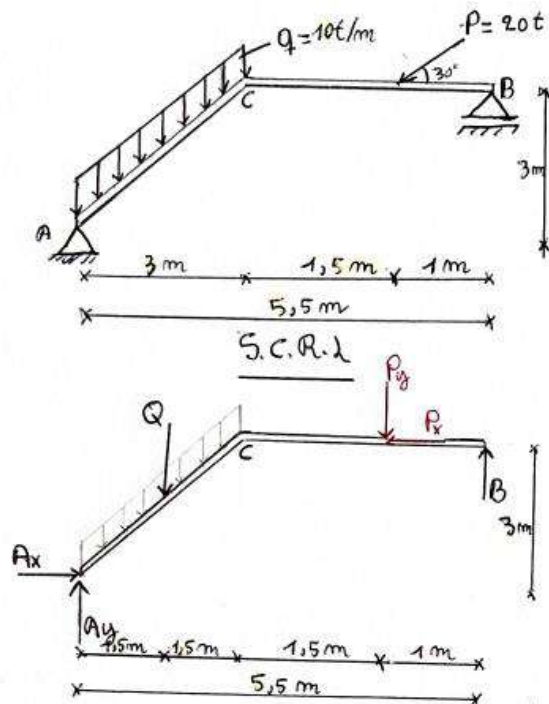
$$A_x = -51,05 \text{ t } (\leftarrow)$$

Pour les structures à l'axe brisé la composition se fait de deux manières :



C'est de même aussi pour les charges de forme triangulaire

Exercice 18 :



| Données | Inconnues | Composantes $q = 8 \text{ t/m}$ | Décomposants $P = 20 \text{ t}$ |
|---|-------------------|---|--|
| $q = 10 \text{ t/m}$ $P = 20 \text{ t}$ $\alpha = 30^\circ$ | A_x, A_y et B | $Q = q \times 3$ $= 10 \text{ t/m} \times 3 \text{ m}$ $Q = 30 \text{ t}$ $X_Q = \frac{3}{2}$ au point A = $1,5 \text{ m}$ | $P_x = -P \cos \alpha$ $= -20 \times \cos 30$ $P_x = -17,3 \text{ t}$ $P_y = -P \sin \alpha$ $= -20 \times \sin 30$ $P_y = -10 \text{ t}$ |

Equations d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$Q \times 1,5 + P_y \times 4,5 - P_x \times 3 - B \times 5,5 = 0$$

$$30 \times 1,5 + 10 \times 4,5 - 17,3 \times 3 - 5,5B = 0$$

$$45 + 45 - 51,9 - 5,5B = 0$$

$$38,1 - 5,5B = 0$$

$$5,5B = 38,1$$

$$B = \frac{38,1}{5,5}$$

$$B = 6,9 \text{ t} (\uparrow)$$

2) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - Q - P_y + B = 0$$

$$A_y - 30 - 10 + 6,9 = 0$$

$$A_y - 33,1 = 0 \Rightarrow A_y = 33,1 \text{ t} (\uparrow)$$

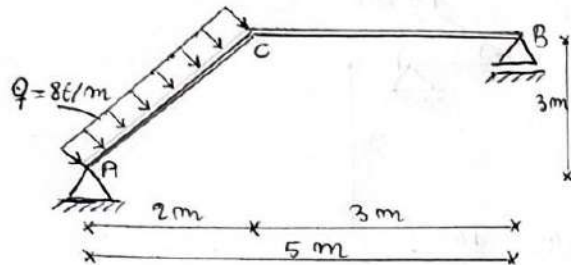
3) $\sum F_x = 0,$

$$A_x - P_x = 0$$

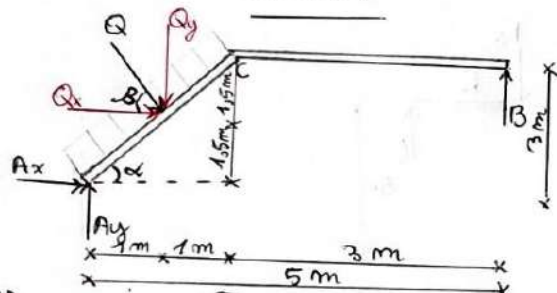
$$A_x - 17,3 = 0$$

$$A_x = 17,3 \text{ t} (\rightarrow)$$

Exercice 19 :



S.C.R.L



Données

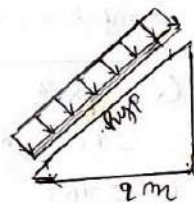
$q = 8 \text{ t/m}$

Inconnues

$A_x, A_y \text{ et } B$

Composantes $q = 8 \text{ t/m}$

$Q = q \times \text{hyp}$

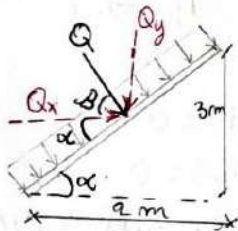


$\text{hyp} = \sqrt{3^2 + 2^2}$
 $\text{hyp} = 3,6 \text{ m}$

$Q = q \times 3,6 = 8 \text{ t/m} \times 3,6 \text{ m}$

$Q = 28,8 \text{ t}$

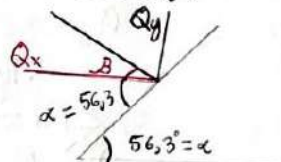
Décomposons $Q = 28,8 \text{ t}$



$\text{tg } \alpha = \frac{\text{c.opp}}{\text{c.adj}} = \frac{3}{2} = 1,5$

$\alpha = \text{arctg}(1,5)$

$\alpha = 56,3^\circ$



$\alpha + \beta = 90$

$56,3 + \beta = 90$

$\beta = 90 - 56,3$

$\beta = 33,7^\circ$

Comme on a trouver β on peut maintenant décomposer Q

$$Q_x = Q \times \cos \beta = Q \times \sin \alpha = Q \times \frac{3}{3,6}, \quad \frac{3}{3,6} = \sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$$

$$Q_y = -Q \times \sin \beta = -Q \times \cos \alpha = Q \times \frac{2}{3,6}, \quad \frac{2}{3,6} = \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$

NB: Ce sont des angles complémentaires: $\cos \beta = \sin \alpha$
 $\sin \beta = \cos \alpha$

Exemple: $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$, Essayez

Continuons le calcul: $Q_x = Q \times \cos \beta = 28,8 \times \cos 33,7 = 23,96 \text{ t}$

$$Q_y = -Q \times \sin \beta = -28,8 \times \sin 33,7 = -15,97 \text{ t}$$

Equations d'équilibre:

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$Q_x \times 1,5 + Q_y \times 1 - B \times 5 = 0$$

$$23,96 \times 1,5 + 15,97 \times 1 - 5B = 0$$

$$35,94 + 15,97 - 5B = 0$$

$$51,91 - 5B = 0$$

$$5B = 51,91$$

$$B = \frac{51,91}{5}$$

$$B = 10,38 \text{ t} (\uparrow)$$

:

$$2) \sum F_y = 0$$

$$A_y - Q_y + B = 0$$

$$A_y - 15,97 + 10,38 = 0$$

$$A_y - 5,59 = 0 \Rightarrow A_y = 5,59 \text{ t} (\uparrow)$$

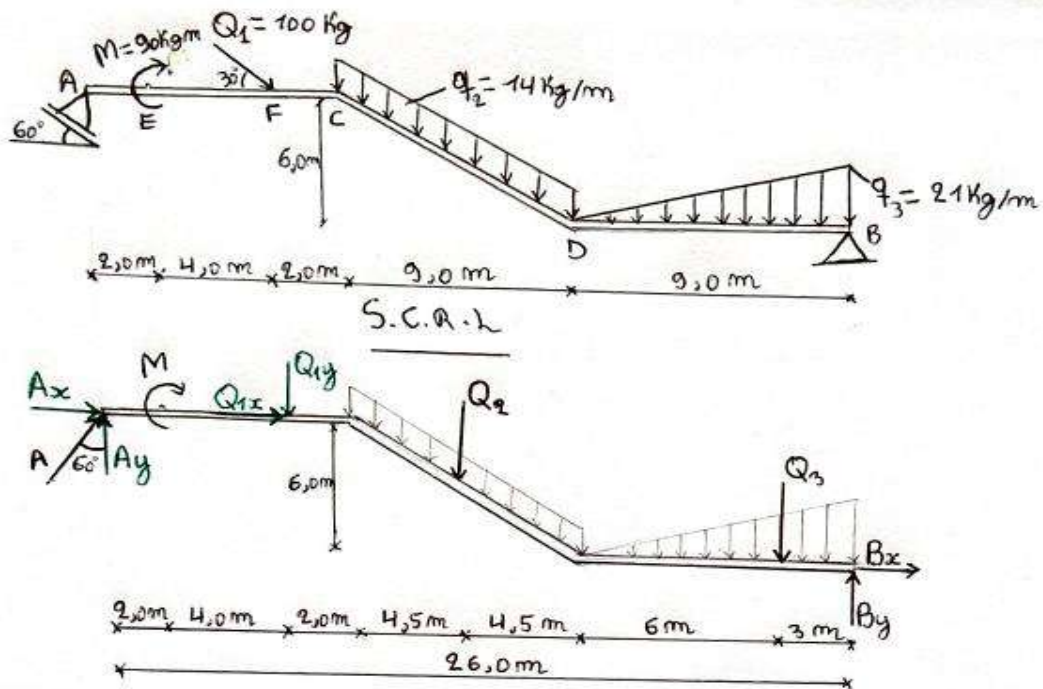
$$3) \sum F_x = 0$$

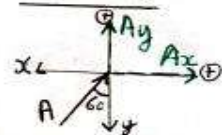
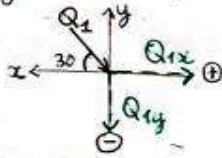
$$A_x + Q_x = 0$$

$$A_x + 23,96 = 0$$

$$A_x = -23,96 \text{ t} (\leftarrow)$$

Exercice 20 :



| <u>Données</u> | <u>Inconnues</u> | <u>Composantes</u> $q_2 = 14 \text{ kg/m}$ et $q_3 = 21 \text{ kg/m}$ | <u>Décomposons</u> A et $Q_1 = 100 \text{ kg}$ |
|-------------------------|--------------------------|---|---|
| $M = 90 \text{ kgm}$ | $A, B_x \text{ et } B_y$ | $Q_2 = q_2 \times 9,0 \text{ m}$ $= 14 \text{ kg/m} \times 9,0 \text{ m}$ $Q_2 = 126 \text{ kg}$ |  |
| $Q_1 = 100 \text{ kg}$ | | $X_G \text{ au point } C = \frac{l}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ m}$ | $A_x = A \sin 60$ $A_x = 0,866A \text{ (1)}$ |
| $q_2 = 14 \text{ kg/m}$ | | $Q_3 = \frac{q_3 \times 9,0 \text{ m}}{2}$ $= \frac{21 \text{ kg/m} \times 9,0 \text{ m}}{2}$ $Q_3 = 94,5 \text{ kg}$ | $A_y = A \cos 60$ $A_y = 0,5A \text{ (2)}$ |
| $q_3 = 21 \text{ kg/m}$ | | $X_G \text{ au point } B = \frac{1 \cdot l}{3} = \frac{1 \cdot 9}{3}$ $= 3,0 \text{ m}$ |  $Q_{1x} = Q_1 \cos 30$ $= 100 \cos 30$ $Q_{1x} = 86,6 \text{ kg}$ $Q_{1y} = -Q_1 \sin 30$ $= -100 \sin 30$ $= -50 \text{ kg}$ |

Equations d'équilibre

1) $\sum M_B = 0,$

$$-Q_3 \times 3 - Q_2 \times 13,5 - Q_{1y} \times 20 + Q_{1x} \times 6 + M + A_y \times 26 + A_x \times 6 = 0$$

$$-94,5 \times 3 - 126 \times 13,5 - 50 \times 20 + 86,6 \times 6 + 90 + (0,5A) \times 26 + (0,866A) \times 6 = 0$$

$$-283,5 - 1701 - 1000 + 519,6 + 90 + 13A + 5,196A = 0$$

$$-2374,9 + 18,196A = 0$$

$$18,196A = 2374,9$$

$$A = \frac{2374,9}{18,196}$$

$$A = 130,5 \text{ kg } (\nearrow) \quad (3)$$

(3) dans (1) et (2): $A_x = 0,866 \times 130,5 = +113,0 \text{ kg}$

$$A_x = 113,0 \text{ kg } (\rightarrow)$$

$$A_y = 0,5 \times 130,5 = +65,25 \text{ kg}$$

$$A_y = 65,25 \text{ kg } (\uparrow)$$

2) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - Q_{1y} - Q_2 - Q_3 + B_y = 0$$

$$65,25 - 50 - 126 - 94,5 + B_y = 0$$

$$-205,25 + B_y = 0$$

$$B_y = 205,25 \text{ kg } (\uparrow)$$

3) $\sum F_x = 0,$

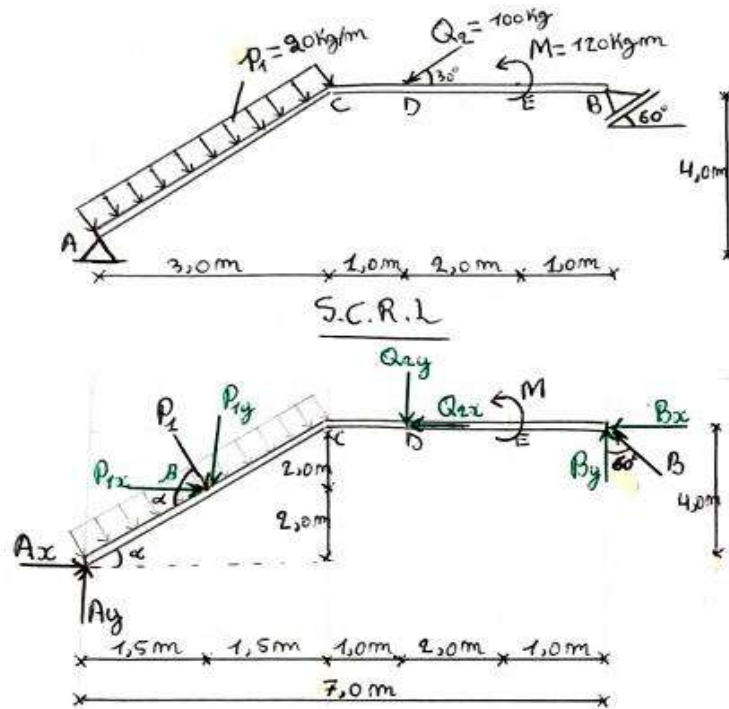
$$A_x + Q_{1x} + B_x = 0$$

$$113,6 + 86,6 + B_x = 0$$

$$199,6 + B_x = 0$$

$$B_x = -199,6 \text{ kg } (\leftarrow)$$

Exercice 21 :



Données
 $P_1 = 20 \text{ kg/m}$
 $Q_2 = 100 \text{ kg}$
 $M = 120 \text{ kgm}$

Inconnues
 A_x, A_y et B

Composantes $P_1 = 20 \text{ kg/m}$

$$P_1 = P_1 \times \text{hyp}$$

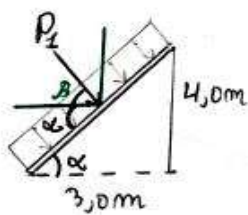
$$\text{hyp} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$\text{hyp} = 5 \text{ m}$$

$$P_1 = 20 \text{ kg/m} \times 5 \text{ m}$$

$$P_1 = 100 \text{ kg}$$

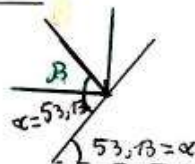
Décomposons $P_1 = 100 \text{ kg}, Q_2 = 100 \text{ kg}$ et B



$$\text{tg } \alpha = \frac{4}{3} = 1,33$$

$$\alpha = \text{arct}(1,33)$$

$$\alpha = 53,13$$



On sait que :
 $\alpha + \beta = 90$
 Alors :

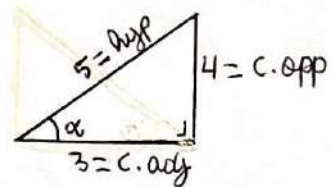
$$53,13 + \beta = 90$$

$$\beta = 90 - 53,13$$

$$\beta = 36,87$$

$$P_{1x} = P_1 \times \cos \beta = P_1 \times \sin \alpha = P_1 \times \frac{4}{5}, \quad \text{avec: } \frac{4}{5} = \sin \alpha = \frac{c. \text{opp}}{\text{hyp}}$$

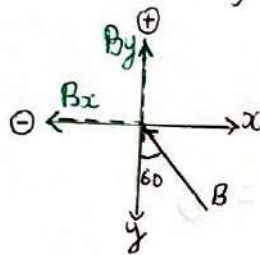
$$P_{1y} = -P_1 \times \sin \beta = -P_1 \times \cos \alpha = -P_1 \times \frac{3}{5}, \quad \frac{3}{5} = \cos \alpha = \frac{c. \text{adj}}{\text{hyp}}$$



Continuons le calcul:

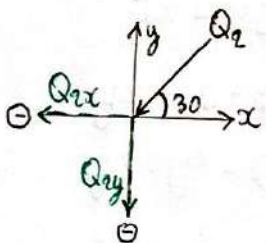
$$P_{1x} = P_1 \times \frac{4}{5} = 100 \times \frac{4}{5} = 80,0 \text{ Kg}$$

$$P_{1y} = -P_1 \times \frac{3}{5} = -100 \times \frac{3}{5} = -60 \text{ Kg}$$



$$B_x = -B \times \sin 60 = -0,866B \quad (1)$$

$$B_y = B \times \cos 60 = 0,5B \quad (2)$$



$$Q_{2x} = -Q_2 \times \cos 30 = -100 \times \cos 30 = -86,6 \text{ Kg}$$

$$Q_{2y} = -Q_2 \times \sin 30 = -100 \times \sin 30 = -50,0 \text{ Kg}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$P_{1x} \times 2 + P_{1y} \times 1,5 - Q_{2x} \times 4 + Q_{2y} \times 4 - M - B_x \times 4 - B_y \times 7,0 = 0$$

$$80 \times 2 + 60 \times 1,5 - 86,6 \times 4 + 50 \times 4 - (0,866B) \times 4 - (0,5B) \times 7 = 0$$

$$160 + 90 - 346,4 + 200 - 3,464B - 3,5B - 170 = 0$$

$$-16,4 - 6,964B = 0$$

$$-6,964B = 16,4$$

$$B = -\frac{16,4}{6,964}$$

$$B = -2,35 \text{ Kg} \quad (\searrow) \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans (1) et (2) : } B_x = -0,866 \times (-2,35) = +2,03 \text{ Kg}$$

$$B_x = 2,03 \text{ Kg } (\rightarrow)$$

$$B_y = 0,5 \times (-2,35) = -1,175 \text{ Kg}$$

$$B_y = -1,175 \text{ Kg } (\downarrow)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_{1y} - Q_{2y} + B_y = 0$$

$$A_y - 60 - 50 - 1,175 = 0$$

$$A_y - 111,17 = 0$$

$$A_y = 111,17 \text{ Kg } (\uparrow)$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

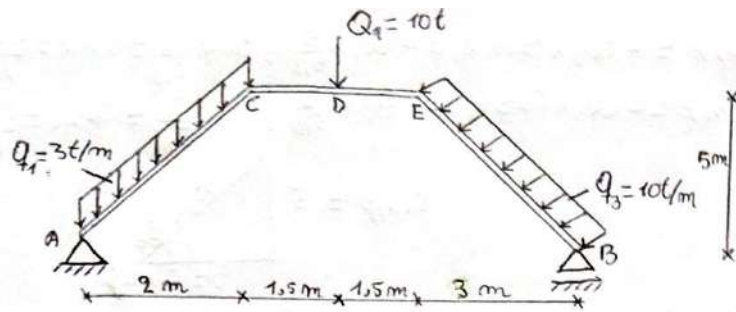
$$A_x + P_{1x} - Q_{2x} - B_x = 0$$

$$A_x + 80 - 86,6 + 2,03 = 0$$

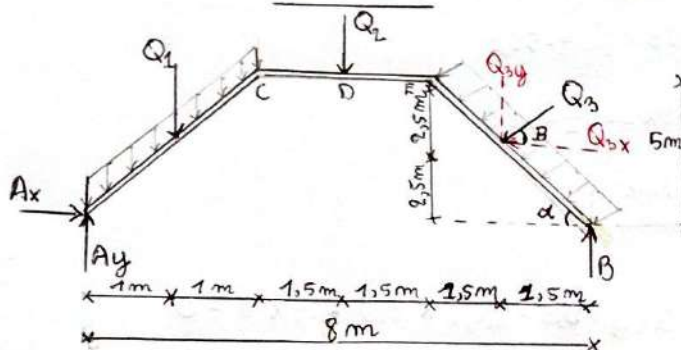
$$A_x - 4,57 = 0$$

$$A_x = 4,57 \text{ Kg } (\rightarrow)$$

Exercice 22 :



S.C. R. d



Données

- $q_1 = 3t/m$
- $Q_1 = 10t$
- $q_3 = 10t/m$

Inconnues

A_x, A_y et B

Composons $q_1 = 3t/m$ et $q_3 = 10t/m$

$$Q_1 = q_1 \times 2 = 3t/m \times 2m = 6t$$

$$Q_1 = 6t, X_G \text{ au point } A = \frac{l}{2} = \frac{2}{2} = 1m$$

$$Q_3 = q_3 \times hyp$$

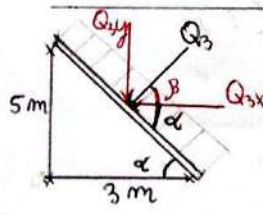
$$hyp = \sqrt{(3)^2 + (5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} = 5,8m$$

$$hyp = 5,8m$$

$$Q_3 = 10t/m \times 5,8m$$

$$Q_3 = 58t$$

Décomposons $Q_3 = 58t$



$$tg \alpha = \frac{5}{3} = 1,66$$

$$\alpha = \arctan(1,66)$$

$$\alpha = 59,03^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90$$

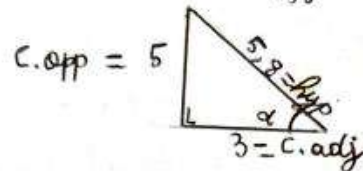
$$59,3 + \beta = 90$$

$$\beta = 90 - 59,3$$

$$\beta = 30,97^\circ$$

$$Q_{3x} = -Q_3 \times \cos B = -Q_3 \times \sin \alpha = -Q_3 \times \frac{5}{5,8}, \text{ avec } \frac{5}{5,8} = \sin \alpha = \frac{c. opp}{hyp}$$

$$Q_{3y} = -Q_3 \times \sin B = -Q_3 \times \cos \alpha = -Q_3 \times \frac{3}{5,8}, \quad \frac{3}{5,8} = \cos \alpha = \frac{c. adj}{hyp}$$



Continuons le calcul:

$$Q_{3x} = -Q_3 \times \frac{5}{5,8} = -58 \times \frac{5}{5,8} = -50t$$

$$Q_{3y} = -Q_3 \times \frac{3}{5,8} = -58 \times \frac{3}{5,8} = -30t$$

Equations d'équilibre

1) $\sum MA = 0,$

$$+Q_1 \times 1 + Q_2 \times 3,5 + Q_{3y} \times 6,5 - Q_{3x} \times 2,5 - B \times 8 = 0$$

$$6 \times 1 + 10 \times 3,5 + 30 \times 6,5 - 50 \times 2,5 - 8B = 0$$

$$6 + 35 + 195 - 125 - 8B = 0$$

$$111 - 8B = 0$$

$$\times 8B = \neq 111$$

$$B = \frac{111}{8}$$

$$B = 13,8t (\uparrow)$$

2) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - Q_1 - Q_2 - Q_{3y} + B = 0$$

$$A_y - 6 - 10 - 30 + 13,8 = 0$$

$$A_y - 32,2 = 0$$

$$A_y = 32,2t (\uparrow)$$

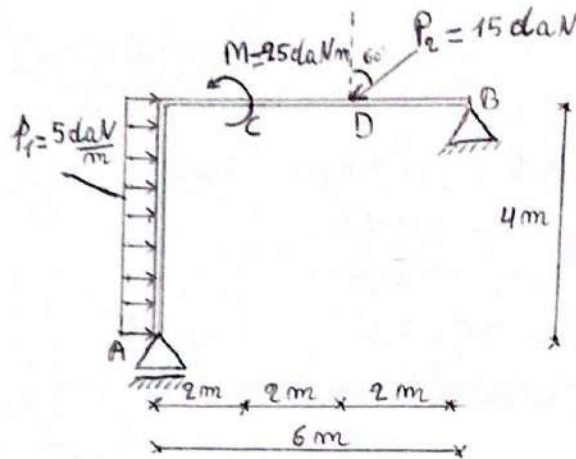
3) $\sum F_x = 0,$

$$A_x - Q_{3x} = 0$$

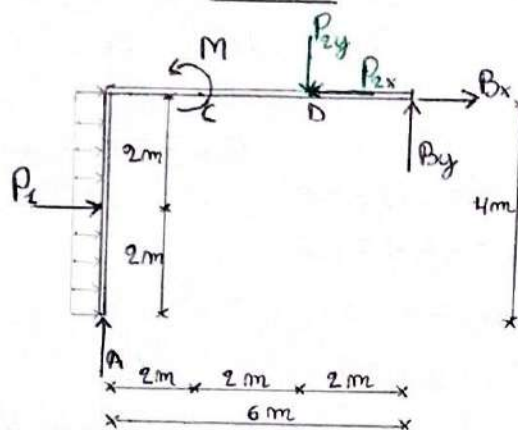
$$A_x - 50 = 0$$

$$A_x = 50t (\rightarrow)$$

Exercice 23 :



S.C.R.L



| Données | Inconnues | Composantes $P_1 = 5 \text{ daN/m}$ | Décomposition $P_2 = 15 \text{ daN}$ |
|-------------------------|--------------------------|---|---|
| $P_1 = 5 \text{ daN/m}$ | $A, A_x \text{ et } A_y$ | $P_1 = P_1 \times 4$ | |
| $M = 25 \text{ daNm}$ | | $= 5 \text{ daN/m} \times 4 \text{ m}$ | |
| $P_2 = 15 \text{ daN}$ | | $P_1 = 20 \text{ daN}$ | |
| | | $X_{G-\frac{0}{2}} \text{ au point } A = \frac{l}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$ | $P_{2x} = -P_2 \cdot \sin 60 = -15 \cdot \sin 60$ $P_{2x} = -12,9 \text{ daN}$ $P_{2y} = -P_2 \cdot \cos 60 = -15 \cdot \cos 60$ $P_{2y} = -7,5 \text{ daN}$ |

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$P_1 \times 2 - M + P_{2y} \times 4 - P_{2x} \times 4 - B_y \times 6 + B_x \times 4 = 0$$

$$20 \times 2 - 25 + 7,5 \times 4 - 12,2 \times 4 - 6B_y + 4B_x = 0$$

$$40 - 25 + 30 - 51,6 - 6B_y + 4B_x = 0$$

$$-6,6 - 6B_y + 4B_x = 0$$

$$-6B_y + 4B_x = 6,6 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A - P_{2y} + B_y = 0$$

$$A - 7,5 + B_y = 0$$

$$A + B_y = 7,5 \quad (2)$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

$$P_1 - P_{2x} + B_x = 0$$

$$20 - 12,2 + B_x = 0$$

$$7,1 + B_x = 0$$

$$B_x = -7,1 \text{ daN } (\leftarrow) \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (1): -6B_y + 4(-7,1) = 6,6$$

$$-6B_y - 28,4 = 6,6$$

$$-6B_y = 6,6 + 28,4$$

$$-6B_y = 35$$

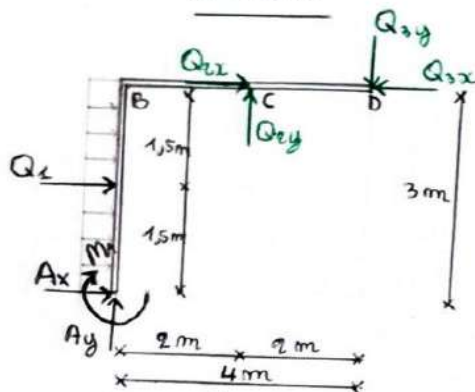
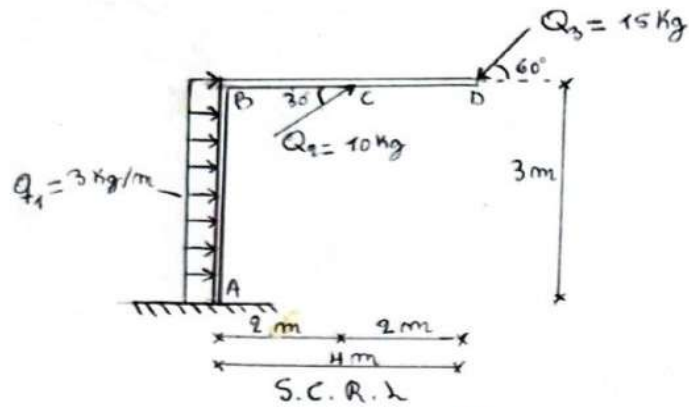
$$B_y = -\frac{35}{6} \Rightarrow B_y = -5,8 \text{ daN } (\downarrow)$$

$$(3) \text{ dans } (2): A - 5,8 = 7,5$$

$$A = 7,5 + 5,8$$

$$A = 13,3 \text{ daN } (\uparrow)$$

Exercice 24 :



Données

- $Q_1 = 3 \text{ kg/m}$
- $Q_2 = 10 \text{ kg}$
- $Q_3 = 15 \text{ kg}$
- $\alpha = 30^\circ$
- $\beta = 60^\circ$

Inconnues

A_x, A_y et M_A

Décomposons $Q_1 = 3 \text{ kg/m}$

$$Q_1 = Q_1 \times 3$$

$$= 3 \text{ kg/m} \times 3 \text{ m}$$

$$Q_1 = 9 \text{ kg}$$

XG° au point A = $\frac{l}{2} = \frac{3 \text{ m}}{2} = 1,5 \text{ m}$

Décomposons $Q_2 = 10 \text{ kg}$ et $Q_3 = 15 \text{ kg}$

$$Q_{2x} = Q_2 \cdot \cos 30$$

$$= 10 \cdot \cos 30$$

$$Q_{2x} = 8,6 \text{ kg}$$

$$Q_{2y} = Q_2 \cdot \sin 30$$

$$= 10 \cdot \sin 30$$

$$Q_{2y} = 5 \text{ kg}$$

$$Q_{3x} = -Q_3 \cdot \cos 60$$

$$= -15 \cdot \cos 60$$

$$= -7,5 \text{ kg}$$

$$Q_{3y} = -Q_3 \cdot \sin 60$$

$$= -15 \cdot \sin 60$$

$$= -12,9 \text{ kg}$$

Equations d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$M_A + Q_1 \times 1,5 + Q_{2x} \times 3 - Q_{2y} \times 2 + Q_{3y} \times 4 - Q_{3x} \times 3 = 0$$

$$M_A + 9 \times 1,5 + 8,6 \times 3 - 5 \times 2 + 12,9 \times 4 - 7,5 \times 3 = 0$$

$$M_A + 13,5 + 25,8 - 10 + 51,6 - 22,5 = 0$$

$$M_A + 58,4 = 0 \Rightarrow M_A = -58,4 \text{ kg.m (D)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y + Q_{2y} - Q_{3y} = 0$$

$$A_y + 5 - 12,9 = 0$$

$$A_y - 7,9 = 0$$

$$A_y = 7,9 \text{ kg } (\uparrow)$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + Q_1 + Q_{2x} - Q_{3x} = 0$$

$$A_x + 9 + 8,6 - 7,5 = 0$$

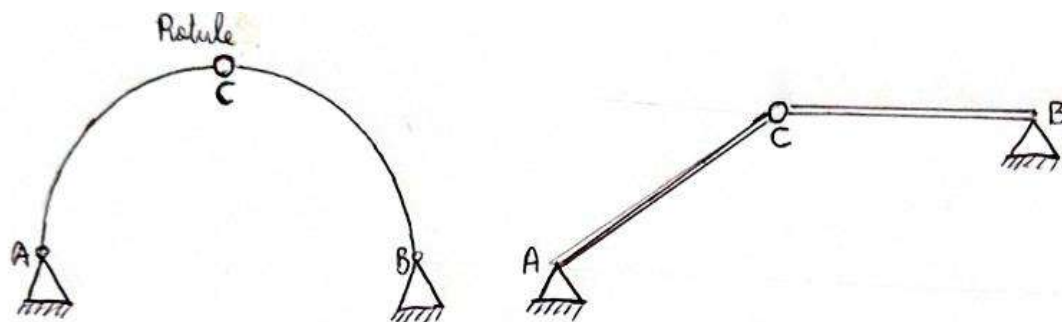
$$A_x + 10,1 = 0$$

$$A_x = -10,1 \text{ kg } (\leftarrow)$$

4 ème cas structure avec rotule(articulations) et structure en forme d'arc

Dans une structure avec une articulation (rotule) placée entre deux appuis, la présence de l'articulation introduit une liberté supplémentaire, réduisant ainsi le nombre d'inconnues dans le système.

