

Thierry Gourieux

[Fomesotra.com](http://Fomesotra.com)  
ça soutra!

Licence

Classes  
prépas

# Cinématique et dynamique classiques du point matériel

Initiation à la mécanique de Newton



ellipses

Références sciences

# Cinématique et dynamique classiques du point matériel

Initiation à la mécanique de Newton

Thierry Gourieux



# Collection Références sciences

---

dirigée par Paul de Laboulaye  
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

*Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur [www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)*



ISBN 9782340-064324  
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022  
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

## AVANT-PROPOS

Cet ouvrage de cinématique et dynamique du point matériel est conçu à l'usage d'un public post-baccalauréat, des étudiants de première et deuxième année universitaire ou de classes préparatoires.

En dépit des bouleversements que la physique a connus au cours du siècle dernier, l'apprentissage approfondi de la mécanique du point matériel de Newton reste incontournable. La raison en est que cette mécanique classique manie de nombreux concepts toujours présents dans les domaines de la physique quantique, relativiste ou encore de la thermodynamique statistique ou classique. Elle est aussi le socle sur lequel reposent la mécanique du solide et celle des fluides.

Cet aspect fondamental de la mécanique classique est pris en compte ici en introduisant et en développant les notions physiques et les outils mathématiques qui les accompagnent au travers d'un récit et d'une symbolique que j'espère d'abord simple et didactique, bien qu'une lecture attentive et active de la part du lecteur ou de la lectrice soit requise. En particulier, chaque chapitre est agrémenté de compléments ainsi que d'exercices dont la résolution est nécessaire pour pouvoir pénétrer le vocabulaire et le mode de pensée de cette mécanique classique. Tous ces exercices sont corrigés en fin de volume.

L'indispensable partie mathématique fait l'objet de cinq annexes dont la lecture est préconisée au moment voulu. En revanche, les fonctions usuelles et les notions de base de la trigonométrie sont supposées déjà connues.

Au-delà de l'apprentissage, la route suivie a un double but : c'est en premier lieu celui de résoudre le problème du mouvement d'une planète autour de son soleil. Puis, une fois ce problème à deux corps résolu, il s'agit d'étudier la dynamique des corps en mouvement observés depuis une Terre en rotation sur elle-même. Ces préoccupations, qui constituent les trois derniers chapitres de cet ouvrage, ont joué un rôle majeur lors de la construction de la dynamique newtonienne.

Dans ses détails, le plan suivi est très classique, du moins en France, et consiste d'abord à séparer la description du mouvement d'un point matériel (cinématique : première partie) des raisons pour lesquelles ce point matériel adopte tel ou tel mouvement (dynamique : deuxième partie). Cependant, ce plan n'est pas rigide et on peut jusqu'à un certain point s'y promener de différentes façons. En particulier, il est possible de repousser l'étude et l'emploi des systèmes de coordonnées autres que les coordonnées cartésiennes en évitant les sections, compléments et exercices

qui leurs sont dédiés pour y revenir plus tard, juste avant le chapitre 15 de dynamique.

Les chapitres 1 à 4 et les annexes 1 et 2 forment le b-a-ba de la cinématique classique. Y sont introduites certaines des grandeurs physiques fondamentales de la mécanique (coordonnées, vitesses, accélérations) avec les mathématiques qui les accompagnent. Le chapitre 5 est dédié à la question des mouvements à accélération centrale, et le chapitre 6, qui est autonome, porte sur la description intrinsèque des courbes et le trièdre de Serret-Frenet. Le chapitre 7, qui clôt la partie cinématique et qui traite des changements de référentiels, peut être repoussé jusqu'à l'étude des référentiels non galiléens.

Le chapitre 8 ouvre à la dynamique du point matériel et a pour but d'appréhender les raisons de l'existence des principes qui la soutiennent à l'aide d'un aperçu lacunaire des premières théories du mouvement des objets. Ces principes sont ensuite exposés au chapitre 9 : on y discute des indispensables référentiels galiléens, de l'inertie des corps et, en complément, des grandeurs physiques, de leurs dimensions et de leurs unités.

Les causes modificatrices du mouvement que sont les forces sont discutées et classées au chapitre 10. En particulier, la théorie newtonienne de la gravitation y est exposée et on y opère la distinction entre masse grave et masse inerte.

Le chapitre 11 quant à lui est technique : sur la base d'un exemple non trivial, on y apprend à résoudre de façon méthodique le problème du mouvement d'un point matériel, c'est-à-dire à trouver ses trajectoires possibles étant données les forces qui agissent sur lui et les conditions initiales de mouvement que possédait ce point matériel avant que ces forces n'entrent en jeu.

Les chapitres 12, 13 et 14 sont centrés sur l'étude et l'utilisation des quantités énergétiques scalaires que sait définir la dynamique : énergie cinétique, travail, énergie potentielle et énergie mécanique. La notion d'intégrale première y est mise en valeur et on insiste au chapitre 13 sur une méthode graphique qui permet de résoudre de façon qualitative le problème du mouvement d'un point matériel dans les cas à une seule dimension (ou un seul degré de liberté) ; méthode qui peut s'étendre dans certains cas à deux ou trois dimensions, en particulier à celui du mouvement d'une planète autour de son soleil.

Les notions de moment cinétique d'un point matériel et de moment d'une force viennent compléter l'aspect énergétique et font l'objet du chapitre 15. Le chapitre 16 initie à la dynamique de plusieurs points matériels interagissant entre eux avec les notions de quantité de mouvement et de centre de masse.

Tous les ingrédients nécessaires à la résolution du problème à deux corps sont alors à notre disposition et ils sont utilisés à des degrés divers au chapitre 17.

Vient enfin la question des référentiels non galiléens et des forces inertielles qui sont le sujet des chapitres 18 et 19 où l'on s'intéresse en particulier à la déviation vers l'Est des corps en chute libre et au pendule de Foucault. Dans les compléments du dernier chapitre, l'ingénieuse expérience du seau de Newton est relatée et discutée, de même que celle de l'homme qui tombe d'un toit, imaginée par Einstein. Toutes deux ouvrent à la réflexion sur une autre physique du mouvement...

Cet ouvrage est le fruit d'une longue interaction avec les étudiants de première année universitaire des filières physique/chimie et mathématique/physique. Mais il ne serait pas ce qu'il est sans l'aide et le soutien que mes amis physiciens Bertrand Berche, Dragi Karevski et Raphaël Leone m'ont apportés tout au long de sa rédaction, sans les discussions engagées avec eux, leurs remarques et leurs critiques toujours stimulantes. Qu'ils en soient ici chaleureusement remerciés.

## PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISÉS

Lettres grecques :

<i>Symbole</i>	<i>Dénomination</i>
$\alpha$	<i>alpha</i>
$\beta$	<i>bêta</i>
$\gamma$	<i>gamma</i>
$\Delta$	<i>delta (majuscule)</i>
$\varepsilon$ ou $\epsilon$	<i>epsilon</i>
$\zeta$	<i>zêta</i>
$\theta$	<i>thêta</i>
$\lambda$	<i>lambda</i>
$\mu$	<i>mu</i>
$\nu$	<i>nu</i>
$\pi$	<i>pi</i>
$\rho$	<i>rho</i>
$\tau$	<i>tau</i>
$\varphi$	<i>phi</i>
$\phi$	<i>phi (variante)</i>
$\omega$	<i>oméga</i>

Symboles mathématiques :

<i>Symbole</i>	<i>Signification</i>
$:=$	<i>Égalité tenant lieu de définition</i>
$\doteq$	<i>Égalité valable uniquement pour les courbes solutions des équations du mouvement</i>
$\cong$	<i>À peu près égal à</i>
$\forall$	<i>Quel que soit</i>
$\partial$	<i>Symbole de dérivée partielle</i>
$\wedge$	<i>Produit vectoriel</i>
$\cdot$	<i>Produit scalaire</i>
$\vec{\nabla}f$	<i>Gradient de la fonction <math>f</math></i>
$\square$	<i>Fin de démonstration</i>
$\dot{f}$	<i>Dérivée de la fonction <math>f</math> par rapport au temps</i>

*Nota Bene* : dans un souci de simplicité, le symbole «  $\doteq$  » ne sera utilisé que lorsque cela sera jugé nécessaire. Par exemple, en l'indiquant seulement au début d'un calcul.

# TABLE DES MATIÈRES

## PREMIÈRE PARTIE CINÉMATIQUE CLASSIQUE DU POINT MATÉRIEL

<b>1. RÉFÉRENTIELS, COORDONNÉES ET TRAJECTOIRES</b>	<b>15</b>
1. Introduction.....	15
2. Référentiel spatio-temporel.....	16
3. Coordonnées spatiales.....	18
4. Trajectoires.....	20
Compléments et exercices : C1 – C14.....	22
<b>2. DESCRIPTION VECTORIELLE DU MOUVEMENT</b>	<b>29</b>
5. Rayon vecteur ou vecteur position.....	29
6. Différentes bases vectorielles adaptées aux différents systèmes de coordonnées.....	30
Compléments et Exercices : C15 – C20.....	33
<b>3. VECTEURS VITESSE ET ACCÉLÉRATION</b>	<b>37</b>
7. Dérivées : notation différentielle et dérivée temporelle.....	37
8. Vecteur vitesse.....	38
9. Vecteur accélération.....	40
10. Le vecteur vitesse en coordonnées polaires.....	41
11. Le vecteur accélération en coordonnées polaires.....	44
Compléments et exercices : C21 – C26.....	44
<b>4. MOUVEMENTS SIMPLES</b>	<b>49</b>
12. Mouvement rectiligne.....	49
13. Mouvement circulaire.....	50
14. Mouvement hélicoïdal.....	52
Compléments et exercices : C27 – C29.....	54
<b>5. MOUVEMENT À ACCÉLÉRATION CENTRALE</b>	<b>57</b>
15. Définition du mouvement à accélération centrale.....	57
16. Le mouvement à accélération centrale est plan.....	57
17. Loi des aires.....	58

18. Formule de Binet.....	60
Compléments et exercices : C30 – C32.....	61
<b>6. ABCISSE CURVILIGNE ET TRIÈDRE DE SERRET – FRENET</b>	<b>63</b>
19. Élément d’arc de courbe.....	63
20. Abscisse curviligne .....	64
21. Le trièdre de Serret-Frenet.....	65
22. Aspects géométriques.....	66
23. Courbure et torsion, formules de Serret-Frenet.....	68
24. Vecteurs vitesse et accélération dans le trièdre de Serret- Frenet.....	70
25. Exemple du mouvement hélicoïdal circulaire uniforme.....	72
Compléments et exercices : C33 – C38.....	73
<b>7. CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS</b>	<b>77</b>
26. Introduction au problème .....	77
27. Loi de transformation des positions.....	78
28. Loi de transformation des vitesses.....	78
29. Vecteur rotation instantanée et expression vectorielle de la vitesse d’entraînement .....	80
30. Opération de dérivation dans un référentiel donné : formule de Bour.....	82
31. Loi de transformation des accélérations.....	83
32. Inversion des lois de transformation.....	85
Compléments et exercices : C39 – C41.....	86

## DEUXIÈME PARTIE

### DYNAMIQUE CLASSIQUE DU POINT MATÉRIEL

<b>8. ORIGINE DES PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE</b>	<b>91</b>
33. Introduction.....	91
34. Généralités sur la physique du mouvement d’Aristote.....	92
35. Les causes du mouvement des objets terrestres dans la physique aristotélicienne.....	93
36. Le mouvement des objets célestes dans la physique aristotélicienne et la question de la rotation de la Terre sur elle-même.....	97
37. De Copernic à Newton.....	100
Compléments et exercices : C42.....	107

<b>9. PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE</b>	<b>109</b>
38. Principe d'inertie (première loi de Newton) et référentiels galiléens.....	109
39. Principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton) :	
équations du mouvement .....	111
40. Principe des actions réciproques (troisième loi de Newton).....	112
Compléments et exercices : C43 – C44.....	114
<b>10. FORCES ET MASSES</b>	<b>119</b>
41. Forces et principe de superposition.....	119
42. Forces fondamentales.....	119
43. Forces fondamentales : interaction gravitationnelle entre deux	
corpuscules .....	120
44. Notion de champ : champ gravitationnel.....	121
45. Forces fondamentales : interaction électrostatique ou coulombienne.....	122
46. Forces fondamentales : comparaison des interactions gravitationnelles	
et coulombiennes .....	123
47. Forces décrivant l'interaction entre les sources d'un champ	
et un corpuscule test.....	124
48. Forces effectives.....	125
49. Conclusion pratique sur la grandeur physique force.....	129
50. Masse inertielle et masse grave.....	129
Compléments et exercices : C45 – C53.....	131
<b>11. APPLICATION DU SECOND PRINCIPE DE LA DYNAMIQUE</b>	<b>143</b>
51. Procédure à suivre.....	143
52. Un exemple d'application.....	144
53. Résolution des équations.....	146
54. Étude plus précise de la trajectoire.....	150
55. Commentaires .....	152
Compléments et exercices : C54 – C59.....	154
<b>12. TRAVAIL ET ÉNERGIE CINÉTIQUE</b>	<b>159</b>
56. Travail réalisé par une force, puissance instantanée.....	159
57. Un exemple de calcul du travail réalisé par une force.....	161
58. Énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique.....	163
59. Applications pratiques les plus courantes du théorème	
de l'énergie cinétique.....	164
Compléments et exercices : C60 – C64.....	165

<b>13. ÉNERGIE POTENTIELLE ET ÉNERGIE MÉCANIQUE</b>	<b>167</b>
60. Énergie potentielle.....	167
61. Énergie mécanique et théorème de l'énergie mécanique.....	169
62. Transformation de l'énergie : exemple du ressort vertical.....	170
63. Problèmes de dynamique à une dimension ou à un degré de liberté.....	173
64. Un exemple de l'utilisation d'une courbe d'énergie potentielle et du théorème de l'énergie mécanique à une dimension.....	175
65. L'énergie mécanique en tant qu'intégrale première obtenue le long de la trajectoire.....	181
66. Énergie mécanique : conditions initiales et hypersurfaces isoénergétiques .....	182
Compléments et exercices : C65 – C74.....	183
<b>14. ÉQUILIBRE DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL</b>	<b>187</b>
67. Équilibre.....	187
68. Vocabulaire des situations d'équilibre.....	189
69. Recherche de la stabilité de l'équilibre dans les problèmes à un seul degré de liberté.....	190
Compléments et exercices : C75 – C76.....	192
<b>15. MOMENT CINÉTIQUE</b>	<b>195</b>
70. Moment d'une force.....	195
71. Moment cinétique et théorème du moment cinétique.....	197
72. Moment cinétique et rotations.....	198
73. Moment cinétique et forces centrales.....	200
Compléments et exercices : C77 – C81.....	201
<b>16. SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS : QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET CENTRE DE MASSE</b>	<b>205</b>
74. Quantité de mouvement et théorème associé.....	205
75. Démonstration inverse.....	207
76. Reformulation du principe fondamental de la dynamique.....	208
77. Équation de la dynamique pour les corps de masse variable.....	209
78. Centre de masse et théorème du centre de masse.....	210
Compléments et exercices : C82 – C87.....	212
<b>17. LE PROBLÈME DE KEPLER</b>	<b>215</b>
79. Lois de Kepler.....	215
80. Le problème à deux corps ou problème de Kepler.....	215

81. Réduction du problème à deux corps en un problème à un seul corps fictif.....	216
82. Application du théorème du moment cinétique : loi des aires.....	220
83. Trajectoire : formule de Binet.....	220
84. Une autre constante du mouvement : l'énergie mécanique.....	223
85. La troisième loi de Kepler.....	227
Compléments et exercices : C88 – C89.....	229
<b>18. DYNAMIQUE EN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN</b>	<b>233</b>
86. Le principe fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen et la loi de transformation des forces : forces inertielles.....	233
87. Le poids des corps sur une planète en rotation sur elle-même ou la direction du fil à plomb.....	235
88. Déviation de la chute libre vers l'Est.....	238
89. Comment savoir si un référentiel est galiléen ou pas ?.....	246
90. Énergie mécanique et moment cinétique en référentiel non galiléen.....	247
Compléments et exercices : C90 – C93.....	249
<b>19. LE PENDULE TOURNANT ET LE PENDULE DE FOUCAULT</b>	<b>253</b>
91. Le pendule tournant : solution pour les petites oscillations.....	253
92. Trajectoires pour les conditions initiales du pendule de Foucault.....	258
93. Le pendule de Foucault.....	264
Compléments et exercices : C94 – C96.....	266

## ANNEXES

<b>1. RAPPELS DE CALCUL VECTORIEL EN DIMENSION 3</b>	<b>279</b>
A1. Vecteurs.....	279
A2. Addition des vecteurs, multiplication d'un vecteur par un nombre.....	279
A3. Produit scalaire.....	279
A4. Bases et composantes.....	280
A5. Produit vectoriel.....	282
A6. Produit mixte.....	283
A7. Espaces et sous-espaces vectoriels, dimensions.....	284

<b>2. DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES</b>	<b>285</b>
A8. Dérivée d'une fonction.....	285
A9. Interprétation de $f'$ et tangente à la fonction $f$ en $x$ .....	286
A10. Formule de Taylor : développements limités.....	286
A11. Notation différentielle, différentielle d'une fonction.....	287
A12. Dérivée et différentielle d'un vecteur : bases fixes.....	288
A13. Cas des bases locales.....	290
A14. Dérivée d'un vecteur de norme constante.....	290
<b>3. INTÉGRALES ET PRIMITIVES</b>	<b>291</b>
A15. Intégrales.....	291
A16. Propriétés des intégrales.....	292
A17. Primitives.....	292
A18. Calcul des primitives.....	294
<b>4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b>	<b>297</b>
A19. Équations différentielles.....	297
A20. Caractérisation d'une équation différentielle.....	297
A21. Équations différentielles d'ordre 1 séparables.....	298
A22. Théorème général sur les équations différentielles linéaires appliqué aux équations d'ordre 1.....	299
A23. Équations différentielles d'ordre 2, linéaires, à coefficients constants...	301
A24. Espace vectoriel des fonctions solutions à une équation différentielle linéaire homogène.....	303
A25. Constantes d'intégration et conditions initiales.....	304
<b>5. CHAMPS SCALAIRES ET GRADIENT</b>	<b>307</b>
A26. Champs scalaires et équipotentielles.....	307
A27. Simplification des notations.....	308
A28. Champs scalaires : différentielle.....	308
A29. Champs scalaires : gradient.....	309
A30. Champs scalaires : valeurs stationnaires.....	310
A31. Champs scalaires : équipotentielles et gradient.....	310
<b>SOLUTIONS DES EXERCICES</b>	<b>313</b>
<b>PETITE BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>395</b>
<b>INDEX</b>	<b>397</b>

PREMIÈRE PARTIE

**CINÉMATIQUE CLASSIQUE**  
**DU POINT MATÉRIEL**



## CHAPITRE 1

# RÉFÉRENTIELS COORDONNÉES ET TRAJECTOIRES

**1. Introduction.** La *cinématique* s'intéresse à la description mathématique du mouvement des objets sans se préoccuper des causes qui les animent.

**Point matériel.** Nous étudierons ici la cinématique classique du *point matériel*. Celle d'un objet réel est un peu plus complexe car il faut aussi pouvoir préciser son orientation, ses déformations éventuelles, voire ses modifications internes tout au long du mouvement observé.

Un point matériel est un grain de matière modélisé par un point géométrique – objet mathématique sans dimension que l'on peut définir comme l'intersection de deux courbes – auquel est affecté un coefficient : la masse, qui prendra tout son sens en dynamique.

Ce point matériel ne peut pas être animé d'un mouvement de rotation sur lui-même en raison de la dimension 0 qui lui est attribuée. Ce type de mouvement se modélisera donc en associant plusieurs points matériels entre eux qui formeront l'objet en rotation.

Assimiler un objet à un seul point matériel pour étudier son mouvement peut être justifié ou non : cela dépend à la fois du type de mouvement que l'on souhaite décrire et des tailles caractéristiques de l'objet par rapport à celles de ce mouvement. Par exemple, si on s'intéresse au mouvement orbital de la Terre autour du Soleil, on peut assimiler la Terre à un point matériel avec une bonne précision puisque son rayon moyen ( $6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ) est suffisamment petit devant le rayon moyen de l'orbite terrestre ( $1.49 \times 10^{11} \text{ m}$ ). En revanche, l'approximation ne tient plus si on souhaite étudier le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même.

**Nature de l'espace et du temps physiques.** Pour décrire le mouvement d'un point matériel, il faut pouvoir associer les notions de distance et de durées à des espaces mathématiques qui modélisent l'espace et le temps physiques.

Il est admis ici que nous possédons une connaissance empirique de ces notions : l'espace physique est constitué de trois dimensions spatiales (longueur, largeur et hauteur) et la géométrie euclidienne y est opérante<sup>1</sup>. La mesure des distances s'y

---

<sup>1</sup> À ce sujet : chapitre 1 du *Cours de physique de Berkeley* (vol. 1 – mécanique), M.A. Ruderman, C. Kittel, W.D. Knight, Ed. Dunod, 2001.

réalise pratiquement à l'aide d'une règle étalon (ancienne ou moderne comme les télémètres lasers).

Le temps quant à lui paraît s'écouler régulièrement, indépendamment de toute chose : on dit qu'il est *absolu*. On le représente par un paramètre  $t$  qui parcourt la droite des réels. Le temps ne s'observe pas en soi : il est toujours mesuré de façon indirecte en construisant par exemple des horloges au sein desquelles un phénomène périodique a lieu ; et c'est la détection - spatiale pour les horloges classiques, électronique pour les horloges quantiques d'aujourd'hui - de cette régularité qui fournira l'étalonnage de la droite temporelle.

