Résumé de Cours – EM1 - Electrostatique – 1/2

Distribution de Charges :

Densité volumique / surfacique de charges : $\boxed{\rho = \frac{dq}{d\tau}}$ en C.m-3 et $\boxed{\sigma = \frac{dq}{dS}}$ en C.m-2

Mise en évidence du Champ Electrique :

Définition : Une distribution de charges produit une modification des propriétés de l'espace que l'on appelle champ électrique $\vec{E}$. On ne peut le caractériser que par son action.

Action sur une particule chargée : Force de Lorentz $\boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{E}}$

Loi de Coulomb entre charges : Loi de Coulomb $\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_{1\to 2}}}$

Expressions du champ électrostatique :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{dE}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\tau}{r^2} \cdot \vec{u}}$ → à intégrer…

Avec $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 u_{SI}$ la permittivité du vide

Remarque : $\vec{B}$ (comme $\vec{E}$) n'est pas défini en un point d'une distribution linéique.

Expressions du POTENTIEL électrostatique :

Expression : $\boxed{dV_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho d\tau}{r}}$ → à intégrer…

Symétries du champ magnétique :

Le champ $\vec{E}$ possède les mêmes symétries que les charges qui lui donnent naissance

Plan de Symétrie : $\begin{cases} P' = sym_\pi(P) \quad \Leftrightarrow \quad \rho' = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{dE} = sym_\pi\left(\overrightarrow{dE}\right) \\ \vec{E} \in \pi_{sym} \end{cases}$ (contenu dans les plans de symétrie, l'inverse de $\vec{B}$)

Plan d'Antisymétrie : $\begin{cases} P' = sym_{\pi^*}(P) \quad \Leftrightarrow \quad \rho' = -\rho \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{dE'} = -sym_{\pi^*}\left(\overrightarrow{dE}\right) \\ \vec{E} \perp \pi_{antisym} \end{cases}$ (orthogonal au plan d'antisymétrie, l'inverse de $\vec{B}$)

Axe de Symétrie de Révolution : $\begin{cases} \text{Le champ ne dépend pas de } \theta : E(r,z) \\ \text{En un point de l'axe, alors : } \vec{E} = E_z(z) \cdot \overrightarrow{u_z} \end{cases}$

Symétrie cylindrique infinie : $\begin{cases} \text{Distribution invariante par translation selon Oz et rotation autour de Oz} \\ \text{Le champ sera radial : } \vec{E} = E_r(r) \cdot \overrightarrow{u_r} \end{cases}$

Circulation du champ électrique : $C = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$

Relation : $\boxed{\begin{cases} C = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\Delta V \\ \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \end{cases}}$ → Circulation NON conservative / INDEPENDANT du chemin

Déf du gradient : Fct tq $dV = \overrightarrow{grad}(V) \cdot \overrightarrow{dl}$

Travail et Energie Potentielle : $\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -q \cdot dV$ $\boxed{\Rightarrow W_A^B = q\left(V_A - V_B\right)}$

On peut définir une énergie potentielle : $\boxed{\begin{cases} E_p = qV \quad \Rightarrow W_A^B = -\Delta E_p \\ \vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p) \end{cases}}$

Résumé de Cours – EM1 - Electrostatique – 2/2

Flux du Champ magnétique :

Théorème de Gauss : $\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$ NON conservation du flux

Conséquences :

- Fluc CONSERVATIF dans une région vide de charges
- Un extremum de potentiel en un point suppose une charge en ce point
- Discontinuité du Champ électrique à la traversée d'une surface : $\boxed{\Delta \overrightarrow{E_{1\to 2}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \overrightarrow{n_{1\to 2}}}$

Application du Théorème de Gauss :

Comme le théorème de Gauss :
- Analyse des invariances et des symétries
- Choix du contour fermé de Gauss
- Application du Théorème

Capacité : $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}}$

Exemples usuels :

- Plan Infini : $\vec{E}(z) = \pm \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \overrightarrow{u_z}$
- Sphère (ext) : $\vec{E}(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$
- Fil Infini : $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \cdot \overrightarrow{u_r}$
- Sphère (int) : $\vec{E}(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} \cdot \overrightarrow{u_r}$

Extension aux cas variable : Equations de Maxwell

Liées au Champ $\vec{B}$:

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \Rightarrow \Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} & Maxwell\ Gauss \\ \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right) = \vec{0} & \Rightarrow C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 & Maxwell\ Faraday \end{cases}$$

Potentiel scalaire : $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad(V)}}$ $(en\ V)$ $\Rightarrow \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\Delta V$

Equation de Poisson : $\boxed{\Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$

Densité volumique d'énergie électrique : $\boxed{u_e(M) = \dfrac{\varepsilon_0}{2} E^2(M)}$ en $J.m^{-3}$

Dipôle électrique :

Définition : $\vec{p} = q \cdot \overrightarrow{AB}$

Potentiel en $1/r^2$: $V_{(r,\theta)} = \dfrac{q \cdot l \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Champ crée en $1/r^3$: $\overrightarrow{E_{(M)}} = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta \cdot \overrightarrow{u_r} + \sin\theta \cdot \overrightarrow{u_\theta}\right)$

Actions subies : Dans un champ $\vec{E}$
- Couple : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{B}$ (aligne avec le champ)
- Force : $F_x \approx \vec{p} \cdot \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial x}$ (idem en y et z)

Si le champ extérieur $\vec{E}$ est uniforme, alors pas de force subie, il ne fait que s'aligner

Energie potentielle : $E_p \approx -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Analogie Electrostatique / Gravitation :

Analogie : $q \Leftrightarrow m$ $\quad \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow -G$ $\quad \vec{E} \Leftrightarrow \vec{G}$

Théorème de Gauss pour la Gravitation : $\oiint \vec{G} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi G M_{int}$