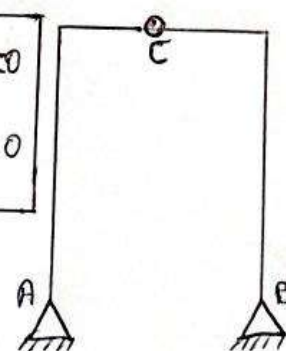
Si la structure initiale avait deux appuis fixes c'est-à-dire quatre inconnues, l'ajout de l'articulation rend la structure isostatique en éliminant une inconnue, car la rotation autour de l'articulation n'introduit pas de nouvelles forces ou moments. Cela résulte en une structure stable et équilibrée, mais avec une liberté de mouvement limitée par la présence de l'articulation.



Si on fait: $\sum M_A = 0$, on fera ensuite: $\sum M_c^d = 0$
 Si on fait: $\sum M_B = 0$, on fera ensuite: $\sum M_c^g = 0$

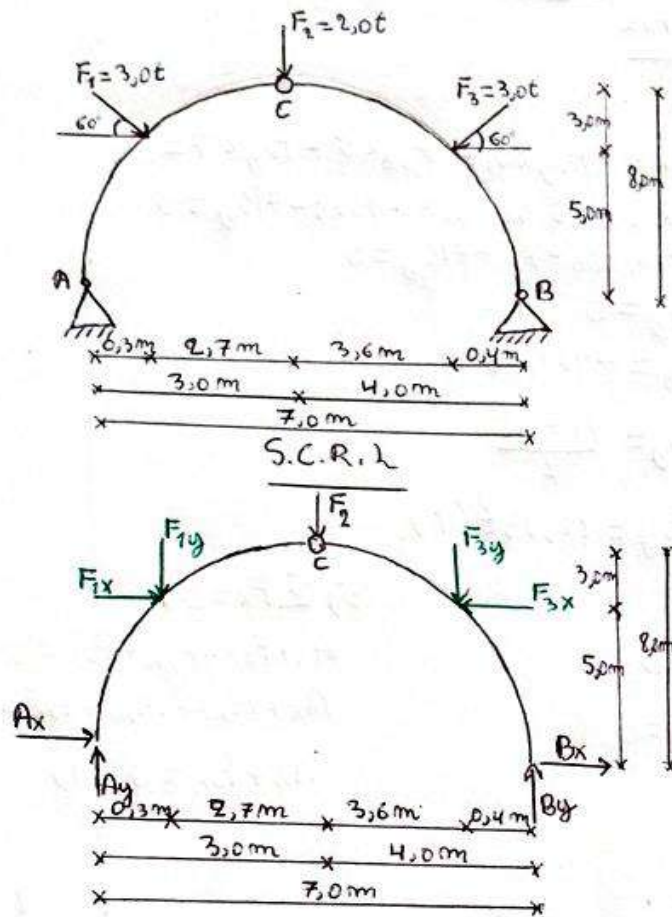
$\sum M_c^d$: Somme des moments par rapport au point C, en considérant la partie droite.

$\sum M_c^g$: Somme des moments par rapport au point C, en considérant la partie gauche.



On l'écrit aussi: $\sum M_c^d = 0$
 $\sum M_c^g = 0$

Exercice 25 :



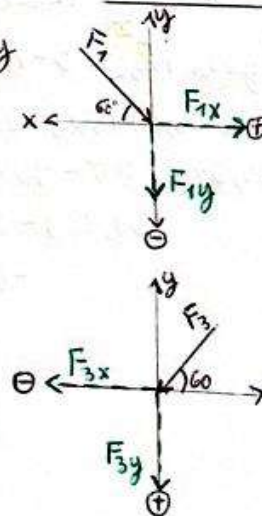
Données

- $F_1 = 3,0t$
- $F_2 = 2,0t$
- $F_3 = 3,0t$
- $\alpha = 60^\circ$

Inconnues

A_x, A_y, B_x et B_y

Décomposons $F_1 = 3,0t$ et $F_3 = 3,0t$



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 60^\circ = 3,0 \cdot \cos 60^\circ = 15,0t$$

$$F_{1y} = -F_1 \cdot \sin 60^\circ = -3,0 \cdot \sin 60^\circ = -25,98t$$

$$F_{3x} = -F_3 \cdot \cos 60^\circ = -3,0 \cdot \cos 60^\circ = -15,0t$$

$$F_{3y} = -F_3 \cdot \sin 60^\circ = -3,0 \cdot \sin 60^\circ = -25,98t$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$F_{1x} \times 5 + F_{1y} \times 0,3 + F_2 \times 3 + F_{3y} \times 6,7 - F_{3x} \times 5 - B_y \times 7 = 0$$

$$15 \times 5 + 25,98 \times 0,3 + 2 \times 3 + 25,98 \times 6,7 - 15 \times 5 - 7B_y = 0$$

$$75 + 7,794 + 6 + 174,066 - 75 - 7B_y = 0$$

$$187,86 - 7B_y = 0$$

$$-7B_y = -187,86$$

$$B_y = \frac{187,86}{7}$$

$$B_y = 26,83 \text{ t} (\uparrow)$$

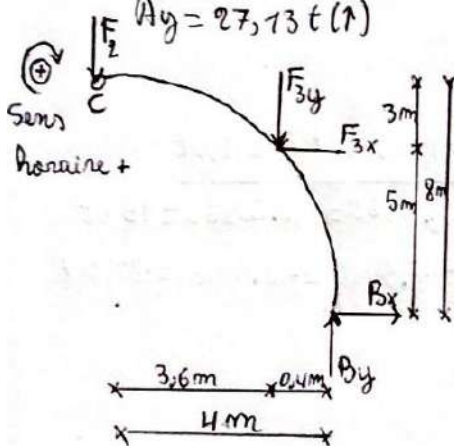
$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - F_{1y} - F_2 - F_{3y} + B_y = 0$$

$$A_y - 25,98 - 2 - 25,98 + 26,83 = 0$$

$$A_y - 27,13 = 0$$

$$A_y = 27,13 \text{ t} (\uparrow)$$



$$3) \sum F_x = 0$$

$$A_x + F_{1x} - F_{3x} + B_x = 0$$

$$A_x + 15,0 - 15,0 + B_x = 0$$

$$A_x + B_x = 0 \quad (1)$$

4) $\sum M_c^d = 0$, On considère maintenant la partie droite.

$$F_{3y} \times 3,6 + F_{3x} \times 3 - B_y \times 4 - B_x \times 8 = 0$$

$$25,98 \times 3,6 + 15 \times 3 - 26,83 \times 4 - 8B_x = 0$$

$$93,528 + 45 - 107,32 - 8B_x = 0$$

$$31,208 - 8B_x = 0$$

$$-8B_x = -31,208$$

$$B_x = \frac{31,208}{8}$$

$$B_x = 3,9 \text{ t} (\rightarrow) \quad (2)$$

(2) dans (1):

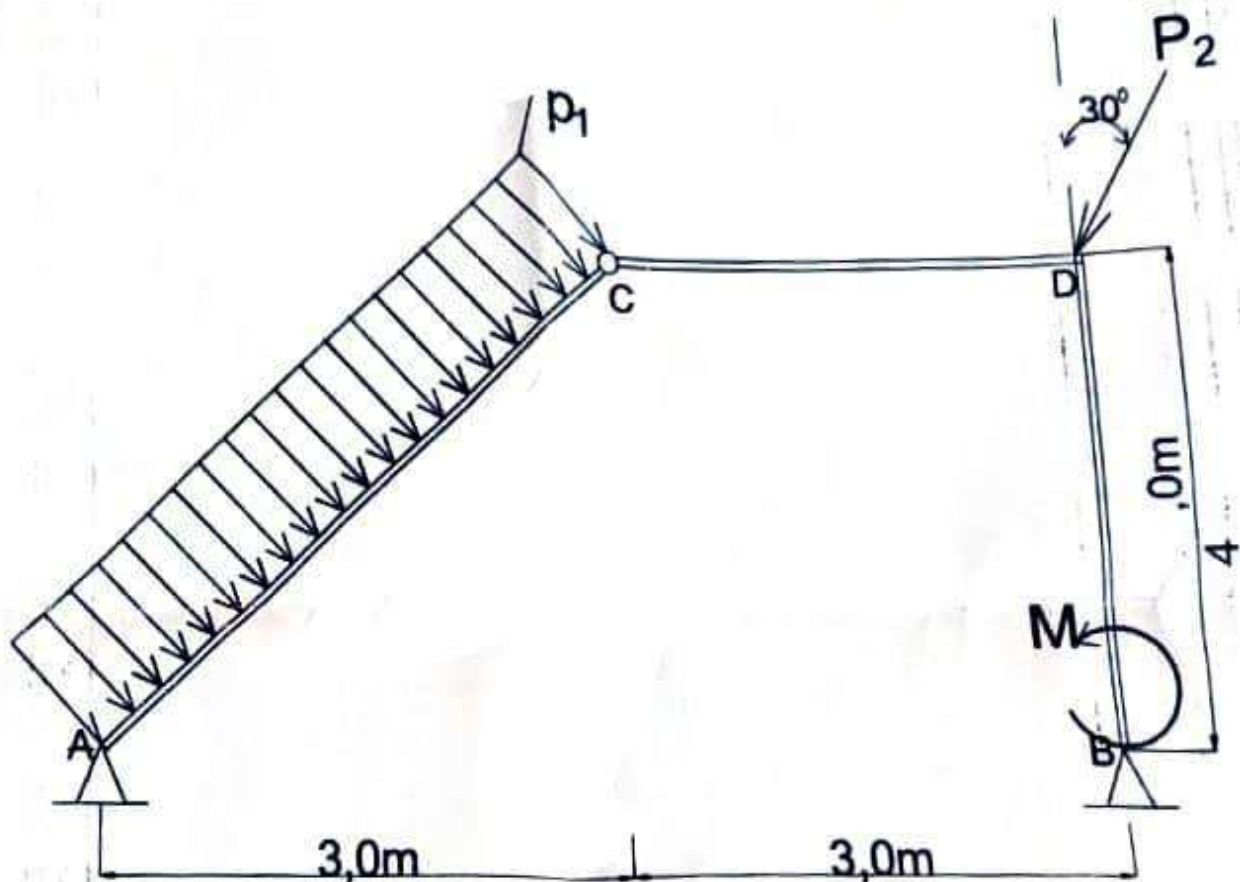
$$A_x + 3,9 = 0$$

$$A_x = -3,9 \text{ t} (\leftarrow)$$

Exercice 26 :

EXAMEN DE STATIQUE APPLIQUEE / TCI BTP

Soit la structure ci-dessous, déterminer les conditions de stabilité et tracer les diagrammes M, T et N.



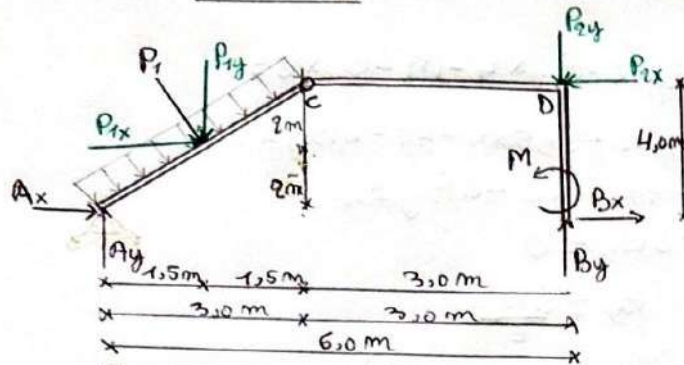
Donnees

 p_1 : le nombre de lettres du nom x 1kg/m P_2 : le nombre de lettres du post-Nom x 5kg M : le nombre de lettres du Pre-nom x 10kg/m

exemple nom : CHIRIMWAMI, post-nom :
KASAMBAKANA et le prénom : KEFA

On va déterminer que les conditions de stabilité le diagramme M,N et T sera dans la partie suivante. Commençons :

S. C. R. 2



Données

- $P_1 = 10 \text{ kg/m}$
- $P_2 = 55 \text{ kg}$
- $M = 40 \text{ kg.m}$

Inconnues

- $A_x, A_y, B_x \text{ et } B_y$

Composantes $P_1 = 10 \text{ kg/m}$

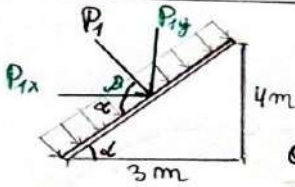
$$P_1 = p_1 \times \text{hyp}$$

$$\text{hyp} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$\text{hyp} = 5 \text{ m}$$

$$P_1 = 10 \text{ kg/m} \times 5 \text{ m} = 50 \text{ kg}$$

Décomposons $P_1 = 50 \text{ kg}$ et $P_2 = 55 \text{ kg}$



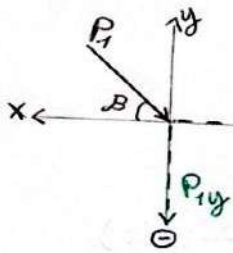
$$\tan \alpha = \frac{4}{3} = 1,33$$

$$\alpha = \arctan(1,33)$$

$$\alpha = 53,13^\circ$$

On sait que :

$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad 53,13 + \beta = 90, \quad \beta = 90 - 53,13, \quad \beta = 36,87^\circ$$



$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos \beta = 50 \cdot \cos 36,87^\circ = 40 \text{ kg}$$

$$P_{1y} = -P_1 \cdot \sin \beta = -50 \cdot \sin 36,87^\circ = -30 \text{ kg}$$

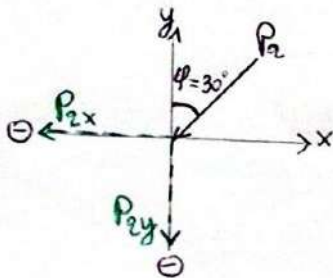
ou

$$P_{1x} = P_1 \cdot \sin \alpha = P_1 \cdot \frac{4}{5} = 50 \times \frac{4}{5} = 40 \text{ kg}$$

$$P_{1y} = -P_1 \cdot \cos \alpha = -P_1 \cdot \frac{3}{5} = 50 \times \frac{3}{5} = -30 \text{ kg}$$

$$P_{2x} = -P_2 \cdot \sin 4^\circ = -55 \cdot \sin 30^\circ = -27,5 \text{ kg}$$

$$P_{2y} = -P_2 \cdot \cos 4^\circ = -55 \cdot \cos 30^\circ = -47,6 \text{ kg}$$



Equations d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$P_{1x} \times 2 + P_{1y} \times 1,5 + P_{2y} \times 6 - P_{2x} \times 4 - M - B_y \times 6 = 0$$

$$40 \times 2 + 30 \times 1,5 + 47,6 \times 6 - 27,5 \times 4 - 40 - 6B_y = 0$$

$$80 + 45 + 285,6 - 110 - 40 - 6B_y = 0$$

$$270,6 - 6B_y = 0$$

$$B_y = \frac{270,6}{6}$$

$$B_y = 45,1 \text{ Kg} (\uparrow)$$

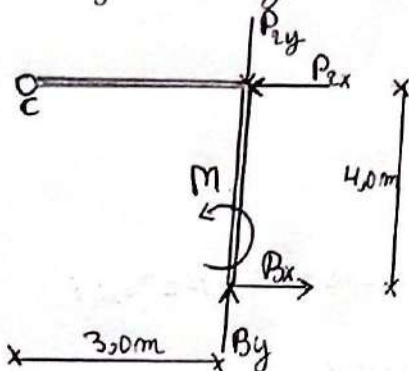
2) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - P_{1y} - P_{2y} + B_y = 0$$

$$A_y - 30 - 47,6 + 45,1 = 0$$

$$A_y - 32,5 = 0$$

$$A_y = 32,5 \text{ Kg} (\uparrow)$$



3) $\sum F_x = 0,$

$$A_x + P_{1x} - P_{2x} + B_x = 0$$

$$A_x + 40 - 27,5 + B_x = 0$$

$$A_x + 12,5 + B_x = 0$$

$$A_x + B_x = -12,5 \quad (1)$$

4) $\sum M_c = 0$

$$P_{2y} \times 3 - M - B_y \times 3 - B_x \times 4 = 0$$

$$47,6 \times 3 - 40 - 45,1 \times 3 - 4B_x = 0$$

$$142,8 - 40 - 135,3 - 4B_x = 0$$

$$-32,5 - 4B_x = 0$$

$$-4B_x = 32,5$$

$$B_x = -\frac{32,5}{4}$$

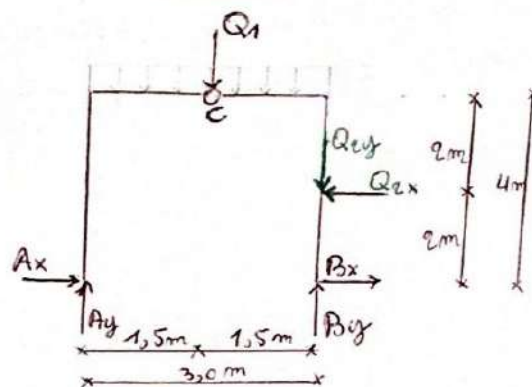
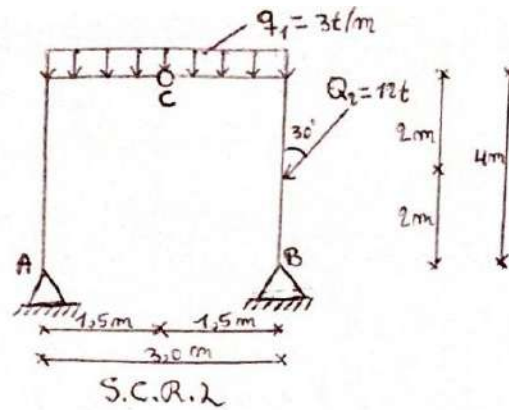
$$B_x = -8,125 \text{ Kg} (\leftarrow) \quad (2)$$

(2) dans (1):

$$A_x - 8,125 = -12,5$$

$$A_x = -12,5 + 8,125 \Rightarrow A_x = -4,375 \text{ Kg} (\rightarrow)$$

Exercice 27 :

Données

$$q_1 = 3 \text{ t/m}$$

$$Q_1 = 12 \text{ t}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Inconnues

$$A_x, A_y, B_x \text{ et } B_y$$

Composants $q_1 = 3 \text{ t/m}$

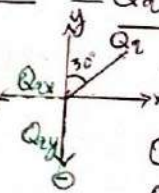
$$Q_1 = q_1 \times 3$$

$$= 3 \text{ t/m} \times 3 \text{ m}$$

$$Q_1 = 9 \text{ t}$$

Décomposons

$$Q_1 = 12 \text{ t}$$



$$Q_{1x} = -Q_1 \cdot \sin \alpha$$

$$= -12 \cdot \sin 30$$

$$Q_{1x} = -6 \text{ t}$$

$$Q_{1y} = -Q_1 \cdot \cos \alpha$$

$$= -12 \cdot \cos 30$$

$$Q_{1y} = -10,4 \text{ t}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$Q_1 \times 1,5 + Q_{1y} \times 3 - Q_{1x} \times 2 - B_y \times 3 = 0$$

$$9 \times 1,5 + 10,4 \times 3 - 6 \times 2 - 3 B_y = 0$$

$$13,5 + 31,2 - 12 - 3 B_y = 0$$

$$32,7 - 3 B_y = 0$$

$$B_y = \frac{32,7}{3} \Rightarrow B_y = 10,9 \text{ t } (\uparrow)$$

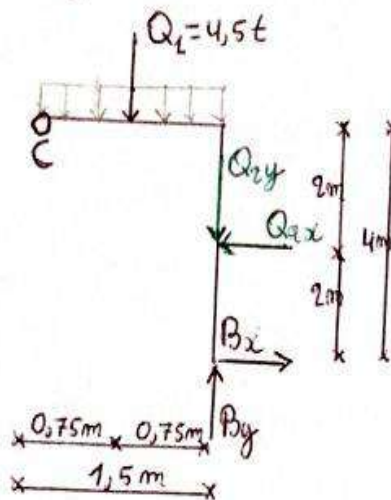
$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_1 - Q_{2y} + B_y = 0$$

$$A_y - 9 - 10 + 10,9 = 0$$

$$A_y - 8,5 = 0$$

$$A_y = 8,5 \text{ t (1)}$$



il faut encore composer $q_1 = 3 \text{ t/m}$ avec la distance de 1,5 m: $Q_1 = q_1 \times 1,5 = 3 \text{ t/m} \times 1,5 \text{ m} = 4,5 \text{ t}$

$$\text{Et } X_G \text{ au point C} = \frac{l}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ m}$$

$$4) \sum M_c^d = 0,$$

$$Q_1 \times 0,75 + Q_{2y} \times 1,5 + Q_{2x} \times 2 - B_y \times 1,5 - B_x \times 4 = 0$$

$$4,5 \times 0,75 + 10,4 \times 1,5 + 6 \times 2 - 10,9 \times 1,5 - 4 B_x = 0$$

$$3,375 + 15,6 + 12 - 16,35 - 4 B_x = 0$$

$$14,625 - 4 B_x = 0$$

$$-4 B_x = -14,625$$

$$B_x = 3,66 \text{ t (}\rightarrow\text{)} \quad (2)$$

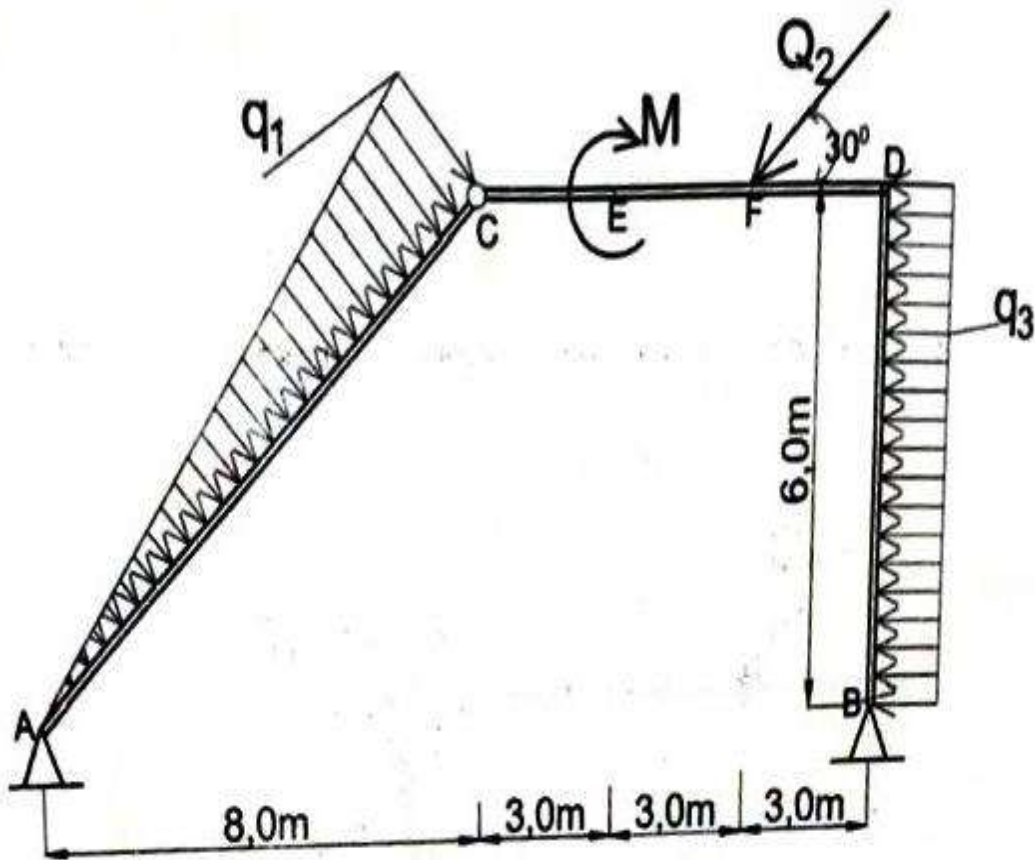
$$(2) \text{ dans (1): } A_x + 3,66 = 6$$

$$A_x = 6 - 3,66$$

$$A_x = 2,34 \text{ t (}\rightarrow\text{)}$$

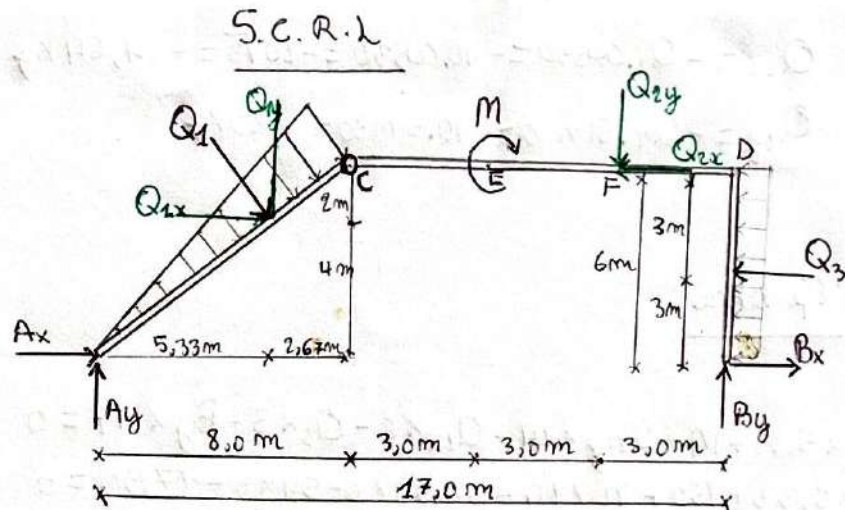
Exercice 28 :

Soit la poutre isostatique ci-dessous, déterminer les conditions d'équilibre.



NOTEZ BIEN:

| q_1 (kg/m) | M (kgm) | Q_2 (kg) | q_3 (kg/m) |
|--|---|---|---|
| La somme des lettres qui constituent le nom et le prénom | Le nombre de lettres qui constituent le nom, multiplié par 15 | Le nombre de lettres qui constituent le post-nom multiplié par 10 | La somme des lettres qui constituent le post-nom et le prénom |



Données

$$q_1 = 17 \text{ Kg/m}$$

$$M = 150 \text{ kg}\cdot\text{m}$$

$$q_2 = 40 \text{ kg}$$

$$q_3 = 9 \text{ kg/m}$$

Inconnues

$$A_x, A_y, B_x \text{ et } B_y$$

Composantes $q_1 = 17 \text{ kg/m}$ et $q_2 = 9 \text{ kg/m}$

$$Q_1 = \frac{q_1 \cdot \text{hyp}}{2}$$

$$\text{hyp} = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100}$$

$$\text{hyp} = 10 \text{ m}$$

$$Q_1 = \frac{17 \text{ kg/m} \times 10 \text{ m}}{2} = \frac{170 \text{ kg}}{2}$$

$$Q_1 = 85 \text{ kg}$$

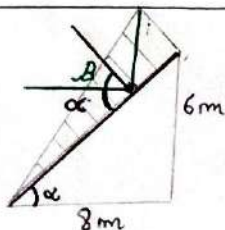
$$X_G \text{ au point A} = \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} \cdot 8 = 5,33 \text{ m}$$

$$X_G \text{ au point C} = \frac{1}{3} l = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ m}$$

$$Q_3 = q_3 \times 6 = 9 \text{ kg/m} \times 6 \text{ m}$$

$$Q_3 = 54 \text{ kg}, X_G \text{ au point B} = \frac{l}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m}$$

Décomposons $Q_1 = 85 \text{ kg}$ et $Q_2 = 40 \text{ kg}$



$$\text{tg } \alpha = \frac{6}{8} = 0,75, \text{ On sait que } \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha = \text{arctg}(0,75)$$

$$\alpha = 36,86^\circ$$

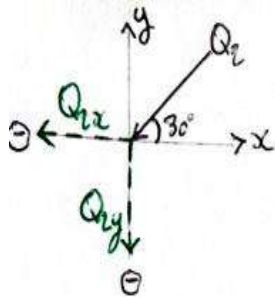
$$36,86^\circ + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 36,86^\circ$$

$$\beta = 53,14^\circ$$

$$\text{d'où : } Q_{1x} = Q_1 \cdot \cos \beta = Q_1 \cdot \frac{6}{10} = Q_1 \cdot \sin \alpha = 85 \cdot \frac{6}{10} = 51 \text{ Kg}$$

$$Q_{1y} = -Q_1 \cdot \sin \beta = -Q_1 \cdot \frac{8}{10} = -Q_1 \cdot \cos \alpha = -85 \cdot \frac{8}{10} = -68 \text{ Kg}$$



$$Q_{2x} = -Q_2 \cdot \cos 30^\circ = -40 \cdot \cos 30^\circ = -20\sqrt{3} = -34,64 \text{ Kg}$$

$$Q_{2y} = -Q_2 \cdot \sin 30^\circ = -40 \cdot \sin 30^\circ = -20 \text{ Kg}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$Q_{1x} \times 4 + Q_{1y} \times 5,33 + M + Q_{2y} \times 14 - Q_{2x} \times 6 - Q_3 \times 3 - B_y \times 17 = 0$$

$$51 \times 4 + 68 \times 5,33 + 150 + 20 \times 14 - 34,64 \times 6 - 54 \times 3 - 17 B_y = 0$$

$$204 + 362,44 + 150 + 280 - 207,84 - 162 - 17 B_y = 0$$

$$996,44 - 369,84 - 17 B_y = 0$$

$$626,6 - 17 B_y = 0$$

$$17 B_y = 626,6$$

$$B_y = \frac{626,6}{17}$$

$$B_y = 36,85 \text{ Kg} (\uparrow)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_{1y} - Q_{2y} + B_y = 0$$

$$A_y - 68 - 20 + 36,85 = 0$$

$$A_y - 51,15 = 0$$

$$A_y = 51,15 \text{ Kg} (\uparrow)$$

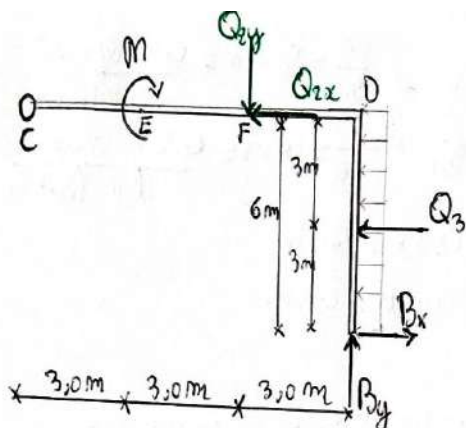
$$3) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + Q_{1x} - Q_{2x} - Q_3 + B_x = 0$$

$$A_x + 51 - 34,64 - 54 + B_x = 0$$

$$A_x - 37,64 + B_x = 0$$

$$A_x + B_x = +37,64 \quad (1)$$



$$4) \sum M_c^d = 0,$$

$$M + Q_{2y} \times 6 + Q_3 \times 3 - B_y \times 9 - B_x \times 6 = 0$$

$$150 + 20 \times 6 + 54 \times 3 - 36,85 \times 9 - 6B_x = 0$$

$$150 + 120 + 162 - 331,65 - 6B_x = 0$$

$$100,35 - 6B_x = 0$$

$$B_x = \frac{100,35}{6}$$

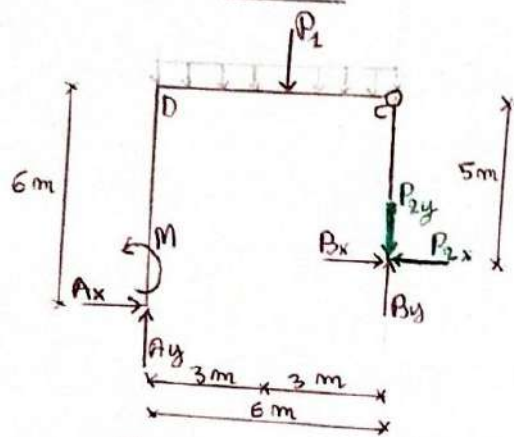
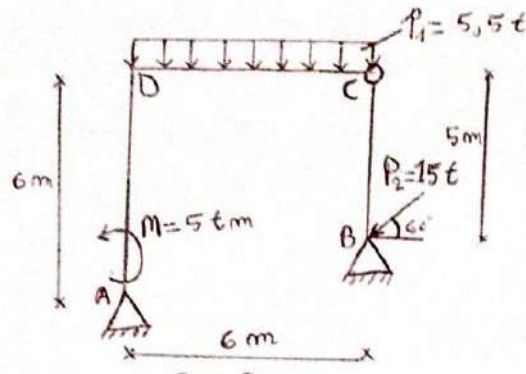
$$B_x = 16,725 \text{ Kg} (\rightarrow) \quad (9)$$

$$(9) \text{ dans (1)} : A_x + 16,725 = 37,64$$

$$A_x = 37,64 - 16,725$$

$$A_x = 20,915 \text{ Kg} (\rightarrow)$$

Exercice 29 :



Données

- $M = 5 \text{ tm}$
- $P_1 = 5,5 \text{ t}$
- $P_2 = 15 \text{ t}$
- $\alpha = 60^\circ$