Espace euclidien et temps absolu sont les hypothèses de la cinématique classique. Elles fournissent une description correcte des mouvements observés pour des vitesses faibles devant la vitesse de la lumière et dans l'approximation dite des champs gravitationnels faibles. Le fait expérimental que la vitesse de la lumière dans le vide ne soit pas infinie et qu'elle prenne le statut d'une constante fondamentale de la physique a initié les théories relativistes<sup>1</sup> (1905-1916), et on parle aujourd'hui d'espace-temps-matière.

Par ailleurs, la théorie quantique (1900-1926) donne à la notion classique de mouvement une interprétation statistique<sup>2</sup>.

Les définitions actuelles des unités de temps et de longueur témoignent de ces bouleversements qui ont imprégné la physique aux débuts du XX<sup>e</sup> siècle. L'unité internationale de temps est définie à l'aide de la physique atomique : la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. L'unité de longueur, le mètre, est la distance parcourue dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde.

**2. Référentiel spatio-temporel.** On dit qu'un objet est en mouvement lorsque sa position par rapport à d'autres objets change au cours du temps. Le besoin d'objets de référence pour décrire le mouvement d'un objet tiers est un constat expérimental : une voiturette fixée sur un manège en rotation par rapport au sol terrestre est aussi

---

<sup>1</sup> En relativité restreinte (c'est-à-dire en l'absence de champ gravitationnel), l'espace physique est un espace-temps à 4 dimensions : le temps en effet n'est pas absolu ; les durées écoulées et les distances mesurées dépendent du référentiel (voir la section 2) vis-à-vis duquel on décrit le mouvement. La présence de matière (relativité générale) déforme cet espace-temps et la géométrie euclidienne n'y est plus opérante.

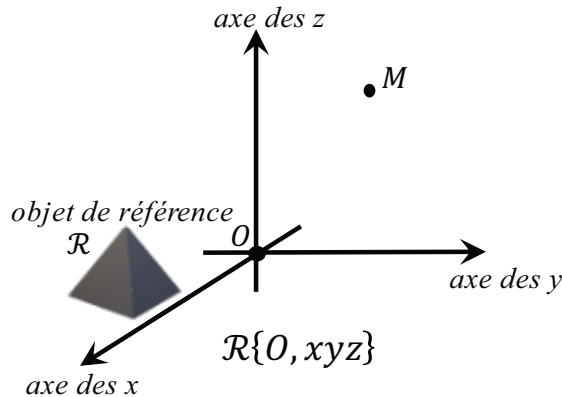
<sup>2</sup> En mécanique quantique, la position  $x$  d'un point matériel de masse  $m$  et sa vitesse  $v$  ne sont définies qu'à des incertitudes  $\Delta x$  et  $\Delta v$  près satisfaisant à chaque instant l'inégalité de Heisenberg (1926) :  $\Delta x \Delta v \geq \hbar/2m$  où  $\hbar$  («  $h$  barre ») est la constante de Planck (1900),  $h = 6.023 \times 10^{-34} J.s$ , divisée par  $2\pi$ . La théorie quantique fut construite sur la base de faits expérimentaux relevant des propriétés physiques des corps, de la structure interne des atomes, et de leurs interactions avec la lumière.

en rotation ; mais du point de vue du manège elle est au repos. Et le sol terrestre est en rotation par rapport au manège ou à la voiturette.

Une fois l'objet de référence adopté, décrire le mouvement d'un point matériel consiste à pouvoir le situer relativement à cet objet, à chaque instant. L'objet de référence et le dispositif mis en place pour pouvoir réaliser ces exigences constitueront un *référentiel spatio-temporel*.

Du point de vue spatial, on choisit d'abord un point géométrique  $O$  fixe par rapport à l'objet de référence ; ce point fera office d'origine. Puis, on choisit 3 axes fixes également (non parallèles entre eux et non coplanaires), qui passent par  $O$ , et qui vont permettre de repérer le point matériel  $M$  vis-à-vis de  $O$ . Le plus simple est de choisir ces axes perpendiculaires entre eux : le premier sera dénommé axe  $Ox$ , le second  $Oy$ , le troisième  $Oz$ . Ces 3 axes sont orientés et supposés être étalonnés à l'unité de mesure des distances.

Ce faisant, on dira que l'objet de référence  $\mathcal{R}$  et le point  $O$  accompagné de ses 3 axes primaires forment le référentiel spatial  $\mathcal{R}\{O, xyz\}$  par rapport auquel sera décrite la position de  $M$ .



**Figure 1.** Le référentiel spatial  $\mathcal{R}\{O, xyz\}$ . En munissant ce référentiel d'une horloge, on obtient un référentiel spatio-temporel dont l'utilité sera de pouvoir situer à chaque instant le point matériel  $M$  par rapport à  $O$ .

Il faut maintenant introduire une référence temporelle dans cette construction afin de pouvoir dater les différentes positions du point  $M$ . Cette référence temporelle est universelle, indépendante du référentiel spatial, puisque nous avons opté pour un temps absolu. En munissant le référentiel spatial d'une horloge, on aura ainsi construit un référentiel spatio-temporel  $\mathcal{R}\{O, xyz; t\}$  qui sera le plus souvent appelé : référentiel  $\mathcal{R}$ . Un référentiel différent sera noté  $\mathcal{R}'\{O', x'y'z'; t\}$  ou encore

$\mathcal{R}'$  : le « prime » indiquant que l'objet de référence a changé, ainsi que l'origine et les axes de référence... mais pas le temps<sup>1</sup>.

**3. Coordonnées spatiales.** On donne le nom de *coordonnées* aux nombres qui servent à situer un point  $M$  au sein d'un référentiel.

**Coordonnées cartésiennes.** Donnons-nous 3 nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  que nous appellerons *coordonnées cartésiennes* du point  $M$  relativement au référentiel  $\mathcal{R}\{O, xyz ; t\}$ . Ces coordonnées permettront de situer  $M$  de la façon suivante : depuis  $O$ , on se déplace de  $x$  fois la longueur unité le long de l'axe  $Ox$ , puis de  $y$  fois parallèlement à l'axe  $Oy$ , enfin de  $z$  fois parallèlement à l'axe  $Oz$  : le point  $M$  est là (figure 2).

Afin de pouvoir repérer n'importe quel point de l'espace par ce moyen, chacune des coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  doit pouvoir varier dans l'intervalle  $] -\infty, +\infty[$ . On a coutume d'appeler  $x$  l'*abscisse* du point  $M$ ,  $y$  son *ordonnée* et  $z$  sa *cote*.

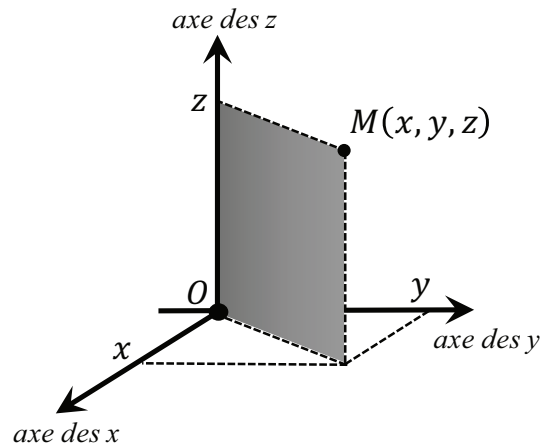


Figure 2. Coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  du point  $M$ .

**Coordonnées sphériques.** La façon qui vient d'être adoptée pour connaître la position du point  $M$  au sein du référentiel  $\mathcal{R}$  n'est pas la seule. On aurait pu décider par exemple de repérer ce point par 3 autres nombres  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  en procédant de la façon suivante : depuis  $O$ , on se déplace de  $r$  fois la longueur unité le long de l'axe  $Oz$  ; puis on effectue une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oy$  dans le plan  $zOx$  ; on effectue ensuite une deuxième rotation d'angle  $\varphi$  autour de l'axe  $Oz$  parallèlement au plan  $xOy$  : le point  $M$  est là (figure 3).

<sup>1</sup> On peut quand même se permettre une désynchronisation, c'est-à-dire un nouveau temps  $t' = t + \tau$  où  $\tau$  est une durée constante.

Cette autre façon de procéder est équivalente à la première puisque, au bout du compte, nous avons pu situer le point  $M$  dans l'espace relativement au référentiel  $\mathcal{R}$ . Les 3 nombres  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  sont appelés *coordonnées sphériques* du point  $M$ . Pour pouvoir repérer n'importe quel point à l'aide de ces 3 nouveaux nombres et pour que la correspondance soit bi-univoque, c'est à dire pour qu'à un point  $M$  donné corresponde un unique triplet  $(r, \theta, \varphi)$ , on doit restreindre leur domaine de variation :  $r$  est choisi positif dans l'intervalle  $[0, +\infty[$  et symbolise la distance qui sépare l'origine  $O$  du point  $M$ . L'angle  $\theta$ , dénommé *colatitude*, est l'angle que fait la droite  $(OM)$  avec l'axe  $Oz$  ; il varie dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . L'angle  $\varphi$ , dénommé *longitude*, est l'angle que fait le plan  $(Oz, (OM))$  avec l'axe  $Ox$ , il varie dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ .

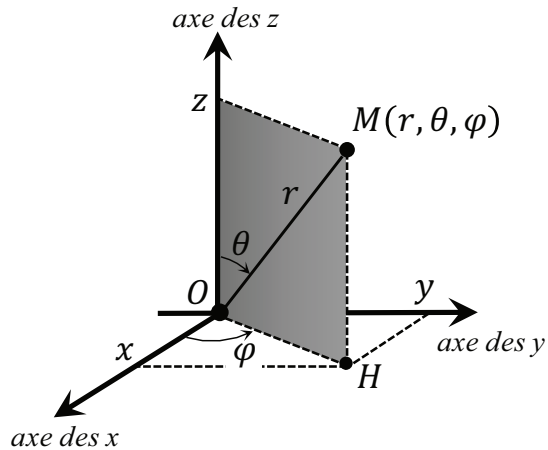


Figure 3. Coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  du point  $M$ .

Des relations mathématiques permettent de passer des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  du point  $M$  à ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  et *vice versa*. En faisant un peu de géométrie, on démontre les formules suivantes à l'aide de la figure 3 ci-dessus (voir le **C5**) :

$$x = r \sin\theta \cos\varphi ; \quad y = r \sin\theta \sin\varphi ; \quad z = r \cos\theta$$

**Autres systèmes de coordonnées.** Il existe un nombre indéfini de systèmes de coordonnées : elliptiques, hyperboliques, obliques, etc... Du point de vue pratique, on se doit de connaître les 4 systèmes de coordonnées les plus courants : coordonnées cartésiennes, sphériques et cylindriques (définies au **C4**) pour le mouvement dans l'espace, ainsi que les coordonnées polaires (définies au **C3**) pour le mouvement dans un plan.

Le choix d'un système de coordonnées est souvent guidé par ce que l'on appelle la symétrie du problème : si, par exemple, il existe un axe de symétrie, alors il sera

bienvenu d'utiliser des coordonnées cylindriques, car la description du mouvement s'en trouvera plus claire et les calculs à réaliser plus simples que si l'on avait fait un autre choix de coordonnées. De même, s'il existe une symétrie par rapport à un point (un centre de symétrie), ce sont les coordonnées sphériques qu'il sera préférable d'utiliser. En l'absence de toute symétrie visible, on recommande souvent de choisir les coordonnées cartésiennes.

**Avertissements.** Les coordonnées du point matériel sont appelées à dépendre du temps  $t$ . Ainsi, si le choix s'est porté sur les coordonnées cartésiennes, on devrait écrire :

$$x = f(t) ; y = g(t) ; z = h(t)$$

où  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des fonctions de  $t$ . Toutefois, l'usage est très souvent pris en physique d'employer une notation abusive en omettant les fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et en écrivant à la place :  $x = x(t)$  ;  $y = y(t)$  ;  $z = z(t)$  ; c'est-à-dire que l'on assigne à la fonction la même lettre que sa valeur à l'instant  $t$ .

On prend aussi l'habitude de ne pas écrire la dépendance temporelle de ces coordonnées, mais d'écrire :  $x$  ;  $y$  ;  $z$ , où il est sous-entendu que ces coordonnées dépendent du temps. Sauf mention contraire, on devra donc toujours considérer que  $(x, y, z)$  sont les coordonnées instantanées (c'est-à-dire à l'instant  $t$ ) du point  $M$ .

**4. Trajectoires.** Dans son mouvement au cours du temps, le point matériel  $M$  passe par une succession de points géométriques fixes<sup>1</sup> du référentiel  $\mathcal{R}$  qui forment une courbe appelée *trajectoire* du point  $M$  (figure 4). Cette courbe est caractérisée par une ou plusieurs relations existant à chaque instant entre les coordonnées de ce point : ce sont les *équations de la trajectoire* ou de la courbe. Connaître la trajectoire suivie par le point  $M$ , c'est connaître la ou les relations qui relient les coordonnées de ce point entre elles.

**Exemple à deux dimensions.** En coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , l'équation d'une trajectoire rectiligne est :  $y = ax + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux constantes. En coordonnées polaires (C3)  $(r, \theta)$ , cette même trajectoire sera déterminée par l'équation :  $r(\sin\theta - a \cos\theta) = b$  qui relie  $r$  et  $\theta$  à chaque instant.

**Exemples à trois dimensions.** En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , les deux équations :  $y = ax + b$  et  $z = cx + d$ , où  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sont des constantes, forment les équations d'une trajectoire rectiligne.

En coordonnées cylindriques (C4)  $(\rho, \varphi, z)$ , les deux équations  $\rho = R$  et  $z = A\varphi$ , où  $R$  et  $A$  sont deux constantes, sont les équations d'une hélice circulaire.

---

<sup>1</sup> Le point géométrique fixe  $P$  du référentiel qui coïncide à l'instant  $t$  avec le point matériel  $M$  en mouvement est appelé *point coïncident* (figure 4).

Les trajectoires possibles d'un point matériel se rangent dans trois grandes classes : les trajectoires ou courbes rectilignes, c'est-à-dire les droites ; les trajectoires ou courbes planes, c'est-à-dire les courbes qui sont entièrement contenues dans un plan ; les trajectoires ou *courbes gauches*, c'est-à-dire les courbes qui ne sont pas planes.

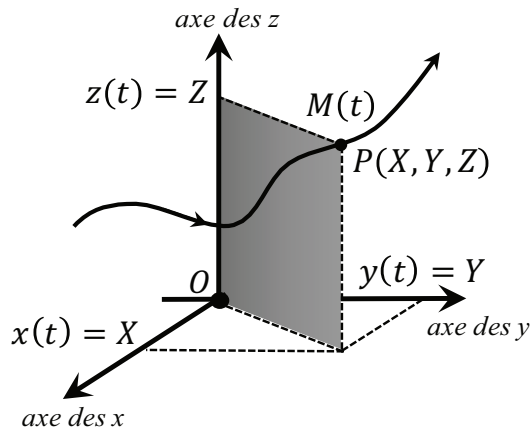
**Équations paramétriques ou horaires de la trajectoire.** Dans les exemples précédents, le temps  $t$  n'apparaissait pas explicitement. En effet, il n'est pas nécessaire de connaître  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  [ou bien  $r(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $\varphi(t)$ , etc...] pour obtenir la trajectoire suivie par le point  $M$  puisqu'il suffit de connaître les relations qui existent entre  $x$ ,  $y$  et  $z$  [ou bien  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ , etc...]. Toutefois, une description complète du mouvement nécessite de savoir de quelle façon le point  $M$  parcourt cette trajectoire au cours du temps. La connaissance de  $x$ ,  $y$  et  $z$  [ou bien  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ , etc...] en fonction du temps est alors indispensable.

Les relations qui donnent l'expression des coordonnées du point  $M$  en fonction du temps sont dénommées *équations paramétriques* (le paramètre est le temps  $t$ ) ou *horaires de la trajectoire*. Par exemple, les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x = v t \\ y = a v t + b \end{cases}$$

où  $a, b, v$  sont des constantes, sont les équations paramétriques de la trajectoire du point  $M$  de coordonnées cartésiennes  $(x(t), y(t))$ . Si on élimine le temps de ces équations horaires, on obtient l'équation de la trajectoire :  $y = a x + b$ .

Enfin, d'après la connaissance empirique que nous en avons, le paramètre temps ne peut que croître. Cela impose une orientation naturelle à la trajectoire qui correspond au sens de parcours selon lequel le point matériel décrit cette courbe (figure 4).



**Figure 4.** La trajectoire orientée du point  $M$  et sa coïncidence à l'instant  $t$  avec le point géométrique fixe  $P$  du référentiel  $\mathcal{R}\{O, xyz ; t\}$ .

## Compléments et exercices du chapitre 1

**C1. Référentiels équivalents.** Dans la construction de notre référentiel à la section 2, le choix de l'origine  $O$  était arbitraire pourvu que ce point origine soit fixe vis-à-vis de l'objet de référence  $\mathcal{R}$ . Les axes primaires fixes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  ont eux aussi été choisis de façon arbitraire mais orthogonaux entre eux.

Le choix d'un autre point origine  $A$  fixe par rapport à l'objet de référence et de trois autres axes fixes, non parallèles entre eux et non coplanaires  $Ax_1$ ,  $Ax_2$  et  $Ax_3$  formerait de toute évidence un référentiel  $\mathcal{R}\{A, x_1x_2x_3 ; t\}$  tout aussi valable que le référentiel  $\mathcal{R}\{O, xyz ; t\}$  pour décrire le mouvement d'un point matériel vis-à-vis de l'objet de référence. En effet, de façon générale, tant que l'objet de référence n'a pas été remplacé par un autre objet de référence en mouvement par rapport au premier, la courbe suivie par le point matériel sera la même ; simplement, elle sera décrite de façon différente. On dira donc de ces deux référentiels qu'ils sont équivalents.

Avec la philosophie adoptée à la section 2, on peut convenir d'adopter  $\mathcal{R}\{O, xyz ; t\}$  comme le référentiel primaire à partir duquel on peut construire un autre référentiel équivalent tel que  $\mathcal{R}\{A, x_1x_2x_3 ; t\}$  (voir aussi le C15).  $\mathcal{R}\{O, xyz ; t\}$  est en quelque sorte un représentant de toute la classe de ces référentiels équivalents.

**C2. Dimensions des coordonnées.** En toute rigueur, une coordonnée, quelle qu'elle soit, n'a pas de dimensions<sup>1</sup> physiques : c'est un nombre. Les dimensions et les unités auxquelles se réfèrent les coordonnées sont déclarées au départ : par exemple,  $x$  se rapporte à «  $x$  fois » la longueur unité le long de l'axe  $Ox$ . Toutefois, par abus de langage, on finit par dire «  $x$  mètres » si la longueur unité est le mètre.

Un angle est un secteur du plan délimité par deux droites sécantes en l'origine  $O$  du plan. Ce nombre est compris entre 0 et  $2\pi$ . Bien qu'il soit sans dimension, on a coutume de préciser que ce nombre est exprimé en radians (*rad*). La raison en est que l'usage pratique de la mesure des angles a donné lieu à l'invention d'unités comme le degré.

**C3. Coordonnées polaires.** Si le mouvement a lieu dans un plan, on se réfère souvent aux *coordonnées polaires*  $(r, \theta)$  du point  $M$ . La coordonnée  $r$  symbolise la distance du point origine  $O$  au point  $M$  ; elle varie dans l'intervalle  $[0, +\infty[$ . L'angle  $\theta$ , appelé *angle polaire*, est l'angle entre la droite  $(OM)$  et l'axe  $Ox$  ; il varie dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ . En utilisant les propriétés des triangles rectangles visibles sur la figure 5, on obtient les relations entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  de  $M$  :

---

<sup>1</sup> Les grandeurs physiques, leurs dimensions et leurs unités sont discutées plus en détail au C44 (chapitre 9).

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$$

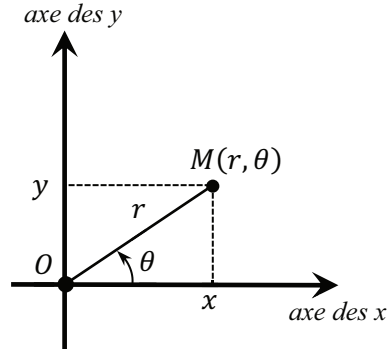


Figure 5. Coordonnées polaires  $(r, \theta)$  du point  $M$  dans le plan

**C4. Coordonnées cylindriques.** Le système de *coordonnées cylindriques*  $(\rho, \varphi, z)$  se résume à choisir des coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$  dans le plan  $xOy$ , auxquelles on rajoute simplement la cote  $z$  du point  $M$  (figure 6). La coordonnée  $\rho$  varie dans l'intervalle  $[0, +\infty[$  et symbolise la distance du point  $O$  au point  $H$ , projeté orthogonal de  $M$  dans le plan  $xOy$ . L'angle polaire  $\varphi$  est l'angle entre la droite  $(OH)$  et l'axe  $Ox$ ; il varie dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ . La cote  $z$  varie dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ . On déduit facilement les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

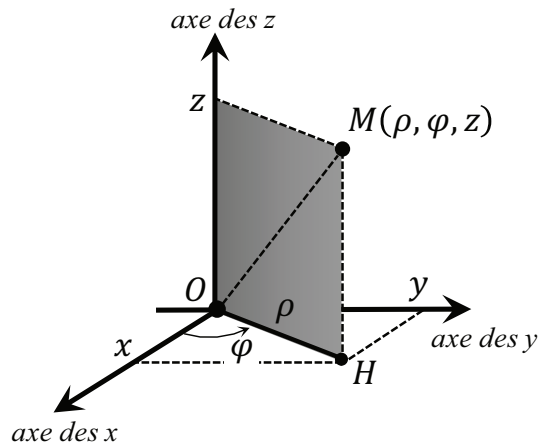


Figure 6. Coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  du point  $M$ .

**C5. Coordonnées sphériques.** En observant la figure 3 de la section 3, on remarque que les coordonnées  $r$  et  $\theta$  du jeu de coordonnées sphériques sont identifiables à des coordonnées polaires de  $M$  dans le plan  $(Oz, (OM))$ . L'angle  $\varphi$  repère quant à lui l'orientation de ce plan par rapport au plan  $xOz$ .