Inconnues

- $A_x, A_y, B_x \text{ et } B_y$

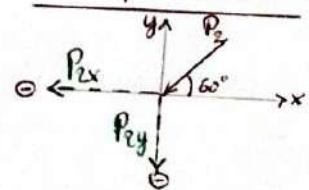
Composantes $P_1 = 5,5 \text{ t/m}$

$$P_1 = P_1 \times 6$$

$$= 5,5 \text{ t/m} \times 6 \text{ m}$$

$$P_1 = 33 \text{ t}$$

Décomposons $P_2 = 15 \text{ t}$



$$P_{2x} = -P_2 \cdot \cos 60 = -15 \cdot \cos 60$$

$$P_{2x} = -7,5 \text{ t}$$

$$P_{2y} = -P_2 \cdot \sin 60 = -15 \cdot \sin 60$$

$$P_{2y} = -12,9 \text{ t}$$

Equations d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$-M + P_1 \times 3 + P_{2y} \times 6 - P_{2x} \times 1 + B_x \times 1 - B_y \times 6 = 0$$

$$-5 + 33 \times 3 + 12,9 \times 6 - 7,5 \times 1 + B_x - 6B_y = 0$$

$$-5 + 99 + 77,4 - 7,5 + B_x - 6B_y = 0$$

$$163,9 + B_x - 6B_y = 0$$

$$B_x - 6B_y = -163,9 \quad (1)$$

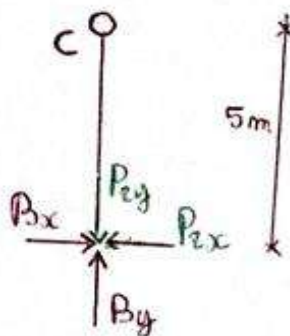
$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_1 - P_{2y} + B_y = 0$$

$$A_y - 33 - 12,9 + B_y = 0$$

$$A_y - 45,9 + B_y = 0$$

$$A_y + B_y = 45,9 \quad (2)$$



$$4) \sum M_c^d = 0,$$

$$P_{2x} \times 5 - B_x \times 5 = 0$$

$$7,5 \times 5 - 5B_x = 0$$

$$37,5 - 5B_x = 0$$

$$-5B_x = -37,5$$

$$B_x = \frac{37,5}{5}$$

$$B_x = 7,5 \text{ t } (\rightarrow) \quad (4)$$

$$(4) \text{ dans } (1): 7,5 - 6B_y = -163,9$$

$$-6B_y = -163,9 - 7,5$$

$$B_y = \frac{171,4}{6}$$

$$B_y = 28,56 \text{ t } (\uparrow)$$

$$(4) \text{ dans } (2): A_y + 28,56 = 45,9$$

$$A_y = 45,9 - 28,56$$

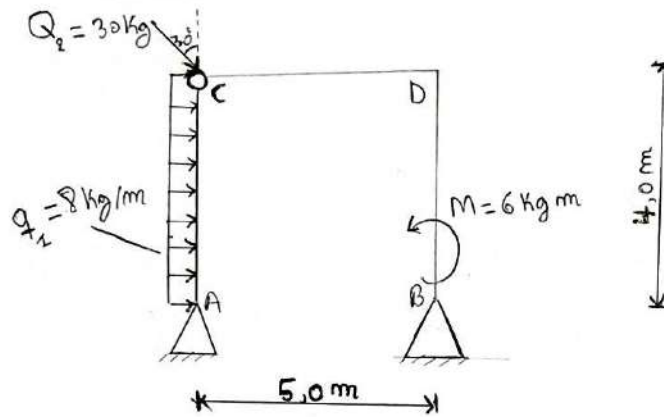
$$A_y = 17,34 \text{ t } (\uparrow)$$

$$(4) \text{ dans } (3): A_x + 7,5 = 7,5$$

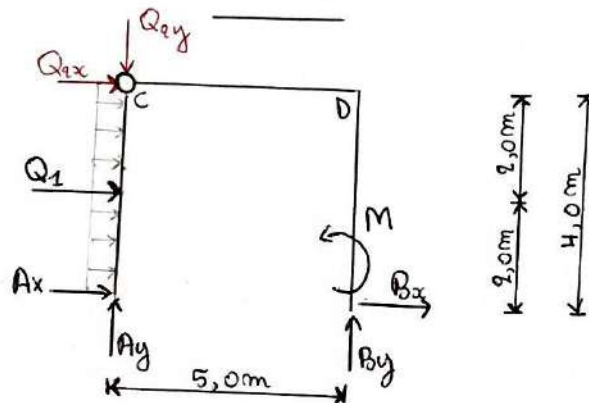
$$A_x = 7,5 - 7,5$$

$$A_x = 0 \text{ t}$$

Exercice 30 :



S.C.R.L



Données

$$q_1 = 8 \text{ kg/m}$$

$$Q_2 = 30 \text{ kg}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$M = 6 \text{ kg m}$$

Inconnues

$$A_x, A_y, B_x \text{ et } B_y$$

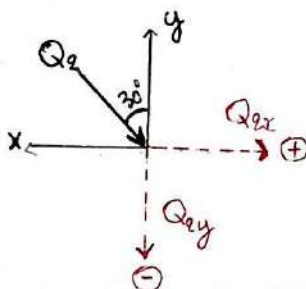
Composantes $q_1 = 8 \text{ kg/m}$

$$Q_1 = q_1 \times 4.0 = 8 \text{ kg/m} \times 4.0 \text{ m} = 32 \text{ kg}$$

$$X_G = \frac{l}{2} \text{ au point A} = \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

$$X_G = \frac{l}{2} \text{ au point C} = \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

Décomposition $Q_2 = 30 \text{ kg}$



$$Q_{2x} = Q_2 \sin 30 = 30 \sin 30 = 15 \text{ kg}$$

$$Q_{2y} = -Q_2 \cos 30 = -30 \cos 30 = -15\sqrt{3} = -25.9 \text{ kg}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$Q_1 \times 2 + Q_{2x} \times 4 - M - B_y \times 5 = 0$$

$$32 \times 2 + 15 \times 4 - 6 - 5B_y = 0$$

$$64 + 60 - 6 - 5B_y = 0$$

$$118 - 5B_y = 0$$

$$+5B_y = +118$$

$$B_y = \frac{118}{5}$$

$$B_y = 23,6 \text{ Kg } (\uparrow)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_{2y} + B_y = 0$$

$$A_y - 25,9 + 23,6 = 0$$

$$A_y - 2,3 = 0$$

$$A_y = 2,3 \text{ Kg } (\uparrow)$$

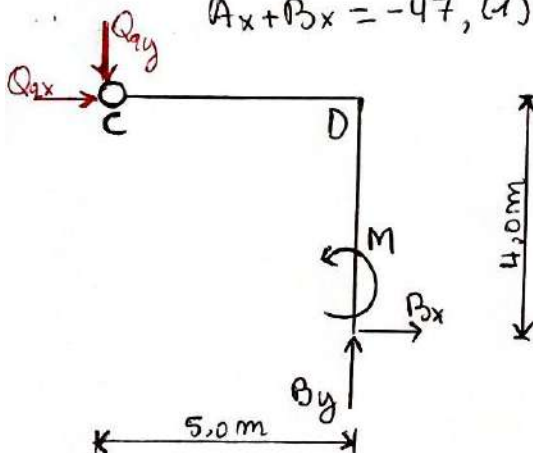
$$3) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + Q_1 + Q_{2x} + B_x = 0$$

$$A_x + 32 + 15 + B_x = 0$$

$$A_x + 47 + B_x = 0$$

$$A_x + B_x = -47, (1)$$



$$4) \sum M_c^d = 0,$$

$$-M - B_x \times 4 - B_y \times 5 = 0$$

$$-6 - 4B_x - 23,6 \times 5 = 0$$

$$-6 - 4B_x - 118 = 0$$

$$-124 - 4B_x = 0$$

$$-4B_x = 124$$

$$B_x = \frac{-124}{4}$$

$$B_x = -31 \text{ Kg } (\leftarrow), (2)$$

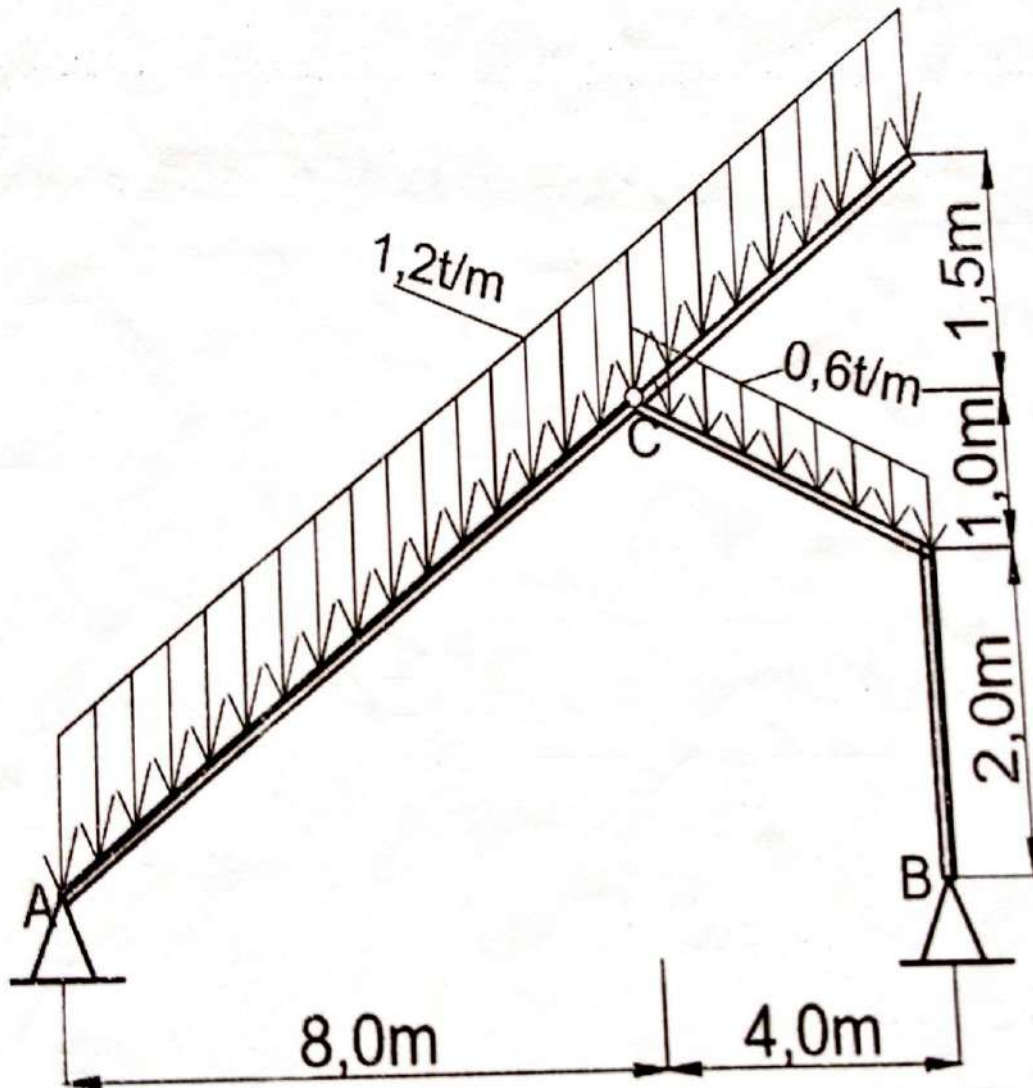
$$(2) \text{ dans (1): } A_x - 31 = -47$$

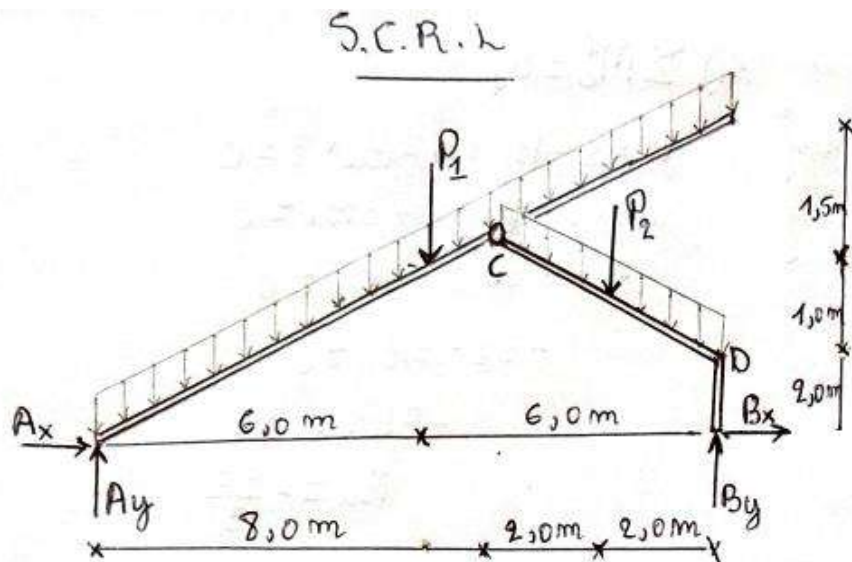
$$A_x = -47 + 31$$

$$A_x = -16 \text{ Kg } (\leftarrow)$$

Exercice 31 :

Soit la poutre isostatique ci-dessous, déterminez les conditions d'équilibre.



Données

$$P_1 = 1,2 \text{ t/m}$$

$$P_2 = 0,6 \text{ t/m}$$

Inconnues

$$A_x, A_y, B_x \text{ et } B_y$$

Composons $P_1 = 1,2 \text{ t/m}$ et $P_2 = 0,6 \text{ t/m}$

$$P_1 = P_1 \times l_1 = 1,2 \text{ t/m} \times 12 \text{ m} = 14,4 \text{ t}$$

$$X_{G_1} \text{ au point A} = \frac{l_1}{2} = \frac{12}{2} = 6,0 \text{ m}$$

$$P_2 = P_2 \times l_2 = 0,6 \text{ t/m} \times 4 \text{ m} = 2,4 \text{ t}$$

$$X_{G_2} \text{ au point D} = \frac{l_2}{2} = \frac{4}{2} = 2,0 \text{ m}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$P_1 \times 6 + P_2 \times 10 - B_y \times 12 = 0$$

$$14,4 \times 6 + 2,4 \times 10 - 12 B_y = 0$$

$$86,4 + 24 - 12 B_y = 0$$

$$110,4 - 12 B_y = 0$$

$$B_y = \frac{110,4}{12}$$

$$B_y = 9,2 \text{ t} (\uparrow)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_1 - P_2 + B_y = 0$$

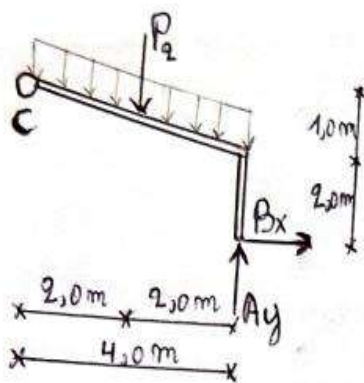
$$A_y - 14,4 - 2,4 + 9,2 = 0$$

$$A_y - 7,6 = 0$$

$$A_y = 7,6 \text{ t} (\uparrow)$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + B_x = 0 \quad (1)$$



$$4) \sum M_c^d = 0,$$

$$P_2 \times 2 - B_y \times 4 - B_x \times 3 = 0$$

$$2,4 \times 2 - 9,2 \times 4 - 3B_x = 0$$

$$4,8 - 36,8 - 3B_x = 0$$

$$-32 - 3B_x = 0$$

$$-3B_x = 32$$

$$B_x = -\frac{32}{3}$$

$$B_x = -10,6 \text{ t } (\leftarrow) \quad (2)$$

(2) dans (1) : $A_x - 10,6 = 0$

$$A_x = 10,6 \text{ t } (\rightarrow)$$

Si on veut trouver la résultante des réactions d'appuis on fait :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$= \sqrt{(10,6)^2 + (7,6)^2}$$

$$A = 13,04 \text{ t } (\nearrow)$$

$$\text{tg } \alpha_A = \frac{A_y}{A_x} = \frac{7,6}{10,6}$$

$$\text{tg } \alpha_A = 0,7169$$

$$\alpha_A = \text{arctg}(0,7169)$$

$$\alpha_A = 35,63^\circ$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$= \sqrt{(10,6)^2 + (9,2)^2}$$

$$B = 14,03 \text{ t } (\nwarrow)$$

$$\text{tg } \alpha_B = \frac{B_y}{B_x} = \frac{9,2}{10,6}$$

$$\text{tg } \alpha_B = 0,8679$$

$$\alpha_B = \text{arctg}(0,8679)$$

$$\alpha_B = 40,95^\circ$$

5ème Cas : Poutre Gerber(Poutre continue)

Poutre Gerber : Une poutre Gerber est une poutre en acier ou en béton armé avec des extrémités articulées et des appuis intermédiaires.

Ces articulations supplémentaires permettent à la poutre de se déformer de manière contrôlée sous l'effet des charges. Les articulations facilitent le calcul des réactions d'appuis et des moments fléchissants, simplifiant ainsi l'analyse de la structure. Cela permet de concevoir des structures plus efficaces et économiques.

Exemple

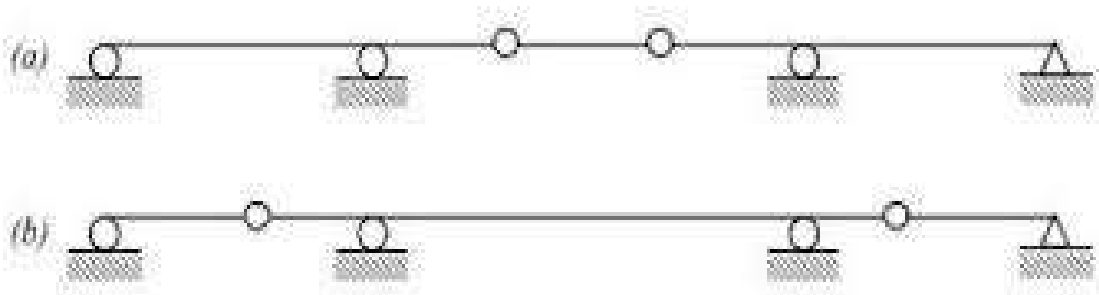


Figure 6.2 : Exemples de poutres Gerber

Le nombre d'articulation intermédiaire est déterminé par cette formule :

$$n_a = n_r - 3$$

avec

n_a = nombre des articulations intermédiaires

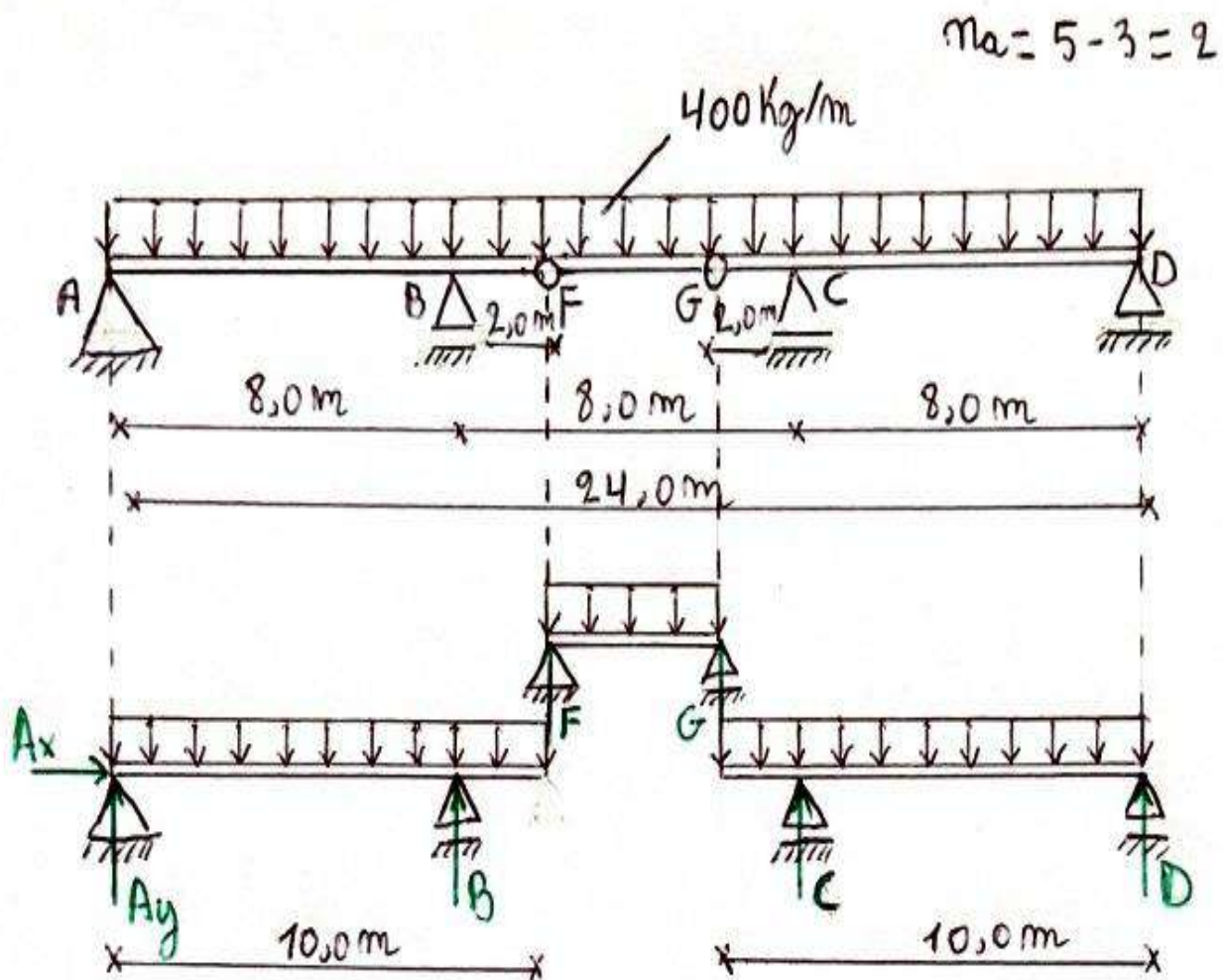
n_r = nombre total des composantes de réaction inconnues.

3 = nombre des équations d'équilibre.

$$(a) \text{ et } (b) : n_a = 5 - 3 = 2$$

Exercice 32 :

Soit la poutre isostatique ci-dessous, déterminer les conditions d'équilibre



On remarque que la structure est symétriquement chargée par 400 kg/m alors nous allons composer partie par partie

* Poutre F : $F = G = \frac{200 \times 4}{2} = 400,0 \text{ Kg}$

* Poutre ABF:

1) $\sum M_A = 0,$

$$(200 \times 10) \times 5 - B \times 8 + 400 \times 10 = 0$$

$$10000 - B \times 8 + 4000 = 0$$

$$B = \frac{14000}{8} \Rightarrow B = 1750,0 \text{ Kg} (\uparrow)$$

2) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - 200 \times 10 + 1750 - 400 = 0$$

$$A_y - 2000 + 1750 - 400 = 0$$

$$A_y - 6500 = 0 \Rightarrow A_y = 6500 \text{ Kg} (\uparrow)$$

3) $\sum F_x = 0,$

$$A_x = 0 \text{ Kg}$$

Poutre GCD

1) $\sum M_C = 0$

$$-400 \times 2 + 200 \times 10 \times 4 - D \times 8 = 0$$

$$-800 + 8000 - 8D = 0$$

$$7200 - 8D = 0$$

$$+8D = +7200 \Rightarrow D = \frac{7200}{8} = 900 \text{ Kg} (\uparrow)$$

2) $\sum F_y = 0,$

$$-400 - 200 \times 10 + C + 900 = 0$$

$$-1500 + C = 0$$

$$C = 1500 \text{ Kg} (\uparrow)$$

Chapitre 2 :

Calcul des efforts intérieur et le
diagramme M,N et T(Moment
fléchissant, L'effort Normal et
l'effort Tranchant)

Partie théorique

2.1 Les efforts intérieurs:

Les efforts intérieurs, également appelées forces internes, sont les forces qui agissent à l'intérieur d'une structure.

Les principales composantes des forces intérieurs sont :

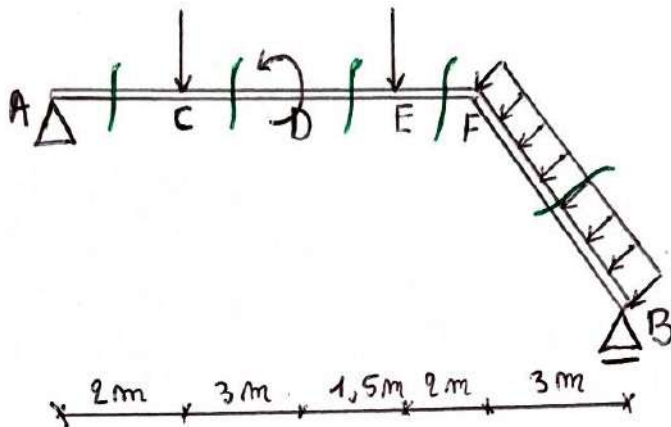
- **L'effort normal « N » (La force axiale) :** C'est la force qui agit le long de l'axe de la structure, soit en compression soit en traction.
- **L'effort tranchant « T » (ou force de cisaillement) :**
C'est la force qui agit perpendiculairement à l'axe de la structure.
 - *Elle est causée par des charges appliquées transversalement à la structure et peut provoquer des déformations de cisaillement.*
 - *Son diagramme qui permet d'obtenir la section des armatures transversale.*
- **Le moment fléchissant « M » :** C'est la force qui provoque la flexion dans une poutre ou dans un élément de la structure il tend à faire fléchir.
 - *Son diagramme qui permet d'obtenir la section des armatures tendue.*

2.2. Méthodes des sections

Pour déterminer les forces intérieurs qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux comme en statique, de la méthode des sections et après on va appliquer les équations d'équilibre de la statique.

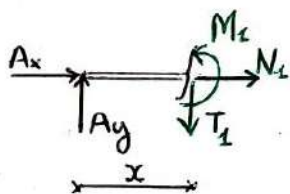
NB : On va utiliser la méthode des sections en considérant la partie gauche de la coupe

On fait la coupe entre deux points exemple :



Exemple de la première coupe on aura :

1^{ère} Coupe entre A et C: $0 \leq x \leq 2$



$$\begin{aligned} 1) \sum F_x = 0, \\ A_x + N_1 = 0 \\ N_1 = -A_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sum F_y = 0, \\ A_y - T_1 = 0 \\ T_1 = A_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \sum M_1 = 0 \\ A_y \cdot x - M_1 = 0 \\ M_1 = A_y x \end{aligned}$$

On remarque que T_1 est la dérivée première de M_1 c'est-à-dire que M_1 est l'intégrale de T_1 :

$$M = \int T dx \text{ et } T = \frac{\partial M}{\partial x}$$

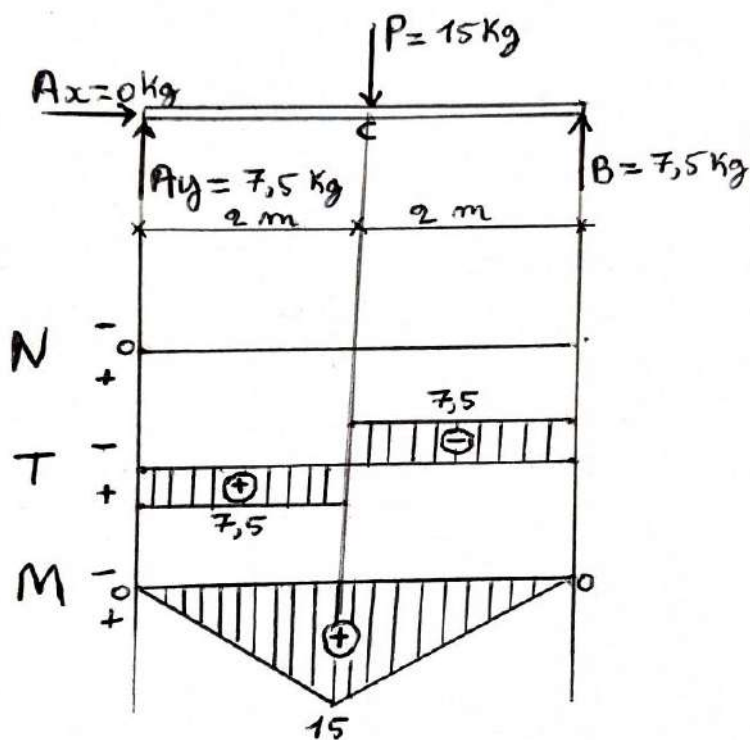
2.3 Diagramme MNT

Le diagramme MNT est un outil graphique utilisé en génie civil pour représenter les variations des contraintes normales, des efforts tranchants et des moments fléchissants le long d'une structure.

2.4. Convention des signes

Toutes les efforts qui seront sollicité vers le bas seront considérés comme positif et toutes les efforts qui seront sollicité vers le haut seront négatif.

Exemple :

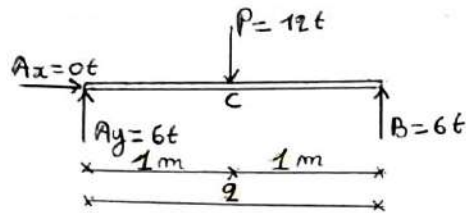


Ceci n'est qu'un exemple pour montré la convention de signe qu'on va utiliser pour les efforts qui agissent sur la poutre ou sur l'élément de la structure.

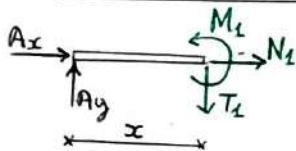
NB: On va directement mettre les réactions d'appuis, parce que on a déjà montré comment les déterminer dans la partie précédente alors ici on montre seulement comment déterminer les efforts intérieur et comment tracé le diagramme MNT.

Calcul des efforts intérieurs et le
diagramme M,N et T(Moment
fléchissant, L'effort Normal et
l'effort Tranchant)
Partie pratique

Exercice 1 : soit la structure ci-dessous, déterminer les efforts intérieurs et tracer le diagramme MNT.



Coupe 1 Entre A et C : $0 \leq x \leq 1$



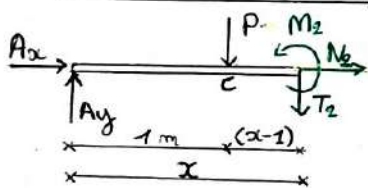
$$\begin{aligned} 1) \sum F_x = 0, \\ A_x + N_1 = 0 \\ 0 + N_1 = 0 \\ N_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sum F_y = 0, \\ A_y - T_1 = 0 \\ 6 - T_1 = 0 \\ T_1 = 6 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \sum M_1 = 0 \\ A_y x - M_1 = 0 \\ 6x - M_1 = 0 \\ M_1 = 6x \end{aligned}$$

$$\text{Si } x = 0, \quad x = 1 \\ M_1 = 0 \text{ kgm} \quad M_1 = 6 \text{ kgm}$$

Coupe 2 Entre C et B : $1 \leq x \leq 2$



$$\begin{aligned} 1) \sum F_x = 0, \\ N_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sum F_y = 0, \\ A_y - P - T_2 = 0 \\ 6 - 12 - T_2 = 0 \\ -6 - T_2 = 0 \\ T_2 = -6 \end{aligned}$$

$$3) \sum M_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} A_y x - P(x-1) - M_2 = 0 \\ 6x - 12(x-1) - M_2 = 0 \\ 6x - 12x + 12 - M_2 = 0 \\ -6x + 12 - M_2 = 0 \end{aligned}$$

$$M_2 = -6x + 12$$

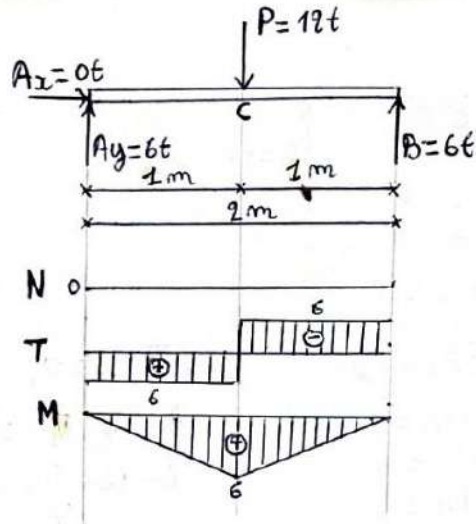
$$\text{Si } x = 1, \quad x = 2$$

$$M_2 = 6 \text{ kgm} \quad M_2 = 0 \text{ kgm}$$

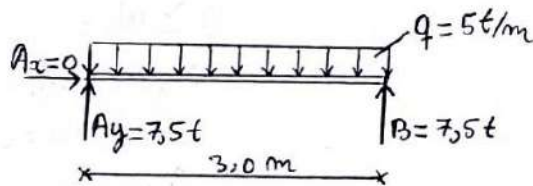
On remarque que :

$$T_2 = \frac{\partial M_2}{\partial x} \quad \text{et} \quad M_2 = \int T_2 dx$$

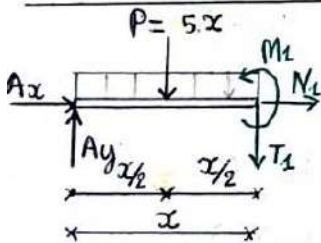
Pour vérifier votre réponse vous pouvez dériver le moment fléchissant pour trouver l'effort tranchant.