- Démontrer les relations annoncées à la section 3 reliant les coordonnées cartésiennes de  $M$  à ses coordonnées sphériques.

**C6. Formules trigonométriques et cercle trigonométrique.** Il s'agit d'apprendre par cœur les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(-\theta) = \cos\theta : \text{la fonction cosinus est paire.}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta : \text{la fonction sinus est impaire.}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

- Quelles sont les valeurs du cosinus, du sinus et de la tangente des angles remarquables :  $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi$  ?
- Tracer le cercle trigonométrique pour y repérer les valeurs de  $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$  (ou  $\cot\theta$ ) et  $\cot\theta$  (ou  $\cotan\theta$ ).

**C7. Formules inverses et bi-univocité.** On se place dans le plan  $xOy$ . Montrer que les relations inverses entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes s'écrivent :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Renseignez-vous sur le domaine de définition de la fonction  $\text{Arctan}$  et sur sa compatibilité avec le domaine de variation de l'angle  $\theta$  qui a été choisi :  $[0, 2\pi[$ . Pour éviter ces complications, on peut aussi décider de donner  $\theta$  *via* les valeurs de son sinus et de son cosinus<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

---

<sup>1</sup> Il faut en effet se donner la valeur de deux fonctions trigonométriques pour bien définir un angle.

On remarquera qu'au point  $O$ ,  $r = 0$ , et l'angle  $\theta$  n'est pas défini : la bi-univocité est perdue en ce point.

- Trouver les relations inverses pour le cas des coordonnées cylindriques. Si le point  $M$  est situé sur l'axe  $Oz$ ,  $\varphi$  n'est pas défini : sur cet axe la bi-univocité est perdue.
- Même problème pour le cas des coordonnées sphériques. Où est perdue la bi-univocité ?

**C8. Mouvement rectiligne sinusoïdal.** On considère un point  $M$  en mouvement rectiligne le long de l'axe  $Ox$ . Son abscisse  $x$  évolue selon la loi horaire suivante :  $x(t) = A \cos(\omega t - \phi)$  où  $A$ ,  $\omega$  et  $\phi$  sont des constantes. On appelle  $A$  l'*amplitude du mouvement*,  $\phi$  (ou  $-\phi$ ) la *phase initiale* et  $\omega > 0$  la *pulsation du mouvement*.

- On suppose ici que les constantes  $A$  et  $\phi$  sont positives, avec  $0 < \phi \leq \pi/2$ . Relier la *période*<sup>1</sup>  $T$  du mouvement à la pulsation  $\omega$ . Étudier la fonction  $x(t)$  et tracer  $x$  en fonction du temps. Identifier  $A$ ,  $\omega$  et  $\phi$  sur le graphique par un moyen ou un autre (pas forcément directement).
- Montrer que l'on peut toujours écrire  $x$  sous la forme :  $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$  où  $a$  et  $b$  sont deux autres constantes que l'on déterminera en fonction de  $A$  et  $\phi$ .
- Montrer que l'on peut aussi écrire<sup>2</sup> :  $x = \alpha e^{i \omega t} + \beta e^{-i \omega t}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes que l'on déterminera en fonction de  $a$  et  $b$ .

**C9. Mouvement circulaire uniforme.** Les équations paramétriques de la trajectoire d'un point  $M$  en mouvement dans le plan  $xOy$  sont, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t \\ y = R \sin \omega t \end{cases}$$

où  $R$  et  $\omega$  sont des constantes non nulles et positives.

- Tracer  $x(t)$  et  $y(t)$  et préciser la nature des mouvements réalisés par l'abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$  du point  $M$  en se référant aux définitions de l'exercice **C8**.
- Éliminer le temps des équations paramétriques pour obtenir l'équation de la trajectoire du point  $M$  sous la forme implicite<sup>3</sup> :  $x^2 + y^2 = R^2$ . Tracer cette trajectoire qui est un cercle<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Rappel : on dit que  $x$  est  $T$ -périodique si :  $x(t) = x(t + T) \forall t$  ; auquel cas le plus petit  $T > 0$  vérifiant cette égalité est appelé la période  $T$ .

<sup>2</sup> Rappel : notation exponentielle imaginaire :  $e^{i \theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , avec  $i^2 = -1$ .

<sup>3</sup> On dit d'une équation entre deux variables  $x$  et  $y$  qu'elle est donnée sous une forme *implicite* si elle s'écrit :  $f(x, y) = 0$  où  $f$  est une fonction quelconque. Si l'équation est écrite sous la forme :  $y = g(x)$  ou  $x = h(y)$  alors on dit qu'elle est donnée sous une forme *explicite*.

<sup>4</sup> Dans un plan  $xOy$  orthonormé, l'équation cartésienne :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  est l'équation d'un cercle de centre  $C(a, b)$  et de rayon  $R$ .

- Trouver l'équation de la trajectoire de  $M$  ainsi que ses équations paramétriques en coordonnées polaires.

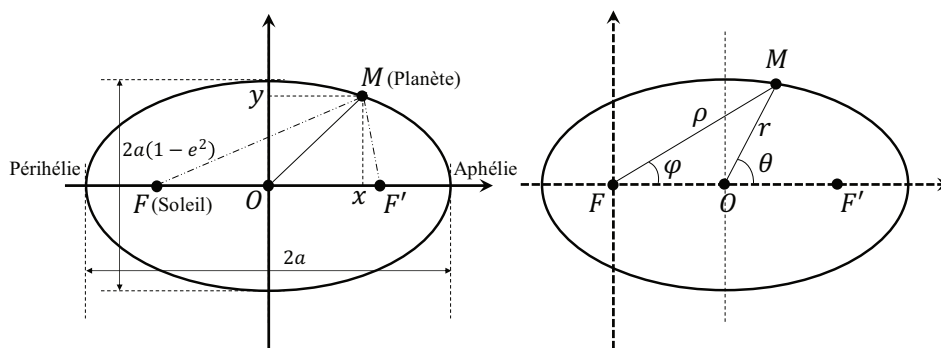
**C10. Mouvement elliptique I.** Les équations paramétriques de la trajectoire d'un point  $M$  en mouvement dans le plan  $xOy$  sont, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sqrt{1 - e^2} \sin \omega t \end{cases}$$

où  $\omega$ ,  $a$  et  $e$  sont des constantes positives, avec :  $0 \leq e < 1$ .

- Tracer  $x(t)$  et  $y(t)$  et préciser la nature des mouvements réalisés par l'abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$  du point  $M$  (voir le C8).

- Éliminer le temps de ces équations pour obtenir l'équation de la trajectoire du point  $M$  sous une forme implicite. C'est l'équation d'une ellipse<sup>1</sup> centrée sur l'origine  $O$ , dont le demi-grand axe vaut  $a$  le long de l'axe  $Ox$  et dont le demi-petit axe le long de l'axe  $Oy$  vaut  $b = a \sqrt{1 - e^2}$ . Tracer cette ellipse pour différentes valeurs de  $e$  : si  $e = 0$ , que se passe-t-il ? Si  $e \rightarrow 1$  que se passe-t-il ? On appelle  $e$  l'*excentricité* de l'ellipse (figure7).



**Figure 7.** Paramètres de l'ellipse de demi-grand axe  $a$  et d'excentricité  $e$ .  $F$  et  $F'$  sont les foyers de l'ellipse de centre  $O$ . On peut aussi choisir l'origine du référentiel au foyer  $F$  de l'ellipse.

- Trouver les équations paramétriques de la trajectoire de  $M$  ainsi que son équation  $r(\theta)$  en coordonnées polaires. *Nota Bene* : on pourra éviter la discussion sur le domaine de variation de  $\theta$  en laissant son équation horaire sous l'une des trois formes :  $\sin \theta = \dots$ ,  $\cos \theta = \dots$  ou  $\tan \theta = \dots$ .

<sup>1</sup> Dans un plan  $xOy$  orthonormé, l'équation cartésienne :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

est l'équation d'une ellipse centrée en  $C(\alpha, \beta)$  dont un axe est parallèle à l'axe  $Ox$  et de longueur  $2a$ , l'autre axe étant parallèle à l'axe  $Oy$  et de longueur  $2b$ .

**C11. Mouvement elliptique II.** Les notations sont les mêmes que celles de l'exercice C10. Du point de vue géométrique, on définit une ellipse de la façon suivante : soient deux points du plan,  $F$  et  $F'$ , séparés d'une distance  $|FF'| = 2a e$ . On appelle ellipse de foyers  $F$  et  $F'$  l'ensemble des points  $M$  du plan qui vérifient la relation :

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

Il est plus commode pour l'étude du mouvement d'une planète autour de son soleil de placer l'origine  $O$  du référentiel, non pas au centre de l'ellipse comme dans l'exercice précédent, mais sur l'un de ses foyers. On démontre que les deux foyers sont situés sur le grand axe (ici  $Ox$ ) de l'ellipse à égale distance du centre.

Si on place l'origine de notre référentiel en  $F$ , alors la figure 7 ainsi que la donnée  $|FF'| = 2a e$  montrent que les coordonnées cartésiennes  $(x_F, y_F)$  de  $M$  par rapport à  $F$  sont :

$$\begin{cases} x_F = |FO| + x = a e + x \\ y_F = y \end{cases}$$

Les coordonnées polaires de  $M$  relativement à  $F$  seront dénommées  $(\rho, \varphi)$ .

- Écrire les équations paramétriques de la trajectoire de  $M$  pour les coordonnées cartésiennes  $(x_F, y_F)$ , puis l'équation implicite de la trajectoire.
- En déduire les équations paramétriques de la trajectoire pour les coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$ , puis montrer que l'équation de la trajectoire  $\rho(\varphi)$  s'écrit :

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi}$$

**C12. Mouvement parabolique.** Les équations paramétriques de la trajectoire d'un point  $M$  en mouvement dans le plan  $xOy$  sont :

$$\begin{cases} x = v_{0x}t + x_0 \\ y = \frac{1}{2}a t^2 + v_{0y}t + y_0 \end{cases}$$

où  $x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y}$  et  $a$  sont des constantes non nulles et positives.

- Interpréter  $x_0$  et  $y_0$ .
- Éliminer le temps de ces équations pour obtenir l'équation de la trajectoire qui est une parabole<sup>1</sup>.
- Poser :  $X = x - x_0$  et  $Y = y - y_0$ , puis étudier et tracer la courbe :  $Y = Y(X)$ .

---

<sup>1</sup> Dans un plan  $xOy$  orthonormé, l'équation cartésienne :  $y = ax^2 + bx + c$  est l'équation d'une parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe  $Oy$ .

**C13. Annexe 1.** Lire l'Annexe 1 portant sur la notion de vecteurs et de bases vectorielles.

**C14. Annexe 2.** Lire l'Annexe 2 portant sur la notion de dérivée et la notation de Leibniz.

## CHAPITRE 2

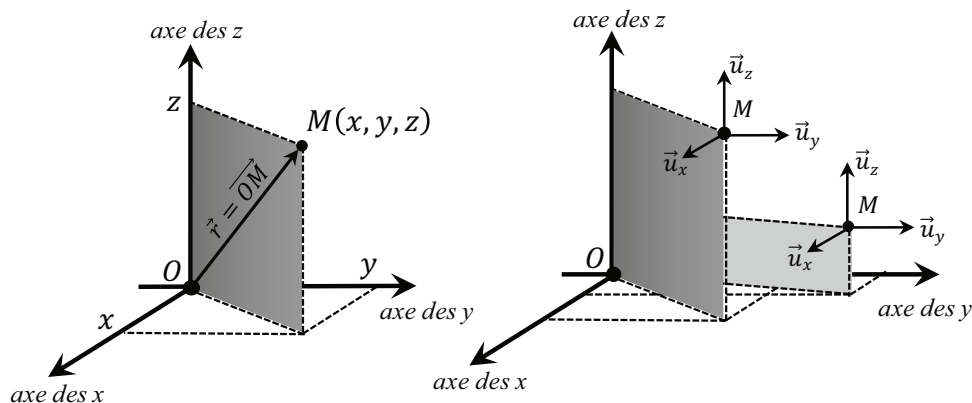
### DESCRIPTION VECTORIELLE DU MOUVEMENT

**5. Rayon vecteur ou vecteur position.** Ce chapitre suppose connue la notion de vecteur<sup>1</sup>. En cinématique du point matériel (et en dynamique aussi), l'intérêt se porte naturellement sur le vecteur qui joint l'origine  $O$  du référentiel au point  $M$  et sur ses dérivées par rapport au temps. On appelle ce vecteur : *rayon vecteur* ou encore *vecteur position*, et on le notera :  $\vec{r} := \overrightarrow{OM}$ . La description du mouvement du point  $M$  consiste alors à étudier l'évolution en grandeur et en orientation de ce vecteur  $\overrightarrow{OM}$  en fonction du temps.

En coordonnées cartésiennes, le rayon vecteur s'écrit :

$$\vec{r} := \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

où les 3 vecteurs  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  sont unitaires (*id est* : de norme 1) et orthogonaux entre eux : ils forment une base orthonormée de l'espace euclidien. Le vecteur  $\vec{u}_x$  indique la direction et le sens de l'axe  $Ox$ ,  $\vec{u}_y$  la direction et le sens de l'axe  $Oy$ , et  $\vec{u}_z$  la direction et le sens de l'axe  $Oz$ . Il faut remarquer que cette base garde la même orientation (celle des axes  $Ox, Oy, Oz$  auxquels elle se réfère) quel que soit le point  $M$  envisagé : on dit d'une telle base qu'elle est *fixe* (figure 8).



**Figure 8.** Le rayon vecteur  $\vec{r} := \overrightarrow{OM}$  et la base fixe  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ .

<sup>1</sup> Annexe 1. On pourra lire aussi à ce sujet le chapitre 2 du *cours de Physique de Berkeley*, volume 1 : Mécanique. *Op. cit.*

Les coordonnées  $(x, y, z)$  du point  $M$  apparaissent dans l'écriture de  $\overrightarrow{OM}$  en tant que *composantes* de ce vecteur sur chacun des trois vecteurs de la base ; ce qui n'est pas toujours le cas pour d'autres systèmes de coordonnées : l'écriture du vecteur position se décline en effet de différentes façons selon le système de coordonnées choisi, et nous allons montrer dans ce qui suit que chaque système de coordonnées possède sa propre base vectorielle au sein de laquelle tous les calculs visant à caractériser au mieux la trajectoire suivie par le point  $M$  vont s'effectuer.

**6. Différentes bases vectorielles adaptées aux différents systèmes de coordonnées.** Le choix des vecteurs de base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  semblait évident pour les coordonnées cartésiennes : il est calqué sur la construction des axes fixes du référentiel  $\mathcal{R}$ . Mais qu'en est-il pour les coordonnées sphériques par exemple ? Dans un premier temps, on peut convenir de garder la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  et de remplacer  $x, y$  et  $z$  par leurs expressions en fonction de  $r, \theta$  et  $\varphi$  données à la section 3 ; on obtient ainsi :

$$\overrightarrow{OM} = r \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + r \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y + r \cos\theta \vec{u}_z$$

Cependant, l'usage montre que cette façon d'écrire le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  complexifie les calculs que nous allons être amené à réaliser. Cela dit, c'est à partir de cette expression que l'on peut définir analytiquement des vecteurs de base mieux adaptés à ce système de coordonnées sphériques. La procédure employée est décrite au **C18**. Elle supporte la méthode générique qui va être présentée ici en examinant d'abord le cas des coordonnées cartésiennes.

Faisons varier, chacune à son tour, les coordonnées  $x, y$  et  $z$  du point  $M$  d'une quantité infinitésimale  $\varepsilon$  et posons-nous la question de savoir quelle direction sera prise par le point  $M$  après ce petit déplacement ? Le vecteur unitaire le long de cette direction, et dans le sens  $\varepsilon > 0$ , sera alors désigné comme le vecteur unitaire associé à la coordonnée que l'on a fait varier.

Faisons donc varier  $x$  d'une quantité infinitésimale :  $\varepsilon = dx$  en maintenant  $y$  et  $z$  constants. Sous l'effet de cette variation, le point  $M$  s'est évidemment déplacé le long de l'axe  $Ox$  : nous poserons alors que le vecteur unitaire qui indique la direction et le sens de l'axe  $Ox$  est celui associé à la coordonnée  $x$ , et on le notera  $\vec{u}_x$ . L'indice  $x$  rappellera que ce vecteur indique la direction et le sens du déplacement du point  $M$  lorsque la coordonnée  $x$  varie d'une quantité infinitésimale  $dx > 0$ , les autres coordonnées restant fixes. La lettre  $u$  rappellera que c'est un vecteur unitaire. On reproduit le même raisonnement pour définir les vecteurs  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  associés aux coordonnées  $y$  et  $z$  respectivement.

Il s'agit maintenant d'appliquer la même méthode au système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . Dans un premier temps, on fixe  $\theta$  et  $\varphi$  et on fait varier  $r$  d'une quantité infinitésimale :  $\varepsilon = dr$  (figure 9) : le point  $M$  s'est alors déplacé le long de la droite  $(OM)$ . Le vecteur unitaire associé à la coordonnée  $r$  est donc celui qui indique la direction de la droite  $(OM)$ , son sens étant celui obtenu pour  $\varepsilon = dr > 0$ , et on le notera :  $\vec{u}_r$ .

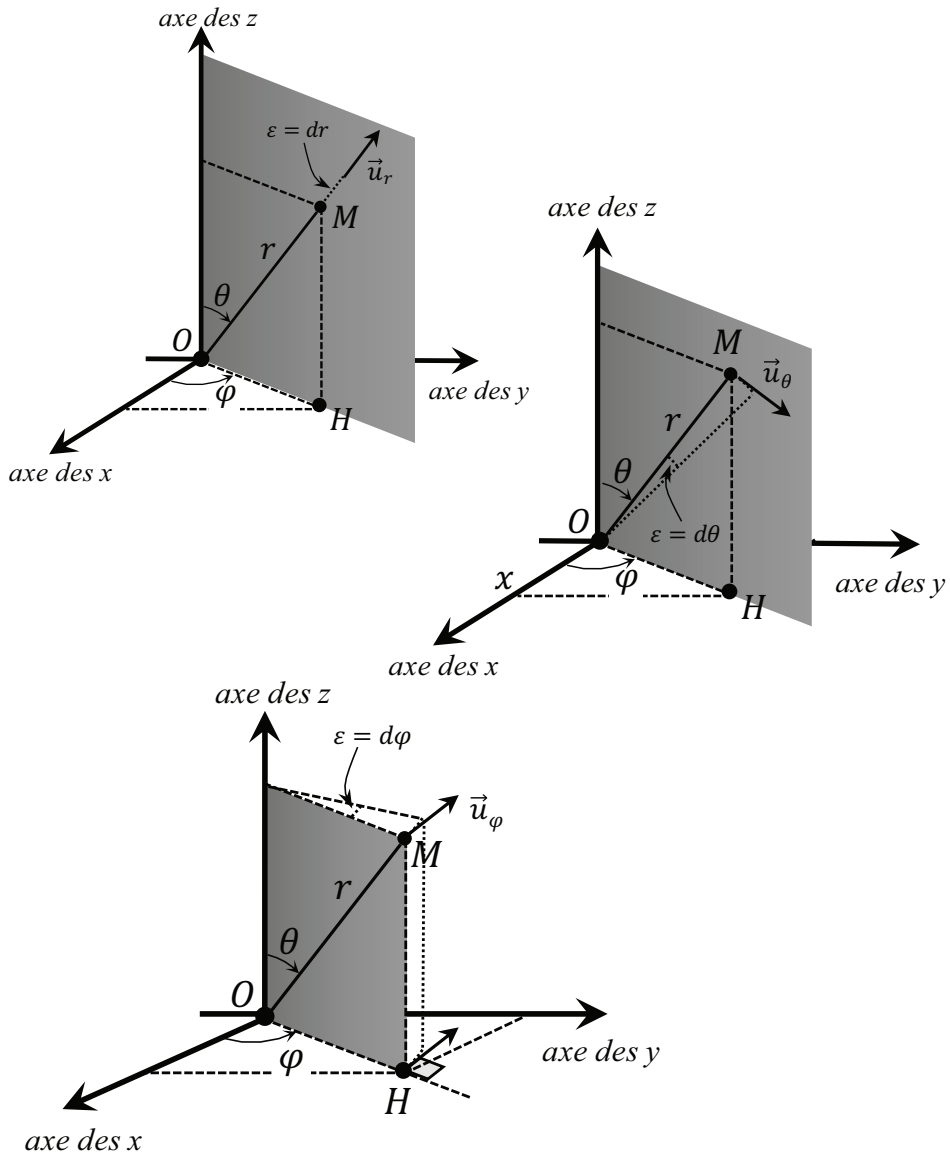


Figure 9. Construction des vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$

Dans un second temps, on fixe  $r$  et  $\varphi$  et on fait varier  $\theta$  de :  $\varepsilon = d\theta > 0$ . Cette fois, le point  $M$  s'est déplacé le long d'un arc de cercle infinitésimal de centre  $O$  et de rayon  $r$  dans le plan  $(Oz, \overrightarrow{OM})$ . Le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  associé à la coordonnée  $\theta$  est donc celui qui indique la direction de la droite qui se confond avec l'arc de cercle infinitésimal obtenu ; cette droite n'est rien d'autre que la tangente au cercle en  $M(r, \theta, \varphi)$ .

Enfin, on fixe maintenant  $r$  et  $\theta$  et on fait varier  $\varphi$  de :  $\varepsilon = d\varphi > 0$  : là aussi, le point  $M$  s'est déplacé sur un arc de cercle infinitésimal situé cette fois dans un plan parallèle au plan  $xOy$ . On remarquera que ce cercle a pour rayon :  $OH = r \sin\theta$ . Le vecteur  $\vec{u}_\varphi$  associé à la coordonnée  $\varphi$  sera donc le vecteur unitaire qui indique la direction de la tangente en  $M(r, \theta, \varphi)$  au cercle de rayon  $r \sin\theta$  tracé parallèlement au plan  $xOy$ .

Une nouvelle base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ , bien adaptée au système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , vient ainsi d'être définie. La méthode utilisée pour définir cette base a son équivalent analytique (**C18**). Lorsque l'on utilise ce type de coordonnées, on apprend à ne plus travailler que dans cette base à propos de laquelle il faut faire plusieurs remarques que l'on peut justifier soit géométriquement, soit par la démarche analytique :

- La base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  est orthonormée. On dit alors que le système de coordonnées utilisé est orthogonal. Tous les systèmes de coordonnées ne le sont pas.
- Dans l'ordre où elle est écrite, cette base est directe. C'est-à-dire - si le symbole  $\wedge$  représente l'opération « produit vectoriel »<sup>1</sup> - que l'on a :

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta ; \vec{u}_r = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi ; \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$$

au même titre que l'on a :

$$\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y ; \vec{u}_x = \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z ; \vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$$

pour la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  rangée dans cet ordre.

- Dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  le vecteur position s'écrit de façon simple :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$$

Les coordonnées  $\theta$  et  $\varphi$  n'apparaissent donc pas explicitement dans l'écriture du rayon vecteur. En fait, elles sont contenues dans le vecteur  $\vec{u}_r$ , comme le montre son écriture dans la base fixe  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  (voir le point suivant). Le rayon vecteur n'a donc qu'une seule composante ( $r$ ) dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  qui est sa *composante radiale* (c'est-à-dire selon  $\vec{u}_r$ ). Ce faisant, *il y a lieu de distinguer dans le*

---

<sup>1</sup> Annexe 1.

vocabulaire la notion de coordonnées du point  $M$  et la notion de composantes du rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$ . Ces deux notions sont confondues dans le système de coordonnées cartésiennes mais cela reste exceptionnel.

• Il existe bien sûr des relations mathématiques entre la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  et la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  : ce sont les formules dites de changement de base. On peut démontrer géométriquement les formules ci-dessous en s'aidant de la figure 9 :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y + \cos\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{u}_y - \sin\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_y \end{cases}$$

• La base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  possède une propriété singulière : on constate qu'elle change d'orientation selon la position du point  $M$ ... On dit de ce genre de base qu'elle est *locale*. Cette propriété est d'une importance capitale pour les calculs que nous serons amenés à faire : il faudra toujours penser qu'une *base locale* n'est pas constante en orientation dans l'espace contrairement à une *base fixe* comme la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ .

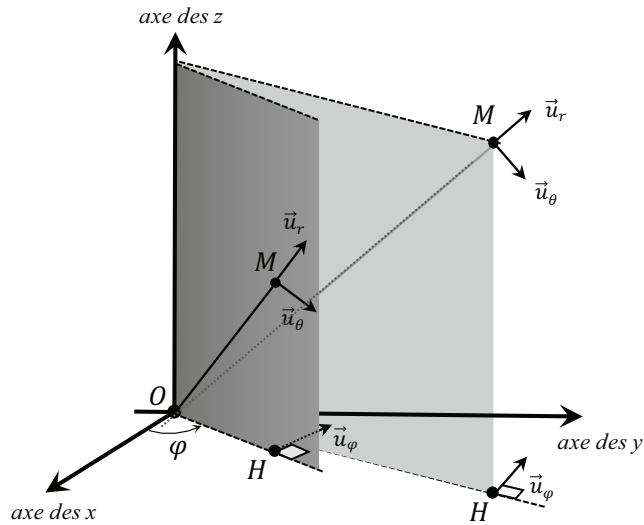


Figure 10. La base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  est locale.

## Compléments et exercices du chapitre 2

**C15. Référentiels et repères.** En mathématiques, un repère est la donnée d'un point origine quelconque,  $A$ , et d'une base de 3 vecteurs qui sont chacun associés à 3 axes non coplanaires passant par  $A$ . La notion de référentiel spatial  $\mathcal{R}\{O, xyz\}$  défini à la

section 2 correspond alors à un repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . La différence entre les deux notions est mise en évidence si, par exemple, on choisit un autre repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  où les trois axes  $OX, OY$  et  $OZ$  associés sont différents des premiers : le référentiel spatial a-t-il changé ? À cette question, avec les précisions apportées au C1, il faut répondre non : selon cette philosophie, seul le moyen de repérage a changé en ce sens que l'on a construit les 3 nouveaux axes  $OX, OY$  et  $OZ$  à partir des axes primaires  $Ox, Oy$  et  $Oz$  qui servent d'axes de référence pour tout autre moyen de repérage vis-à-vis de  $O$  que l'on aura choisi. Dit autrement, au sein du référentiel spatial  $\mathcal{R}\{O, xyz\}$ , il existe un nombre indéfini de repères permettant de localiser un point  $M$  selon le système de coordonnées choisi.

**C16. Bases associées aux coordonnées polaires et cylindriques.**

- Procéder de la même façon que le cours pour déterminer la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  associée aux coordonnées polaires  $(r, \theta)$  (figures 5 et 12). Exprimer cette base dans la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$ .
- Déterminer la base  $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\}$  associée aux coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  et exprimer cette base dans la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  (figures 6 et 16).

**C17. Rayon vecteur.** Vérifiez géométriquement que le rayon vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  s'écrit, selon les divers systèmes de coordonnées :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \text{ (cartésiennes, figure 8)}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \text{ (polaires, figure 5 et 12)}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \text{ (cylindriques, figure 6 et 16)}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \text{ (sphériques, figure 3 et 10)}$$

**C18<sup>1</sup>. Définition analytique de la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ .** Au début de la section 6, le rayon vecteur a été exprimé en fonction des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  dans la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  :

$$\overrightarrow{OM} = r \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + r \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y + r \cos\theta \vec{u}_z$$

On peut donc voir  $\overrightarrow{OM}$  comme un vecteur fonction des 3 coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  ; et à ce titre, pour chacune de ces variables, on peut chercher à étudier les variations de  $\overrightarrow{OM}$  en fixant les deux autres variables. Ainsi, on peut calculer la dérivée du vecteur

---

<sup>1</sup> Il vaut mieux avoir lu l'Annexe 2 avant d'aborder ce complément qui utilise la notion de dérivée partielle. Dans l'Annexe 5 on fait le lien entre les dérivées partielles d'une fonction (ici le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ ) à plusieurs variables et sa différentielle.

$\overrightarrow{OM}$  par rapport à  $r$  lorsque  $\theta$  et  $\varphi$  sont fixées : c'est la notion de *dérivée partielle* d'une fonction (ici, d'un vecteur) de plusieurs variables. Afin de souligner que la dérivée qui va être calculée se réalise à  $\theta$  et  $\varphi$  fixées, on convient de la noter à l'aide d'un « d rond » :  $\partial$ , qui remplace le « d droit » :  $d$ , de la notation habituelle. Ainsi, on aura :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dr} \right|_{\theta, \varphi \text{ fixés}} := \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y + \cos\theta \vec{u}_z$$

On procède de même pour la dérivée partielle de  $\overrightarrow{OM}$  par rapport à  $\theta$  :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \right|_{r, \varphi \text{ fixés}} := \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r \cos\theta \cos\varphi \vec{u}_x + r \cos\theta \sin\varphi \vec{u}_y - r \sin\theta \vec{u}_z$$

Et celle par rapport à  $\varphi$  :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\varphi} \right|_{r, \theta \text{ fixés}} := \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = -r \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_x + r \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_y$$

En normant à l'unité les trois vecteurs obtenus après dérivation, on obtient les 3 vecteurs unitaires indiquant la direction prise par le point  $M$  lorsque  $r$  varie de  $dr$  (à  $\theta$  et  $\varphi$  fixés), ou bien  $\theta$  de  $d\theta$  (à  $r$  et  $\varphi$  fixés), ou bien encore  $\varphi$  de  $d\varphi$  (à  $r$  et  $\theta$  fixés). Il est clair alors que ces 3 vecteurs unitaires sont les 3 vecteurs de la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  construite géométriquement à la section 6. On a donc :

$$\begin{cases} \vec{u}_r := \frac{\partial \overrightarrow{OM} / \partial r}{\|\partial \overrightarrow{OM} / \partial r\|} = \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y + \cos\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta := \frac{\partial \overrightarrow{OM} / \partial \theta}{\|\partial \overrightarrow{OM} / \partial \theta\|} = \cos\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{u}_y - \sin\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi := \frac{\partial \overrightarrow{OM} / \partial \varphi}{\|\partial \overrightarrow{OM} / \partial \varphi\|} = -\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_y \end{cases}$$

À l'aide de ces formules, on vérifie aisément toutes les propriétés annoncées en fin de section 6.

La méthode qui vient d'être présentée est celle employée en géométrie différentielle pour définir une base associée à un système de coordonnées quelconque.

- Trouver la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  associée aux coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec cette méthode.
- Trouver la base  $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\}$  associée aux coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  avec cette méthode.

- Examiner ce que donne la méthode pour les coordonnées cartésiennes.

**C19. Formules inverses.** Il s'agit ici d'exprimer la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  dans les différentes bases locales.

- Exprimer la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$  dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  associée aux coordonnées polaires.
- Exprimer la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  dans la base  $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\}$  associée aux coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$ .
- Exprimer la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  associée aux coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .

**C20. Rayon vecteur sur une trajectoire.** Écrire le rayon vecteur en fonction du temps pour les trajectoires étudiées de **C8** à **C12**, en coordonnées cartésiennes et/ou polaires selon les cas. *Note* : dans le **C11**, le rayon vecteur devient :  $\vec{\rho} = \overrightarrow{FM}$ .

## CHAPITRE 3

### VECTEURS VITESSE ET ACCÉLÉRATION

**7. Dérivées : notation différentielle et dérivée temporelle.** Avant de définir les notions cinématiques de vitesse et d'accélération, on introduit la notation différentielle (Leibniz, 1684) relative à la dérivée d'une fonction<sup>1</sup>.

La dérivée en  $x$  d'une fonction  $f$  de la variable  $x$  est définie par :

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

On montre dans l'Annexe 2 que  $f'(x)$  est la valeur de la pente de la tangente à la fonction  $f$  en  $x$ .

Définissons la *différentielle*  $df$  de la fonction  $f$  par :

$$df := f' dx$$

où  $dx$  est un accroissement (positif ou négatif) infiniment petit de la variable  $x$ . On pourra ainsi écrire :  $f' = df/dx$ . Cette notation rappelle que  $f'(x)$  est le taux d'accroissement de  $f$  en  $x$  en identifiant abusivement  $df$  à la quantité  $f(x + dx) - f(x)$ , ce qui n'est vrai qu'à une fonction  $o(dx)$  près qui tend vers 0 plus vite que  $dx$  lorsque  $dx$  tend vers zéro<sup>1</sup>. *L'habitude est prise cependant de parler de la variation  $df$  de  $f$  lorsque  $x$  varie de  $dx$ , ce que l'on fera dans toute la suite du cours.*

Avec cette notation différentielle la dérivée seconde d'une fonction  $f$  s'écrira :

$$f'' = \frac{df'}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) := \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Ce qui permet de définir la différentielle d'ordre 2,  $d^2 f$ , de la fonction  $f$ . Et ainsi de suite pour les dérivées et différentielles d'ordre supérieur.

On écrira donc les dérivées temporelles des coordonnées d'un point matériel  $M$  en mouvement sous la forme :  $dx/dt$ ,  $dy/dt$ ,  $dz/dt$  si ces coordonnées sont les coordonnées cartésiennes de  $M$ , ou bien  $dr/dt$ ,  $d\theta/dt$ ,  $d\varphi/dt$  s'il s'agit des coordonnées sphériques, etc...

Enfin, on convient aussi d'utiliser une notation réservée à la dérivée par rapport au temps : au lieu de « primer » la fonction dérivée ( $f'$  dérivée de  $f$ ), on préférera placer un point sur la grandeur que l'on vient de dériver par rapport au temps. On écrira ainsi les dérivées par rapport au temps de  $x$ ,  $y$  et  $z$  :

---

<sup>1</sup> L'Annexe 2 dédiée aux fonctions dérivées et aux différentielles est plus détaillée.

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt} ; \dot{y} := \frac{dy}{dt} ; \dot{z} := \frac{dz}{dt}$$

Pour les dérivées secondes par rapport au temps, on placera deux points. Par exemple :  $\ddot{r} := d^2r/dt^2$  ;  $\ddot{\theta} := d^2\theta/dt^2$  ;  $\ddot{\varphi} := d^2\varphi/dt^2$ . Et ainsi de suite pour les dérivées temporelles d'ordre supérieur.

**8. Vecteur vitesse.** Pour caractériser l'allure à laquelle un point matériel  $M$  se déplace et change de direction, on définit le *vecteur vitesse*  $\vec{v}(t)$  du point  $M$  par la limite suivante :

$$\vec{v}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse est donc le vecteur dérivé du rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ainsi, moyennant l'abus signalé à la section 7, on peut dire que pendant la durée infinitésimale  $dt$  le rayon vecteur  $\vec{r}$  évolue en grandeur et en direction de la quantité :  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ .

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

La base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  étant fixe, on en déduit immédiatement le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

Cette écriture du vecteur vitesse exprime les différents taux de variations du rayon vecteur sur chacun des trois vecteurs de la base fixe : dans la direction  $\vec{u}_x$ , ce taux vaut  $\dot{x}$ , signifiant par-là que la coordonnée  $x$  associée à la direction  $Ox$  aura évolué d'une quantité infinitésimale  $dx = \dot{x} dt$  pendant la durée  $dt$ . Un raisonnement similaire a lieu le long des axes  $Oy$  et  $Oz$ .

La norme du vecteur vitesse exprime quant à elle la valeur globale de ces taux de variations. Nous la noterons  $v$  :

$$v := \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Cette grandeur est communément appelée vitesse du point matériel (à l'instant  $t$ ) ; elle indique la distance parcourue par le point matériel pendant la durée

infinitésimale  $dt$ . Dans le système international, ses unités sont le mètre par seconde ( $m \cdot s^{-1}$ ).

En raison de sa définition même, le vecteur vitesse est à chaque instant tangent à la trajectoire suivie par le point  $M$ . Montrons-le en se contentant d'une trajectoire plane.

En coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , l'équation de cette trajectoire est :  $y = y(x)$ . Soit alors un point  $P$  de coordonnées cartésiennes  $(X, Y)$  (figure 11) appartenant à la tangente à la trajectoire au point  $M(x, y)$  à l'instant  $t$ . On sait que l'équation de cette droite s'écrit (voir Annexe 2) :

$$Y = y'(x) [X - x] + y(x)$$

Par ailleurs, le vecteur  $\overrightarrow{MP}$  est à l'évidence un vecteur directeur de cette tangente :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = (X - x) \vec{u}_x + (Y - y) \vec{u}_y$$

C'est-à-dire, en utilisant l'équation de la tangente en  $M$  :

$$\overrightarrow{MP} = (X - x) \{ \vec{u}_x + y'(x) \vec{u}_y \}$$

Or,  $y' = dy/dx$ , de même que :  $dy = \dot{y} dt$  et  $dx = \dot{x} dt$ . On peut donc écrire (pour  $\dot{x} \neq 0$  qui réclamerait un traitement spécial) :

$$\overrightarrow{MP} = (X - x) \left\{ \vec{u}_x + \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \vec{u}_y \right\} = \frac{X - x}{\dot{x}} \{ \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y \}$$

où l'on a fait apparaître dans l'accolade le vecteur vitesse du point matériel  $M$  :

$$\overrightarrow{MP} = \frac{X - x}{\dot{x}} \vec{v}$$

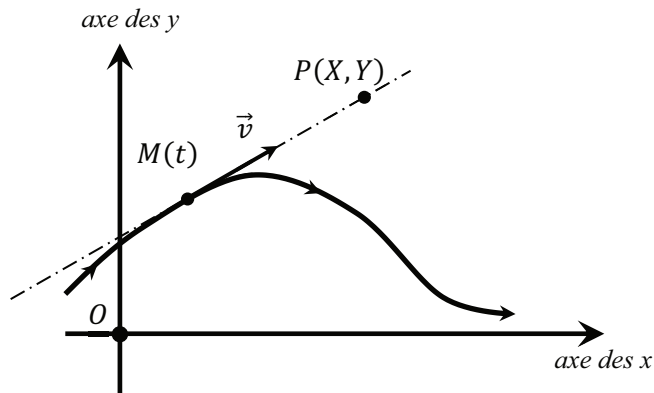


Figure 11. Le vecteur vitesse est à chaque instant tangent à la trajectoire du point  $M$ .

Ce qui permet de conclure que le vecteur vitesse est bien un vecteur constamment tangent à la trajectoire suivie par le point matériel. On pourra aussi vérifier sur cette

dernière formule que le sens du vecteur vitesse est celui pris par le point matériel au cours de son mouvement.

**9. Vecteur accélération.** Pour caractériser la façon dont évolue le vecteur vitesse au cours du temps, on définit le vecteur accélération  $\vec{a}(t)$  du point  $M$  par la limite suivante :

$$\vec{a}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

C'est-à-dire que le vecteur accélération est le vecteur dérivé du vecteur vitesse, ou encore qu'il est la dérivée seconde du rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , par rapport au temps. En notation différentielle, on écrira indifféremment :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Et on dira que pendant la durée infinitésimale  $dt$  le vecteur vitesse évolue, en grandeur et en direction, de la quantité :  $d\vec{v} = \vec{a} dt$ .

En coordonnées cartésiennes, le calcul du vecteur accélération s'obtient facilement en dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

À l'instar du vecteur vitesse vis-à-vis du rayon vecteur, le vecteur accélération exprime le taux de variation du vecteur vitesse : par exemple, dans la direction  $\vec{u}_x$  ce taux aura évolué d'une quantité infinitésimale :  $d\dot{x} = \ddot{x} dt$  pendant la durée  $dt$ . La norme du vecteur accélération fournit la valeur globale de ce taux de variation. Elle sera notée  $a$  :

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Une accélération est donc une variation de vitesse pendant la durée  $dt$ . Dans le système international, ses unités sont le mètre par seconde, par seconde ( $m \cdot s^{-2}$ ).

**Attention.** Sauf cas particulier,  $a$  n'est pas la dérivée de  $v$  ; il suffit de calculer  $dv/dt$  pour s'en rendre compte.

On notera qu'en raison de sa définition, le vecteur accélération est toujours orienté du côté où la trajectoire du point matériel s'incurve pendant la durée infinitésimale  $dt$  (figure 12 p.43). En effet, puisque le vecteur vitesse est toujours tangent à cette trajectoire, le sens et la direction de son incurvation pendant cette durée  $dt$  est donnée par la différence :  $\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)$ , c'est-à-dire par  $\vec{a}$ .  $\square$

Enfin, pour exprimer le fait que le vecteur accélération est le « vecteur vitesse du vecteur vitesse », on peut reporter les vecteurs vitesse obtenus à chaque instant à partir d'une origine quelconque : les extrémités de ces vecteurs forment une courbe appelée *hodographe* du mouvement. Il est clair alors que le vecteur accélération est un vecteur tangent à cet hodographe à chaque instant.

On pourrait poursuivre ainsi et définir le « vecteur vitesse du vecteur accélération », c'est-à-dire  $d\vec{a}/dt$ . Ce vecteur sert à obtenir la torsion de la trajectoire (chapitre 6) lorsqu'on le connaît, mais il n'a pas reçu de nom particulier. La dynamique se préoccupe surtout des vecteurs positions, vitesse et accélération puisque ce dernier est donné par les forces mises en jeu dans le problème que l'on souhaite résoudre.

**10. Le vecteur vitesse en coordonnées polaires.** On se place ici dans le cas d'un mouvement contenu dans le plan  $xOy$  et on utilise le système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  pour repérer le point  $M$  le long de sa trajectoire (figure 12 p. 43). Dans ce système de coordonnées (C3),  $r$  représente la distance  $\|\overline{OM}\|$ , et  $\theta$  l'angle que fait le rayon vecteur  $\overline{OM}$  avec l'axe  $Ox$ .