Exercice 2:



Coup 1: Entre A et B $0 \leq x \leq 3$



On a d'abord composé P avec x qui est la distance qu'on ne connaît pas, voilà pourquoi on a trouvé $P = 5x$

1) $\sum F_x = 0,$

$A_x + N_1 = 0$
 $0 + N_1 = 0$
 $N_1 = 0$

2) $\sum F_y = 0,$

$A_y - P - T_1 = 0$

$7.5 - 5x - T_1 = 0$

$T_1 = 7.5 - 5x$

Si $x = 0, x = 3$

$T_1 = 7.5t \quad T_2 = -7.5t$

3) $\sum M_1 = 0$

$A_y \cdot x - P \cdot \frac{x}{2} - M_1 = 0$

$7.5x - 5x \cdot \frac{x}{2} - M_1 = 0$

$7.5x - \frac{5x^2}{2} - M_1 = 0$

$M_1 = 7.5x - \frac{5x^2}{2}$

avec l'équation du second degré

On pose trois fois:

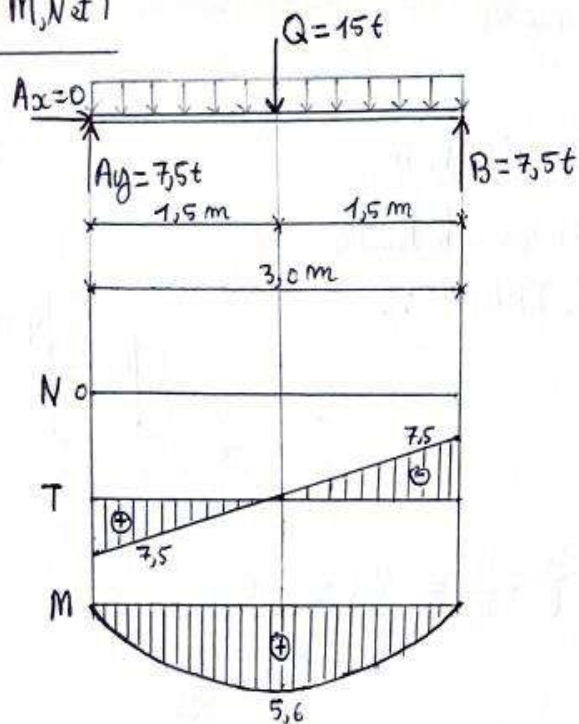
Si $x = 0, x = 1.5, x = 3$

$M_1 = 0 \text{ tm} \quad M_1 = 5.6 \text{ tm} \quad M_1 = 0 \text{ tm}$

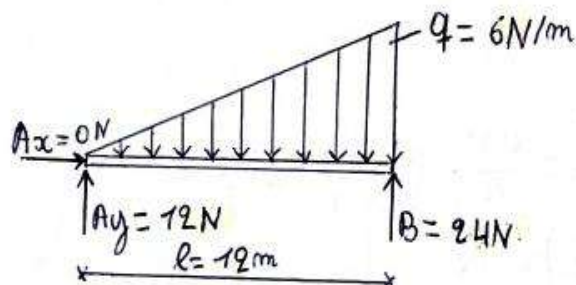
1.5 est le centre de gravité (X_G)

$X_G = \frac{0}{2}$ au point A = $\frac{0}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

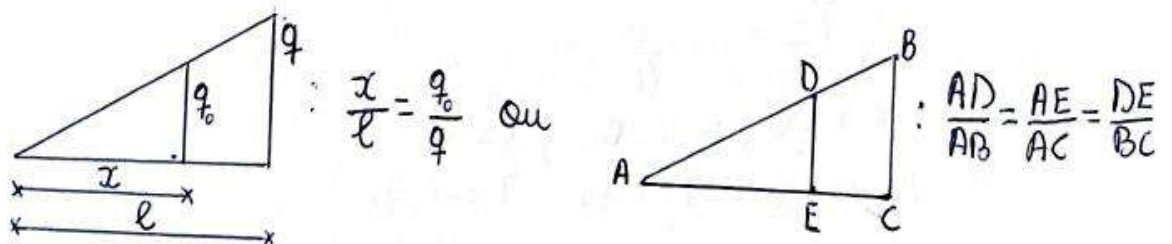
Diagramme M, N et T



Exercice 3:

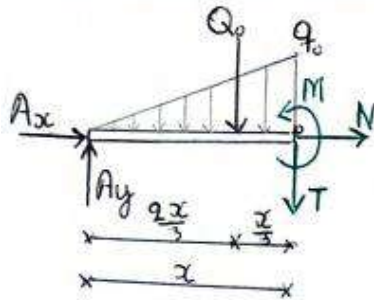


Pour c'est cas on va appliquer le théorème de THALES.

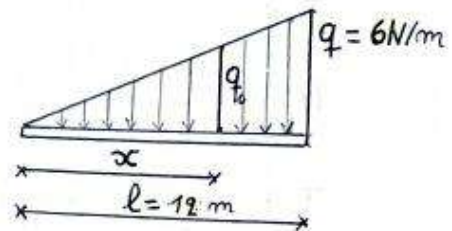


À partir de ça lorsqu'on vas faire la coupe on pourra tiré facilement la valeur de q_0

Coupe Entre A et B: $0 \leq x \leq 12$.



On cherche q_0 ,
 Or selon le théorème
 de THALES:



$$\frac{x}{l} = \frac{q_0}{q} \Rightarrow q_0 l = q x$$

$$q_0 = \frac{q x}{l} = \frac{6x}{12}$$

Composons $q_0 = \frac{6x}{12}$

$$Q_0 = \frac{q_0 \cdot x}{2} = \frac{\frac{6x}{12} \cdot x}{2} = \frac{\frac{6x^2}{12}}{2} = \frac{6x^2}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6x^2}{24} = \frac{x^2}{4}$$

$$Q_0 = \frac{x^2}{4}$$

On peut appliquer maintenant les équations d'équilibre:

1) $\sum F_x = 0,$

$$A_x + N = 0$$

$$N = 0$$

2) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - Q_0 - T = 0$$

$$12 - \frac{x^2}{4} - T = 0$$

$$T = 12 - \frac{x^2}{4}$$

3) $\sum M_0 = 0,$

$$A_y \cdot x - Q_0 \cdot \frac{x}{3} - M = 0$$

$$12x - \frac{x^2}{4} \cdot \frac{x}{3} - M = 0$$

$$12x - \frac{x^3}{12} - M = 0$$

$$M = 12x - \frac{x^3}{12}$$

Si $x = 0$, $x = 8$, $x = 12$

$$T = 12 \text{ N} \quad T = -4 \text{ N} \quad T = -24 \text{ N}$$

Calcul du Moment max (M_{max})

Le Moment max (M_{max}): ou moment de flexion maximale, est la force maximale qu'une structure peut supporter avant de se déformer ou de se rompre.

Pour calculer le moment maximale on pose $T=0$,
 Cette hypothèse se base sur le fait que le moment maximal se produit généralement à un point où l'effort tranchant est nul.

Calculons maintenant le moment maximal (M_{max}):

$$\text{On sait que } T = 12 - \frac{x^2}{4}$$

$$\text{Posons } T=0 : 0 = 12 - \frac{x^2}{4}$$

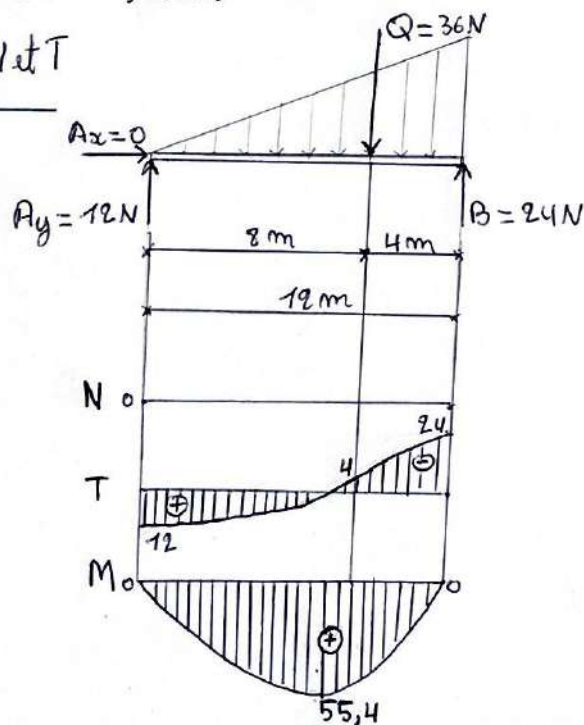
$$\frac{x^2}{4} = 12$$

$$x = \sqrt{4 \times 12} = 6,92 \text{ m}$$

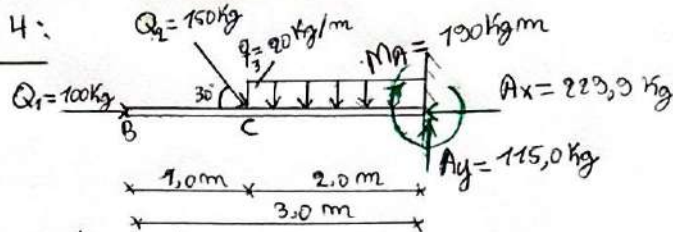
$$\cdot \text{ Si } x=0, \quad x=6,92, \quad x=12$$

$$M=0 \text{ Nm} \quad M=55,4 \text{ Nm} \quad M=0 \text{ Nm}$$

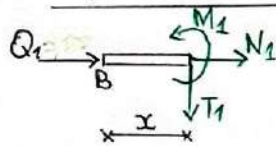
Diagramme M, N et T



Exercice 4:



Coupe 1: Entre B et C: $0 \leq x \leq 1,0$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$Q_1 + N_1 = 0$$

$$100 + N_1 = 0$$

$$N_1 = -100 \text{ kg (C)}, \text{ C: compression}$$

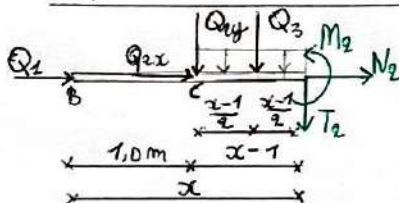
$$2) \sum F_y = 0,$$

$$T_1 = 0 \text{ kg}$$

$$3) \sum M_1 = 0,$$

$$M_1 = 0 \text{ kg m}$$

Coupe 2: Entre C et A: $1 \leq x \leq 3$



$$1) \sum F_x = 0$$

$$Q_1 + Q_{2x} + N_2 = 0$$

$$100 + 129,9 + N_2 = 0$$

$$229,9 + N_2 = -229,9 \text{ kg (C)}$$

$$2) \sum F_y = 0$$

$$-Q_{2y} - Q_3 - T_2 = 0$$

$$-75 - (20x + 20) - T_2 = 0, \quad -20x + 20 = Q_3 = -q_3 \cdot (x-1)$$

$$-20x - 55 - T_2 = 0 \quad = -20(x-1)$$

$$T_2 = -20x - 55$$

$$\text{Si } x=1, \quad = 3$$

$$T_2 = -75 \text{ kg} \quad T_2 = -115 \text{ kg}$$

$$3) \sum M_2 = 0,$$

$$-Q_{2y}(x-1) - Q_3 \frac{(x-1)}{2} - M_2 = 0, \quad \text{Or } Q_3 = q_3(x-1) = 20(x-1)$$

$$-75(x-1) - \frac{q_3(x-1)(x-1)}{2} - M_2 = 0$$

$$-75x + 75 - \frac{20(x-1)(x-1)}{2} - M_2 = 0, \quad (x-1) \cdot (x-1) = (x-1)^2$$

$$-75x + 75 - \frac{20(x-1)^2}{2} - M_2 = 0$$

$$-75x + 75 - 10(x-1)^2 - M_2 = 0$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (x-1)^2 = (x^2 - 2x + 1)$$

$$-75x + 75 - 10(x^2 - 2x + 1) - M_2 = 0$$

$$-75x + 75 - 10x^2 + 20x - 10 - M_2 = 0$$

$$-10x^2 - 55x + 65 - M_2 = 0$$

$$M_2 = -10x^2 - 55x + 65$$

$$\text{Si } x = 1,0 \quad , \quad x = 3,0$$

$$M_2 = 0 \text{ kgm}$$

$$M_2 = -190 \text{ kgm}$$

On remarque bien que :

$$T_2 = \frac{\partial M_2}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial (-10x^2 - 55x + 65)}{\partial x}$$

$$T_2 = -20x - 55$$

$$\text{et } M_2 = \int T_2 dx$$

$$= \int (-20x - 55) dx$$

$$= \int -20x dx - \int 55 dx$$

$$= -20 \int x dx - 55 \int dx$$

$$= -20 \cdot \frac{x^2}{2} - 55x$$

$$M_2 = -10x^2 - 55x + C$$

Pour déterminer la constante C on peut procéder de la manière suivante : - On pose que x est égal à un nombre de l'intervalle et on pose l'équation égal à zéro

Exemple : Nous sommes dans l'intervalle de $1 \leq x \leq 3$

Avant tout Attention cette méthode ne marche pas pour

toute les primitives ($F(x)$).

continuons le calcul en prenant $x = 1$

$$f(1) = -10(1)^2 - 55(1) + C = 0$$

$$-10 - 55 + C = 0$$

$$-65 + C = 0$$

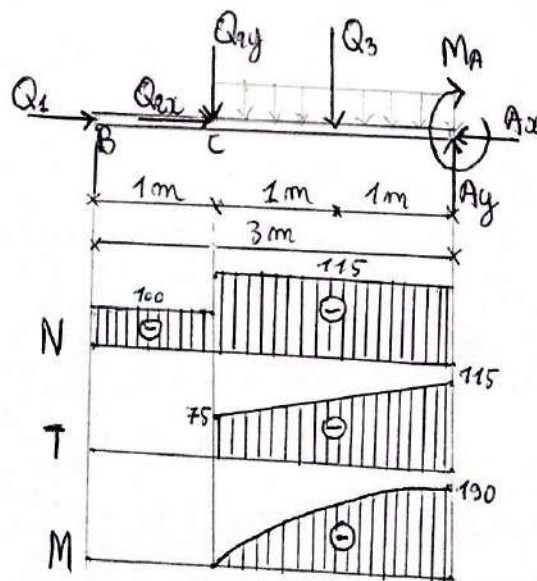
$$C = 65$$

On remarque bien que on a trouvé la même constante d'ici :

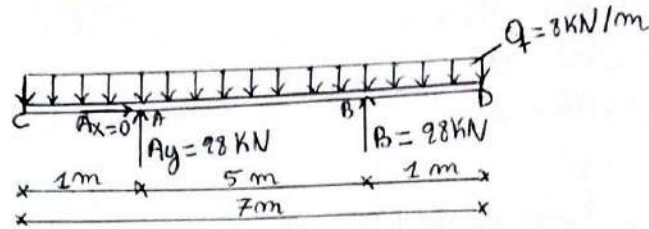
$$M = \int T dx \quad \text{et} \quad T = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Cette astuce ne marche pas dans tout les cas. J'ai intégré simplement pour montrer que si l'étudiant est perdu dans le $\sum M = 0$, il peut intégrer l'effort tranchant pour avoir l'idée du moment fléchissant qu'il doit avoir.

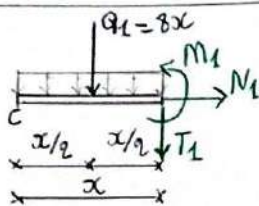
Diagramme M, N et T :



Exercice 5:



Coupe 1: Entre C et A: $0 \leq x \leq 1$



$$1) \sum F_x = 0$$

$$N_1 = 0 \text{ kN}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$-Q_1 - T_1 = 0$$

$$-8x - T_1 = 0$$

$$T_1 = -8x$$

$$\text{Si } x=0, \text{ Si } x=1$$

$$T_1 = 0 \text{ kN} \quad T_1 = -8 \text{ kN}$$

$$3) \sum M_1 = 0$$

$$-Q_1 \cdot \frac{x}{2} - M_1 = 0$$

$$-8x \cdot \frac{x}{2} - M_1 = 0$$

$$-\frac{8x^2}{2} - M_1 = 0$$

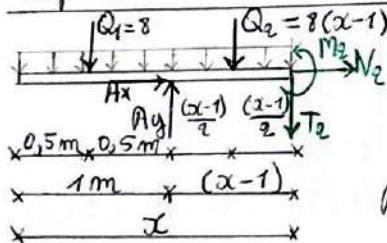
$$-4x^2 - M_1 = 0$$

$$M_1 = -4x^2$$

$$\text{Si } x=0, \text{ Si } x=1$$

$$M_1 = 0 \text{ kNm} \quad M_1 = -4 \text{ kNm}$$

Coupe 2: Entre A et B: $1 \leq x \leq 6$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$N_2 = 0$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_1 - Q_2 - T_2 = 0$$

$$28 - 8 - 8(x-1) - T_2 = 0$$

$$28 - 8 - 8x + 8 - T_2 = 0$$

$$T_2 = 28 - 8x$$

$$\text{Si } x=1, \text{ Si } x=6$$

$$T_2 = 20 \text{ kN} \quad T_2 = -20 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$-Q_1(0.5 + (x-1)) + A_y(x-1) - Q_2 \cdot \frac{(x-1)}{2} - M_2 = 0$$

$$-8(x-0.5) + 28(x-1) - 8 \frac{(x-1)(x-1)}{2} - M_2 = 0, \quad (x-1)(x-1) = (x-1)^2$$

$$-8x + 4 + 28x - 28 - 4(x-1)^2 - M_2 = 0$$

$$-28 + 20x + 4 - 4(x-1)^2 - M_2 = 0$$

$$(a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2), \quad (x-1)^2 = (x^2 - 2x + 1)$$

$$-28 + 20x + 4 - 4(x^2 - 2x + 1) - M_2 = 0$$

$$-28 + 20x + 4 - 4x^2 + 8x - 4 - M_2 = 0$$

$$28x - 28 - 4x^2 - M_2 = 0$$

$$M_2 = 28x - 28 - 4x^2$$

Calcul du Moment maximale (M_{max})

$$M_{max} \text{ sst } T = 0$$

$$28 - 8x = 0$$

$$8x = 28$$

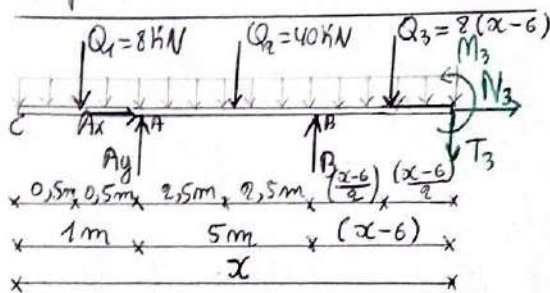
$$x = \frac{28}{8}$$

$$x = 3,5 \text{ m}$$

Si $x = 1$, Si $x = 3,5$, Si $x = 6$

$$M_2 = -4 \text{ kNm} \quad M_2 = 21 \text{ kNm} \quad M_2 = -4 \text{ kNm}$$

Coupe 3: Entre B et D: $6 \leq x \leq 7$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$N_3 = 0 \text{ kN}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$-Q_1 + A_y - Q_2 + B - Q_3 - T_3 = 0$$

$$-8 + 28 - 40 + 28 - 8(x-6) - T_3 = 0$$

$$-8 + 28 - 40 + 28 - 8x + 48 - T_3 = 0$$

$$56 - 8x - T_3 = 0$$

$$T_3 = 56 - 8x, \text{ si } x = 6, \text{ si } x = 7$$

$$T_3 = 8 \text{ kN} \quad T_3 = 0 \text{ kN}$$

$$3) \sum M_3 = 0,$$

$$-Q_1(0,5 + 5 + x - 6) + A_y(5 + x - 6) - Q_2(2,5 + x - 6) + B(x - 6) - Q_3 \frac{(x-6)}{2} - M_3 = 0$$

$$-8(x - 0,5) + 28(x - 1) - 40(x - 3,5) + 28(x - 6) - 8 \frac{(x-6)^2}{2} - M_3 = 0$$

$$-8x + 4 + 28x - 28 - 40x + 140 + 28x - 168 - 4(x-6)^2 - M_3 = 0$$

$$-52 + 8x - 4(x-6)^2 - M_3 = 0$$

$$(a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2), (x-6)^2 = (x^2 - 2x \cdot 6 + 6^2) = (x^2 - 12x + 36)$$

$$8x - 58 - 4(x^2 - 12x + 36) - M_3 = 0$$

$$8x - 58 - 4x^2 + 48x - 144 - M_3 = 0$$

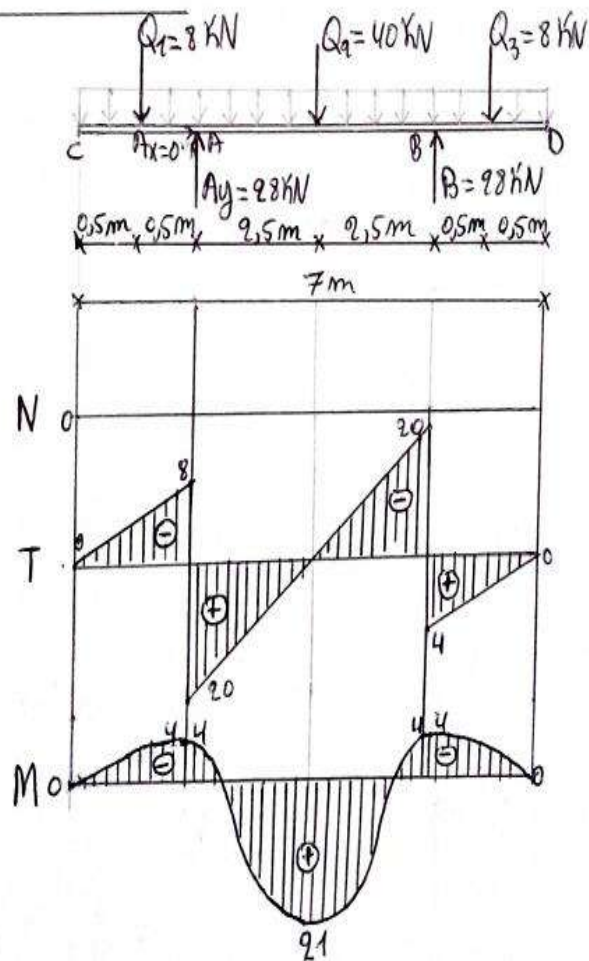
$$-4x^2 + 56x - 196 - M_3 = 0$$

$$M_3 = -4x^2 + 56x - 196$$

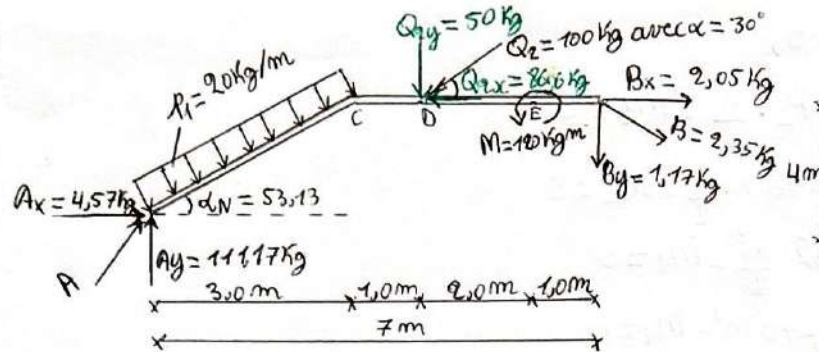
$$\text{Si } x = 6 \quad , \quad \text{si } x = 7$$

$$M_3 = -4 \text{ kNm} \quad M_3 = 0 \text{ kNm}$$

Diagramme M, N et T :



Exercice 6:



Cherchons A: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
 $= \sqrt{(4,57)^2 + (111,17)^2}$
 $A = 111,26 \text{ kg} (\nearrow)$

$$\text{tg } \alpha_A = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\alpha_A = \text{arctg} \left(\frac{A_y}{A_x} \right)$$

$$\alpha_A = \text{arct} \left(\frac{111,17}{4,57} \right)$$

$$\alpha_A = 87,64^\circ$$

Coupe 1: Entre A et C: $0 \leq \text{hyp} \leq 5,0$, avec $5 = \text{hyp} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

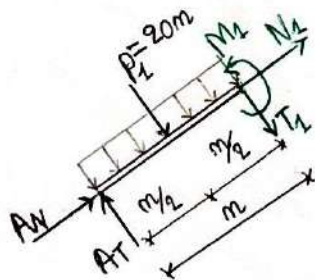
$\alpha_A = 87,64^\circ$, $A = 111,26 \text{ kg}$ Cherchons A_N et A_T

A_N : Sa résultante de A suivant l'effort normal

A_T : Sa résultante de A suivant l'effort tranchant

$$A_N = A \cos(\alpha_A - \alpha_N) = 111,26 \cdot \cos(87,64 - 53,13) = 91,68 \text{ kg}$$

$$A_T = A \cdot \sin(\alpha_A - \alpha_N) = 111,26 \cdot \sin(87,64 - 53,13) = 63,03 \text{ kg}$$



$$1) \sum F_N = 0,$$

$$A_N + N_1 = 0$$

$$N_1 = -A_N = -91,68 \text{ kg (C)}$$

$$2) \sum F_T = 0,$$

$$A_T - P_1 - T_1 = 0$$

$$63,03 - 20m - T_1 = 0$$

$$T_1 = 63,03 - 20m$$

$$\text{Si } m=0, \text{ Si } m=5$$

$$T_1 = 63,03 \text{ kg} \quad T_1 = -36,97 \text{ kg}$$

$$3) \sum M_1 = 0,$$

$$A_T \cdot m - P_2 \cdot \frac{m}{2} - M_1 = 0$$

$$63,03m - 20m \cdot \frac{m}{2} - M_1 = 0$$

$$63,03m - \frac{20m^2}{2} - M_1 = 0$$

$$63,03m - 10m^2 - M_1 = 0$$

$$M_1 = 63,03m - 10m^2$$

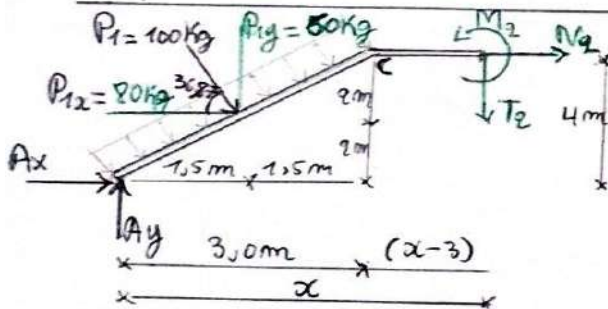
$$\text{Si } m = 0, \quad \text{Si } m = 2,5$$

$$M_1 = 0,0 \text{ Kg}\cdot\text{m} \quad M_1 = 95,07 \text{ Kg}\cdot\text{m}$$

$$\text{Si } m = 5$$

$$M_1 = 65,15 \text{ Kg}\cdot\text{m}$$

Coupe 2: Entre C et D: $3,0 \leq x \leq 4,0$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + P_{1x} + N_2 = 0$$

$$N_2 = -A_x - P_{1x} \\ = -4,57 - 80,0$$

$$N_2 = -84,57 \text{ Kg (C)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_{1y} - T_2 = 0$$

$$T_2 = A_y - P_{1y}$$

$$= 111,17 - 60,0$$

$$T_2 = 51,17 \text{ Kg}$$

$$3) \sum M_2 = 0,$$

$$-A_x \cdot 4 + A_y \cdot x - P_{1x} \cdot 2,0 - P_{1y} \cdot (x - 1,5) - M_2 = 0$$

$$-4,57 \times 4 + 111,17x - 80 \times 2,0 - 60(x - 1,5) - M_2 = 0$$

$$-18,28 + 111,17x - 160 - 60x + 90 - M_2 = 0$$

$$51,17x - 88,28 - M_2 = 0$$

$$M_2 = 51,17x - 88,28$$

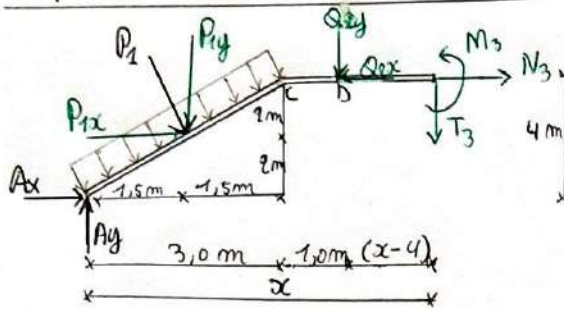
$$\text{Si } x = 3,$$

$$\text{Si } x = 4$$

$$M_2 = 65,25 \text{ Kg}\cdot\text{m}$$

$$M_2 = 116,42 \text{ Kg}\cdot\text{m}$$

Coupe 3: Entre D et E : $4,0 \leq x \leq 6,0$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + P_{1x} - Q_{2x} + N_3 = 0$$

$$4,57 + 80 - 86,6 + N_3 = 0$$

$$-2,03 + N_3 = 0$$

$$N_3 = 2,03 \text{ Kg (T)}$$

T: Traction lorsque
l'effort normale est
positif.

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_{1y} - Q_{2y} - T_3 = 0$$

$$111,17 - 60 - 50 - T_3 = 0$$

$$1,17 - T_3 = 0$$

$$T_3 = 1,17 \text{ Kg}$$

$$3) \sum M_3 = 0,$$

$$A_y x - A_x \cdot 4 - P_{1x} \cdot 2 - P_{1y} (x - 1,5) - Q_{2y} (x - 4) - M_3 = 0$$

$$111,17x - 4,57 \times 4 - 80 \times 2 - 60(x - 1,5) - 50(x - 4) - M_3 = 0$$

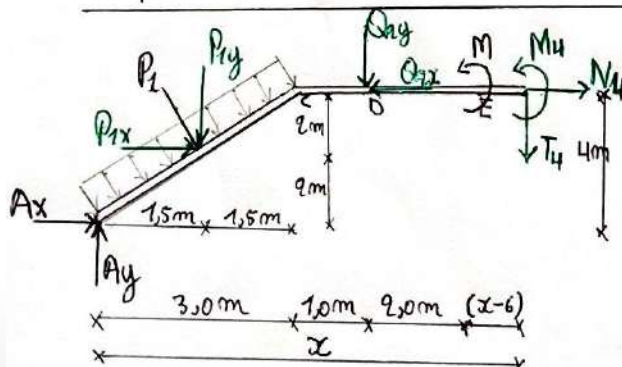
$$111,17x - 18,98 - 160 - 60x + 90 - 50x + 200 - M_3 = 0$$

$$1,17x + 61,72 - M_3 = 0$$

$$M_3 = 1,17x + 61,72, \text{ si } x = 4, \text{ si } x = 6$$

$$M_3 = 66,4 \text{ Kg m} \quad M_3 = 68,74 \text{ Kg}$$

Coupe 4: Entre E et B : $6 \leq x \leq 7$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + P_{1x} - Q_{2x} + N_4 = 0$$

$$4,57 + 80 - 86,6 + N_4 = 0$$

$$-2,03 + N_4 = 0$$

$$N_4 = 2,03 \text{ Kg (T)}$$

2) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - P_{1y} - Q_{1y} - T_4 = 0$$

$$111,17 - 60 - 50 - T_4 = 0$$

$$7,17 - T_4 = 0$$

$$T_4 = 7,17 \text{ Kg}$$

3) $\sum M_u = 0,$

$$A_y \cdot x - A_x \cdot 4 - P_{1x} \cdot 2 - P_{1y} \cdot (1,5 + 1 + 2 + x - 6) - Q_{1y} \cdot (2 + x - 6) - M - M_u = 0$$

$$111,17x - 4,57x \cdot 4 - 80x \cdot 2 - 60(x - 1,5) - 50(x - 4) - 120 - M_u = 0$$

$$111,17x - 18,28 - 160 - 60x + 90 - 50x + 200 - 120 - M_u = 0$$

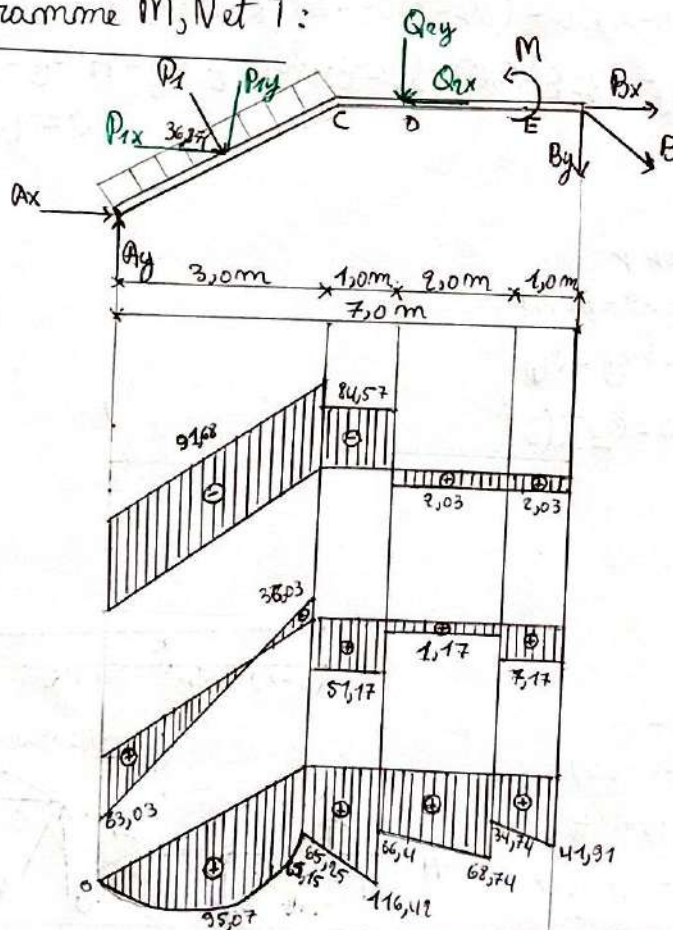
$$7,17x - 8,28 - M_u = 0$$

$$M_u = 7,17x - 8,28$$

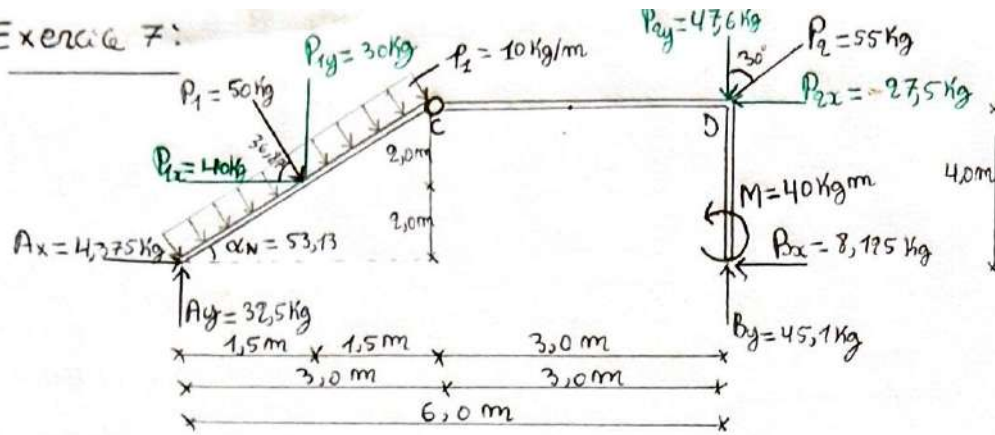
Si $x = 6$, Si $x = 7$

$$M_u = 34,74 \text{ Kg m} \quad M_u = 41,91 \text{ Kg m}$$

Diagramme $M, \text{Net } T:$



Exercice 7:



Déterminons la résultante A et B:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$= \sqrt{(4,375)^2 + (32,5)^2}$$

$$A = 32,79 \text{ Kg } (\nearrow)$$

$$\tan \alpha_A = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\alpha_A = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{32,5}{4,375}\right)$$

$$\alpha_A = 82,33^\circ$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$= \sqrt{(8,125)^2 + (45,1)^2}$$

$$B = 45,82 \text{ Kg } (\nwarrow)$$

$$\tan \alpha_B = \frac{B_y}{B_x}$$

$$\alpha_B = \arctan\left(\frac{B_y}{B_x}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{45,1}{8,125}\right)$$

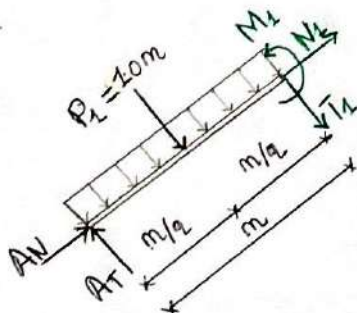
$$\alpha_B = 79,78^\circ$$

Coupe 1 Entre A et C: $0 \leq h_{yp} \leq 5$, avec $5 = h_{yp} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

$$\alpha_A = 82,33^\circ, A = 32,79 \text{ et } \alpha_N = 53,13^\circ$$

$$A_N = A \cos(\alpha_A - \alpha_N) = 32,79 \cos(82,33 - 53,13) = 28,62 \text{ Kg}$$

$$A_T = A \sin(\alpha_A - \alpha_N) = 32,79 \sin(82,33 - 53,13) = 15,99 \text{ Kg}$$



$$1) \sum F_N = 0,$$

$$A_N + N_1 = 0$$

$$28,62 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -28,62 \text{ Kg (C)}$$

$$2) \sum F_T = 0,$$

$$A_T - P_1 - T_1 = 0$$

$$15,99 - 10m - T_1 = 0$$

$$T_1 = 15,99 - 10m$$

$$\text{Si } m = 0, \text{ Si } m = 5$$

$$T_1 = 15,99 \text{ Kg}$$

$$T_1 = -34,01 \text{ Kg}$$

$$3) \sum M_1 = 0,$$

$$A_T \cdot m - P_1 \cdot \frac{m}{2} - M_1 = 0$$

$$15,99m - 10m \cdot \frac{m}{2} - M_1 = 0$$

$$15,99m - \frac{10m^2}{2} - M_1 = 0$$

$$15,99m - 5m^2 - M_1 = 0$$

$$M_1 = 15,99m - 5m^2$$

$$\text{ou } M_1 = \int T_1 dm$$

$$= \int (15,99 - 10m) dm$$

$$= \int 15,99 dm - \int 10m dm$$

$$= 15,99 \int dm - 10 \int m dm, \text{ or } \int dx = x$$

$$= 15,99m - 10 \left(\frac{m^{1+1}}{1+1} \right) \quad \text{et } \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$= 15,99m - \frac{10m^2}{2}$$

$$M_1 = 15,99m - 5m^2 + C, \text{ avec } C = 0$$

$$M_1 = 15,99m - 5m^2$$

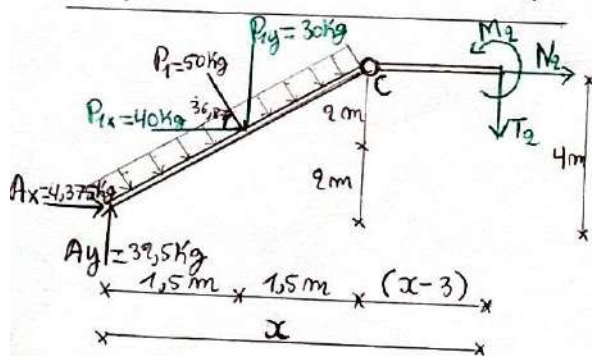
$$\text{Si } m = 0, \quad \text{Si } m = 2,5$$

$$M_1 = 0 \text{ kgm} \quad M_1 = 8,735 \text{ kgm}$$

$$\text{et si } m = 3$$

$$M_1 = 45,05 \text{ kgm}$$

Coupe 2 Entre C et D : $3 \leq x \leq 6$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + P_{1x} + N_2 = 0$$

$$4,375 + 40 + N_2 = 0$$

$$44,375 + N_2 = 0$$

$$N_2 = -44,375 \text{ kg (C)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_{1y} - T_2 = 0$$

$$32,5 - 30 - T_2 = 0$$

$$2,5 - T_2 = 0$$

$$T_2 = 2,5 \text{ kg}$$

$$3) \sum M_2 = 0,$$

$$-A_x \cdot 4 + A_y \cdot x - P_{1x} \cdot 2 - P_{1y} \cdot (1,5 + x - 3) - M_2 = 0$$

$$-4,375 \cdot 4 + 32,5x - 40 \cdot 2 - 30(x - 1,5) - M_2 = 0$$

$$-17,5 + 32,5x - 80 - 30x + 45 - M_2 = 0$$

$$2,5x - 52,5 - M_2 = 0$$

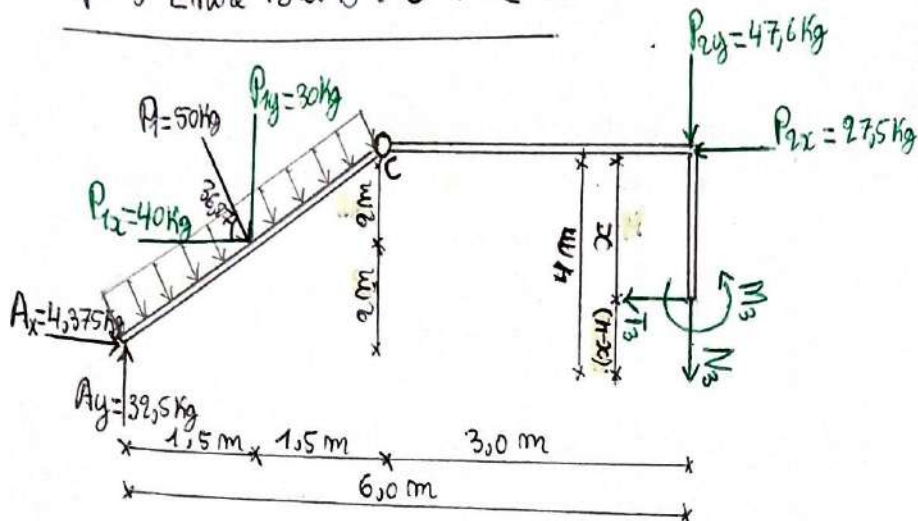
$$M_2 = 2,5x - 52,5$$

$$\text{si } x = 3, \quad \text{si } x = 6$$

$$M_2 = -45 \text{ kgm}$$

$$M_2 = -37,5 \text{ kgm}$$

Coupe 3 Entre D et B: $0 \leq x \leq 4$



$$1) \sum F_x = 0$$

$$A_x + P_{1x} - P_{2x} - T_3 = 0$$

$$4,375 + 40 - 27,5 - T_3 = 0$$

$$16,875 - T_3 = 0$$

$$T_3 = 16,873 \text{ kg}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_{1y} - P_{2y} - N_3 = 0$$

$$39,5 - 30 - 47,6 - N_3 = 0$$

$$-45,1 - N_3 = 0$$

$$N_3 = -45,1 \text{ kg (C)}$$

$$3) \sum M_3 = 0,$$

$$A_y \cdot 6 + A_x \cdot (x-4) + P_{1x} \cdot x - P_{1y} \cdot (4,5) - P_{2x} \cdot x - P_{2y} \cdot 0 - M_3 = 0$$

$$39,5 \times 6 + 4,373(x-4) + 40x - 30 \times 4,5 - 27,5x - 47,6 \times 0 - M_3 = 0$$

$$195 + 4,373x - 17,492 + 40x - 135 - 27,5x - 0 - M_3 = 0$$

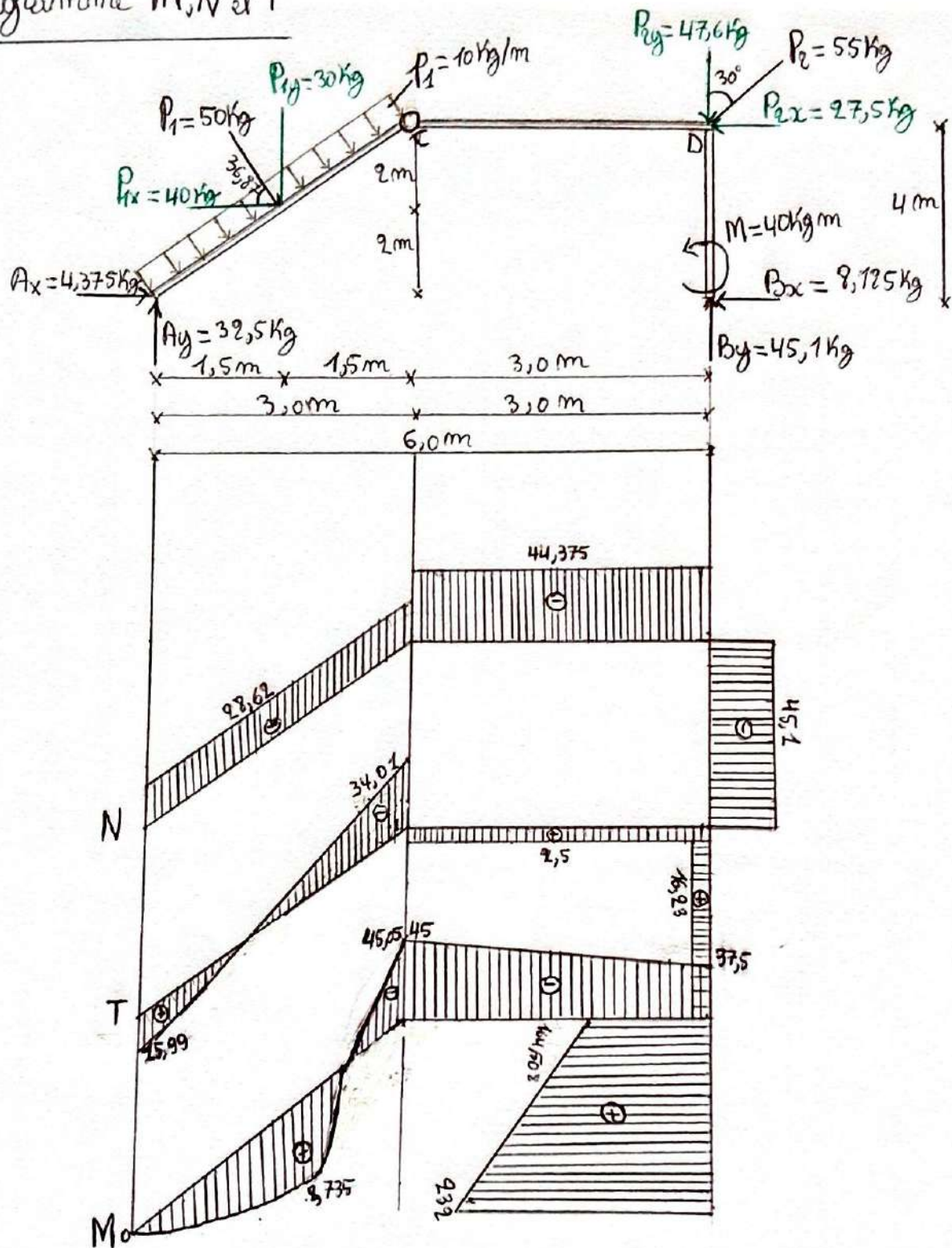
$$16,873x + 164,508 - M_3 = 0$$

$$M_3 = 16,873x + 164,508$$

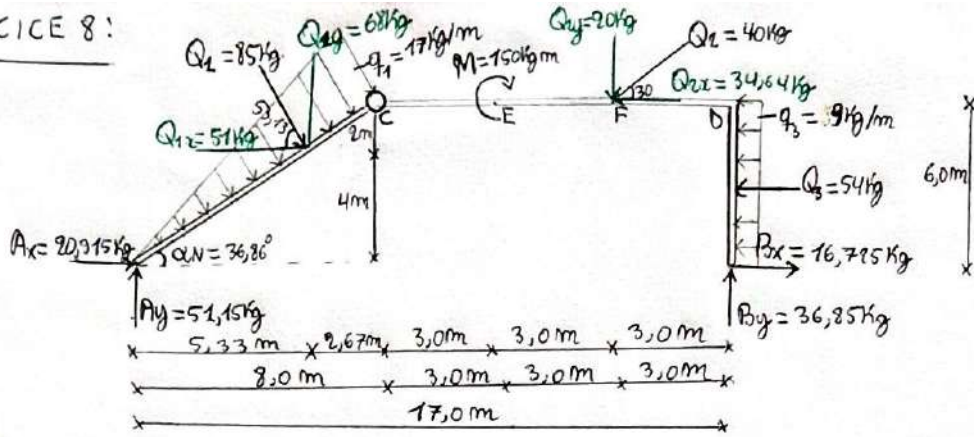
$$\text{Si } x = 0, \quad \text{Si } x = 4$$

$$M_3 = 164,508 \text{ kgm} \quad M_3 = 232 \text{ kgm}$$

Diagramme M, N et T



EXERCICE 8:



Déterminons la résultante A et α_A :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{et } \alpha_A = \frac{A_y}{A_x}$$

$$= \sqrt{(20,315)^2 + (51,15)^2} \quad \alpha_A = \arctg\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

$$A = 55,26 \text{ kg } (\nearrow) \quad = \arctg\left(\frac{51,15}{20,315}\right)$$

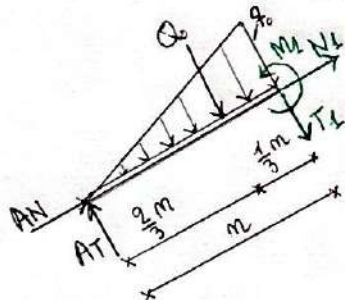
$$\alpha_A = 67,76^\circ$$

Coupe 1 Entre A et C : $0 \leq hyp \leq 10$, avec $10 = hyp = \sqrt{(8)^2 + (4)^2}$

$$\alpha_A = 67,76, \alpha_N = 36,86 \text{ et } A = 55,26 \text{ kg}$$

$$A_N = A \cos(\alpha_A - \alpha_N) = 55,26 \cos(67,76 - 36,86) = 47,41 \text{ kg}$$

$$A_T = A \sin(\alpha_A - \alpha_N) = 55,26 \sin(67,76 - 36,86) = 28,37 \text{ kg}$$



$$\frac{q_0}{m} = \frac{q_1}{10} \Rightarrow q_0 = \frac{q_1 m}{10}$$

(Pour plus des détails sur la démonstration veuillez voir l'exercice 3 sur le calcul des efforts intérieurs).

$$1) \sum F_N = 0$$

$$A_N + N_1 = 0$$

$$47,41 + N_1 = 0$$

$$N_1 = -47,41 \text{ kg (C)}$$

$$2) \sum F_T = 0,$$

$$A_T - \frac{q_0 m}{10} \cdot \frac{m}{2} - T_1 = 0$$

$$Q_0 = \frac{q_1 m}{10} \cdot \frac{m}{2} = \frac{q_1 m^2}{20}$$

$$28,37 - \frac{17 m^2}{20} \cdot \frac{m}{2} - T_1 = 0$$

$$28,37 - \frac{17 m^2}{20} - T_1 = 0 \quad \text{si } m = 0 \quad \text{si } m = 5,33, \quad \text{si } m = 10$$

$$T_1 = 28,37 - \frac{17 m^2}{20} \quad T_1 = 28,37 \text{ kg} \quad T_1 = 4,2 \text{ kg} \quad T_1 = -56,4 \text{ kg}$$

$$\sum M_1 = 0,$$

$$A_T \cdot m - \frac{q_1 m}{10} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{3} - M_1 = 0$$

$$28,37m - \frac{17m}{10} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{3} - M_1 = 0$$

$$28,37m - \frac{17m^3}{60} - M_1 = 0$$

$$M_1 = 28,37m - \frac{17m^3}{60}$$

Calcul du Moment Maximal (M_{max})

$$M_{max} \text{ ssi } T = 0$$

$$0 = 28,37 - \frac{17m^2}{20}$$

$$\frac{17m^2}{20} = 28,37$$

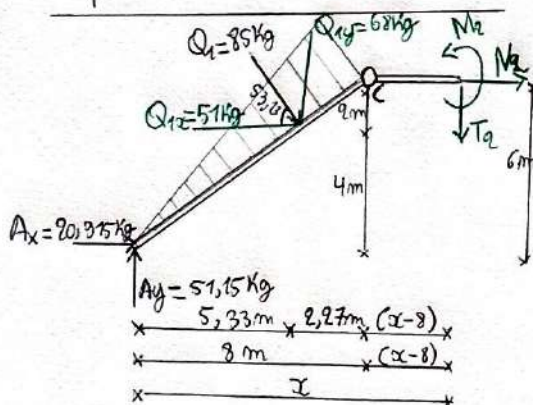
$$m = \sqrt{\frac{20 \times 28,37}{17}}$$

$$m = 5,7 \text{ m}$$

Si $m = 0$, si $m = 5,7$ si $m = 10$

$$M_1 = 0 \text{ kgm} \quad M_1 = 152,5 \text{ kgm} \quad M_1 = 255,36 \text{ kgm}$$

Coupe 2 Entre C et E: $8 \leq x \leq 11$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + Q_{1x} + N_2 = 0$$

$$20,915 + 51 + N_2 = 0$$

$$71,915 + N_2 = 0$$

$$N_2 = -71,915 \text{ kg (C)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_{1y} - T_2 = 0$$

$$51,15 - 68 - T_2 = 0$$

$$-16,85 - T_2 = 0$$

$$3) \sum M_2 = 0$$

$$-A_x \cdot 6 + A_y \cdot x - Q_{1x} \cdot 2 - Q_{1y} (2,27 + x - 8) - M_2 = 0 \quad T_2 = -16,85 \text{ kg}$$

$$-20,915 \times 6 + 51,15x - 51 \times 2 - 68(x - 5,73) - M_2 = 0$$

$$-125,49 + 51,15x - 102 - 68x + 389,64 - M_2 = 0$$

$$-16,85x + 162,15 - M_2 = 0$$

$$\text{si } x = 8$$

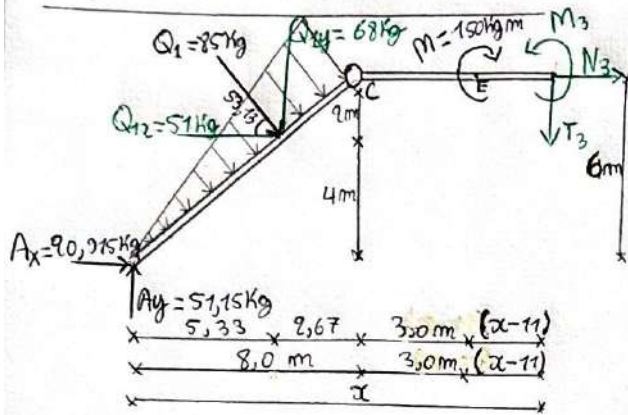
$$\text{si } x = 11$$

$$M_2 = -16,85x + 162,15$$

$$M_2 = 27,3 \text{ kgm}$$

$$M_2 = -23,2 \text{ kgm}$$

Coupe 3 Entre E et F : $11 \leq x \leq 14$



1) $\sum F_x = 0$

$$A_x + Q_{1x} + N_3 = 0$$

$$20,915 + 51 + N_3 = 0$$

$$71,915 + N_3 = 0$$

$$N_3 = -71,915 \text{ kg (C)}$$

2) $\sum F_y = 0$

$$A_y - Q_{1y} - T_3 = 0$$

$$51,15 - 68 - T_3 = 0$$

$$-16,85 - T_3 = 0$$

$$T_3 = -16,85 \text{ kg}$$

3) $\sum M_3 = 0$,

$$A_y \cdot x - A_x \cdot 6 - Q_{1x} \cdot 4 - Q_{1y} \cdot (2,67 + 3 + x - 11) + M - M_3 = 0$$

$$51,15x - 20,915 \cdot 6 - 51 \cdot 4 - 68(x - 5,33) + 150 - M_3 = 0$$

$$51,15x - 125,49 - 204 - 68x + 362,44 + 150 - M_3 = 0$$

$$-16,85x + 32,95 - M_3 = 0$$

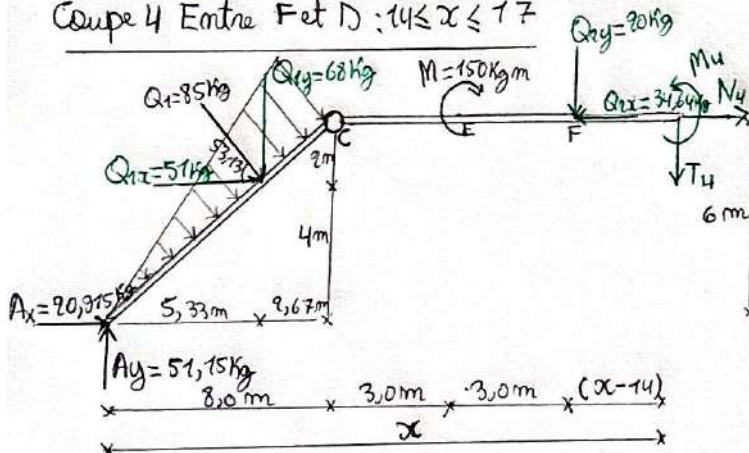
$$M_3 = -16,85x + 32,95 \quad \text{si } x = 11$$

$$\text{si } x = 14$$

$$M_3 = -152,4 \text{ kgm}$$

$$M_3 = -202,95 \text{ kgm}$$

Coupe 4 Entre F et D : $14 \leq x \leq 17$



1) $\sum F_x = 0$,

$$A_x + Q_{1x} - Q_{2x} + N_4 = 0$$

$$20,915 + 51 - 34,64 + N_4 = 0$$

$$70,77 + N_4 = 0$$

$$N_4 = -70,77 \text{ kg (C)}$$

2) $\sum F_y = 0$,

$$A_y - Q_{1y} - Q_{2y} - T_4 = 0$$

$$51,15 - 68 - 20 - T_4 = 0$$

$$-36,85 - T_4 = 0$$

$$T_4 = -36,85 \text{ kg}$$

3) $\sum M_4 = 0$,

$$A_y \cdot x - A_x \cdot 6 - Q_{1x} \cdot 2 - Q_{1y} \cdot (2,67 + 3 + 3 + x - 14) + M - Q_{2y}(x - 14) - M_4 = 0$$

$$51,15x - 20,915 \cdot 6 - 51 \cdot 2 - 68(x - 5,33) + 150 - 20(x - 14) - M_4 = 0$$

$$51,15x - 125,49 - 102 - 68x + 362,44 - 20x + 280 - M_4 = 0$$

$$-36,85x + 414,95 - M_4 = 0$$

$$\text{si } x = 14$$

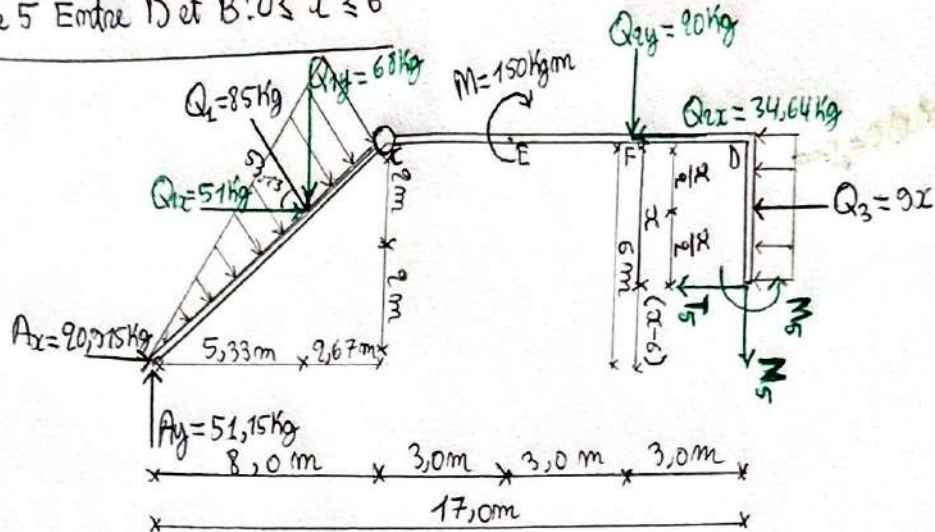
$$\text{si } x = 17$$

$$M_4 = -36,85x + 414,95$$

$$M_4 = -100,95 \text{ kgm}$$

$$M_4 = -211,5 \text{ kgm}$$

Coupe 5 Entre D et B: $0 \leq x \leq 6$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + Q_{1x} - Q_{2x} - Q_3 - T_5 = 0$$

$$20,915 + 51 - 34,64 - 9x - T_5 = 0$$

$$37,275 - 9x - T_5 = 0$$

$$T_5 = 37,275 - 9x$$

$$\text{Si } x = 0, \quad \text{Si } x = 6$$

$$T_5 = 37,275 \text{ kg} \quad T_5 = -16,72 \text{ kg}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_{1y} - Q_{2y} - N_5 = 0$$

$$51,15 - 68 - 90 - N_5 = 0$$

$$-36,85 - N_5 = 0$$

$$N_5 = -36,85 \text{ kg (c)}$$

$$3) \sum M_5 = 0$$

$$A_y \cdot 17 + A_x \cdot (x-6) + Q_{1x} \cdot x - Q_{1y} \cdot (11,67) + M - Q_{2y} \cdot 3 - Q_{2x} \cdot x - Q_3 \cdot \frac{x}{2} - M_5 = 0$$

$$51,15 \times 17 + 20,915 \times (x-6) + 51x - 68(11,67) + 150 - 90 \times 3 - 34,64x - 9x \cdot \frac{x}{2} - M_5 = 0$$

$$869,55 + 20,915x - 125,49 + 51x - 793,56 + 150 - 60 - 34,64x - \frac{9x^2}{2} - M_5 = 0$$

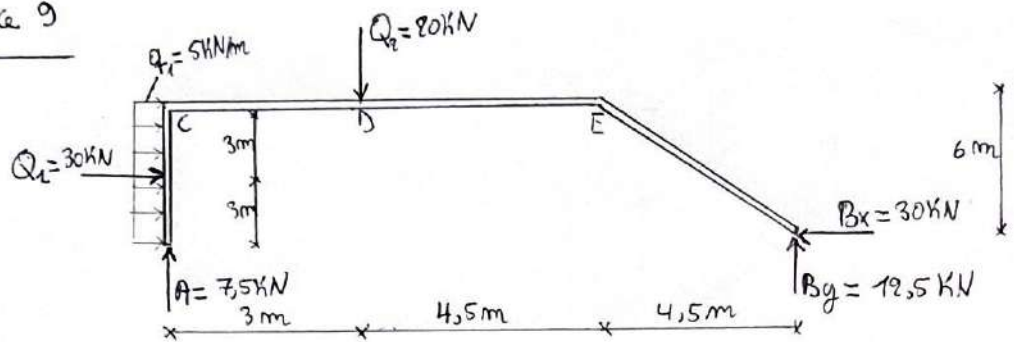
$$40,5 + 37,275x - \frac{9x^2}{2} - M_5 = 0$$

$$M_5 = 40,5 + 37,275x - \frac{9x^2}{2}$$

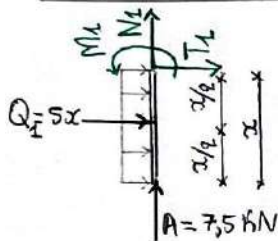
$$\text{Si } x = 0, \quad \text{Si } x = 4,5 \quad \text{et } \text{Si } x = 6$$

$$M_5 = 40,5 \text{ kgm} \quad M_5 = 117,1 \text{ kgm} \quad M_5 = 102,15 \text{ kgm}$$

Exercice 9



Coupe 1 Entre A et C : $0 \leq x \leq 6$



1) $\sum F_x = 0,$

$Q_1 + T_1 = 0$

$5x + T_1 = 0$

$T_1 = -5x$

Si $x = 0$, si $x = 6$

$T_1 = 0 \text{ kN}$ $T_1 = -30 \text{ kN}$

2) $\sum F_y = 0,$

$A + N_1 = 0$

$7,5 + N_1 = 0$

$N_1 = -7,5 \text{ kN (c)}$

3) $\sum M_1 = 0,$

$-Q_1 \cdot \frac{x}{2} - M_1 = 0$

$-5x \cdot \frac{x}{2} - M_1 = 0$

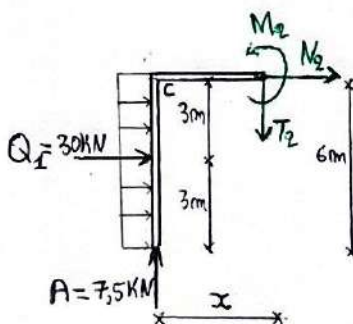
$-\frac{5x^2}{2} - M_1 = 0$

$M_1 = -\frac{5x^2}{2}$

Si $x = 0$, si $x = 3$, si $x = 6$

$M_1 = 0 \text{ kNm}$ $M_1 = -22,5 \text{ kNm}$ $M_1 = -90 \text{ kNm}$

Coupe 2 Entre C et D : $0 \leq x \leq 3$



1) $\sum F_x = 0,$

$Q_1 + N_2 = 0$

$30 + N_2 = 0$

$N_2 = 30 \text{ kN}$

2) $\sum F_y = 0,$

$A - T_2 = 0$

$7,5 - T_2 = 0$

$T_2 = 7,5$

3) $\sum M_2 = 0$

$-Q_1 \cdot 6 + A \cdot x - M_2 = 0$

$-30 \times 6 + 7,5x - M_2 = 0$

$-90 + 7,5x - M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = -90 + 7,5x$