**Premier calcul du vecteur vitesse.** Coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes sont reliées entre elles par les relations :

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$$

On peut ainsi calculer le vecteur vitesse du point  $M$  :

$$\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y = \frac{d}{dt}(r \cos\theta) \vec{u}_x + \frac{d}{dt}(r \sin\theta) \vec{u}_y$$

C'est-à-dire, en utilisant la formule de dérivation d'un produit de fonctions :

$$\vec{v} = \left[ \dot{r} \cos\theta + r \frac{d}{dt}(\cos\theta) \right] \vec{u}_x + \left[ \dot{r} \sin\theta + r \frac{d}{dt}(\sin\theta) \right] \vec{u}_y$$

Pour évaluer les dérivées par rapport au temps de  $\sin\theta$  et de  $\cos\theta$ , on peut s'y prendre de deux façons : la première est de constater qu'il s'agit d'un cas de dérivation de fonctions composées. En effet, la formule de dérivation de la composée  $(f \circ g)$  de deux fonctions  $f$  et  $g$  de la variable  $z$  est donnée par :

$$(f \circ g)' = g' \cdot (f' \circ g) \Leftrightarrow \frac{d}{dz}\{f[g(z)]\} = g'(z) \cdot f'[g(z)]$$

En adaptant ces notations aux notations cinématiques :

$$z \rightarrow t ; f \rightarrow \cos \text{ ou } \sin ; g(z) \rightarrow \theta(t)$$

on obtient ainsi :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\cos\theta) = -\dot{\theta} \sin\theta \\ \frac{d}{dt}(\sin\theta) = +\dot{\theta} \cos\theta \end{cases}$$

La seconde façon de pratiquer est d'effectuer un changement de variable dans la dérivation en profitant des notations différentielles où les quantités élémentaires  $dt$ ,  $d\theta$ , etc... sont vues comme de simples nombres :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\cos\theta) = \frac{d(\cos\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta} \cdot \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -\dot{\theta} \sin\theta \\ \frac{d}{dt}(\sin\theta) = \frac{d(\sin\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta} \cdot \frac{d(\sin\theta)}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d(\sin\theta)}{d\theta} = +\dot{\theta} \cos\theta \end{cases}$$

Quelle que soit la méthode utilisée, ces résultats permettent d'exprimer le vecteur vitesse en fonction des variables  $r$  et  $\theta$  et de leurs dérivées temporelles  $\dot{r}$  et  $\dot{\theta}$  :

$$\vec{v} = [\dot{r} \cos\theta - r\dot{\theta} \sin\theta] \vec{u}_x + [\dot{r} \sin\theta + r\dot{\theta} \cos\theta] \vec{u}_y$$

Mais cette écriture de  $\vec{v}$  n'est pas encore aboutie puisque ce vecteur est exprimé ici dans la base fixe  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$  des coordonnées cartésiennes de  $M$ . Il s'agit maintenant de l'exprimer dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  associée aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y \end{cases}$$

Un simple réarrangement de l'écriture précédente de  $\vec{v}$  permet d'écourter les calculs qui devraient s'ensuivre : en effet,  $\vec{v}$  peut se mettre sous la forme :

$$\vec{v} = \dot{r} [\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y] + r\dot{\theta} [-\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y]$$

où l'on voit directement apparaître les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ . On a donc le résultat définitif :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

**Second calcul du vecteur vitesse.** On montre maintenant que cette expression du vecteur vitesse peut s'obtenir à partir de l'expression du vecteur position dans la base naturelle des coordonnées polaires. Dans ce système en effet, ce vecteur s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r$$

Ainsi,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \vec{u}_r) = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

où l'on a pris soin de dériver aussi le vecteur  $\vec{u}_r$  : en effet, on se rappelle que la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  est locale et qu'elle accompagne le point  $M$  dans son mouvement. Il faut donc voir cette base comme dépendante du temps, en orientation, comme le montre son expression dans la base fixe  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$  écrite un peu plus haut et que l'on peut utiliser afin de poursuivre le calcul de  $\vec{v}$  :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y) = \frac{d\cos\theta}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\sin\theta}{dt} \vec{u}_y \\ &= -\dot{\theta} \sin\theta \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos\theta \vec{u}_y = \dot{\theta} (-\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y) \\ &= \dot{\theta} \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

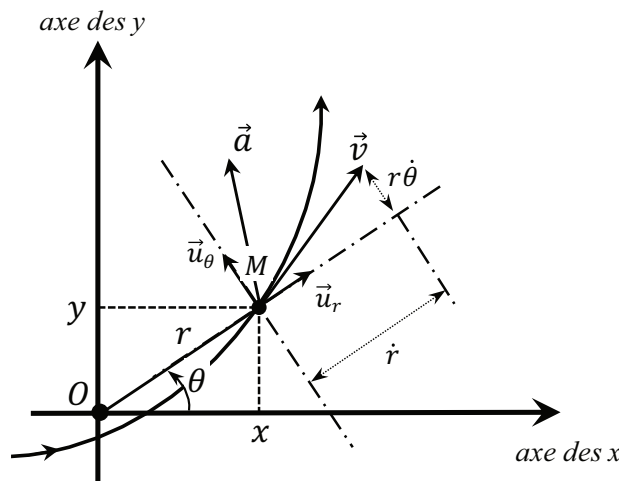
Ce résultat, à retenir, montre que le changement d'orientation du vecteur  $\vec{u}_r$  pendant la durée  $dt$  s'effectue le long de  $\vec{u}_\theta$  d'une quantité :  $d\vec{u}_r = d\theta \vec{u}_\theta$ . Un calcul tout à fait similaire, à retenir également, donnera :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

À partir de ces deux propriétés, on conclut que le vecteur vitesse prend la forme :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

en conformité avec le calcul précédent. La quantité  $\dot{r}$  exprime la vitesse à laquelle  $M$  s'éloigne ou se rapproche de l'origine  $O$  ; c'est la composante radiale du vecteur vitesse, c'est-à-dire sa composante selon  $\vec{u}_r$ . La composante de  $\vec{v}$  selon  $\vec{u}_\theta$ ,  $r\dot{\theta}$ , est appelée *composante orthoradiale*. Dans cette composante figure la dérivée



**Figure 12.** Composantes radiale ( $\dot{r}$ ) et orthoradiale ( $r\dot{\theta}$ ) du vecteur vitesse. Pendant la durée  $dt$  le vecteur accélération définit la façon dont la trajectoire s'incurve (démonstration p. 40).

temporelle  $\dot{\theta}$  de la variable angulaire  $\theta$ .  $\dot{\theta}$  est appelée *vitesse angulaire* ; elle indique la vitesse à laquelle l'angle  $\theta$  varie ; cette quantité s'exprime en radians par seconde :  $rad.s^{-1}$ .

Dans le système de coordonnées polaires, la norme du vecteur vitesse, c'est-à-dire communément : la vitesse du point  $M$ , s'écrira :

$$v = \|\vec{v}\| = \left( \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}$$

**11. Le vecteur accélération en coordonnées polaires.** Le calcul du vecteur accélération dans le système de coordonnées polaires ne présente pas d'autres difficultés que celles qui ont déjà été rencontrées pour le calcul du vecteur vitesse. À partir de l'expression de  $\vec{v}$  dans ce système de coordonnées, on trouve :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$  est la composante radiale du vecteur accélération du point  $M$  et  $(2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta})$  sa composante orthoradiale.  $\ddot{\theta}$  est l'*accélération angulaire* du point matériel.

### Compléments et exercices du chapitre 3

**C21. Différentielle du rayon vecteur dans les différents systèmes de coordonnées et vecteur vitesse.** Dans l'Annexe 2, la différentielle d'une fonction et d'un vecteur exprimé dans une base fixe a été définie. Ainsi, la différentielle du rayon vecteur  $\vec{r} = \overline{OM}$  s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$d\vec{r} = d\overline{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

En coordonnées polaires, le calcul du vecteur vitesse réalisé à la section 10 permet d'écrire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

On en déduit :

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

Dans les deux cas, on remarque que les quantités qui apparaissent devant chacun des vecteurs de la base du système de coordonnées choisi correspondent aux distances infinitésimales parcourues par le point  $M$  lorsque la variable concernée ( $x$ ,  $y$  ou  $z$  ;  $r$  ou  $\theta$ ) a varié d'une quantité infinitésimale ( $dx$ ,  $dy$  ou  $dz$  ;  $dr$  ou  $d\theta$ ), les autres

variables restant constantes. Cela est dû à la façon dont nous avons choisi les vecteurs de base en fonction du système de coordonnées à la section 6 (et C18).

Ainsi, il est facile d'écrire la différentielle du rayon vecteur dans le système de coordonnées sphériques à partir des raisonnements effectués dans cette section 6 :

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Et le vecteur vitesse dans ce système de coordonnées s'écrira :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

- Écrire la différentielle du rayon vecteur dans le système de coordonnées cylindriques et montrer que le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi + \dot{z} \vec{u}_z$$

**C22. Longueurs, surfaces et volumes de cubes élémentaires dans les différents systèmes de coordonnées.** La différentielle  $d\vec{r}$  du rayon vecteur exprime le déplacement élémentaire du point  $M$  lors d'un déplacement élémentaire de chacune des coordonnées. Dans le système de coordonnées cartésiennes, le point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  se retrouve donc en un point  $M' = (M + dM)$  de coordonnées  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ . Ce point est situé sur un sommet du cube<sup>1</sup> élémentaire de côtés  $dx, dy, dz$  construit à partir du point  $M$  (figure 13, page suivante).

La même interprétation géométrique a lieu dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques. En coordonnées cylindriques, le cube élémentaire a pour côtés  $d\rho, \rho d\varphi, dz$  ; en coordonnées sphériques :  $dr, r d\theta, r \sin\theta d\varphi$ .

Ces cubes font aussi apparaître 3 types de surfaces élémentaires pour chaque système de coordonnées. En coordonnées cartésiennes :  $dx dy, dx dz$  et  $dy dz$  ; en coordonnées cylindriques :  $\rho d\rho d\varphi, d\rho dz$  et  $\rho d\varphi dz$  ; en coordonnées sphériques :  $r dr d\theta, r \sin\theta dr d\varphi$ , et  $r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ .

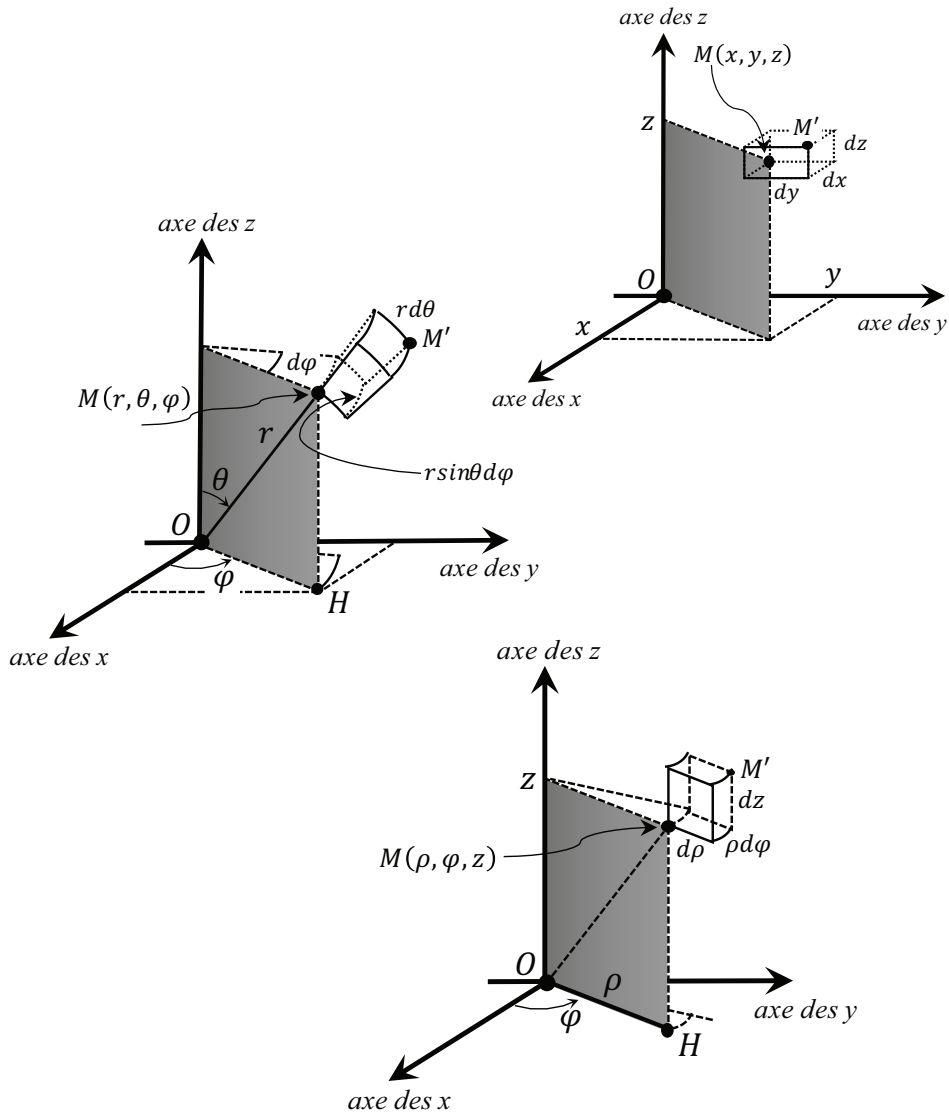
Enfin, chaque système de coordonnées génère un volume élémentaire :  $dx dy dz$  en coordonnées cartésiennes,  $\rho d\rho d\varphi dz$  en coordonnées cylindriques, et  $r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$  en coordonnées sphériques.

**C23. Mouvement rectiligne sinusoïdal.** On reprend l'exercice C8 et ses notations où un point matériel  $M$  est en mouvement rectiligne sinusoïdal le long de l'axe  $Ox$  et dont l'abscisse  $x$  admet pour équation horaire :  $x = A \cos(\omega t - \phi)$ .

---

<sup>1</sup> On devrait dire « parallélépipède rectangle » mais l'habitude est prise de dire cube.

- Écrire le rayon vecteur et déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  en fonction du temps.
- Montrer que  $x$  et sa dérivée seconde  $\ddot{x}$  obéissent à la relation :  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ . Une telle relation entre une fonction et ses dérivées est appelée *équation différentielle*.
- Tracer  $x$ ,  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  en fonction du temps.



**Figure 13.** Longueurs, surfaces et volumes élémentaires dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, sphériques et cylindriques.

**C24. Mouvement parabolique.** On reprend l'exercice **C12** et ses notations.

- Écrire le rayon vecteur et déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  en fonction du temps ainsi que leurs normes. Interpréter les constantes  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  et  $a$ .

**C25. Mouvement circulaire uniforme.** On reprend l'exercice **C9** et ses notations.

- Écrire le rayon vecteur dans le système de coordonnées cartésiennes et déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  en fonction du temps ainsi que leurs normes.
- Montrer que le vecteur accélération est proportionnel au rayon vecteur.
- Mêmes questions dans le système de coordonnées polaires cette fois. Quelle est la signification de  $\omega$  ?

**C26. Mouvement elliptique.** On reprend l'exercice **C10** et ses notations.

- Écrire le rayon vecteur et déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  en fonction du temps ainsi que leurs normes.
- Montrer que le vecteur accélération est proportionnel au rayon vecteur comme pour le mouvement circulaire uniforme.



## CHAPITRE 4

### MOUVEMENTS SIMPLES

**12. Mouvement rectiligne.** Le mouvement d'un point matériel est dit rectiligne si sa trajectoire est une droite.

Une droite se situant toujours dans un plan, on travaillera dans ce plan pour simplifier les calculs à venir. Soit donc un référentiel  $\mathcal{R}$  du plan au sein duquel on repère le point  $M$  à l'aide du système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . L'équation de la trajectoire est alors :  $y = \alpha x + \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes réelles supposées connues. Il est clair que  $\beta$  est la valeur de  $y$  lorsque  $x = 0$ . L'interprétation de  $\alpha$  va apparaître dans les calculs qui suivent.

En prenant en compte l'équation de la trajectoire, le rayon vecteur s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y = x \vec{u}_x + (\alpha x + \beta) \vec{u}_y$$

D'où les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs normes :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} (\vec{u}_x + \alpha \vec{u}_y) \quad ; \quad v = \|\vec{v}\| = |\dot{x}| \sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x} (\vec{u}_x + \alpha \vec{u}_y) \quad ; \quad a = \|\vec{a}\| = |\ddot{x}| \sqrt{1 + \alpha^2}$$

Une conséquence immédiate de ces résultats est que les vecteurs vitesse et accélération sont constamment colinéaires<sup>1</sup>. On démontre que la réciproque est vraie : *si les vecteurs vitesse et accélération sont constamment colinéaires, alors la trajectoire du point matériel est une droite.*

L'examen de l'écriture de  $\vec{v}$  permet d'interpréter la constante  $\alpha$  : ce coefficient est sans dimensions et fournit le rapport entre la composante  $\dot{y}$  du vecteur vitesse selon  $\vec{u}_y$  et sa composante  $\dot{x}$  selon  $\vec{u}_x$  :  $\alpha = \dot{y}/\dot{x}$ , ce rapport est indépendant du temps. La proposition inverse est vraie aussi : *si le rapport  $\dot{y}/\dot{x}$  est constant, alors la trajectoire qui a lieu dans le plan  $xOy$  est une droite.*

Comme on l'a déjà constaté à la section 4, la donnée de la trajectoire ne suffit pas pour déterminer la nature exacte du mouvement : il faut aussi connaître la façon dont évolue le point  $M$  sur la droite en question, c'est-à-dire connaître  $x(t)$  (ou  $y(t)$ ). Il

---

<sup>1</sup> Hormis en certains points de la trajectoire pour lesquels, soit le vecteur vitesse, soit le vecteur accélération s'annulent, ou les deux simultanément. Ces points particuliers, s'ils existent, doivent faire l'objet d'une étude spéciale pour chaque mouvement que l'on étudie.

y a donc plusieurs types (une infinité en fait) de mouvements rectilignes qui se distinguent tous par la donnée de  $x(t)$  ou, si l'on préfère, par la donnée de  $\dot{x}(t)$  ou  $\ddot{x}(t)$ . La nomenclature traditionnelle distingue trois cas :

**Mouvement rectiligne uniforme.** Si le point  $M$  se déplace à vitesse constante le long de la droite, alors le mouvement est dit *rectiligne uniforme*.

On a dans ce cas :  $v = \text{constante} = v_0$ . Ce qui impose :  $\dot{x} = \pm v_0/\sqrt{1 + \alpha^2}$ . Ainsi,  $\dot{x}$  est une constante positive ou négative selon le sens de parcours.  $x(t)$  est donc une fonction linéaire du temps et  $\ddot{x} = 0$ . Le vecteur vitesse est un vecteur constant et le vecteur accélération est toujours nul.

Le mouvement rectiligne uniforme est d'une importance capitale en mécanique : on fonde sur lui la notion de référentiels galiléens et le principe d'inertie.

**Mouvement rectiligne uniformément varié.** Si le point  $M$  se déplace à accélération constante le long de la droite, alors le mouvement est dit *rectiligne uniformément varié*.

On a dans ce cas :  $a = \text{constante} = a_0$ . Ce qui impose :  $\ddot{x} = \pm a_0/\sqrt{1 + \alpha^2}$  :  $\ddot{x}$  est donc une constante positive ou négative selon le sens de parcours. Cela a lieu si  $\dot{x}(t)$  est une fonction linéaire du temps ;  $x(t)$  est alors une fonction quadratique du temps. Le vecteur accélération est donc un vecteur constant et le vecteur vitesse croît (ou décroît) linéairement par rapport au temps.

Galilée a étudié expérimentalement le mouvement rectiligne uniformément varié lors de ses études sur la chute libre des poids. Une particule chargée accélérée sous l'effet d'un champ électrique constant réalise aussi un mouvement rectiligne uniformément varié. Plus généralement, tout objet initialement au repos et soumis à une force de poussée constante réalise ce type de mouvement.

**Mouvement rectiligne varié.** Ce dernier cas regroupe tous les autres cas possibles et porte le nom générique de *mouvement rectiligne varié*. On l'appelle plus précisément mouvement rectiligne sinusoïdal (**C8, C23**) si par exemple  $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$  (avec  $x_0$  et  $\omega$  deux constantes), mouvement rectiligne exponentiel si  $x(t) = x_0 \exp(t/t_0)$ , etc...

**13. Mouvement circulaire.** Le mouvement d'un point matériel est dit circulaire si sa trajectoire est un cercle.

Un cercle est une courbe plane. On se placera donc dans le plan  $xOy$  de cette trajectoire pour l'étudier. Il est judicieux de placer l'origine  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}$  au centre du cercle et de choisir le système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  pour repérer le point  $M$ . L'équation de la trajectoire est alors simplement :  $r = R$ , où la constante  $R$  est le rayon du cercle de centre  $O$  parcouru par  $M$ .

En prenant en compte l'équation de la trajectoire dans l'écriture du rayon vecteur, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r = R \vec{u}_r$$

On en déduit les vecteurs vitesse et accélération, ainsi que leurs normes :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad ; \quad v = \|\vec{v}\| = R |\dot{\theta}|$$

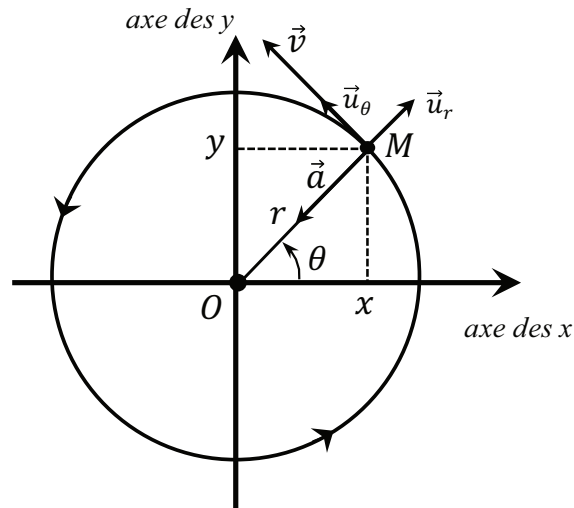
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta \quad ; \quad a = \|\vec{a}\| = R \sqrt{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2}$$

Comme pour le mouvement rectiligne, il existe une infinité de types de mouvements circulaires selon la façon dont  $\theta$  varie avec le temps. On remarque qu'en général on ne peut rien dire de particulier à propos de l'angle que font entre eux les vecteurs vitesse et accélération, sauf dans un cas :

**Mouvement circulaire uniforme.** Si le point  $M$  se déplace à vitesse constante le long du cercle, on dit que le mouvement est circulaire uniforme (C9, C25).

Si  $v = \text{constante} = v_0$ , alors  $\dot{\theta} = \pm v_0/R$  : la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est une constante positive ou négative selon le sens de parcours, et  $\ddot{\theta} = 0$ . Il faut donc que  $\theta(t)$  soit une fonction linéaire du temps. Dans ce cas, les vecteurs vitesse et accélération sont constamment perpendiculaires entre eux ; le vecteur vitesse est bien sûr tangent à la trajectoire et le vecteur accélération est toujours dirigé vers le centre du cercle.

On fera attention au fait que si l'accélération angulaire du point  $M$  est bien nulle, son accélération elle, ne l'est pas : elle est constante et vaut  $a = R \dot{\theta}^2 = v_0^2/R$ .



**Figure 14.** Le mouvement circulaire uniforme se réalise à vitesse constante :  $v = v_0$ . Le vecteur accélération est constamment dirigé vers le centre du cercle et perpendiculaire au vecteur vitesse.

Le mouvement circulaire uniforme peut avoir lieu dans la nature lorsque le point  $M$  est soumis à un type de force particulier que l'on appelle force centrale (ou radiale), c'est-à-dire une force toujours dirigée vers un même point central, comme la force de gravitation existant entre une planète et son soleil par exemple.

Les autres types de mouvements circulaires ne s'observent que lorsque la trajectoire est imposée : par exemple, une bille astreinte à se mouvoir dans une glissière circulaire.

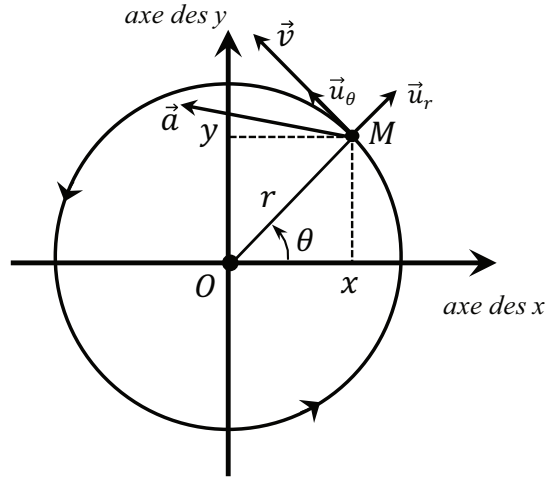


Figure 15. Le mouvement circulaire quelconque.

**14. Mouvement hélicoïdal.** De façon générique, le mouvement d'un point matériel est dit hélicoïdal si sa trajectoire s'enroule autour d'un axe. Nous n'étudierons ici que le cas simple où la trajectoire est une hélice circulaire. Il est bien avisé d'assimiler l'axe de l'hélice à l'axe  $Oz$  du référentiel  $\mathcal{R}$  et de travailler dans le système de coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$ . Les équations de l'hélice circulaire sont alors :  $\rho = R$  et  $z = h \varphi / 2\pi$ , où  $R$  et  $h$  sont deux constantes.  $R$  s'interprète comme le rayon de l'hélice, c'est-à-dire le rayon du cercle obtenu en projetant l'hélice dans le plan  $xOy$ .  $h$  est le *pas de l'hélice*, c'est-à-dire la distance parcourue le long de l'axe  $Oz$  lorsque le point  $M$  a réalisé un tour complet autour de cet axe. Le rayon vecteur s'écrit, après avoir tenu compte des équations de la trajectoire :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z = R \vec{u}_\rho + \frac{h \varphi}{2\pi} \vec{u}_z$$

D'où les vecteurs vitesse, accélération et leurs normes :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{h \dot{\varphi}}{2\pi} \vec{u}_z ; v = \|\vec{v}\| = |\dot{\varphi}| \sqrt{R^2 + h^2/4\pi^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R \dot{\varphi}^2 \vec{u}_\rho + R \ddot{\varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{h}{2\pi} \ddot{\varphi} \vec{u}_z ;$$

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{R^2(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2) + h^2 \ddot{\varphi}^2 / 4\pi^2}$$

Comme pour le mouvement circulaire, on ne peut rien dire de très particulier à propos de ces résultats, sauf dans le cas où l'hélice est parcourue à vitesse constante. On parlera alors de *mouvement hélicoïdal circulaire uniforme*.

Lorsque  $v = v_0$ , l'angle  $\varphi$  doit être une fonction linéaire du temps :  $\varphi = \omega t$  où  $\omega$  est une constante qui n'est rien d'autre que la vitesse angulaire de  $M$  :  $\dot{\varphi} = \omega$  : l'hélice est donc parcourue par le point  $M$  à vitesse angulaire constante dans ce cas précis et les résultats précédents deviennent :

$$\vec{v} = R \omega \vec{u}_\varphi + \frac{h \omega}{2\pi} \vec{u}_z ; \quad v = v_0 = |\omega| \sqrt{R^2 + h^2 / 4\pi^2}$$

$$\vec{a} = -R \omega^2 \vec{u}_\rho \quad ; \quad a = \|\vec{a}\| = R \omega^2$$

où l'on observe que l'accélération du point  $M$  est constante (en norme). On observe également que les vecteurs vitesse et accélération sont constamment perpendiculaires entre eux, avec un vecteur accélération constamment dirigé vers l'axe  $Oz$  et parallèle au plan  $xOy$ . Ce sont là de nombreux points communs avec le

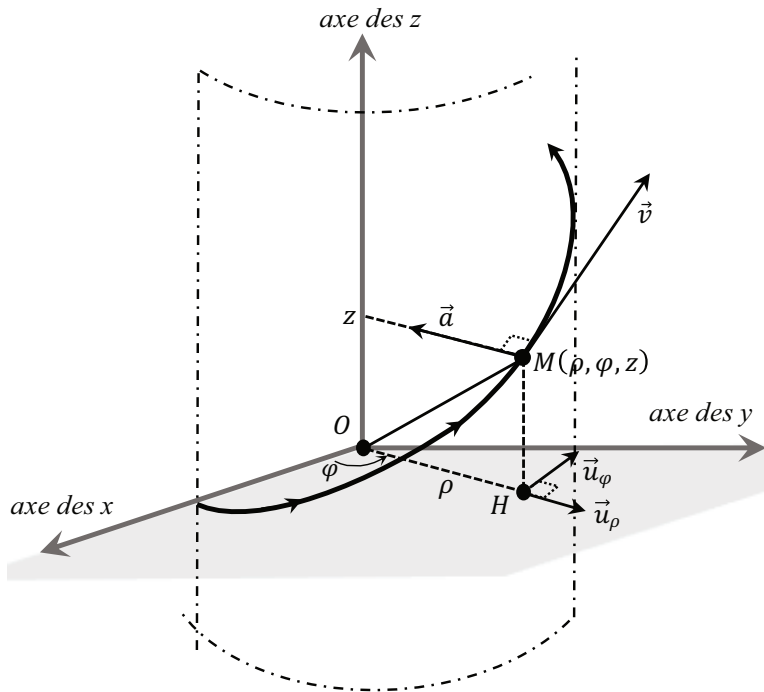


Figure 16. Le mouvement hélicoïdal circulaire uniforme.

mouvement circulaire uniforme à quelques différences près toutefois, en particulier : les vecteurs position, vitesse et accélération ne sont jamais situés dans le même plan.

Le mouvement hélicoïdal circulaire uniforme résulte de la composition d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan  $xOy$  et d'un mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe  $Oz$ . En effet, les coordonnées cartésiennes de  $M$  s'écrivent, en fonction des coordonnées cylindriques et en tenant compte des équations de la trajectoire, ainsi que d'une vitesse angulaire constante égale à  $\omega$  :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi = R \cos\omega t \\ y = \rho \sin\varphi = R \sin\omega t \\ z = \frac{h \varphi}{2\pi} = \frac{h \omega}{2\pi} t \end{cases}$$

Dans le plan  $xOy$ , on a donc :  $x^2 + y^2 = R^2$  qui est bien l'équation d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , parcouru à la vitesse constante  $v_{xOy} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R |\omega|$ . Tandis que l'axe  $Oz$  est parcouru à la vitesse constante  $v_z = |\dot{z}| = h |\omega|/2\pi$ .

On observe ce type de mouvement lorsqu'une particule chargée se déplace en présence d'un champ magnétique uniforme dans l'espace (C73).

## Compléments et exercices du chapitre 4

**C27. Mouvements rectilignes amortis.** On considère un point matériel en mouvement rectiligne le long de l'axe  $Ox$ . Son équation horaire a pour expression :  $x = v_0 \tau [1 - \exp(-t/\tau)]$ , où  $v_0 > 0$  est une constante à interpréter et  $\tau > 0$  est un paramètre constant ayant les dimensions d'un temps appelé *temps de relaxation*.

- Écrire le rayon vecteur et déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  en fonction du temps. Tracer  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  et  $\ddot{x}(t)$ , et interpréter  $v_0$ . Indication : pour tracer ces fonctions, on pourra prendre des variables adimensionnées ( $T = t/\tau$ ,  $X = x/(v_0\tau)$ ,  $V = \dot{x}/v_0$  et  $A = \tau \ddot{x}/v_0$ ).

- Montrer que  $x$  obéit à l'équation différentielle :  $\ddot{x} + \dot{x}/\tau = 0$ .

- On a maintenant :  $x = v_0 \tau [1 - \exp(-t/\tau)] + v_\infty t$  où  $v_\infty$  est une nouvelle constante à interpréter. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération. Quelle est la nature du mouvement lorsque  $t \rightarrow \infty$  ?

- Montrer que  $x$  obéit à l'équation différentielle :  $\ddot{x} + \dot{x}/\tau = v_\infty/\tau$ .

Ce type de mouvement est celui d'un point matériel possédant une vitesse initiale et soumis à une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse acquise, ainsi

qu'à une force de poussée (nulle dans le premier cas (voir **C53**), constante pour le second cas) dans la direction de cette vitesse. Une bille qui tombe dans un fluide sous l'effet de la pesanteur rentre dans le second cas.

**C28. Hélice spirale.** Un point matériel  $M$  repéré par ses coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  suit une trajectoire hélicoïdale d'axe  $Oz$  dont les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \exp(-t/\tau) \\ \varphi = \omega t + \phi \\ z = -h \exp(-t/\tau) \end{cases}$$

où  $\rho_0, h, \phi, \omega$  et  $\tau$  sont des constantes qu'il est aisé d'interpréter immédiatement.

- Calculer les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs normes.
- Montrer que l'angle  $\lambda$  que font ces deux vecteurs entre eux est constant et que son cosinus vaut :

$$\cos \lambda = - \frac{\sqrt{\rho_0^2(1 + \omega^2\tau^2) + h^2}}{\sqrt{\rho_0^2(1 + \omega^2\tau^2)^2 + h^2}}$$

- Quelle est la nature du mouvement de cette trajectoire projetée sur l'axe  $Oz$  (*indication* : chercher à quelle équation différentielle obéit  $z$  et comparer avec le **C27**) ?
- La trajectoire projetée sur le plan  $xOy$  est quant à elle une spirale logarithmique. Quelle est son équation en coordonnées polaires ? Cette courbe est étudiée au **C35**.

On rencontre ce type de trajectoire lorsqu'une particule est soumise à un champ magnétique constant et subit dans le même temps une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse acquise. Ce problème fait l'objet du chapitre 11 avec une figure de cette trajectoire (figure 49).

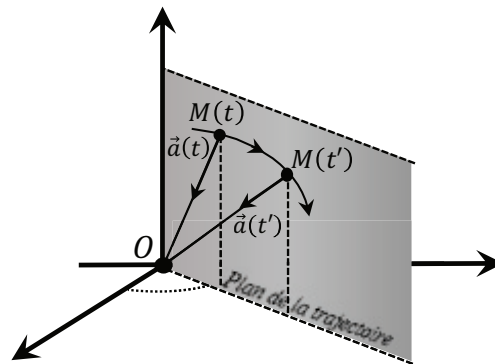
**C29 : Annexe 3.** Étudier l'Annexe 3 sur les primitives de fonctions.



## CHAPITRE 5

### MOUVEMENT À ACCÉLÉRATION CENTRALE

**15. Définition du mouvement à accélération centrale.** On appelle mouvement à accélération centrale, tout mouvement dont le vecteur accélération est constamment dirigé vers un certain point  $O$ . Afin de simplifier les calculs à venir, on choisit naturellement ce point  $O$  comme origine du référentiel par rapport auquel on étudie ce type de mouvement aux propriétés particulières (figure 17).



*Figure 17.* Un mouvement à accélération centrale est un mouvement pour lequel le vecteur accélération du point matériel est constamment dirigé vers un centre  $O$ . On démontre dans ce chapitre que la trajectoire associée à un tel mouvement est plane.

Deux points matériels en interaction gravitationnelle (théorie de Newton, 1685) possèdent des accélérations centrales, de même que deux particules chargées en interaction coulombienne (Coulomb, 1785).

**16. Le mouvement à accélération centrale est plan.** Nous commencerons par la remarque suivante : le plan instantané (*id est* : à l'instant  $t$ ) au sein duquel est contenu une « portion infinitésimale » de la trajectoire suivie par le point matériel est celui qui contient le vecteur vitesse  $\vec{v}$  et sa variation à l'instant  $t$ , c'est-à-dire le vecteur accélération  $\vec{a}$ . En général, ce plan instantané change à chaque instant et la trajectoire est une courbe gauche.

Mais, si le vecteur accélération est central, le plan instantané est alors celui engendré par le vecteur vitesse et le vecteur position à l'instant  $t$ , et on démontre ici que ce plan est toujours le même, quel que soit  $t$ .

Pour ce faire, formons le produit vectoriel :  $\vec{r} \wedge \vec{a}$ , qui est nul puisque  $\vec{a}$  est central. On a ainsi, en vertu des propriétés de la dérivation d'un produit vectoriel :

$$\vec{0} = \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v}$$

Mais le dernier terme de cette expression est nul. D'où ce résultat : si le vecteur accélération est central, alors la quantité vectorielle :  $\vec{\alpha} := \vec{r} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$  reste constante tout au long du mouvement du point matériel. Autrement dit :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$$

On peut donner le nom de *moment du vecteur vitesse*<sup>1</sup> par rapport au point  $O$  à ce vecteur  $\vec{\alpha}$ . Il est intimement lié à l'étude des rotations spatiales sommairement traitée au chapitre 15. Ce qu'il faut voir, c'est qu'en vertu de sa définition  $\vec{\alpha}$  est perpendiculaire à  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  à chaque instant :  $\vec{\alpha}$  est donc perpendiculaire au plan instantané de la trajectoire à chaque instant si le vecteur accélération est central ; et puisqu'il vient d'être démontré que  $\vec{\alpha}$  reste constant dans ce cas, il en résulte que ce plan instantané reste le même tout au long de la trajectoire  $\square$ . En résumé :

*La trajectoire d'un mouvement à accélération centrale est plane et se réalise dans le plan  $(\vec{r}, \vec{v})$ .*

En prenant le raisonnement à rebours, il est facile de démontrer que si le moment  $\vec{\alpha}$  du vecteur vitesse du point matériel est un vecteur constant, alors le mouvement est plan et son accélération est centrale.

En revanche, tout mouvement plan n'est pas forcément à accélération centrale. En effet,  $\vec{\alpha}$  est bien constamment orthogonal au plan de la trajectoire dans ce cas, mais sa norme peut fort bien varier et donc :  $d\vec{\alpha}/dt \neq \vec{0}$ . Le **C31** donne des précisions à ce sujet.

**17. Loi des aires.** Puisque le vecteur  $\vec{\alpha}$  est constant lorsque l'accélération est centrale, sa norme est elle aussi constante. Pour la calculer, on peut identifier le plan de la trajectoire au plan  $xOy$  et utiliser les coordonnées polaires qui seront dénommées ici :  $\rho$  et  $\varphi$ . Le calcul donne :

$$\vec{\alpha} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \rho^2 \dot{\varphi} \vec{u}_z$$

Il faut donc conclure que lorsque le mouvement est à accélération centrale, la quantité  $\rho^2 \dot{\varphi}$  est une constante du mouvement, autrement dit :

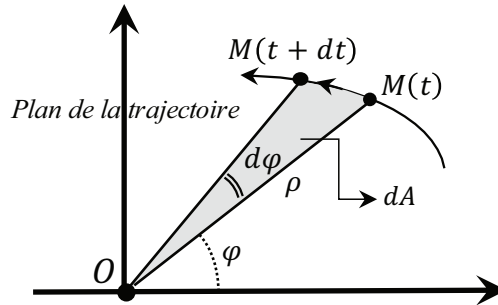
---

<sup>1</sup> En multipliant  $\vec{\alpha}$  par la masse  $m$  du point matériel, on obtient la grandeur dynamique vectorielle appelée *moment cinétique* ou encore moment angulaire (par rapport au point  $O$ ) :  $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$  (cf chapitre 16).

$$\frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) = 0$$

Cette propriété est dénommée *loi des aires*. En effet, l'interprétation géométrique de ce résultat est la suivante : traçons une portion de la trajectoire entre deux instants infiniment voisins  $t$  et  $t + dt$  ; l'aire infinitésimale  $dA$  du triangle  $OM(t)M(t + dt)$  vaut à l'ordre 1 (figure 18) :

$$dA = \frac{1}{2} \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \rho \times \rho d\varphi$$



**Figure 18.** Aire élémentaire du triangle élémentaire formé par les trois points  $OM(t)M(t + dt)$  pendant la durée infinitésimale  $dt$ .

En divisant ce résultat par  $dt$  on obtient ainsi la vitesse de l'aire  $A$  balayée par le rayon vecteur au cours du temps, que l'on appelle *vitesse aréolaire* :

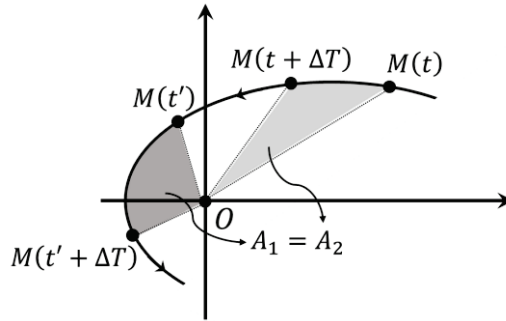
$$v_{aré} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}$$

Cette vitesse aréolaire est donc constante lors d'un mouvement à accélération centrale. Ainsi, l'aire  $A$  balayée par le rayon vecteur pendant une durée finie qui vaut :  $\Delta T = t_2 - t_1$  sera :

$$A = \int_{t_1}^{t_2} v_{aré} dt = v_{aré} \Delta T$$

Ce résultat étant indépendant de la position du point  $M$  sur la trajectoire, on est conduit à ladite

**Loi des aires :** dans un mouvement à accélération centrale, les aires balayées par le rayon vecteur en des temps égaux sont égales.



**Figure 19.** La loi des aires : dans un mouvement à accélération centrale, les aires balayées par le rayon vecteur pendant une durée finie  $\Delta T$  sont égales.

**18. Formule de Binet.** On établit maintenant une formule qui permet de calculer le vecteur accélération centrale si on connaît l'équation de la trajectoire  $\rho(\varphi)$ .

Dans la base des coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$ , le vecteur accélération s'écrit de façon générale :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) \vec{u}_\varphi$$

Si ce vecteur est central, c'est que sa composante orthoradiale est nulle, ce qui conduit à nouveau à la loi des aires<sup>1</sup> qui sera écrite ici sous la forme :  $\rho^2\dot{\varphi} = C$ . On appelle généralement  $C$  : *la constante des aires*.

En utilisant cette loi, le vecteur accélération peut s'écrire comme :

$$\vec{a} = \left( \ddot{\rho} - \frac{C^2}{\rho^3} \right) \vec{u}_\rho$$

Il s'agit maintenant d'exprimer  $\vec{a}$  en fonction des dérivées de  $\rho$ , non pas par rapport au temps, mais par rapport à  $\varphi$ . Pour cela, on démontre dans un premier temps qu'en tenant compte de la loi des aires :

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{C}{\rho^2}$$

D'où l'on déduit, toujours en tenant compte de la loi des aires :

$$\ddot{\rho} = \frac{C^2}{\rho^2} \left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} - \frac{2}{\rho^3} \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right]$$

<sup>1</sup> En effet, il suffit de dériver l'égalité  $\rho^2\dot{\varphi} = C$  pour voir que la composante orthoradiale de  $\vec{a}$  est bien nulle. Inversement, si la composante orthoradiale est nulle, alors en multipliant cette composante par  $\dot{\varphi}$  et en intégrant par rapport au temps, on trouve  $\rho^2\dot{\varphi} = Cte$ .

Ce résultat se simplifie beaucoup si on réalise le changement de variable :  $w = 1/\rho$ .

On a d'abord :

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{d\rho}{dw} \cdot \frac{dw}{d\varphi} = -\frac{1}{w^2} \cdot \frac{dw}{d\varphi}$$

Puis :

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right) = -\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{w^2} \cdot \frac{dw}{d\varphi} \right) = - \left[ -\frac{2}{w^3} \cdot \left( \frac{dw}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{w^2} \cdot \frac{d^2w}{d\varphi^2} \right]$$

Et ainsi :

$$\ddot{\rho} = -C^2 w^2 \frac{d^2w}{d\varphi^2}$$

De ce résultat, on conclut que le vecteur accélération prend la forme :

$$\vec{a} = -C^2 w^2 \left( \frac{d^2w}{d\varphi^2} - w \right) \vec{u}_\rho$$

Cette formule due à Binet (1786 – 1856) sera d'un grand secours au chapitre 17 lors de l'étude du mouvement d'une planète autour de son soleil.

## Compléments et exercices du chapitre 5

**C30. Mouvement circulaire uniforme.** On suppose que la loi horaire de l'angle polaire  $\varphi$  d'un point  $M$  dans un mouvement à accélération centrale est :  $\varphi = \omega t$  où  $\omega$  est une constante qui représente la vitesse angulaire.

- Montrer qu'alors le mouvement est circulaire uniforme.
- Donner le rayon du cercle en fonction de la constante des aires  $C$  et de  $\omega$ .
- Calculer aussi les vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  et leurs normes.
- Démontrer que le mouvement circulaire uniforme est un mouvement à accélération centrale (revoir la section 13).

**C31. Courbe quelconque décrite par un mouvement à accélération centrale.** Un point  $M$  de coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$  est dans un mouvement à accélération centrale le long d'une courbe plane d'équation  $\rho = \rho(\varphi)$ .

- Montrer à l'aide de la loi des aires que la loi horaire pour l'angle  $\varphi$  s'écrit :

$$C(t - t_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

où  $C$  est la constante des aires et  $\varphi_0$  la valeur de  $\varphi$  au temps  $t_0$ .