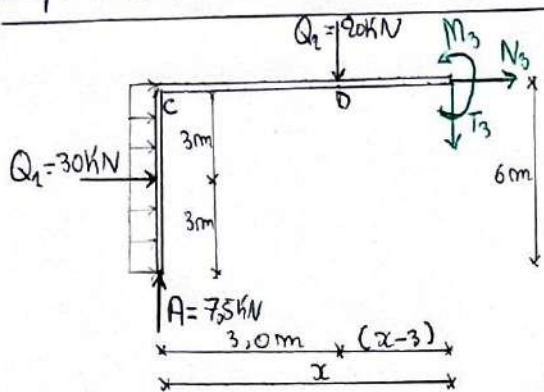
Si $x = 0$

$M_2 = 90 \text{ kNm}$

Si $x = 3$

$M_2 = -67,5 \text{ kNm}$

Coupe 3 Entre D et E : $3 \leq x \leq 7,5$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$Q_1 + N_3 = 0$$

$$30 + N_3 = 0$$

$$N_3 = -30 \text{ kN (c)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A - Q_2 - T_3 = 0$$

$$7,5 - 20 - T_3 = 0$$

$$-12,5 - T_3 = 0$$

$$T_3 = -12,5 \text{ kN}$$

$$3) \sum M_3 = 0,$$

$$A \cdot x - Q_1 \cdot 3 - Q_2(x-3) - M_3 = 0$$

$$7,5x - 30 \cdot 3 - 20(x-3) - M_3 = 0$$

$$7,5x - 90 - 20x + 60 - M_3 = 0$$

$$-12,5x - 30 - M_3 = 0$$

$$M_3 = -12,5x - 30$$

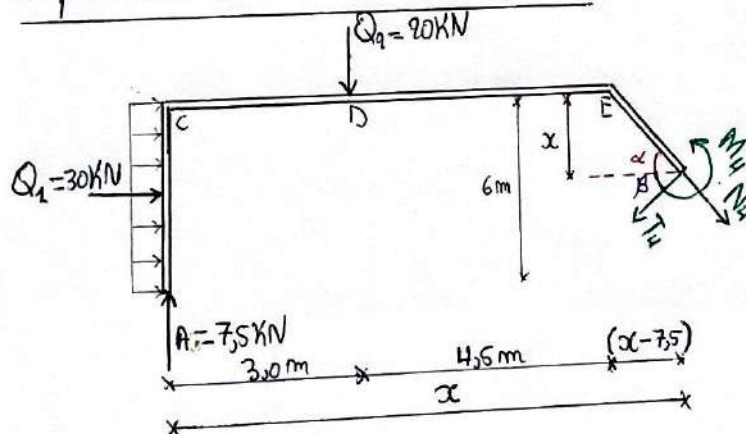
$$\text{Si } x = 3$$

$$M_3 = -67,5 \text{ kNm}$$

$$\text{Si } x = 7,5$$

$$M_3 = -123,75 \text{ kNm}$$

Coupe 4 Entre E et B : $7,5 \leq x \leq 11,5$



$$\text{tg } \alpha = \frac{6}{4,5} = 1,33$$

$$\alpha = \text{arctg}(1,33)$$

$$\alpha = 53,1^\circ$$

$$\beta = 90 - \alpha$$

$$\beta = 90 - 53,1$$

$$\beta = 36,9^\circ$$

Décomposons N_4 et T_4

$$N_{4x} = N_4 \cos \alpha = N_4 \cos 53,1 = 0,6 N_4$$

$$N_{4y} = -N_4 \sin \alpha = -N_4 \sin 53,1 = -0,8 N_4$$

$$T_{4x} = -T_4 \cos \beta = -T_4 \cos 36,9 = -0,7 T_4$$

$$T_{4y} = -T_4 \sin \beta = -T_4 \sin 36,9 = -0,6 T_4$$

$$1) \sum F_x = 0,$$

$$Q_1 - T_{4x} + N_{4x} = 0$$

$$30 - 0,7T_4 + 0,6N_4 = 0$$

$$0,6N_4 - 0,7T_4 + 30 = 0$$

$$0,6N_4 - 0,7T_4 = -30 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A - Q_2 - N_{4y} - T_{4y} = 0$$

$$-7,5 - 20 - 0,8N_4 - 0,6T_4 = 0$$

$$-12,5 - 0,8N_4 - 0,6T_4 = 0$$

$$-0,8N_4 - 0,6T_4 = 12,5 \quad (2)$$

On a un système de deux équations à deux inconnues, on va le résoudre comme dans le cours d'Algèbre linéaire :

$$\begin{cases} 0,6N_4 - 0,7T_4 = -30 \quad (1) \\ -0,8N_4 - 0,6T_4 = 12,5 \quad (2) \end{cases}$$

on simplifie le système en multipliant la première équation par 10 et en multipliant la deuxième équation par -10

$$\begin{cases} 6N_4 - 7T_4 = -300 \quad (3) \\ 8N_4 + 6T_4 = -125 \quad (4) \end{cases} \Rightarrow N_4 = \frac{-300 + 7T_4}{6} = -50 + \frac{7T_4}{6} \quad (5)$$

$$(5) \text{ dans } (4): 8\left(-50 + \frac{7T_4}{6}\right) + 6T_4 = -125$$

$$-400 + \frac{56T_4}{6} + 6T_4 = -125$$

$$-400 + \frac{92T_4}{6} = -125$$

$$\frac{46}{3}T_4 = -125 + 400$$

$$\frac{46}{3}T_4 = 275$$

$$T_4 = \frac{275}{\frac{46}{3}} = \frac{275}{1} \cdot \frac{3}{46} = \frac{825}{46} \Rightarrow T_4 = \frac{825}{46} \text{ KN} \quad (6)$$

$$(6) \text{ dans } (5): N_4 = -50 + \frac{7}{6} \left(\frac{825}{46} \right)$$

$$= -50 + \frac{5775}{276}$$

$$= -\frac{8025}{276}$$

$$N_4 = -\frac{2675}{92} \text{ KN}, N_4 \approx -29,0 \text{ KN}$$

$$T_4 \approx 17,9 \text{ KN}$$

$$3) \sum M_u = 0,$$

$$A \cdot x + Q_1 \cdot x - Q_2(4,5 + x - 7,5) - M_u = 0$$

$$7,5x + 30x - 90(x - 3) - M_u = 0$$

$$7,5x + 30x - 90x + 60 - M_u = 0$$

$$-17,5x + 60 - M_u = 0 \Rightarrow M_u = 17,5x + 60$$

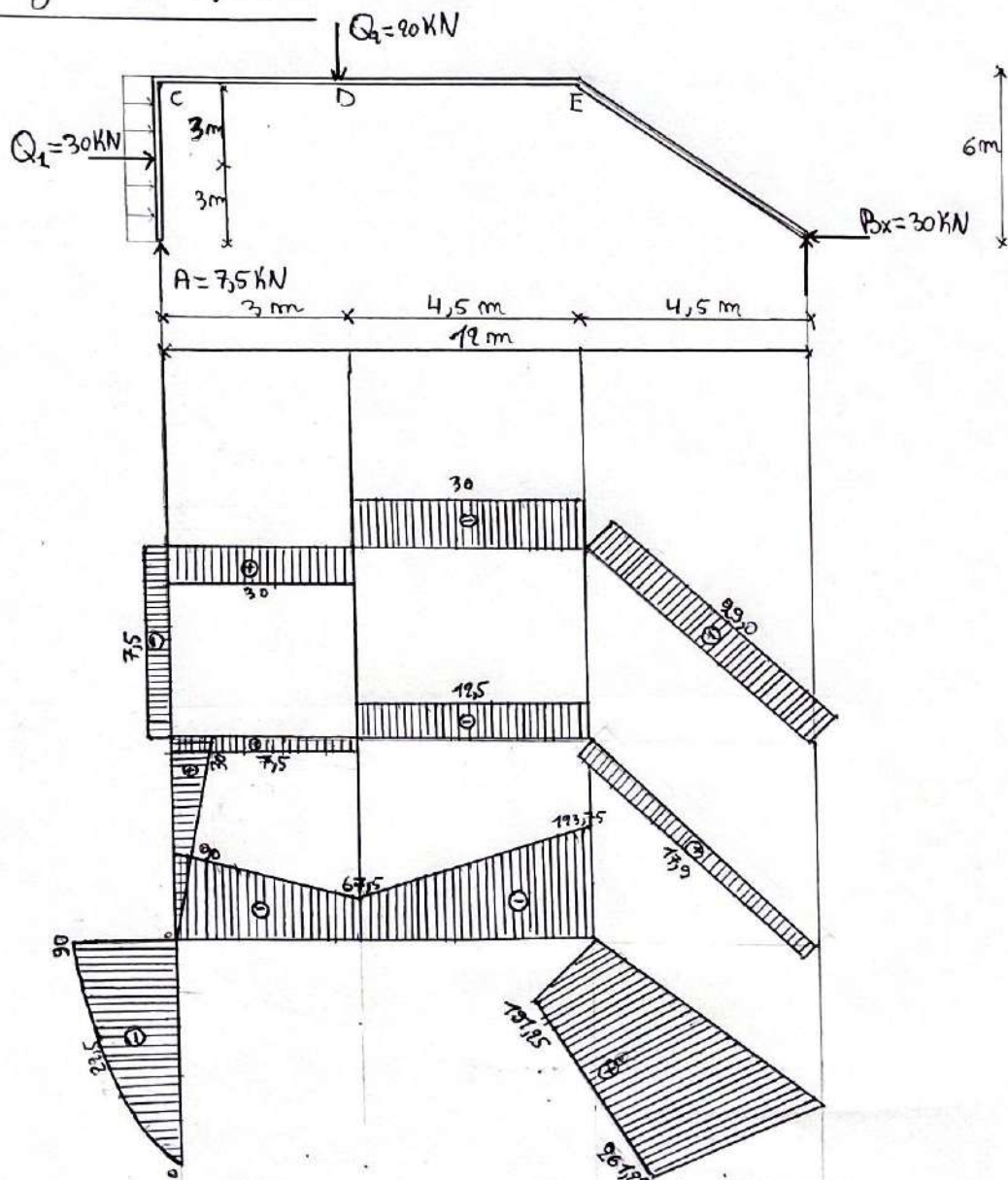
$$\text{si } x = 7,5$$

$$\text{si } x = 11,5$$

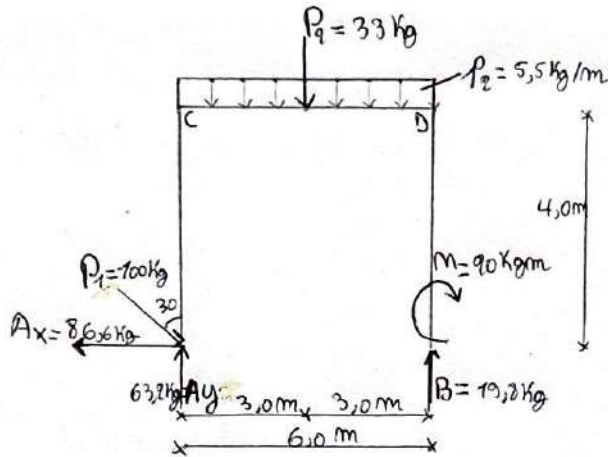
$$M_u = 191,25$$

$$M = 261,25$$

Diagramme M, N et T

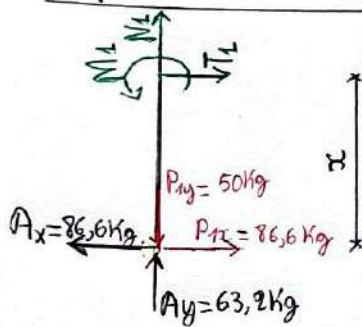


Exercice 10:



(Pour la démonstration sur les réactions voir le montage à l'exercice 15, Sur le 3ème cas : Structure à l'axe prisé et les portiques)

Coupe 1 Entre A et C : $0 \leq x \leq 4$

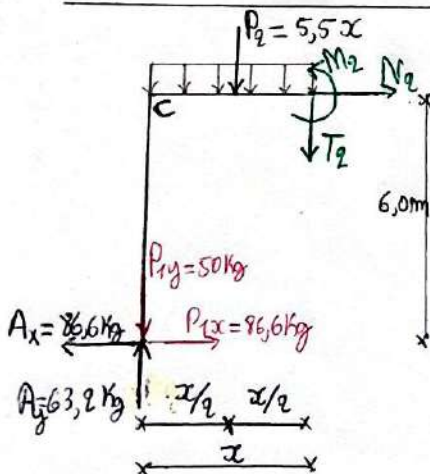


$$\begin{aligned} 1) \sum F_x = 0, \\ -A_x + P_{1x} + T_1 = 0 \\ -86,6 + 86,6 + T_1 = 0 \\ 0 + T_1 = 0 \\ T_1 = 0 \text{ Kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sum F_y = 0, \\ A_y - P_{1y} + N_1 = 0 \\ 63,2 - 50 + N_1 = 0 \\ 13,2 + N_1 = 0 \\ N_1 = -13,2 \text{ Kg} (C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \sum M_1 = 0, \\ A_x \cdot x - P_{1x} \cdot x - M_1 = 0 \\ 86,6 x - 86 x - M_1 = 0 \\ 0 - M_1 = 0 \\ M_1 = 0 \end{aligned}$$

Coupe 2 Entre C et D : $0 \leq x \leq 6$



$$\begin{aligned} 1) \sum F_x = 0 \\ -A_x + P_{1x} + N_2 = 0 \\ -86,6 + 86,6 + N_2 = 0 \\ 0 + N_2 = 0 \\ N_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sum F_y = 0 \\ A_y - P_{1y} - P_2 - T_2 = 0 \\ 63,2 - 50 - 5,5x - T_2 = 0 \\ 13,2 - 5,5x - T_2 = 0 \end{aligned}$$

$$T_2 = 13,2 - 5,5x$$

$$\text{Si } x = 0 \quad \text{Si } x = 6$$

$$T_2 = 13,2 \text{ Kg} \quad T_2 = -19,8 \text{ Kg}$$

$$3) \sum M_2 = 0,$$

$$A_{1y} \cdot x - P_{1y} \cdot x + A_x \cdot 6 - P_{1x} \cdot 6 - P_2 \cdot \frac{x}{2} - M_2 = 0$$

$$63,2x - 50x + 86,6 \times 6 - 86,6 \times 6 - 5,5x \cdot \frac{x}{2} - M_2 = 0$$

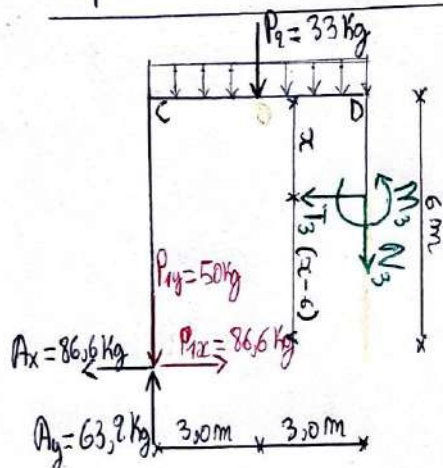
$$63,2x - 50x - \frac{5,5x^2}{2} - M_2$$

$$13,2x - \frac{5,5x^2}{2} - M_2 = 0$$

$$M_2 = 13,2x - \frac{5,5x^2}{2}, \quad \text{Si } x=0 \quad \text{Si } x=3 \quad \text{Si } x=6$$

$$M_2 = 0 \text{ kg.m} \quad M_2 = -14,85 \text{ kg.m} \quad M_2 = -19,8 \text{ kg.m}$$

Coupe 3 Entre D et B : $0 \leq x \leq 4$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-A_x + P_{1x} - T_3 = 0$$

$$-86,6 + 86,6 - T_3 = 0$$

$$T_3 = 0 \text{ kg}$$

$$2) \sum F_y = 0$$

$$A_y - P_{1y} - P_2 - N_3 = 0$$

$$63,2 - 50 - 33 - N_3 = 0$$

$$-19,8 - N_3 = 0$$

$$N_3 = -19,8 \text{ kg}$$

$$3) \sum M_3 = 0$$

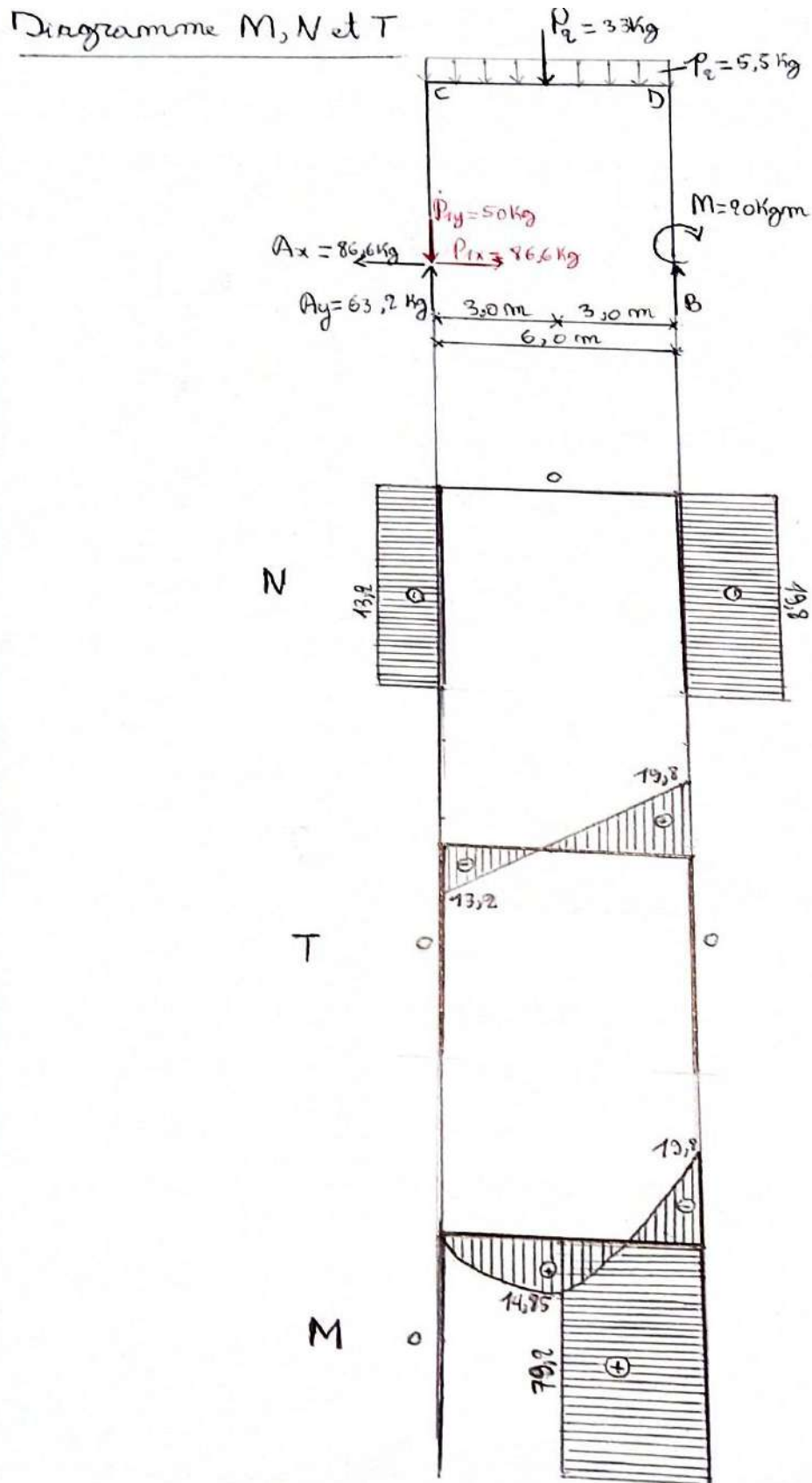
$$A_y \cdot 6 - P_{1y} \cdot 6 + A_x(x-6) - P_{1x}(x-6) - M_3 = 0$$

$$63,2 \times 6 - 50 \times 6 + 86,6(x-6) - 86,6(x-6) - M_3 = 0$$

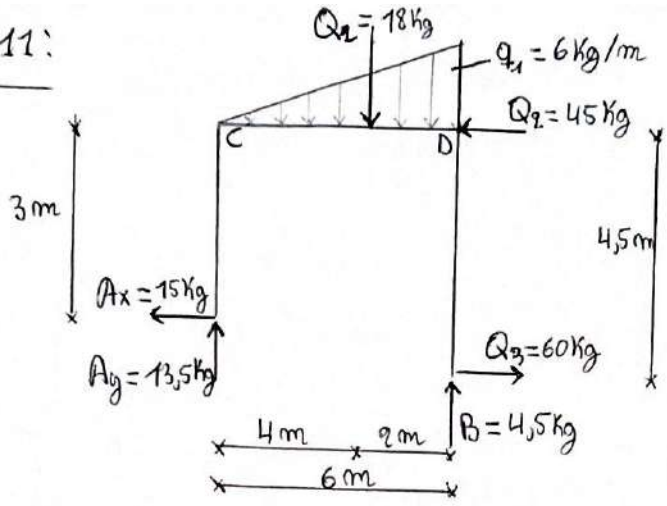
$$379,2 - 300 + 86,6x - 519,6 - 86,6x + 519,6 - M_3 = 0$$

$$79,2 - M_3 = 0$$

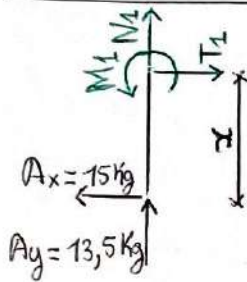
$$M_3 = 79,2 \text{ kg.m}$$



Exercice 11:



Coupe 1 Entre A et C : $0 \leq x \leq 3$



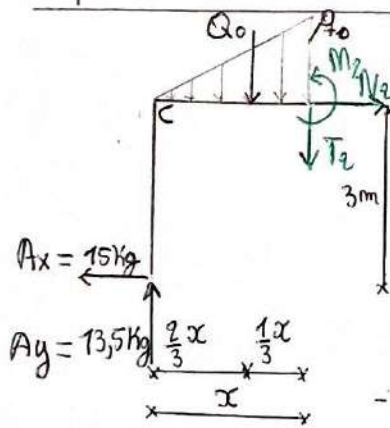
$$\begin{aligned} 1) \sum F_x &= 0, \\ -A_x + T_1 &= 0 \\ -15 + T_1 &= 0 \\ T_1 &= 15 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sum F_y &= 0, \\ A_y + N_1 &= 0 \\ 13,5 + N_1 &= 0 \\ N_1 &= -13,5 \text{ kg (C)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \sum M_1 &= 0, \\ A_x \cdot x - M_1 &= 0 \\ 15x - M_1 &= 0 \\ M_1 &= 15x \end{aligned}$$

| | |
|-----------------------|------------------------|
| Si $x = 0$ | Si $x = 3$ |
| $M_1 = 0 \text{ kgm}$ | $M_1 = 45 \text{ kgm}$ |

Coupe 2 Entre C et D : $0 \leq x \leq 6$



(Pour la démonstration monté à l'exercice 3 sur le calcul des efforts intérieurs et le diagramme M, N, T)

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{q_1 \cdot x}{6} = \frac{6x}{6} = x \\ Q_0 &= \frac{q_0 \cdot x}{2} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \sum F_x &= 0 \\ -A_x + N_2 &= 0 \\ -15 + N_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$N_2 = 15 \text{ kg (T)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_0 - T_2 = 0$$

$$13,5 - \frac{x^2}{2} - T_2 = 0$$

$$T_2 = 13,5 - \frac{x^2}{2}$$

Si $x = 0$, si $x = 4$ et si $x = 6$

$$T_2 = 13,5 \text{ kg} \quad T_2 = 5,5 \text{ kg} \quad T_2 = -4,5 \text{ kg}$$

Calcul du moment maximale (M_{max})

$$M_{max} \text{ ssi } T = 0$$

$$0 = 13,5 - \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} = 13,5$$

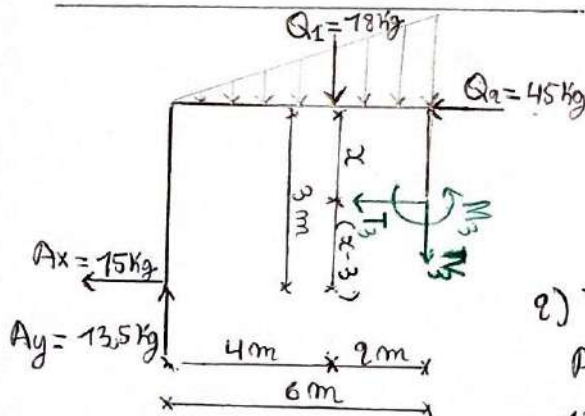
$$x = \sqrt{2 \times 13,5}$$

$$x = 5,2 \text{ m}$$

Si $x = 0$, si $x = 5,2$ et si $x = 6$

$$M_2 = 0 \text{ kgm} \quad M_2 = 91,7 \text{ kgm} \quad M_2 = 90 \text{ kgm}$$

Coupe 3 Entre D et B: $0 \leq x \leq 4,5$



$$1) \sum F_x = 0$$

$$-A_x - Q_2 - T_3 = 0$$

$$-15 - 45 - T_3 = 0$$

$$-60 - T_3 = 0$$

$$T_3 = -60 \text{ kg}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_1 - N_3 = 0$$

$$13,5 - 18 - N_3 = 0$$

$$-4,5 - N_3 = 0$$

$$N_3 = -4,5 \text{ kg (c)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_0 - T_2 = 0$$

$$13,5 - \frac{x^2}{2} - T_2 = 0$$

$$T_2 = 13,5 - \frac{x^2}{2}$$

Si $x = 0$, si $x = 4$ et si $x = 6$

$$T_2 = 13,5 \text{ Kg} \quad T_2 = 5,5 \text{ Kg} \quad T_2 = -4,5 \text{ Kg}$$

Calcul du moment maximale (M_{max})

$$M_{max} \text{ ssi } T = 0$$

$$0 = 13,5 - \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} = 13,5$$

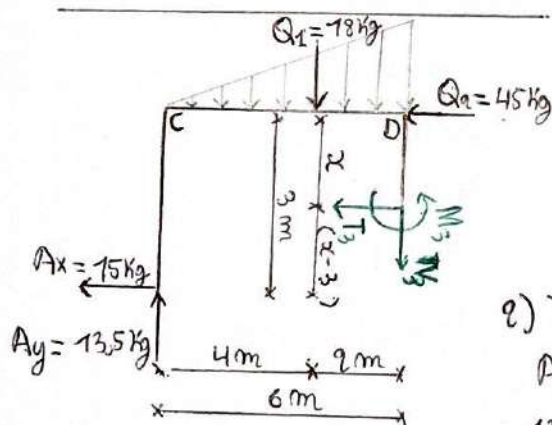
$$x = \sqrt{2 \times 13,5}$$

$$x = 5,2 \text{ m}$$

Si $x = 0$, si $x = 5,2$ et si $x = 6$

$$M_2 = 0 \text{ Kg.m} \quad M_2 = 91,7 \text{ Kg.m} \quad M_2 = 90 \text{ Kg.m}$$

Coupe 3 Entre D et B: $0 \leq x \leq 4,5$



$$1) \sum F_x = 0$$

$$-A_x - Q_2 - T_3 = 0$$

$$-15 - 45 - T_3 = 0$$

$$-60 - T_3 = 0$$

$$T_3 = -60 \text{ Kg}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_1 - N_3 = 0$$

$$13,5 - 18 - N_3 = 0$$

$$-4,5 - N_3 = 0$$

$$N_3 = -4,5 \text{ Kg (C)}$$

3) $\sum M_3 = 0,$

$A_y \cdot 6 - A_x \cdot (x-3) - Q_1 \cdot 2 - Q_2 \cdot x - M_3 = 0$

$13,5 \times 6 - 15(x-3) - 18 \times 2 - 45x - M_3 = 0$

$81 - 15x - 45 + 36 - 45x - M_3 = 0$

$-60x + 0 - M_3 = 0$

$M_3 = -60x$

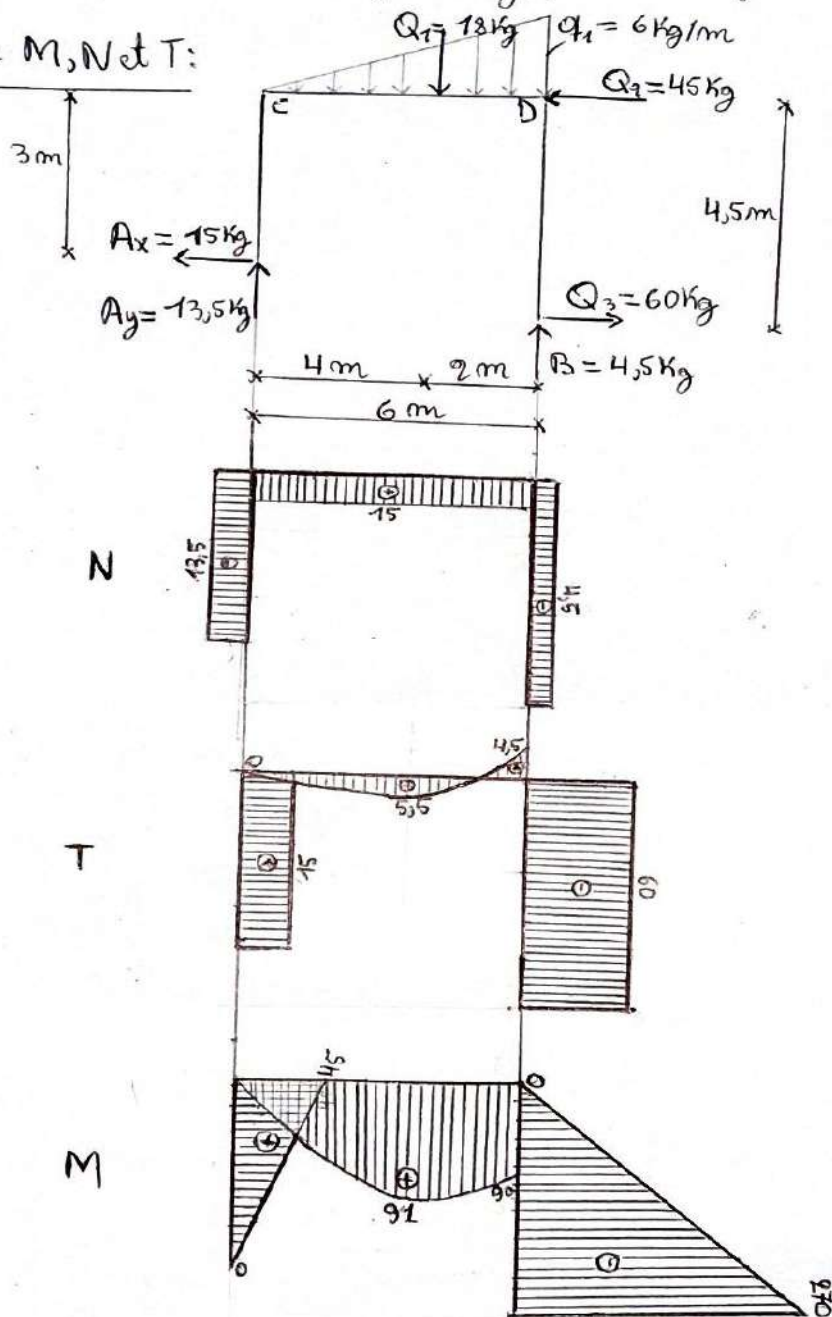
si $x = 0$

$M_3 = -0 \text{ Kgmm}$

si $x = 4,5$

$M_3 = -270 \text{ Kgmm}$

Diagramme M, N, T :



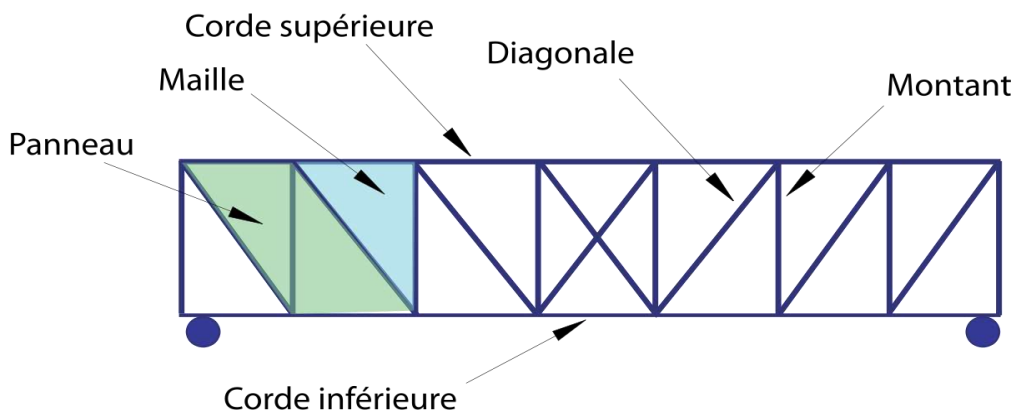
Chapitre 3 : Le treillis

Première partie théorique, méthode
et principes des calculs

Partie théorique

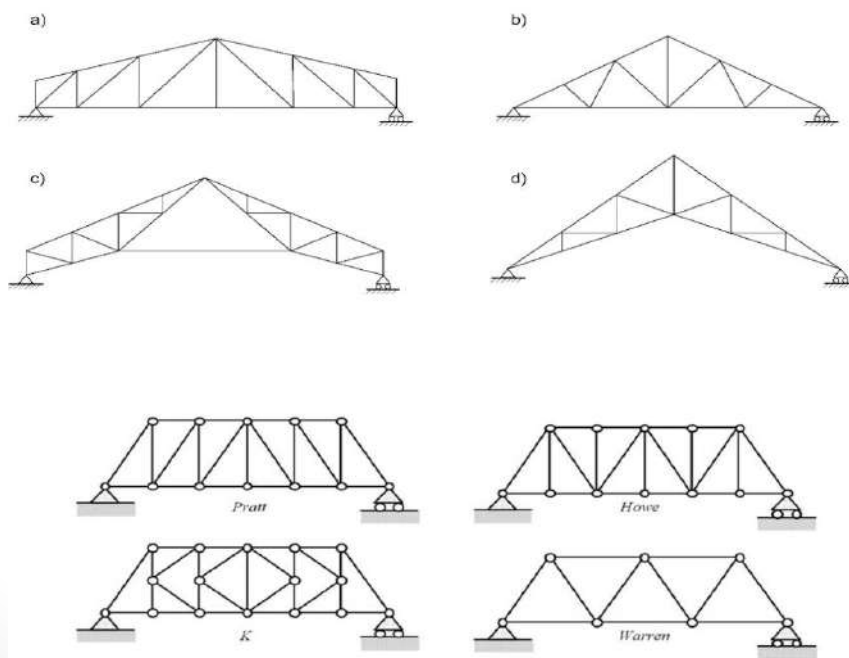
3.1. Introduction au concept de treillis :

Un treillis en génie civil est une structure composée de membres rigide interconnectées formant un réseau de triangles.



Sa conception utilise des éléments triangulés pour répartir les charges efficacement. Les treillis sont largement utilisés dans les structures de ponts, de toits, de tours, etc.

Pour plus d'exemple sur le treillis :



3.2. Théorie des treillis :

La théorie des treillis inclut la compréhension des forces de compression et de traction qui agissent sur les membres du treillis pour maintenir l'équilibre de la structure.

3.3 Méthodes de calcul :

On a trois méthodes pour déterminer les efforts dans les barres qui sont :

- **La méthode des nœuds :** détermine les forces internes dans les membres du treillis en analysant les équilibres des forces aux nœuds du treillis.
- **La méthode des sections(RITTER) :** découpe le treillis en sections plus petites pour simplifier l'analyse des forces et des moments internes.
- **La méthode graphique(CREMONA) :** représente le treillis sous forme de diagrammes de forces et utilise des techniques graphiques pour déterminer les forces internes dans les membres du treillis.

3.4 Vérification de l'isostaticité :

La vérification de l'isostaticité d'une structure de treillis est essentielle pour déterminer si le treillis est statiquement déterminé ou indéterminé.

Il existe deux aspects de la vérification de l'isostaticité : l'isostaticité interne et externe.