Par ce moyen, si on connaît l'équation de la courbe,  $\rho(\varphi)$ , alors on peut intégrer et obtenir la loi inverse  $t(\varphi)$  au lieu de  $\varphi(t)$ . Par ailleurs on comprend ici qu'une même courbe peut être parcourue par un point  $M$  dans un mouvement à accélération centrale ou non : cela dépend de la loi horaire à laquelle  $\varphi$  obéit. Enfin, on peut aussi conclure que toute courbe du plan décrite par une équation  $\rho = \rho(\varphi)$  peut *a priori* être parcourue dans un mouvement à accélération centrale.

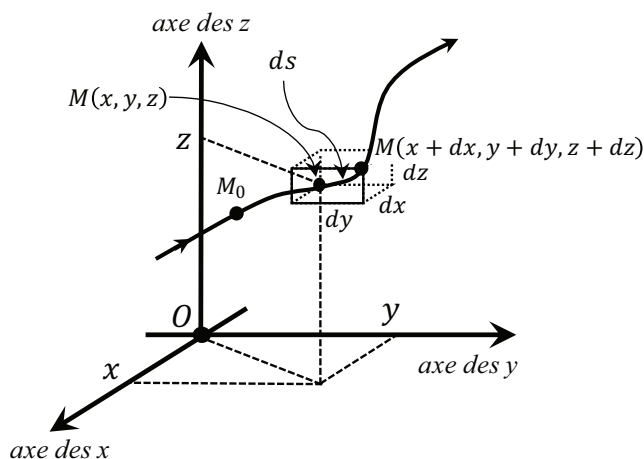
**C32. Le vecteur accélération en coordonnées sphériques.** Le but ici est de calculer les vecteurs vitesse et accélération d'un point matériel  $M$  repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  en les exprimant dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ .

- Calculer d'abord la dérivée temporelle du vecteur  $\vec{u}_r$  exprimé dans la base fixe  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  et exprimer le résultat dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ . En déduire le vecteur vitesse en coordonnées sphériques.
- Pour calculer les dérivées temporelles des deux autres vecteurs  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ , il est préférable de passer par l'intermédiaire des vecteurs  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_z$  des coordonnées cylindriques et de les exprimer dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  en utilisant les formules inverses obtenues au **C19** qui fournissent  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  dans cette base : procéder ainsi et en déduire le vecteur accélération en coordonnées sphériques.

## CHAPITRE 6

### ABSCISSE CURVILIGNE ET TRIÈDRE DE SERRET-FRENET<sup>1</sup>

**19. Élément d'arc de courbe.** Considérons une trajectoire quelconque parcourue par le point matériel  $M$ . Pendant la durée infinitésimale  $dt$ , le point  $M$  s'est déplacé le long d'un élément d'arc infinitésimal de la courbe dont la longueur sera notée :  $ds$  (figure 20).



**Figure 20.** L'élément d'arc de courbe  $ds$  parcouru par le point  $M$  pendant la durée  $dt$ . En choisissant un point  $M_0$  de la trajectoire, on définit aussi l'abscisse curviligne  $s(t)$  du point  $M$  (voir la section 20).

Cela étant, la vitesse (sa norme) du point  $M$  peut donc s'écrire comme :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

L'élément d'arc de courbe  $ds$  est relié aux quantités infinitésimales dont ont évolué les coordonnées du point  $M$  pendant cette durée  $dt$ . À supposer en effet que  $M$  soit repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , alors, à l'instant  $t$ , le rayon vecteur s'écrit :

$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

---

<sup>1</sup> Plusieurs sections de ce chapitre ont été rédigées avec l'aide de : E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, tome 1, chapitre XI, 3ème édition (Gauthier-Villars, 1917) ; A.R. Forsyth, *Lectures on the differential geometry of curves and surfaces*, Chapter 1 (Cambridge, 1912). Librement disponibles sur le net.

Sa différentielle est donc :

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

et la distance élémentaire parcourue par le point  $M$ , qui s'assimile à l'élément d'arc  $ds$ , s'écrit comme :

$$\|d\vec{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$$

En divisant ce résultat par  $dt$  on obtient la vitesse du point  $M$ , que l'on écrit ici sous toutes ses formes possibles :

$$\begin{aligned} \frac{\|d\vec{r}\|}{dt} &= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{ds}{dt} = v = \|\vec{v}\| = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| \end{aligned}$$

Dans les systèmes de coordonnées dont la base associée est locale, on raisonne pareillement tout en prenant garde à ce que cette base évolue en orientation au cours du temps. Ainsi, pour une courbe plane dans le système de coordonnées polaires par exemple, on fera l'analyse suivante : pendant la durée  $dt$ , le rayon vecteur évolue d'une quantité :

$$d\vec{r} = d(r \vec{u}_r) = dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r$$

où  $d\vec{u}_r$  correspond précisément à l'évolution en orientation du vecteur  $\vec{u}_r$  qui a déjà été estimée à la section 9 :  $d\vec{u}_r = d\theta \vec{u}_\theta$ . D'où :

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

Et ainsi :

$$\|d\vec{r}\| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = ds$$

La division par  $dt$  de ce résultat fournit la vitesse de  $M$  :

$$\begin{aligned} \frac{\|d\vec{r}\|}{dt} &= \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} = \frac{ds}{dt} = v = \|\vec{v}\| = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| \end{aligned}$$

**20. Abscisse curviligne.** Si, à l'instant  $t_0$ , le point matériel est au point  $M_0$  de la trajectoire suivie, on peut choisir ce point  $M_0$  comme origine (figure 20). À un instant  $t$  ultérieur, le point matériel est en  $M$  sur la courbe. La distance qui le sépare de  $M_0$

est égale à la longueur de l'arc de courbe :  $Arc(M_0M)$ . On appelle *abscisse curviligne*  $s$  du point  $M$  cette longueur :

$$s = s(t) := Arc(M_0M(t))$$

Si on connaît la vitesse du point  $M$  partout sur la courbe en fonction du temps, alors on peut calculer son abscisse curviligne. En effet :

$$s = \int_{s(t_0)=0}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Si on connaît la ou les équations de la trajectoire, alors on peut aussi calculer  $s$ . En effet, à deux dimensions et en coordonnées cartésiennes par exemple, on aura :

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^t v dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \end{aligned}$$

Cette expression fournit la longueur de la courbe  $y(x)$  entre les deux abscisses  $x_0$  et  $x$ . On pourra établir une formule similaire adaptée au cas où l'équation de la trajectoire est donnée en coordonnées polaires.

**21. Le trièdre de Serret-Frenet.** Le trièdre de Serret-Frenet  $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$  est une base orthonormée locale *intrinsèque* à la courbe suivie : c'est-à-dire que son orientation suit l'évolution de la courbe en permanence. Cela permet de travailler avec des quantités intrinsèques, c'est-à-dire propres à la courbe, indépendantes du système de coordonnées et de l'origine choisis au départ.

**Le vecteur tangent  $\vec{\tau}$ .** On définit le premier vecteur de la base de Serret-Frenet pour qu'il soit constamment tangent à la trajectoire suivie par le point matériel. Le vecteur vitesse du point matériel, divisé par sa norme sera donc ce premier vecteur (figure 21) :

$$\vec{\tau} := \frac{\vec{v}}{v}$$

Du point de vue de la géométrie pure, on préfère ne pas faire intervenir la notion de temps ou de mouvement dans la définition de  $\vec{\tau}$  :

$$\frac{\vec{v}}{v} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} \Rightarrow \vec{\tau} := \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$\vec{\tau}$  est ainsi défini via l'élément d'arc de courbe.

**Le vecteur normal  $\vec{n}$ .** En regardant maintenant la variation de  $\vec{\tau}$  vis-à-vis de la variation d'une variable quelconque, en particulier vis-à-vis de l'élément d'arc de courbe  $ds$ , il est clair que l'on obtient un vecteur perpendiculaire à  $\vec{\tau}$  puisque ce dernier est normé à l'unité<sup>1</sup>. Ainsi, en normant le vecteur  $d\vec{\tau}/ds$ , on aura défini un vecteur unitaire constamment perpendiculaire à la trajectoire. Ce vecteur normal,  $\vec{n}$ , est le second vecteur de la base de Serret-Frenet<sup>2</sup> (figure 21) :

$$\vec{n} := \frac{d\vec{\tau}/ds}{\|d\vec{\tau}/ds\|}$$

La direction indiquée par  $\vec{n}$  est appelée : *normale principale* à la trajectoire. Par construction,  $\vec{n}$  est toujours dirigé vers la concavité de la courbe.

Le plan généré par les deux vecteurs  $(\vec{\tau}, \vec{n})$  est appelé *plan osculateur* à la courbe au point  $M$ .

**Le vecteur binormal  $\vec{b}$ .** Il est facile maintenant de compléter la base de Serret-Frenet à partir des deux vecteurs  $\vec{\tau}$  et  $\vec{n}$  puisqu'il suffit de réaliser leur produit vectoriel pour obtenir un troisième vecteur qui leur sera constamment perpendiculaire. On définit donc :

$$\vec{b} := \vec{\tau} \wedge \vec{n}$$

Ce vecteur  $\vec{b}$  définit une troisième direction appelée *binormale* qui est perpendiculaire au plan osculateur (figure 21).

Le plan généré par les deux vecteurs  $(\vec{\tau}, \vec{b})$  est appelé *plan rectifiant* (à la courbe en  $M$ ). Le plan généré par les deux vecteurs  $(\vec{n}, \vec{b})$  est appelé *plan normal* (à la courbe en  $M$ ).

Enfin, dans l'ordre indiqué :  $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$ , la base de Serret-Frenet est directe. Elle est ainsi définie à chaque instant ou, si l'on préfère, en chaque point de la courbe.

**22. Aspects géométriques.** On démontre dans les cours de géométrie différentielle que le plan osculateur  $(\vec{\tau}, \vec{n})$  qui contient la tangente et la normale principale à la courbe en  $M$  est, parmi tous les plans tangents à la courbe en  $M$ , celui qui est au plus proche d'elle dans le voisinage immédiat de  $M$ .

La projection de l'élément d'arc  $ds$  de la courbe sur ce plan osculateur est un élément d'arc  $ds'$  de longueur égale à  $ds$  à des termes infiniment petits d'ordre supérieur près. On démontre également que si le plan osculateur est le même en tout point de la courbe, alors cette courbe est plane. Inversement, le plan au sein duquel une courbe plane évolue est son plan osculateur.

<sup>1</sup> Voir l'Annexe 2, section A14 à ce sujet.

<sup>2</sup> Dans les problèmes où le temps intervient explicitement, on écrira :  $\vec{n} := \frac{d\vec{\tau}/dt}{\|d\vec{\tau}/dt\|}$ .

Le plan rectifiant  $(\vec{\tau}, \vec{b})$  qui contient la tangente et la binormale à la courbe en  $M$  est un autre plan tangent à la courbe en  $M$ . La projection de l'élément d'arc  $ds$  de la courbe sur ce plan rectifiant est un élément d'arc  $ds''$  dont la longueur est aussi égale à  $ds$  à des infiniment petits d'ordre supérieur près. Mais le point  $M$  fait ici office de point d'inflexion pour l'élément d'arc  $ds''$  (figure 22) : à la limite, lorsque la courbe devient plane, sa projection dans ce plan est une droite : *la courbe a été rectifiée*<sup>1</sup>.

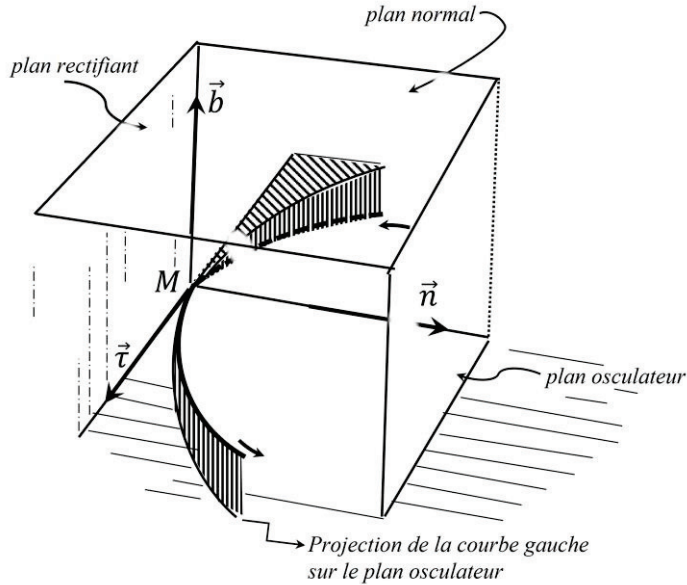


Figure 21. Les vecteurs  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$  et les plans osculateur, rectifiant et normal. D'après F. Plaut et T. Ciblac : polycopié sur les courbes et surfaces gauches.

Le plan normal  $(\vec{n}, \vec{b})$  contient toutes les normales à la courbe en  $M$  : il est perpendiculaire à la tangente en ce point. On observe que le point  $M$  est un point de rebroussement de l'élément d'arc  $ds'''$  issu de la projection sur ce plan normal de l'élément d'arc  $ds$  de la courbe (figure 22).

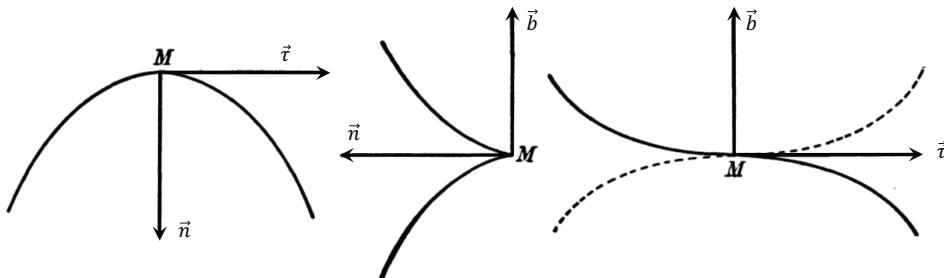


Figure 22. Projections de l'élément de courbe  $ds$  sur les plans osculateur (à gauche), normal (au milieu) et rectifiant (à droite : ligne pleine : torsion positive, ligne pointillée : torsion négative). D'après A.R. Forsyth, *Lectures on the differential geometry of curves and surfaces* (Cambridge, 1912). Voir aussi le C33.

<sup>1</sup> Une courbe rectifiable est une courbe dont la longueur peut être approchée par la longueur d'un ensemble de segments rectilignes qui épousent de mieux en mieux cette courbe.

**23. Courbure et torsion, formules de Serret-Frenet.** Une courbe se caractérise par deux quantités qui lui sont propres : sa courbure et sa torsion.

**Courbure et rayon de courbure.** Le vecteur normal a été défini par la relation :

$$\vec{n} := \frac{d\vec{\tau}/ds}{\|d\vec{\tau}/ds\|}$$

On définit alors la *courbure*  $\mathcal{C}$  de la courbe par :

$$\mathcal{C} := \|d\vec{\tau}/ds\|$$

L'inverse de la courbure est appelé *rayon de courbure* :

$$R_c := \frac{1}{\mathcal{C}} = \frac{1}{\|d\vec{\tau}/ds\|}$$

Cette quantité contient l'interprétation géométrique suivante : plaçons-nous dans le plan osculateur  $(\vec{\tau}, \vec{n})$  et considérons le point  $N(t)$  de la trajectoire projetée dans ce plan à l'instant  $t$ , ainsi que le point  $N(t + dt)$  (figure 23). Les vecteurs tangents qui leur sont associés sont  $\vec{\tau}(t)$  et  $\vec{\tau}(t + dt)$  respectivement. Ces deux vecteurs font entre eux un angle infiniment petit  $d\alpha$  qui est aussi l'angle que font entre elles les deux droites portées par les vecteurs normaux  $\vec{n}(t)$  et  $\vec{n}(t + dt)$  (figure 23). Ces droites se coupent en un certain point  $C$  à partir duquel on peut tracer un cercle de rayon  $CN$  ( $CN(t)$  ou  $CN(t + dt)$ ). L'arc élémentaire  $ds'$  de la trajectoire dans ce plan se confond alors avec l'arc de cercle élémentaire  $CN d\alpha$ . En outre,  $ds'$  est égal à  $ds$  puisque nous sommes dans le plan osculateur ; on a donc :

$$ds' = CN d\alpha = ds$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{CN} \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}$$

Or, la norme de  $d\vec{\tau}/d\alpha$ , sachant que la norme du vecteur  $\vec{\tau}$  vaut 1, est :

$$\left\| \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} \right\| = \left\| \frac{\vec{\tau}(t + dt) - \vec{\tau}(t)}{d\alpha} \right\| = \frac{\sqrt{2 - 2 \cos(d\alpha)}}{|d\alpha|}$$

C'est-à-dire, en développant  $\cos(d\alpha)$  à l'ordre 2 (Annexe 2) :

$$\left\| \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} \right\| = \frac{\sqrt{2 - 2(1 - (d\alpha)^2/2)}}{|d\alpha|} = 1$$

De ce résultat, on tire immédiatement que :

$$\left\| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right\| = \frac{1}{CN}$$

C'est-à-dire que le rayon du cercle  $CN$  est précisément le rayon de courbure  $R_C$  défini précédemment.

La relation :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R_C}$$

est appelée *première formule de (Serret-)Frenet* (vers 1850). Le cercle tracé dans le plan osculateur est appelé *cercle osculateur* ou *cercle de courbure*, et son centre  $C$  est appelé *centre de courbure*.

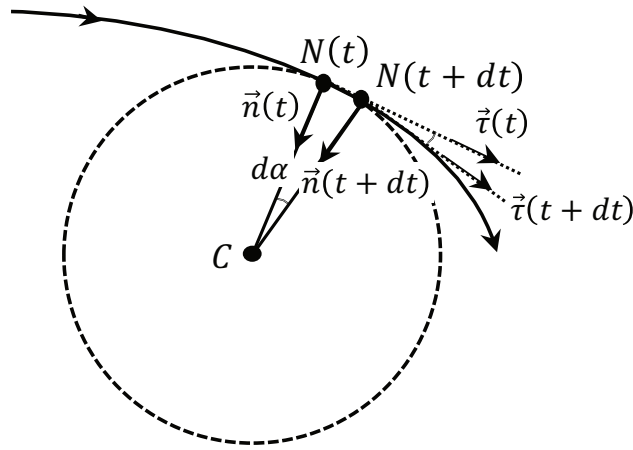


Figure 23. Projection de la trajectoire dans le plan osculateur et le cercle osculateur de centre  $C$  et de rayon  $R_C$ .

**Torsion et rayon de torsion.** Le vecteur binormal a été défini par :  $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$ . Sa variation s'écrit :

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\tau} \wedge \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \wedge \vec{n} + \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{0} + \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds}$$

Ce vecteur est donc perpendiculaire à  $\vec{\tau}$ . Comme il doit aussi être perpendiculaire à  $\vec{b}$ , puisque  $\|\vec{b}\| = 1$ , il est forcément dirigé selon la normale  $\vec{n}$ . On pose alors (*seconde formule de Serret-Frenet*) conventionnellement :

$$\frac{d\vec{b}}{ds} := -\frac{\vec{n}}{R_T}$$

où  $|R_T|$  est appelé *rayon de torsion* de la courbe. La quantité inverse,  $\mathcal{T} := 1/R_T$  est appelée *torsion de la courbe*, qui peut être négative ou positive selon la façon dont le vecteur  $\vec{b}$  bascule dans le sens de  $\vec{n}$  ou dans le sens inverse lorsque l'abscisse curviligne  $s$  croît ( $ds > 0$ ). La torsion d'une courbe est donc une mesure de

l'évolution de l'orientation de son plan osculateur : si  $|\mathcal{J}| \rightarrow 0$  le vecteur  $\vec{b}$  ne varie plus et la courbe est plane.

On dispose du théorème suivant :

**Théorème** : soient deux fonctions  $\phi$  et  $\psi$  de la variable indépendante  $s$  :  $R_c = \phi(s)$ ,  $R_T = \psi(s)$ , dont la première est positive. Alors, il existe une courbe gauche qui est complètement définie (abstraction faite de sa position dans l'espace) par son rayon de courbure  $R_c$  et son rayon de torsion  $R_T$  qui s'expriment par les deux formules précédentes au moyen de l'arc  $s$  compté à partir d'un point de cette courbe. Ces deux équations sont appelées : équations intrinsèques de la courbe.

Enfin, il est facile de calculer la variation du vecteur  $\vec{n}$  à partir des deux formules de (Serret-)Frenet. L'ensemble des variations des 3 vecteurs du trièdre  $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$  constitue les relations ou formules de Serret-Frenet :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{R_c} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{\tau}}{R_c} + \frac{\vec{b}}{R_T} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{R_T} \end{cases}$$

**24. Vecteurs vitesse et accélération dans le trièdre de Serret-Frenet.** Il est instructif de calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans le trièdre de Serret-Frenet. Concernant le vecteur vitesse, on a simplement :

$$\vec{v} = v \vec{\tau}$$

Par construction, le vecteur vitesse n'a qu'une seule *composante tangentielle* (composante selon  $\vec{\tau}$ ) dans le trièdre de Serret-Frenet.