- **L'isostaticité interne** se réfère au degré de liberté interne d'un treillis, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté disponibles pour la structure.

Un treillis est isostatique lorsque le nombre de membres est égal au nombre total de nœuds moins 3, ce qui est exprimé par la formule $b = 2n - 3$, où b est le nombre de barres et n est le nombre de nœuds. C'est-à-dire que :

Si $b = 2n - 3$ le treillis est isostatique

Si $b > 2n - 3$ le treillis est hyperstatique

Si $b < 2n - 3$ le treillis est Hypostatique.

- **L'isostaticité externe** concerne la stabilité globale de la structure par rapport aux appuis et aux réactions extérieures. Un treillis externe isostatique est un treillis dont les appuis et les réactions extérieures peuvent être déterminés à partir des équations d'équilibre statique.

3.5. Vérification de l'hyperstaticité

La vérification de l'hyperstaticité dans un treillis est essentielle pour déterminer s'il est capable de supporter des charges sans se déformer excessivement.

Il existe deux aspects de la vérification de l'hyperstaticité :
Degré D'hyperstaticité interne et externe.

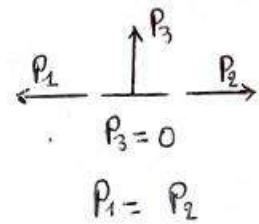
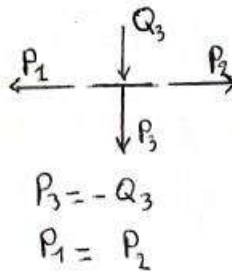
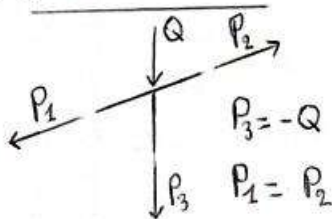
- ❖ **(Degré d'hyperstaticité Interne) $D_i = b - (2n - r)$**
 - où b est le nombre de barres, n est le nombre de nœuds et r est le nombre de réactions d'appui. Si le degré d'hyperstaticité est positif, le treillis est hyperstatique, Si le degré d'hyperstaticité est négatif, cela signifie que le treillis est hypostatique et Si le degré d'hyperstaticité est égal à zéro, cela indique que le treillis est isostatique.
- ❖ **(Degré d'hyperstaticité externe) $D_e = r - 3$**
 - où r est le nombre de réactions d'appui et 3 représente le nombre d'équations d'équilibre.

3.6 Les nœuds spéciaux

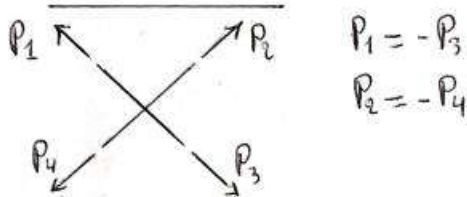
Les noeuds spéciaux sont des nœuds dont on connaît déjà les efforts dans les barres selon leurs formes sans passer par le calcul.

Exemple

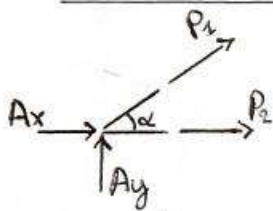
a) Nœud en « T »



b) Nœud en « X »



c) Nœud en « V »



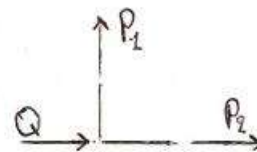
$$P_1 = -\frac{A_y}{\sin \alpha}$$

$$P_2 = -A_x + \left(\frac{A_y}{\sin \alpha}\right) \cdot \cos \alpha$$



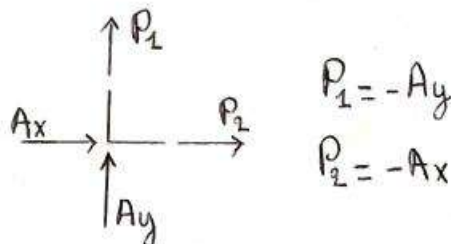
$$P_1 = -Q_1$$

$$P_2 = 0$$



$$P_2 = -Q$$

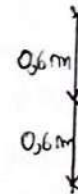
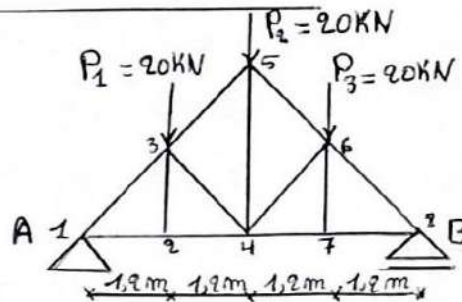
$$P_1 = 0$$



Nota: Dans un treillis il n'y a pas de rotation.

Exercices corrigé sur le calcul des
efforts intérieurs Avec la méthode
des Noeuds, des Sections(RITTER)
et La Méthode
Graphique(CREMONA).
Partie pratique

METHODE DES NOEUDS

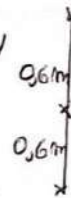
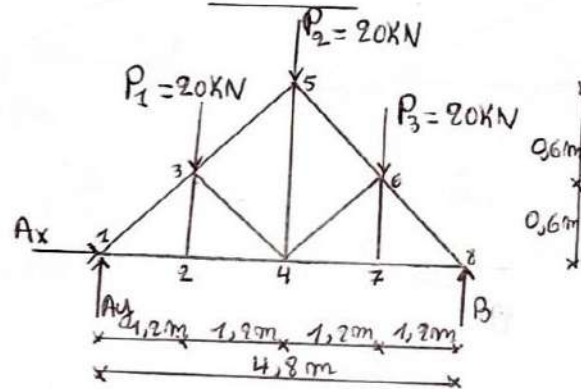
Exercice 1:Vérification de l'isostaticité

$$b = 2n - 3$$

$$13 = 2(8) - 3$$

$$13 = 16 - 3$$

$13 = 13$, Le truss est isostatique

S.C.R.2Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$P_1 \times 1,2 + P_2 \times 2,4 + P_3 \times 3,6 - B \times 4,8 = 0$$

$$20 \times 1,2 + 20 \times 2,4 + 20 \times 3,6 - 4,8B = 0$$

$$24 + 48 + 72 - 4,8B = 0$$

$$144 - 4,8B = 0$$

$$B = \frac{144}{4,8}$$

$$B = 30 \text{ kN}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_1 - P_2 - P_3 - B = 0$$

$$A_y - 20 - 20 - 20 - 30 = 0$$

$$A_y - 30 = 0$$

$$A_y = 30 \text{ kN}$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

$$A_x = 0$$

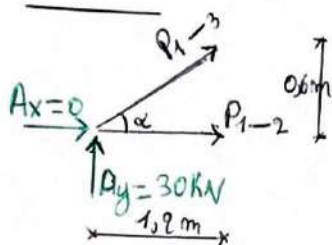
Ou bien par raison de symétrie on peut déduire que:

$$A_y = B = \frac{\sum \text{des charges verticales}}{2}$$

$$A_y = B = \frac{3P}{2} = \frac{3(20)}{2} = 30 \text{ kN}$$

Calcul des efforts

Nœud 1:



$$\text{tg } \alpha = \frac{0,6}{1,2} = 0,5$$

$$\alpha = \text{arctg}(0,5)$$

$$\alpha = 26,5^\circ$$

$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + P_{1-2} + P_{1-3} \cos \alpha = 0$$

$$0 + P_{1-2} + P_{1-3} \cos 26,5^\circ = 0$$

$$P_{1-2} + P_{1-3}(0,894) = 0 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y + P_{1-3} \sin \alpha = 0$$

$$30 + P_{1-3} \sin(26,5) = 0$$

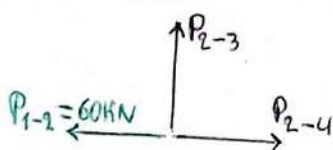
$$P_{1-3}(0,446) = -30$$

$$P_{1-3} = \frac{-30}{0,446} \Rightarrow P_{1-3} = -67,2 \text{ kN (C)} \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans (1): } P_{1-2} + (-67,2)(0,894) = 0$$

$$P_{1-2} - 60,0 = 0 \Rightarrow P_{1-2} = 60,0 \text{ kN (T)}$$

Nœud 2:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{1-2} + P_{2-4} = 0$$

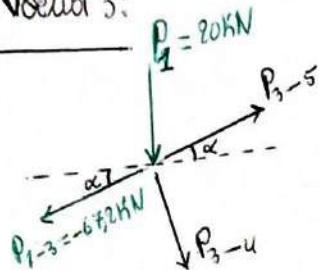
$$-60 + P_{2-4} = 0$$

$$P_{2-4} = 60 \text{ kN (T)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$P_{2-3} = 0 \text{ kN}$$

Noeud 3:



1) $\sum F_x = 0$,

$$-P_{1-3} \cos \alpha + P_{3-5} \cos \alpha + P_{3-4} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

2) $\sum F_y = 0$,

$$-P_{1-3} \sin \alpha + P_{3-5} \sin \alpha - P_{3-4} \sin \alpha - P_2 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} -P_{1-3} \cos \alpha + P_{3-5} \cos \alpha + P_{3-4} \cos \alpha = 0 & \text{On divise par } \cos \alpha \\ -P_{1-3} \sin \alpha + P_{3-5} \sin \alpha - P_{3-4} \sin \alpha - P_2 = 0 & \text{On divise par } \sin \alpha \text{ pour simplifier} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{P_{1-3} \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{P_{3-5} \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{P_{3-4} \cos \alpha}{\cos \alpha} = 0 \\ -\frac{P_{1-3} \sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{P_{3-5} \sin \alpha}{\sin \alpha} - \frac{P_{3-4} \sin \alpha}{\sin \alpha} - \frac{P_2}{\sin \alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P_{1-3} + P_{3-5} + P_{3-4} = 0 \\ -P_{1-3} + P_{3-5} - P_{3-4} - \frac{P_2}{\sin \alpha} = 0 \end{cases}$$

Nous on cherche: P_{3-5} et P_{3-4} on connait déjà P_{1-3} et P_2 .

$$\begin{cases} P_{3-5} + P_{3-4} = P_{1-3} & (3) \text{ Methode d'addition} \\ P_{3-5} - P_{3-4} = \frac{P_2}{\sin \alpha} + P_{1-3} & (4) \end{cases}$$

$$2P_{3-5} + 0 = 2P_{1-3} + \frac{P_2}{\sin \alpha}$$

$$P_{3-5} = P_{1-3} + \frac{P_2}{2 \sin \alpha}, \text{ Or } P_{1-3} = -67,2 \text{ et } P_2 = 20 \text{ et } \alpha = 26,5^\circ$$

$$= -67,2 + \frac{20}{2 \sin(26,5)}$$

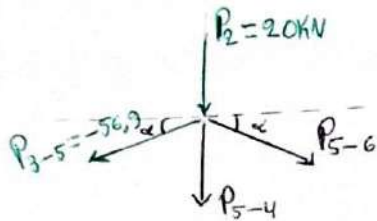
$$P_{3-5} = -56,9 \text{ kN (c)} \quad (5)$$

(5) dans (3)

$$P_{3-4} = -67,2 - (-56,90) = P_{1-3} - P_{3-5}$$

$$P_{3-4} = -10,3 \text{ kN (c)}$$

Noeud 5:



$$\sum F_y = 0,$$

$$-P_2 - P_{3-5} \sin \alpha - P_{5-4} - P_{5-6} \sin \alpha = 0.$$

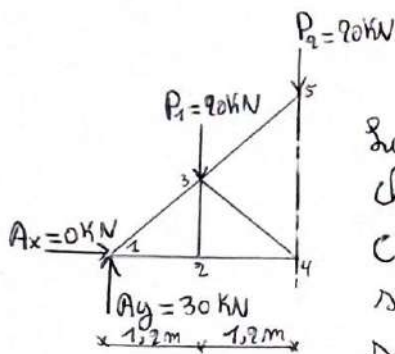
$$\text{Or } P_{3-5} = P_{5-6}$$

$$-P_2 - 2P_{3-5} \sin \alpha - P_{5-4} = 0$$

$$-20 - 2(-56,9) \sin 26,5 - P_{5-4} = 0$$

$$91,4 - P_{5-4} = 0$$

$$P_{5-4} = 91,4 \text{ kN (T)}$$



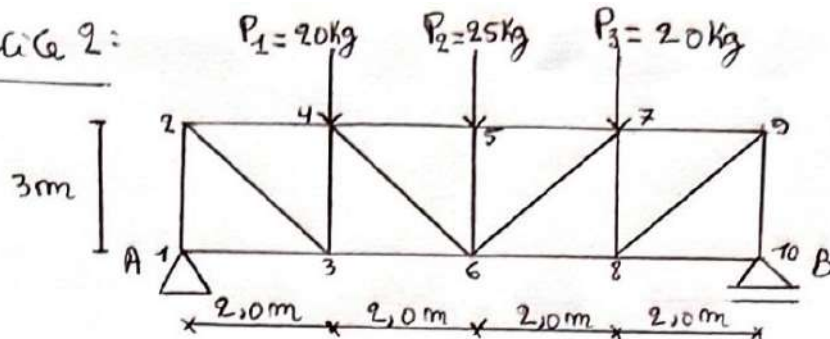
La structure est chargée symétriquement, les charges sont symétriques sur le treillis.

C'est-à-dire que la charge qui s'applique sur le noeud 3 est la charge qui s'applique sur le noeud 6. Cela implique que les efforts dans les barres sont les mêmes (c'est un exemple).

TABLEAU RECAPITULATIF

| barres | Longueur (m) | Effort (kN) | Sollicitations |
|------------------|--------------|-------------|----------------|
| P ₁₋₂ | 1,2 | 60 | Traction |
| P ₁₋₃ | 1,3 | -67,2 | Compression |
| P ₂₋₃ | 0,6 | 0 | - |
| P ₂₋₄ | 1,2 | 60 | Traction |
| P ₃₋₄ | 1,3 | -10 | Compression |
| P ₃₋₅ | 1,3 | -56,9 | Compression |
| P ₄₋₆ | 1,3 | -10 | Compression |
| P ₄₋₇ | 1,2 | 60 | Traction |
| P ₄₋₅ | 1,2 | 91,4 | Traction |
| P ₅₋₆ | 1,3 | -10 | Compression |
| P ₆₋₇ | 0,6 | 0 | - |
| P ₆₋₈ | 1,3 | -67,2 | Compression |

Exercice 2:



Vérification de l'isostaticité

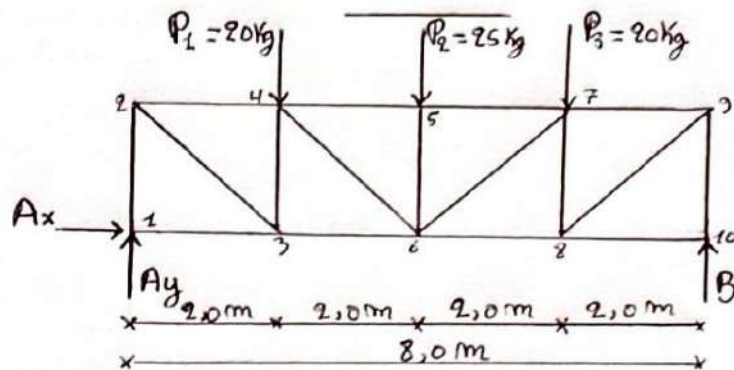
$$b = 2n - 3$$

$$17 = 2(10) - 3$$

$$17 = 20 - 3$$

 $17 = 17$, Le treillis est isostatique

S.C.R. 2



Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$P_1 \times 2,0 + P_2 \times 4 + P_3 \times 6 - B \times 8 = 0$$

$$20 \times 2 + 25 \times 4 + 20 \times 6 - 8B = 0$$

$$40 + 100 + 120 - 8B = 0$$

$$260 - 8B = 0$$

$$B = 32,5 \text{ kg} (\uparrow)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_1 - P_2 - P_3 + B = 0$$

$$A_y - 20 - 25 - 20 + 32,5 = 0$$

$$A_y - 32,5 = 0$$

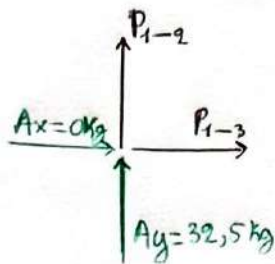
$$A_y = 32,5 \text{ kg} (\uparrow)$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

$$A_x = 0 \text{ kg}$$

Calcul des efforts :

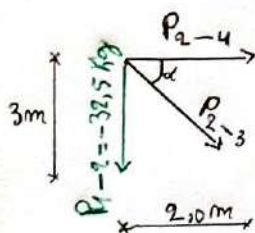
Nœud 1: Nœud en « V »



$$P_{1-2} = -32,5 \text{ kg (C)}$$

$$P_{1-3} = 0 \text{ kg}$$

Nœud 2:



$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\alpha = \text{arctg}(1,5)$$

$$\alpha = 56,3^\circ$$

$$1) \sum F_x = 0,$$

$$P_{2-4} + P_{2-3} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$-P_{1-2} - P_{2-3} \sin \alpha = 0$$

$$-(-32,5) - P_{2-3} \sin \alpha = 0$$

$$32,5 - P_{2-3} \sin 56,3 = 0$$

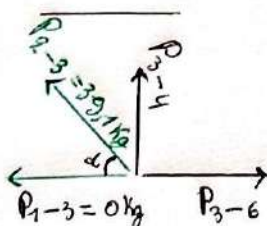
$$P_{2-3} = \frac{32,5}{\sin 56,3} = \frac{32,5}{0,831}$$

$$P_{2-3} = 39,1 \text{ kg (T)} \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans (1): } P_{2-4} + 39,1 \cos 56,3 = 0$$

$$P_{2-4} + 21,6 = 0 \Rightarrow P_{2-4} = -21,6 \text{ kg (C)}$$

Nœud 3:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{1-3} - P_{2-3} \cos \alpha + P_{3-6} = 0$$

$$-0 - 39,1 \cos 56,3 + P_{3-6} = 0$$

$$-21,6 + P_{3-6} = 0$$

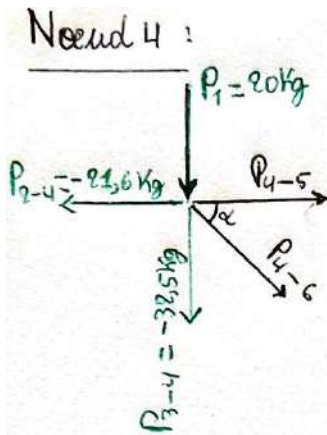
$$P_{3-6} = 21,6 \text{ kg (T)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$P_{2-3} \sin \alpha + P_{3-4} = 0$$

$$39,1 \sin 56,3 + P_{3-4} = 0$$

$$32,5 + P_{3-4} = 0 \Rightarrow P_{3-4} = -32,5 \text{ kg (C)}$$



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{2-4} + P_{4-6} \cos \alpha + P_{4-5} = 0$$

$$-(-21,6) + P_{4-6} \cos 56,3 + P_{4-5} = 0$$

$$21,6 + P_{4-6}(0,554) + P_{4-5} = 0, (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$-P_1 - P_{3-4} - P_{4-6} \sin \alpha = 0$$

$$-20 - (-32,5) - P_{4-6} \sin 56,3 = 0$$

$$-20 + 32,5 - P_{4-6}(0,831) = 0$$

$$12,5 - 0,831 P_{4-6} = 0$$

$$P_{4-6} = \frac{12,5}{0,831}$$

$$P_{4-6} = 15,04 \text{ kg (T)}, (2)$$

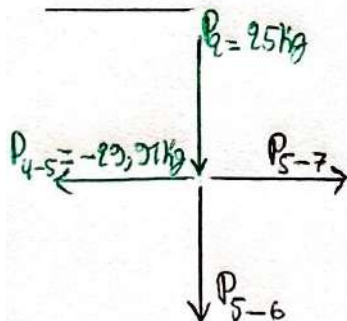
$$(2) \text{ dans } (1) : 21,6 + 15,0(0,554) + P_{4-5} = 0$$

$$21,6 + 8,31 + P_{4-5} = 0$$

$$29,91 + P_{4-5} = 0$$

$$P_{4-5} = -29,91 \text{ kg (C)}$$

Noeud 5: Noeud en « T »



$$P_{5-6} = -P_2$$

$$P_{5-6} = -25 \text{ kg (C)}$$

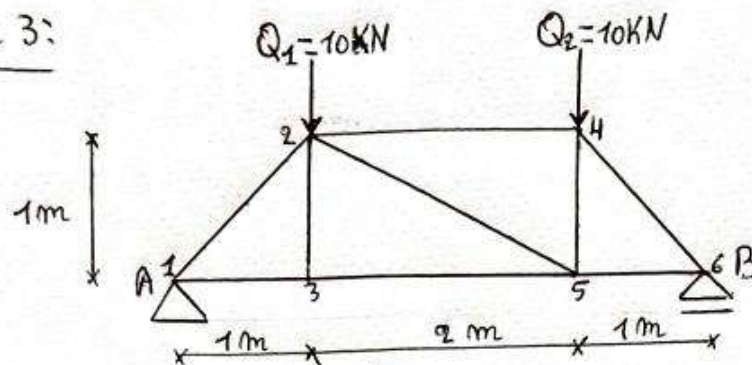
$$P_{4-5} = P_{5-7}$$

$$P_{4-5} = -29,91 \text{ kg (C)}$$

Le treillis est chargé de manière symétrique donc on peut s'arrêter au 5^{ème} Noeud.

TABLEAU RECAPITULATIF

| barres | Longueur (m) | Effort (kg) | Sollicitations |
|-------------------|--------------|-------------|----------------|
| P ₁₋₂ | 3 | -32,5 | Compression |
| P ₁₋₃ | 2 | 0 | - |
| P ₂₋₃ | 3,6 | 39,1 | Traction |
| P ₂₋₄ | 2 | -21,6 | Compression |
| P ₃₋₄ | 3 | -32,5 | Compression |
| P ₃₋₆ | 2 | 21,6 | Traction |
| P ₄₋₅ | 2 | -29,91 | Compression |
| P ₄₋₆ | 3,6 | 15,0 | Traction |
| P ₅₋₆ | 3 | -25 | Compression |
| P ₅₋₇ | 2 | -29,91 | Compression |
| P ₆₋₇ | 3,6 | 15,0 | Traction |
| P ₆₋₈ | 2 | 21,6 | Traction |
| P ₇₋₉ | 2 | -21,6 | Compression |
| P ₇₋₈ | 3 | -32,5 | Compression |
| P ₈₋₉ | 3,6 | 39,1 | Traction |
| P ₉₋₁₀ | 3 | -32,5 | Compression |
| P ₈₋₁₀ | 2 | 0 | - |

Exercice 3:Vérification de l'isostaticité

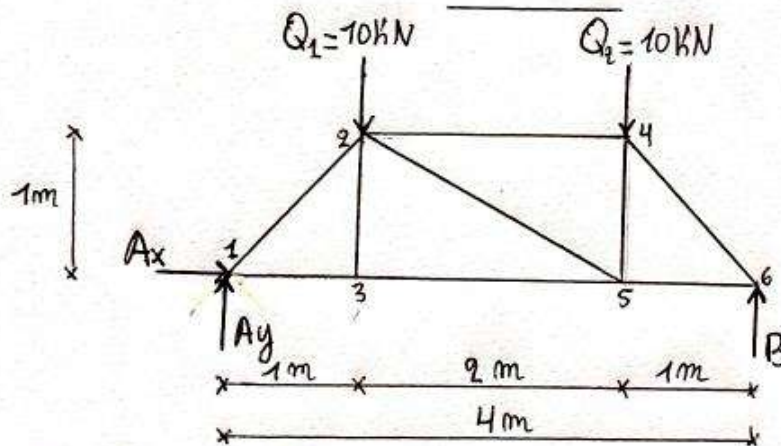
$$b = 2m - 3$$

$$g = 2(6) - 3$$

$$g = 12 - 3$$

$g = 9$, La truelle est isostatique

S.C.R.L



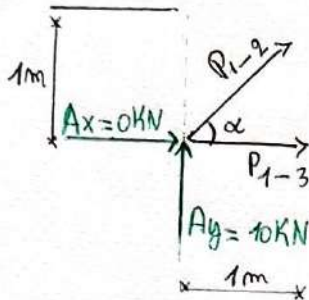
La structure est chargée de manière symétrique on peut faire :

$$A_y = B = \frac{\sum \text{des charges Verticales}}{2} = \frac{10 + 10}{2} = \frac{20}{2}$$

$$A_y = B = 10 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$A_x = 0 \text{ kN}$$

Nœud 1: Nœud en « V »

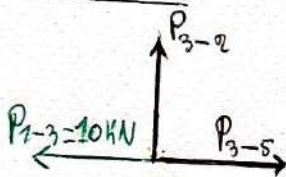


$$P_{1-2} = -\frac{A_y}{\sin \alpha} = -\frac{10}{\sin 45} = -14,1 \text{ kN (C)}$$

$$P_{1-3} = -A_x + \left(\frac{A_y}{\sin \alpha}\right) \cos \alpha = -0 + 14,1 (\cos 45) = 10 \text{ kN (T)}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{1}{1} = 1 \\ \alpha &= \arctan(1) \\ \alpha &= 45^\circ \end{aligned}$$

Nœud 3:

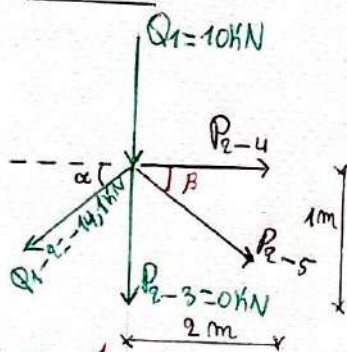


$$\begin{aligned} 1) \sum F_x &= 0, \\ -P_{1-3} + P_{3-5} &= 0 \\ -10 + P_{3-5} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sum F_y &= 0, \\ P_{2-3} &= 0 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$P_{3-5} = 10 \text{ kN (T)}$$

Nœud 2



$$\begin{aligned} \tan B &= \frac{1}{2} = 0,5 \\ B &= \arctan(0,5) \\ B &= 26,57^\circ \end{aligned}$$

$$1) \sum F_x = 0,$$

$$\begin{aligned} -P_{1-2} \cos \alpha + P_{2-4} + P_{2-5} \cos B &= 0 \\ -(-14,1 \cos 45) + P_{2-4} + P_{2-5} \cos 26,57 &= 0 \\ 14,1(0,707) + P_{2-4} + P_{2-5}(0,894) &= 0 \\ 10 + P_{2-4} + 0,894 P_{2-5} &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$\begin{aligned} -P_{2-3} - Q_1 - P_{1-2} \sin \alpha - P_{2-5} \sin B &= 0 \\ -0 - 10 - (-14,1 \sin 45) - P_{2-5} \sin 26,57 &= 0 \\ -10 + 14,1(0,707) - P_{2-5}(0,447) &= 0 \end{aligned}$$

$$P_{2-5} = \frac{-10 + 14,1(0,707)}{0,447}$$

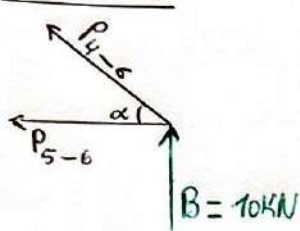
$$P_{2-5} = 0 \text{ kN (2)}$$

$$(2) \text{ dans } (1): -10 + P_{2-4} + 0,894(0) = 0$$

$$-10 + P_{2-4} + 0 = 0$$

$$P_{2-4} = -10 \text{ KN (C)}$$

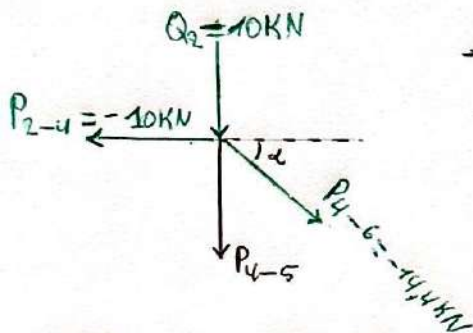
Nœud 6 : Nœud en « V »



$$P_{4-6} = -\frac{B}{\sin \alpha} = -\frac{10}{\sin 45} = -14,1 \text{ KN (C)}$$

$$P_{5-6} = \left(\frac{B}{\sin \alpha}\right) \cos \alpha = 14,1 \cos 45 = 10 \text{ KN (T)}$$

Nœud 4 :



$$\sum F_y = 0,$$

$$-Q_2 - P_{4-5} - P_{4-6} \sin \alpha = 0$$

$$-10 - P_{4-5} - (-14,1 \sin 45) = 0$$

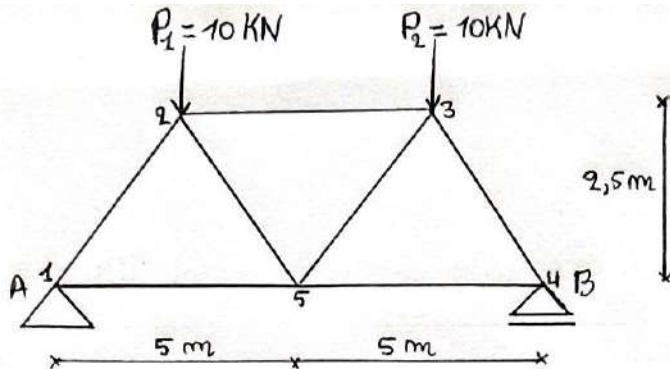
$$P_{4-5} = -10 + 14,1 \sin 45$$

$$P_{4-5} = 0 \text{ KN}$$

TABLEAU RECAPITULATIF

| barres | Longueur (m) | Effort (kN) | Sollicitations |
|-----------|--------------|-------------|----------------|
| P_{1-2} | 1,4 | -14,1 | Compression |
| P_{1-3} | 1 | 10 | Traction |
| P_{2-3} | 1 | 0 | - |
| P_{3-5} | 2 | 10 | Traction |
| P_{4-5} | 1 | 0 | - |
| P_{4-6} | 1,4 | -14,1 | Compression |
| P_{2-4} | 2 | -10 | Compression |
| P_{5-6} | 1 | 10 | Traction |
| P_{2-5} | 2,2 | 0 | - |

Exercice 4 :



Vérification de l'isostaticité

$$b = 2n - 3$$

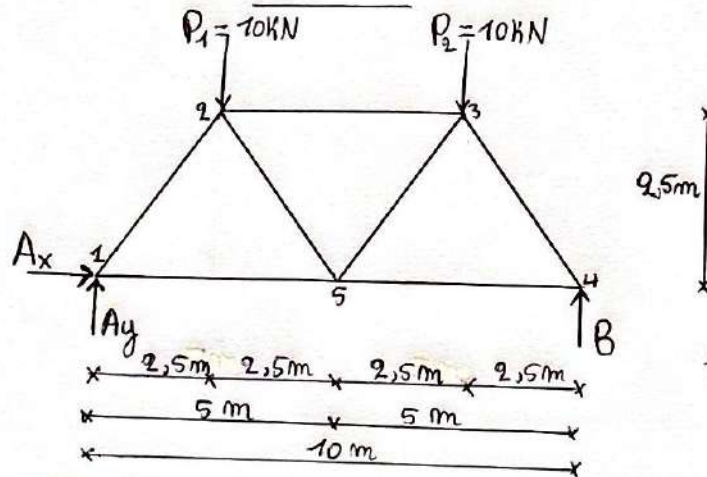
$$7 = 2(5) - 3$$

$$7 = 10 - 3$$

$$7 = 7$$

Le treillis est isostatique

S.C.R.L



$$\tan \alpha = \frac{2,5}{2,5} = 1$$

$$\alpha = \arctg(1)$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Equations d'équilibre

1) $\sum M_A = 0,$

$$P_1 \times 2,5 + P_2 \times 7,5 - B \times 10 = 0$$

$$10 \times 2,5 + 10 \times 7,5 - 10B = 0$$

$$25 + 75 - 10B = 0$$

$$100 - 10B = 0$$

$$B = \frac{100}{10}$$

$$B = 10 \text{ kN} (\uparrow)$$

2) $\sum F_y = 0,$

$$A_y - P_1 - P_2 + B = 0$$

$$A_y - 10 - 10 + 10 = 0$$

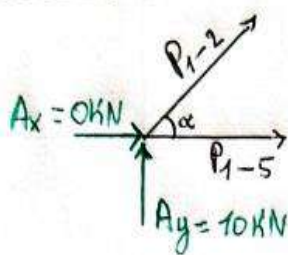
$$A_y - 10 = 0 \Rightarrow A_y = 10 \text{ kN} (\uparrow)$$

3) $\sum F_x = 0,$

$$A_x = 0 \text{ kN}$$

Calcul des efforts:

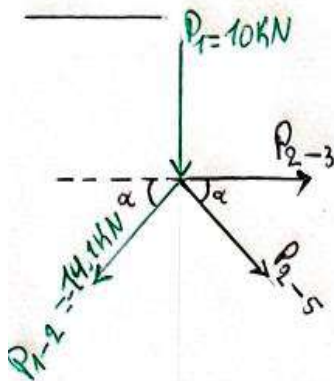
Nœud 1 : Nœud en « V »



$$P_{1-2} = -\frac{A_y}{\sin \alpha} = -\frac{10}{\sin 45} = -14,1 \text{ kN (C)}$$

$$P_{1-3} = -A_x + \left(\frac{A_y}{\sin \alpha}\right) \cos \alpha = -0 + 14,1 \cos 45 = 10 \text{ kN (T)}$$

Nœud 2:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{1-2} \cos \alpha + P_{2-5} \cos \alpha + P_{2-3} = 0$$

$$-(-14,1 \cos 45) + P_{2-5} \cos 45 + P_{2-3} = 0$$

$$14,1 \cos 45 + P_{2-5} \cos 45 + P_{2-3} = 0 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$-P_{1-2} \sin \alpha - P_1 - P_{2-5} \sin \alpha = 0$$

$$-(-14,1 \sin 45) - 10 - P_{2-5} \sin 45 = 0$$

$$14,1 \sin 45 - 10 - P_{2-5} \sin 45 = 0$$

$$10 - 10 - P_{2-5} 0,707 = 0$$

$$0 - 0,707 P_{2-5} = 0$$

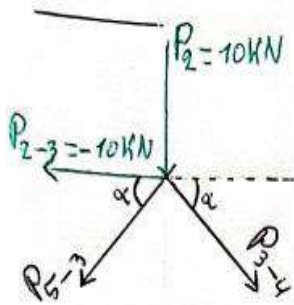
$$P_{2-5} = \frac{0}{0,707} \Rightarrow P_{2-5} = 0 \text{ kN (2)}$$

$$(2) \text{ dans (1) : } 14,1 \cos 45 + (0) \cos 45 + P_{2-3} = 0$$

$$10 + P_{2-3} = 0$$

$$P_{2-3} = -10 \text{ kN (C)}$$

Nœud 3:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{2-3} - P_{5-3} \cos \alpha + P_{3-4} \cos \alpha = 0$$

$$-(-10) - P_{5-3} \cos \alpha + P_{3-4} \cos \alpha = 0$$

$$10 - P_{5-3} \cos \alpha + P_{3-4} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$-P_2 - P_{5-3} \sin \alpha - P_{3-4} \sin \alpha = 0$$

$$-10 - P_{5-3} \sin \alpha - P_{3-4} \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

On a notre système de deux équations à deux inconnues, on va le résoudre comme dans l'algèbre linéaire par la méthode d'élimination:

$$\begin{cases} 10 - P_{5-3} \cos \alpha + P_{3-4} \cos \alpha = 0 & (1) \text{ On divise par } \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 - P_{5-3} \sin \alpha - P_{3-4} \sin \alpha = 0 & (2) \text{ On divise par } \sin \alpha, \text{ pour simplifier l'équation} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{10}{\cos \alpha} - \frac{P_{5-3} \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{P_{3-4} \cos \alpha}{\cos \alpha} = 0 \\ -\frac{10}{\sin \alpha} - \frac{P_{5-3} \sin \alpha}{\sin \alpha} - \frac{P_{3-4} \sin \alpha}{\sin \alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{\cos \alpha} - P_{5-3} + P_{3-4} = 0 \\ -\frac{10}{\sin \alpha} - P_{5-3} - P_{3-4} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{0 - 2P_{5-3} + 0 = 0}$$

$$P_{5-3} = \frac{0}{2} \Rightarrow P_{5-3} = 0 \text{ kN} \quad (3)$$

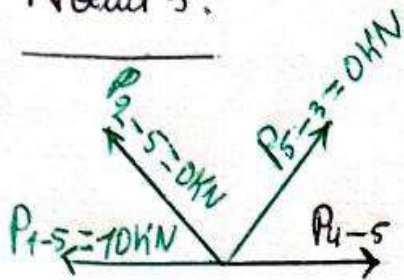
$$(3) \text{ dans } (1): 10 - (0) \cos \alpha + P_{3-4} \cos \alpha = 0$$

$$10 + P_{3-4} \cos 45 = 0$$

$$P_{3-4} = -\frac{10}{\cos 45}$$

$$P_{3-4} = -14,1 \text{ kN} \quad (c)$$

Nœud 5:



$$\sum F_x = 0,$$

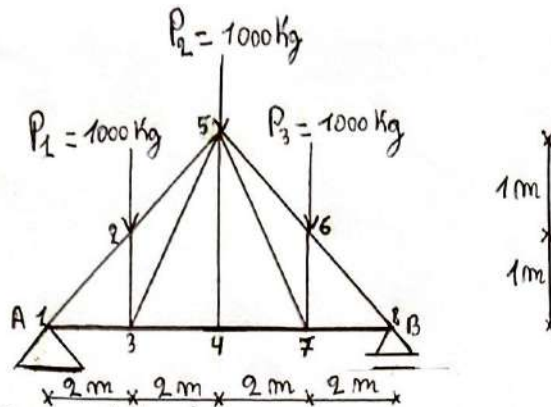
$$-10 + P_{4-5} = 0$$

$$P_{4-5} = 10 \text{ kN (T)}$$

TABLEAU RECAPITULATIF

| barres | Longueur (m) | Effort (kN) | Sollicitations |
|------------------|--------------|-------------|----------------|
| P ₁₋₂ | 3,5 | -14,1 | Compression |
| P ₁₋₅ | 5 | 10 | Traction |
| P ₂₋₃ | 5 | 10 | Traction |
| P ₂₋₅ | 3,5 | 0 | - |
| P ₃₋₄ | 3,5 | -14,1 | Compression |
| P ₄₋₅ | 5 | 10 | Traction |
| P ₅₋₃ | 3,5 | 0 | - |

Exercice 5:



Vérification de l'isostaticité

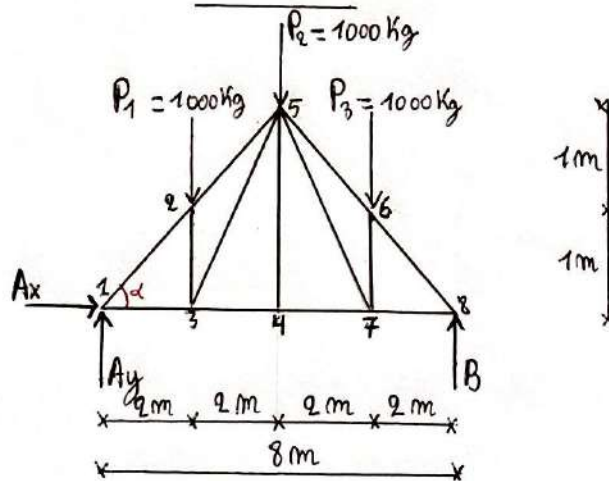
$$b = 2m - 3$$

$$13 = 2(8) - 3$$

$$13 = 16 - 3$$

$13 = 13$, Le treillis est isostatique

S.C.R.L



$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{1}{2} = 0,5 \\ \alpha &= \arctan(0,5) \\ \alpha &= 26,56 \end{aligned}$$

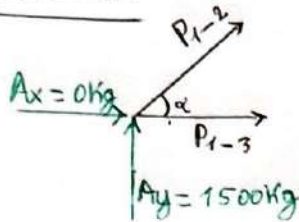
Le treillis est chargé de manière symétrique on peut faire :

$$A_y = B = \frac{\sum \text{des charges verticales}}{2} = \frac{1000 + 1000 + 1000}{2} = \frac{3000}{2} = 1500 \text{ Kg} (\uparrow)$$

$$A_x = 0 \text{ Kg}$$

Calcul des efforts

Noeud 1:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + P_{1-3} + P_{1-2} \cos \alpha = 0$$

$$0 + P_{1-3} + P_{1-2} \cos 26,56 = 0 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y + P_{1-2} \sin \alpha = 0$$

$$-1500 + P_{1-2} \sin 26,56 = 0$$

$$P_{1-2} (0,447) = -1500$$

$$P_{1-2} = \frac{-1500}{0,447} = -3355,7$$

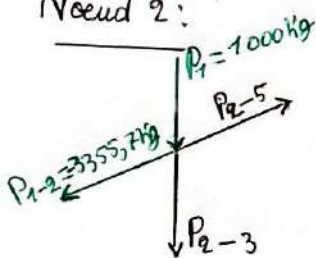
$$P_{1-2} = -3355,7 \text{ kg (C)} \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans } (1): P_{1-3} + (-3355,7) \cos 26,56 = 0$$

$$P_{1-3} - 3355,7 (0,894) = 0$$

$$P_{1-3} - 3001,5 = 0 \Rightarrow P_{1-3} = 3001,5 \text{ kg (T)}$$

Noeud 2:

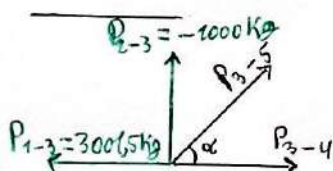


Noeud en « T »:

$$P_{2-3} = -P_1 = -1000 \text{ kg (C)}$$

$$P_{2-5} = P_{1-2} = -3355,7 \text{ kg (C)}$$

Noeud 3:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{1-3} + P_{3-5} \cos \alpha + P_{3-4} = 0$$

$$-3001,5 + P_{3-5} \cos 26,56 + P_{3-4} = 0 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

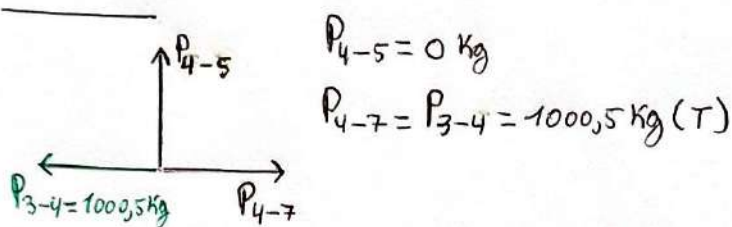
$$P_{2-3} + P_{3-5} \sin \alpha = 0$$

$$-1000 + P_{3-5} \sin 26,56 = 0$$

$$P_{3-5} (0,447) = 1000 \Rightarrow P_{3-5} = \frac{1000}{0,447} = 2237,1 \text{ kg (T)} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ dans (1): } & -3001,5 + 2237,1 \cos 26,56 + P_{3-4} = 0 \\
 & -3001,5 + 2001,0 + P_{3-4} = 0 \\
 & -1000,5 + P_{3-4} = 0 \\
 & P_{3-4} = 1000,5 \text{ kg (T)}
 \end{aligned}$$

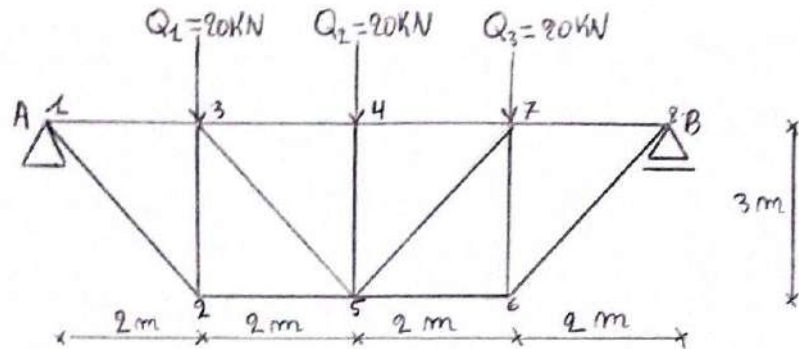
Nœud 4: Nœud en « T »



Le treillis est chargé symétriquement donc on peut s'arrêter par là.

TABLEAU RECAPITULATIF

| barres | Longueur (m) | Effort (kg) | Sollicitations |
|-----------|--------------|-------------|----------------|
| P_{1-2} | 2,2 | -3355,7 | Compression |
| P_{1-3} | 2 | 3001,5 | Traction |
| P_{2-5} | 2,2 | -3355,7 | Compression |
| P_{3-4} | 2 | 1000,5 | Traction |
| P_{5-6} | 2,2 | -3355,7 | Compression |
| P_{4-7} | 2 | 1000,5 | Traction |
| P_{6-8} | 2,2 | -3355,7 | Compression |
| P_{7-6} | 1 | -1000 | Compression |
| P_{7-8} | 2 | 3001,5 | Traction |
| P_{2-3} | 1 | -1000 | Compression |
| P_{4-5} | 2 | 0 | - |
| P_{3-5} | 2,8 | 2237,1 | Traction |
| P_{7-5} | 2,8 | 2237,1 | Traction |

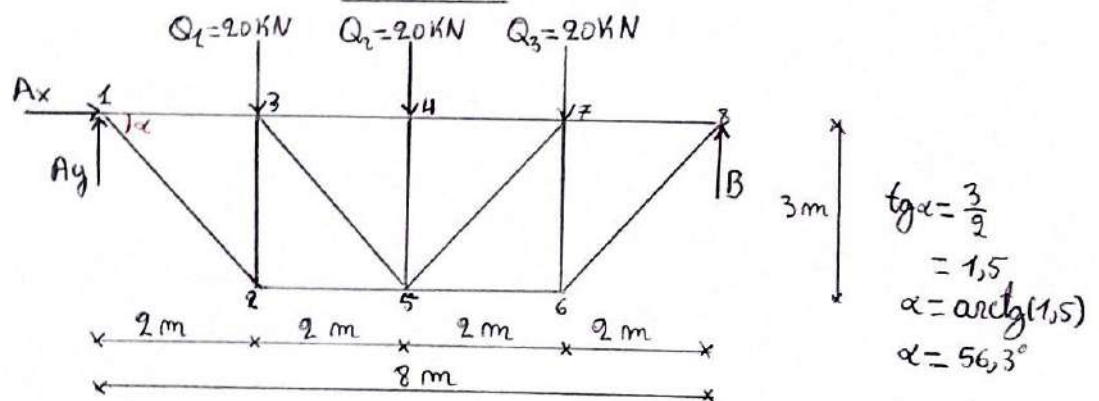
Exercice 6:Vérification de l'isostaticité

$$b = 2m - 3$$

$$13 = 2(8) - 3$$

$$13 = 16 - 3$$

$$13 = 13, \text{ Le treillis est isostatique}$$

S.C.R.L

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{3}{2} \\ &= 1,5 \\ \alpha &= \operatorname{arctg}(1,5) \\ \alpha &= 56,3^\circ \end{aligned}$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$Q_1 \times 2 + Q_2 \times 4 + Q_3 \times 6 - B \times 8 = 0$$

$$20 \times 2 + 20 \times 4 + 20 \times 6 - 8B = 0$$

$$40 + 80 + 120 - 8B = 0$$

$$240 - 8B = 0$$

$$-8B = -240$$

$$B = \frac{240}{8}$$

$$B = 30 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - Q_1 - Q_2 - Q_3 + B = 0$$

$$A_y - 20 - 20 - 20 + 30 = 0$$

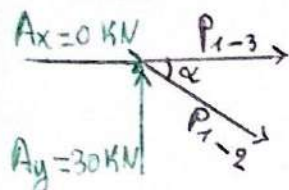
$$A_y - 30 = 0 \Rightarrow A_y = 30 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

$$A_x = 0 \text{ kN}$$

Calcul des efforts

Nœud 1:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + P_{1-2} \cos \alpha + P_{1-3} = 0$$

$$0 + P_{1-2} \cos 56,3 + P_{1-3} = 0 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - P_{1-2} \sin \alpha = 0$$

$$30 - P_{1-2} \sin 56,3 = 0$$

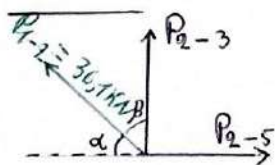
$$-P_{1-2}(0,831) = -30$$

$$P_{1-2} = \frac{30}{0,831} = 36,1 \Rightarrow P_{1-2} = 36,1 \text{ KN (T), (2)}$$

$$(2) \text{ dans (1): } 36,1 \cos 56,3 + P_{1-3} = 0$$

$$20,0 + P_{1-3} = 0 \Rightarrow P_{1-3} = -20 \text{ KN (C)}$$

Nœud 2:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{1-2} \cos \alpha + P_{2-5} = 0$$

$$-36,1 \cos 56,3 + P_{2-5} = 0$$

$$-20,0 + P_{2-5} = 0$$

$$P_{2-5} = 20 \text{ KN (T)}$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

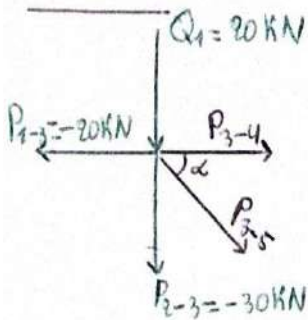
$$P_{1-2} \sin \alpha + P_{2-3} = 0$$

$$36,1 \sin 56,3 + P_{2-3} = 0$$

$$30 + P_{2-3} = 0$$

$$P_{2-3} = -30 \text{ KN (C)}$$

Noeud 3:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{1-2} + P_{3-5} \cos \alpha + P_{3-4} = 0$$

$$-(-20) + P_{3-5} \cos 56,3 + P_{3-4} = 0$$

$$20 + P_{3-5}(0,554) + P_{3-4} = 0 \quad (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$-Q_1 - P_{2-3} - P_{3-5} \sin \alpha = 0$$

$$-20 - (-30) - P_{3-5} \sin 56,3 = 0$$

$$-20 + 30 - P_{3-5}(0,831) = 0$$

$$10 - P_{3-5}(0,831) = 0$$

$$-P_{3-5}(0,831) = -10$$

$$P_{3-5} = \frac{10}{0,831} \Rightarrow P_{3-5} = 12,0 \text{ kN (T)}, (2)$$

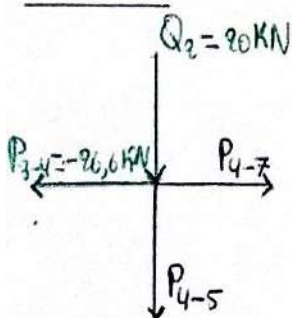
$$(2) \text{ dans } (1): 20 + 12(0,554) + P_{3-4} = 0$$

$$20 + 6,648 + P_{3-4} = 0$$

$$26,648 + P_{3-4} = 0 \Rightarrow P_{3-4} = -26,648 \text{ kN}$$

$$P_{3-4} \approx -26,6 \text{ kN (C)}$$

Noeud 4: Noeud en « T »



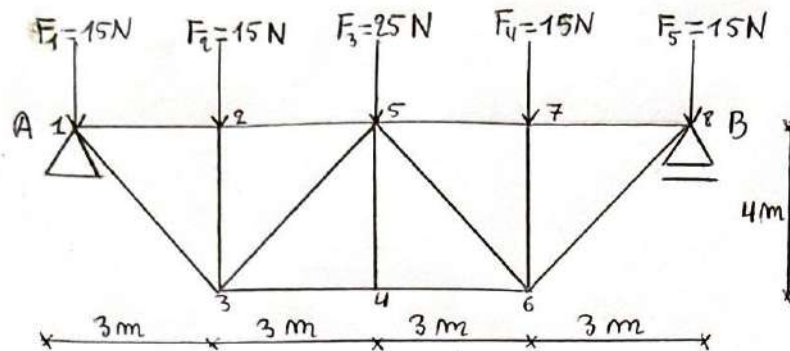
$$P_{4-5} = -Q_2 = -20 \text{ kN (C)}$$

$$P_{4-7} = P_{3-4} = -26,6 \text{ kN (C)}$$

Le treillis est chargé symétriquement, donc on peut s'arrêter par là.

TABLEAU RECAPITULATIF

| barres | Longueur (m) | Effort (kN) | Sollicitations |
|------------------|--------------|-------------|----------------|
| P ₁₋₂ | 3,6 | 36,1 | Traction |
| P ₁₋₃ | 2 | -20 | Compression |
| P ₂₋₃ | 3 | -30 | Compression |
| P ₂₋₅ | 2 | 20 | Traction |
| P ₃₋₂ | 3 | -30 | Compression |
| P ₃₋₄ | 2 | -26,6 | Compression |
| P ₃₋₅ | 3,6 | 12,0 | Traction |
| P ₄₋₅ | 3 | -20 | Compression |
| P ₄₋₇ | 2 | -26,6 | Compression |
| P ₅₋₆ | 2 | 20 | Traction |
| P ₅₋₇ | 3,6 | 12,0 | Traction |
| P ₆₋₇ | 3 | -30 | Compression |
| P ₆₋₈ | 3,6 | 36,1 | Traction |

Exercice 7Vérification de l'isostaticité

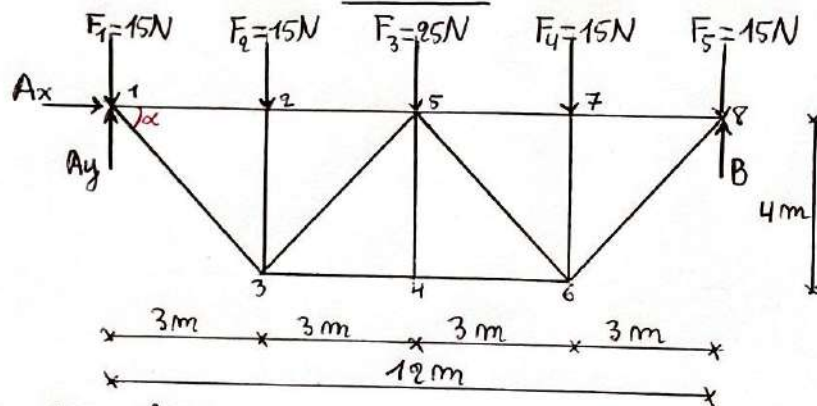
$$b = 2m - 3$$

$$13 = 2(8) - 3$$

$$13 = 16 - 3$$

$$13 = 13, \text{ Le treillis est isostatique}$$

S.C.R.L



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} = 1,33$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(1,33)$$

$$\alpha = 53,13^\circ$$

Equations d'équilibre

$$1) \sum M_A = 0,$$

$$F_2 \times 3 + F_3 \times 6 + F_4 \times 9 + F_5 \times 12 - B \times 12 = 0$$

$$15 \times 3 + 25 \times 6 + 15 \times 9 + 15 \times 12 - 8B = 0$$

$$45 + 150 + 135 + 180 - 8B = 0$$

$$510 - 8B = 0$$

$$\neq 8B = \neq 510$$

$$B = \frac{510}{8}$$

$$B = 63,75 \text{ N } (\uparrow)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$A_y - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5 + B = 0$$

$$A_y - 15 - 15 - 25 - 15 - 15 + 63,75 = 0$$

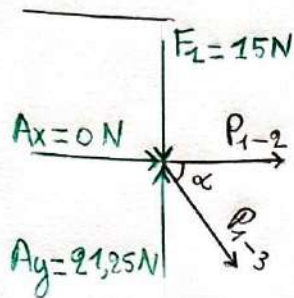
$$A_y - 21,25 = 0 \Rightarrow A_y = 21,25 \text{ N } (\uparrow)$$

$$3) \sum F_x = 0,$$

$$A_x = 0 \text{ N}$$

Calcul des efforts

Nœud 1:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$A_x + P_{1-3} \cos \alpha + P_{1-2} = 0$$

$$0 + P_{1-3} \cos 53,13 + P_{1-2} = 0$$

$$P_{1-3} (0,600) + P_{1-2} = 0, (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$-F_2 + A_y - P_{1-3} \sin \alpha = 0$$

$$-15 + 21,25 - P_{1-3} \sin 53,13 = 0$$

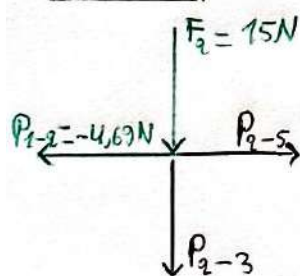
$$6,25 - P_{1-3} (0,799) = 0$$

$$P_{1-3} = \frac{6,25}{0,799} \Rightarrow P_{1-3} = 7,8 \text{ N (T)}, (2)$$

$$(2) \text{ dans } (1): 7,8 (0,600) + P_{1-2} = 0$$

$$4,69 + P_{1-2} = 0 \Rightarrow P_{1-2} = -4,69 \text{ N (C)}$$

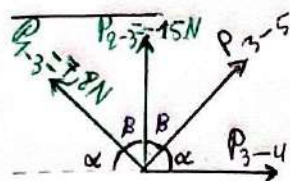
Nœud 2: Nœud en « T »



$$P_{2-3} = -F_2 = -15 \text{ N (C)}$$

$$P_{2-5} = P_{1-2} = -4,69 \text{ N (C)}$$

Nœud 3:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{1-3} \cos \alpha + P_{3-5} \cos \alpha + P_{3-4} = 0$$

$$-7,8 \cos 53,13 + P_{3-5} \cos 53,13 + P_{3-4} = 0$$

$$-4,6 + P_{3-5} (0,600) + P_{3-4} = 0, (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$P_{1-3} \sin \alpha + P_{2-3} + P_{3-5} \sin \alpha = 0$$

$$7,8 \sin 53,13 + (-15) + P_{3-5} \sin 53,13 = 0$$

$$6,2 - 15 + P_{3-5} (0,799) = 0$$

$$-8,8 + P_{3-5} (0,799) = 0$$

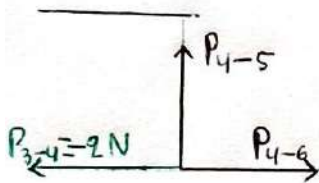
$$P_{3-5} = \frac{8,8}{0,799} \Rightarrow P_{3-5} = 11,0 \text{ N (T)}, (2)$$

$$(2) \text{ dans (1)}: -4,6 + 11(0,600) + P_{3-4} = 0$$

$$-4,6 + 6,6 + P_{3-4} = 0$$

$$2 + P_{3-4} = 0 \Rightarrow P_{3-4} = -2 \text{ N (C)}$$

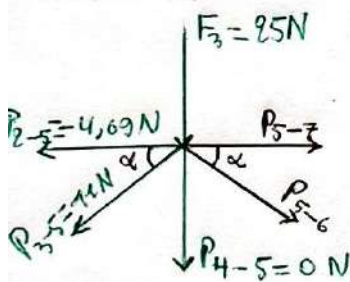
Noeud 4: Noeud en « T »



$$P_{4-5} = 0 \text{ N}$$

$$P_{4-6} = P_{3-4} = -2 \text{ N (C)}$$

Noeud 5:



$$1) \sum F_x = 0,$$

$$-P_{2-5} - P_{3-5} \cos \alpha + P_{5-6} \cos \alpha + P_{5-7} = 0$$

$$-(-4,69) - 11 \cos 53,13 + P_{5-6} \cos 53,13 + P_{5-7} = 0$$

$$4,69 - 6,6 + P_{5-6} (0,600) + P_{5-7} = 0$$

$$-1,92 + P_{5-6} (0,600) + P_{5-7} = 0, (1)$$

$$2) \sum F_y = 0,$$

$$-P_{3-5} \sin \alpha - F_3 - P_{4-5} - P_{5-6} \sin \alpha = 0$$

$$-11 \sin 53,13 - 25 - 0 - P_{5-6} \sin 53,13 = 0$$

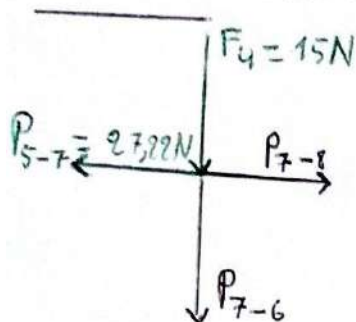
$$-8,79 - 25 - P_{5-6} (0,799) = 0$$

$$-33,79 - P_{5-6} (0,799) = 0$$

$$P_{5-6} = \frac{-33,79}{0,799} \Rightarrow P_{5-6} = -42,29 \text{ N (C)}, (2)$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ dans } (1): & -1,92 + (-42,29) \cdot 0,600 + P_{5-7} = 0 \\
 & -1,92 - 25,3 + P_{5-7} = 0 \\
 & -27,22 + P_{5-7} = 0 \\
 & P_{5-7} = 27,22 \text{ N (T)}.
 \end{aligned}$$

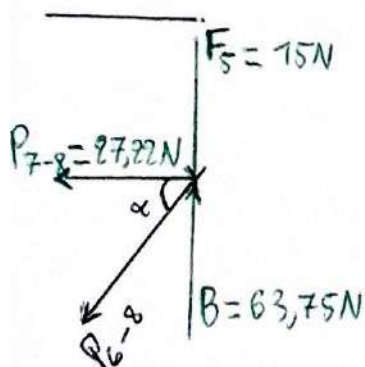
Noeud 7: Noeud en « T »



$$P_{7-6} = -F_4 = -15 \text{ N (C)}$$

$$P_{7-8} = P_{5-7} = 27,22 \text{ N (T)}$$

Noeud 8:



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$-P_{7-8} - P_{6-8} \cos \alpha = 0$$

$$-27,22 - P_{6-8} \cos 53,13 = 0$$

$$-P_{6-8} (0,600) = 27,22$$

$$P_{6-8} = -\frac{27,22}{0,600}$$

$$P_{6-8} = -45,3 \text{ N (C)}$$

TABLEAU RECAPITULATIF

| barres | Longueur (m) | Effort (N) | Sollicitation |
|------------------|--------------|------------|---------------|
| P ₁₋₂ | 3 | -4,69 | Compression |
| P ₁₋₃ | 5 | 7,8 | Traction |
| P ₂₋₅ | 3 | -4,69 | Compression |
| P ₂₋₃ | 4 | -15 | Compression |
| P ₃₋₄ | 3 | -2 | Compression |
| P ₃₋₅ | 5 | 11,0 | Traction |
| P ₄₋₅ | 4 | 0 | - |
| P ₄₋₆ | 3 | -2 | Compression |
| P ₅₋₇ | 3 | 27,22 | Traction |
| P ₅₋₆ | 5 | -42,29 | Compression |
| P ₇₋₈ | 3 | 27,22 | Traction |
| P ₇₋₆ | 4 | -15 | Compression |
| P ₆₋₈ | 5 | -45,3 | Compression |

REMERCIEMENTS

Merci à tous ceux qui m'ont aidé pour l'avancement de cet ouvrage de la statique appliquée je cite d'abord **la personne qui m'a le plus inspiré qui est :**

Ir OTEMAKUMI LOTENGO Merlin (OLM Supreme)

Ensuite Mes encadreurs :

- Ir Ballack (Menakuntima Fegaly)
- Ir Juif KENGA (JK)

Mes enseignants :

- Prof.Dr.Ir KALALA MUANA
- Ir Jules KUNDENGA MASSAMBA
- Ir Ive Utubula
- Ir L'atout MAVULA
- Ir Berry ODIMULA

Mes aîné Scientifique :

- Ir ZANETTI Lelo
- Ir Clément KABEYA
- Ir Olivier KAMANDA SINGA (Olivier Kams)

Et pour terminer je remercie mes amis aussi qui m'ont soutenu vous êtes tellement nombreux et je cite quelques uns :

- Ir NIMI MALUNGU David (KingDav)
- Ir BAKU KHONDE Jahrci
- Ir Michel BETU (L'intégrale)
- Ir MUBALAMA HABAMUNGU Jenov
- Ir BAKWALUFU MILAMBO Manassé
- Ir MADI MUDIMBI Joseph
- Ir Sully Samuel
- Ir TSHIBOLA Maria
- Ir BUKELE Tabitha kevani
- Ir MAZIANDA KALAWA Fidèle (alias Fidor)

Et mon informaticien : - Ir Eliel BOSONGO

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages :

- Ir BTP OTEMAKUMI (OLM suprême). GUIDE DE LA STATIQUE APPLIQUÉE
- Prof.Dr KALALA MUANA. STATIQUE APPLIQUÉE
- Dr. HADJAZI Khamis. RESISTANCE DES MATERIAUX
- H.RENAUD. DESSIN TECHNIQUE
- TERMINALE GÉNIE CIVIL MÉCANIQUE. SYSTÈME RÉTICULÉ

Cours :

- Ir Ive UTUBULA et Ir L'atout MAVULA : Statique Appliquée INBTP/KINSHASA
- Ass Mardochée RAMAZANI et Ass Lucien BUTSANA : Mécanique Rationnelle, INBTP/KINSHASA
- Ir Jules KUNDENGA MASSAMBA, Mécanique des solides déformable(M.S.D), INBTP/KINSHASA
- Ir Gustave CYANYI et Ir Arnault MATUNDU Formateur professionnel Expert, Résistance des Matériaux (RDM)/ YouTube : Guste Tutoriel

Cours D'encadrement :

- Ir Ballack MENAKUNTIMA, Ir Juif KENGA et Ir Berry ODIMULA. Statique Appliquée, INBTP/KINSHASA

"Avec un entraînement dur et acharné même le raté peut dépasser le génie."

**Ir BTP CHIRIMWAMI
KASAMBAKANA KEFA**

Appelé aussi : Ir Peter

Facebook : KEFA CHIRIMWAMI

Numéro : +243 899395678

I.N.B.T.P/2024

TABLE DES MATIERES :

| | |
|---|----|
| Cours et exercices de la statique appliquée..... | 1 |
| Avant-propos..... | 2 |
| Introduction..... | 3 |
| Chapitre 1 : | |
| Première partie : théories et rappels sur les propriétés trigonométriques, mathématiques et physique... .. | |
| | 5 |
| La statique Appliquée, définition et importance... .. | 6 |
| Sortes de Forces... .. | 10 |
| L'appuis... .. | 11 |
| Degré de liberté... .. | 15 |
| Chapitre 1 : | |
| Deuxième partie : Exercices corrigés | |
| Poutres horizontal, charge réparti et calcul des réactions d'appuis | 32 |
| Structure avec appuis simple incliné... .. | 45 |
| Structure à l'axe brisé et les portiques... .. | 54 |
| Structure avec rotule (articulation) et structure en forme d'arc | 76 |
| Poutre Gerber... .. | 96 |

Chapitre 2 :

Calcul des efforts intérieur et le diagramme M,N et T. Partie
théorique... .. 100

Calcul des efforts intérieur partie pratique... ..105

Chapitre 3 : les treillis

Première partie théorique, méthode et principe de calcul... ..
... .. 141

Partie pratique sur le calcul des efforts intérieur... .. 147

Remerciements... ..175

Bibliographie... .. 177