Pour obtenir les composantes du vecteur accélération, il suffit de dériver le vecteur vitesse par rapport au temps :

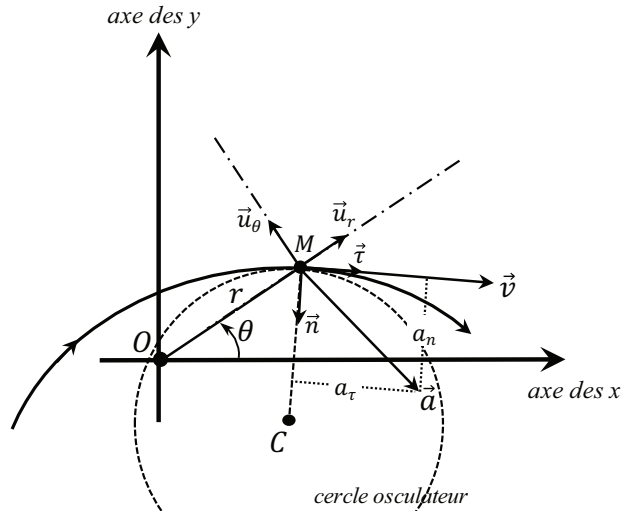
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R_c} \vec{n}$$

Ainsi, la composante tangentielle de l'accélération - souvent notée  $a_\tau$  - est la dérivée par rapport au temps de la norme du vecteur vitesse. On conclut que l'existence d'une

accélération tangentielle signifie que la vitesse, en norme, change au cours du temps. Par contre, cette composante ne modifie pas sa direction : *le mouvement dû seulement à une accélération tangentielle est donc rectiligne.*

La *composante normale* de l'accélération (composante selon  $\vec{n}$ ) quant à elle - souvent notée  $a_n$  - est le rapport  $v^2/R_c$ . L'existence de cette composante indique que la direction du vecteur vitesse change au cours du temps, c'est-à-dire que la trajectoire s'incurve. Cette accélération normale est précisément égale à la valeur de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme à l'instant  $t$ . D'ailleurs, *en l'absence d'accélération tangentielle ( $dv/dt = 0$ ), le mouvement dû seulement à l'accélération normale est circulaire uniforme de rayon  $R_c$ .*

Ainsi, du point de vue du vecteur accélération, tout mouvement se décompose en un mouvement rectiligne (accélération tangentielle,  $dv/dt \vec{\tau}$ ) et un mouvement circulaire (accélération normale,  $v^2/R_c \vec{n}$ ) à chaque instant.



**Figure 24.** Les vecteurs  $\vec{\tau}$  et  $\vec{n}$  pour une trajectoire plane. Cette trajectoire est située dans son plan osculateur qui est le plan de la feuille ici. Le vecteur normal  $\vec{n}$  pointe vers le centre  $C$  du cercle osculateur dont le rayon  $CM$  est le rayon de courbure  $R_c$  de la courbe au point  $M$ . On a indiqué aussi les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération.

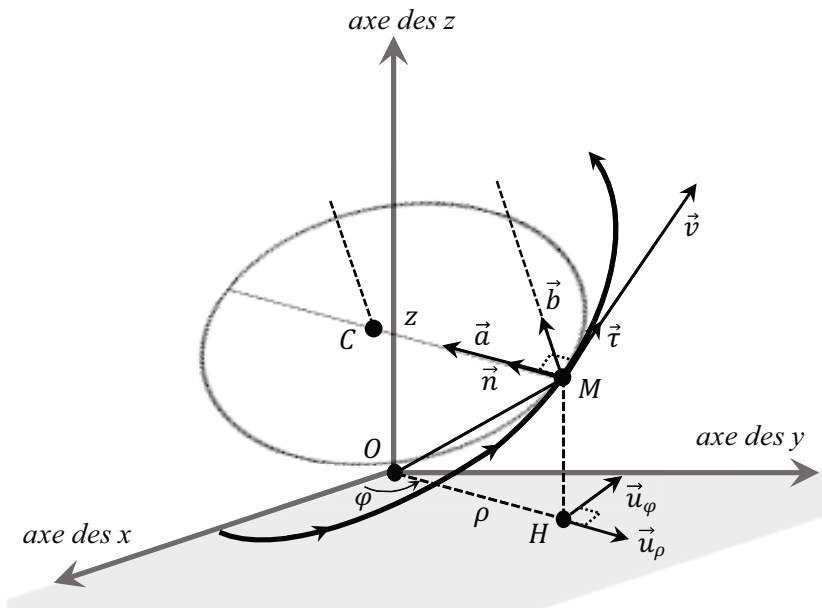
À partir de l'expression de  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  dans la base  $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$  on peut démontrer les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \frac{1}{R_c} = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}{v^3} \\ \mathcal{T} = \frac{1}{R_{\mathcal{T}}} = \frac{(\vec{v} \wedge \vec{a}) \cdot d\vec{a}/dt}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|^2} \end{cases}$$

Enfin, au vu de l'écriture des vecteur vitesse et accélération dans la base de Serret-Frenet, on conclut que le plan instantané qui contient ces deux vecteurs n'est rien d'autre que le plan osculateur et que la portion infinitésimale de trajectoire dont il était question au chapitre 5 (16) est l'élément d'arc  $ds$  de la courbe.

**25. Exemple du mouvement hélicoïdal circulaire uniforme.** À titre d'exemple, nous allons définir le trièdre de Serret-Frenet (figure 25) et calculer le rayon de courbure et le rayon de torsion dans le cas du mouvement hélicoïdal circulaire uniforme déjà abordé au 14. En reprenant les notations de cette section et en choisissant  $\dot{\varphi} = \omega > 0$  où  $\omega$  est une constante, on démontre les résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2/4\pi^2}} \left[ R \vec{u}_\varphi + \frac{h}{2\pi} \vec{u}_z \right] \\ \vec{n} = \frac{d\vec{\tau}/dt}{\|d\vec{\tau}/dt\|} = -\vec{u}_\rho \\ \vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2/4\pi^2}} \left[ -\frac{h}{2\pi} \vec{u}_\varphi + R \vec{u}_z \right] \end{array} \right.$$



**Figure 25.** Le trièdre de Serret-Frenet pour le mouvement hélicoïdal circulaire uniforme et le cercle osculateur au point  $M$ . *Nota Bene* : la taille du cercle n'est pas respectée.

On démontre également que les rayons de courbure  $R_C$  et de torsion  $R_T$  sont constants dans ce cas et s'écrivent :

$$R_C = R + h^2/4\pi R \quad ; \quad R_T = h/2\pi + 2\pi R^2/h$$

On pourra regarder les cas limites pour se familiariser avec le trièdre de Serret-Frenet et les deux paramètres  $R_C$  et  $R_T$  en faisant par exemple tendre  $R$  vers 0 (la trajectoire est alors presque une droite) ; ou encore en faisant tendre  $h$  vers 0 (la trajectoire est alors presque un cercle).

On pourra aussi exprimer les vecteurs vitesse et accélération dans la base  $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$  et en déduire les composantes tangentielle et normale de l'accélération.

## Compléments et exercices du chapitre 6

**C33. Equations de la trajectoire au voisinage d'un point.** Considérons un point  $M_0$  de la courbe étudiée à partir duquel on mesure l'abscisse curviligne et prenons comme système de coordonnées les coordonnées cartésiennes  $(x_\tau, y_n, z_b)$  associées aux axes engendrés par les vecteurs de base  $\{\vec{\tau}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0\}$  en  $M_0$ . Un point  $M$  de la courbe sera alors repéré par le vecteur  $\overline{M_0M}$  tel que :

$$\overline{M_0M} = x_\tau \vec{\tau}_0 + y_n \vec{n}_0 + z_b \vec{b}_0$$

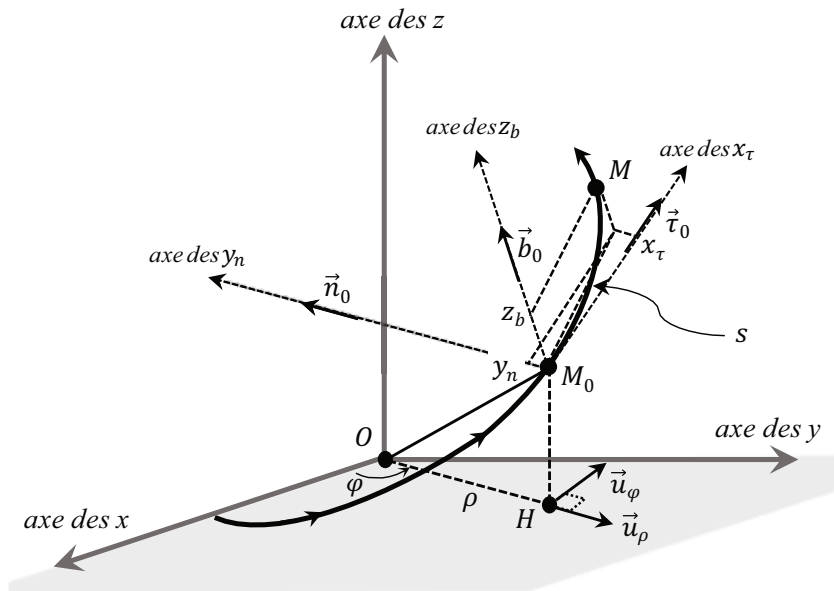


Figure 26. Le système de coordonnées cartésiennes  $(x_\tau, y_n, z_b)$ . Voir texte.

Les coordonnées cartésiennes  $(x_\tau, y_n, z_b)$  sont fonctions de l'abscisse curviligne  $s$  du point  $M$ . On démontre qu'au voisinage de  $M_0$  elles s'écrivent :

$$\begin{cases} x_\tau(s) = s - \frac{s^3}{6R_c^2} + o(s^3) \\ y_n(s) = \frac{s^2}{2R_c} - \frac{s^3}{6R_c^2} \left. \frac{dR_c}{ds} \right|_{s=0} + o(s^3) \\ z_b(s) = -\frac{s^3}{6R_c R_T} + o(s^3) \end{cases}$$

où  $R_c$  et  $R_T$  sont les rayons de courbure et de torsion au point  $M_0$ , c'est-à-dire en  $s = 0$ . Ces formules sont les équations paramétriques de la courbe étudiée au voisinage de  $M_0$ . Elles fournissent également les équations paramétriques de la courbe projetée dans chacun des trois plans fondamentaux. On déduit ainsi que dans le voisinage immédiat de  $M_0$  (voir la figure 22) :

- La courbe projetée dans le plan osculateur  $\{\vec{\tau}_0, \vec{n}_0\}$  est une parabole d'équation :  $y_n = x_\tau^2/2R_c$  de sommet  $M_0$  et dont l'axe est la normale principale.
- La courbe projetée dans le plan rectifiant  $\{\vec{\tau}_0, \vec{b}_0\}$  est une cubique dont l'équation est :  $z_b = -x_\tau^3/6R_c R_T$ . Elle présente un point d'inflexion en  $M_0$  et un axe qui est la binormale.
- La courbe projetée dans le plan normal  $\{\vec{n}_0, \vec{b}_0\}$  est une parabole semi-cubique<sup>1</sup> d'équation  $z_b^2 = y_n^3 \cdot 4R_c^2/3R_T$  qui présente un point de rebroussement en  $M_0$  et dont l'axe est la normale principale.

**C34. Vecteur de Darboux.** On introduit le *vecteur de Darboux* (1842 – 1917) :

$$\vec{D} := \frac{\vec{\tau}}{R_T} + \frac{\vec{b}}{R_c}$$

ainsi que le temps à l'aide de la relation  $ds = v dt$ . Alors les formules de Serret-Frenet se réécrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \vec{D} \wedge \vec{\tau} \\ \frac{d\vec{n}}{dt} = v \vec{D} \wedge \vec{n} \\ \frac{d\vec{b}}{dt} = v \vec{D} \wedge \vec{b} \end{cases}$$

<sup>1</sup> Une parabole semi-cubique a pour équation, en coordonnées  $(x, y)$  :  $a y^2 = x^3$ .

Dans cette formulation, le vecteur  $\vec{\omega}_D := v \vec{D}$  joue le rôle du vecteur rotation instantanée de la base de Serret-Frenet (le vecteur rotation est défini au chapitre 7, section 29).

**C35. Spirale logarithmique.** Un point matériel suit une spirale logarithmique dans le plan  $xOy$  selon les équations horaires exprimées en coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$  :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \exp(-t/T) \\ \varphi = \omega t + \phi \end{cases}$$

où  $\rho_0$ ,  $\phi$ ,  $\omega$  et  $T$  sont des constantes qu'il est aisé d'interpréter immédiatement.

- Écrire l'équation de la courbe.
- Calculer les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs normes.

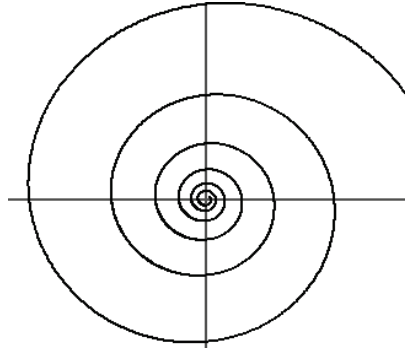


Figure 27. La spirale logarithmique.

- Montrer que l'angle  $\lambda_0$  que font ces deux vecteurs entre eux est constant, avec :

$$\cos \lambda_0 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

- Déterminer la base de Serret-Frenet  $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$ .
- Déterminer le rayon de courbure  $R_c$  en fonction du temps ainsi que les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération.
- Tracer les vecteurs vitesse, accélération, la base de Serret-Frenet et la base des coordonnées polaires en plusieurs endroits de la trajectoire. La spirale de la figure 27, tracée en fonction de  $\rho/\rho_0$ , est obtenue pour les valeurs :  $\omega T = 10$  et  $\phi = 0$ .
- Longueur de la spirale. On peut calculer la longueur de la spirale  $\ell(t)$  depuis la position du point  $M$  à l'instant  $t$ , d'abscisse curviligne  $s(t)$ , jusqu'au point  $O$  atteint quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $s(\infty) = 0$  :<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Le signe – provient de ce que le point  $M$  parcourt la spirale dans le sens rentrant.

$$\ell(t) = - \int_{s(\infty)=0}^{s(t)} ds = - \int_{\infty}^t v(t) dt = \rho_0 \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \exp(-t/T)$$

Ainsi, en s'affranchissant du temps, la longueur de la spirale logarithmique depuis son centre  $O$  jusqu'à un point  $M$  situé à la distance  $\rho$  vaut :  $\ell(\rho) = \rho \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$ .

**C36. Hélice Spirale.** On reprend l'hélice spirale du **C28** dont la projection dans le plan  $xOy$  est la spirale logarithmique du **C35**. *N.B. On pensera à changer la notation du **C28** et à noter  $T$  la constante de temps et non pas  $\tau$  afin de ne pas la confondre avec le vecteur  $\vec{\tau}$ .*

- Déterminer la base de Serret-Frenet  $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$  de l'hélice spirale.
- Déterminer les rayons de courbure  $R_c$  et de torsion  $R_T$  en fonction du temps ainsi que les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération.
- Montrer en suivant l'exemple du **C35** que la longueur de l'hélice spirale est :

$$\begin{aligned} \ell(t) &= - \int_{\infty}^t v(t) dt = \sqrt{\rho_0^2(1 + \omega^2 T^2) + h^2} \exp(-t/T) \\ &= \sqrt{\rho^2(1 + \omega^2 T^2) + z^2} \end{aligned}$$

**C37. Théorème de Puiseux (1842).** Toutes les courbes dont les rayons de courbure et de torsion sont constants sont des hélices circulaires.

**C38. Théorème de Lancret (1802).** Les courbes dont le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion est constant sont des hélices construites sur des cylindres quelconques (c'est-à-dire dont la base est une certaine courbe fermée).

## CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

**26. Introduction au problème.** Puisque le mouvement d'un point matériel n'est qu'une notion relative à un référentiel donné, il est bien évident que deux observateurs différents en mouvement l'un par rapport à l'autre vont décrire et voir de manière différente le mouvement de ce point matériel. Par conséquent, les notions de vitesse et d'accélération sont elles aussi relatives au référentiel choisi. Pour fixer les idées, imaginons le mouvement de la valve d'une roue de vélo : pour l'observatrice sur le vélo en mouvement rectiligne uniforme, la valve décrit un mouvement circulaire, tandis que pour l'observateur au sol, la valve décrit un mouvement plus compliqué dont la trajectoire est une trochoïde qui résulte de la composition du mouvement rectiligne uniforme du vélo par rapport au sol et de celui de la valve par rapport au vélo (C40).

La question qui se pose ici est de savoir comment les deux observateurs vont-ils tomber d'accord entre eux ? Cette question sera résolue si, connaissant le mouvement des deux observateurs l'un par rapport à l'autre, on dispose de lois de transformations qui permettent à chacun de déduire le mouvement du point  $M$  observé par l'autre. Ces lois de transformation à découvrir doivent concerner le vecteur position du point  $M$ , son vecteur vitesse et son vecteur accélération.

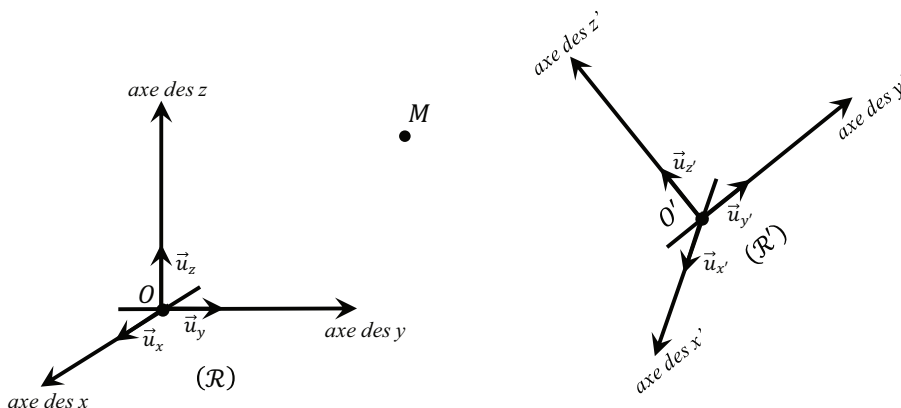


Figure 28. Les deux référentiels  $\mathcal{R}\{O, xyz; t\}$  et  $\mathcal{R}'\{O', x'y'z'; t\}$ .

Les données du problème sont les suivantes (figure 28) : les deux référentiels, que nous appellerons  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}\{O, xyz; t\}$  et  $\mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}'\{O', x'y'z'; t\}$ , sont en mouvement l'un par rapport à l'autre et ce mouvement est supposé connu. Par commodité de langage, on a coutume d'appeler  $\mathcal{R}$  le référentiel *fixe* ou *absolu*, et  $\mathcal{R}'$  le référentiel

*mobile* ou *relatif*, c'est à dire que l'on adopte le point de vue de l'observateur situé en  $O$  qui se considère comme fixe et voit l'observatrice en  $O'$  animée d'un certain mouvement. Ce point de vue n'est que conventionnel et les formules de transformation que nous allons établir pourront s'inverser.

**27. Loi de transformation des positions.** Pour l'observateur de  $\mathcal{R}$ , le point matériel  $M$  est repéré par le rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  à chaque instant, tandis que pour l'observatrice de  $\mathcal{R}'$ , ce même point matériel est repéré par le rayon vecteur  $\overrightarrow{O'M}$ . Pour établir un lien entre ces deux quantités, il suffit d'utiliser la loi d'addition vectorielle (ou la relation de Chasles) supposée valable à tout instant :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Si le mouvement entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  est supposé connu, alors le vecteur  $\overrightarrow{OO'}$  est connu à chaque instant et cette relation constitue la *loi de transformation des positions*.

Cette loi contient deux hypothèses qui ont été émises au début de ce cours : la géométrie euclidienne est opérationnelle pour chacun des deux référentiels et le temps s'y écoule de la même façon.

**28. Loi de transformation des vitesses.** Dans un premier temps, utilisons les coordonnées cartésiennes du point  $M$  :  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  pour chacun des deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , ainsi que les bases cartésiennes qui leur sont associées  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  et  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$ .

Le vecteur vitesse du point  $M$  pour l'observateur de  $\mathcal{R}$  s'obtient en calculant la dérivée temporelle du rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  :

$$\vec{v} = \vec{v}_a = \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

où l'on a adopté trois types de notations couramment employées pour ce vecteur vitesse : une notation non primée puisque cette quantité est relative à  $\mathcal{R}$ , une notation indicée par l'indice  $a$  qui signifie « absolue » et une notation indicée par  $\mathcal{R}$  qui signifie : « vis-à-vis du référentiel  $\mathcal{R}$  », ce dernier indice précisant par rapport à quel référentiel on réalise la dérivation temporelle ; cette précaution s'avère nécessaire comme va le montrer le calcul qui suit.

Le vecteur vitesse du point  $M$  pour l'observatrice de  $\mathcal{R}'$  s'obtient quant à lui en calculant la dérivée temporelle du rayon vecteur  $\overrightarrow{O'M}$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  :

$$\vec{v}' = \vec{v}_{r'} = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \dot{x}' \vec{u}_{x'} + \dot{y}' \vec{u}_{y'} + \dot{z}' \vec{u}_{z'}$$

où l'indice  $r$  signifie « relative ».

Pour relier  $\vec{v}_a$  à  $\vec{v}_r$ , et réciproquement, il faut utiliser la loi de transformation des positions. Partant de l'expression de  $\vec{v}_a$ , on a ainsi :

$$\vec{v} = \vec{v}_a = \frac{d\overline{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d(\overline{OO'} + \overline{O'M})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\overline{OO'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d\overline{O'M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$$

Puis en développant  $\overline{O'M}$  :

$$\vec{v} = \vec{v}_a = \frac{d\overline{OO'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d(x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_{z'})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{v}_a = \frac{d\overline{OO'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \left( \frac{dx'}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \vec{u}_{z'} \right) \\ + x' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + y' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + z' \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Le premier terme de cette expression est évident : il s'agit du vecteur vitesse (absolue) du point  $O'$ , qui peut se noter  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(O')$  ; ce terme est connu si le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est supposé connu.

Le second terme entre parenthèses n'est rien d'autre que  $\vec{v}_r$  : en effet,  $x', y', z'$  sont des fonctions de  $t$  uniquement : ainsi, dériver ces quantités par rapport au temps vis-à-vis du référentiel  $\mathcal{R}$  ou du référentiel  $\mathcal{R}'$  donne lieu à un calcul identique.

Enfin, les trois derniers termes de l'expression obtenue font apparaître les dérivées temporelles, par rapport à  $\mathcal{R}$ , des vecteurs de la base cartésienne de  $\mathcal{R}'$ . C'est qu'en effet cette base  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$  n'est pas fixe vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  puisque  $\mathcal{R}'$  est en mouvement. Les dérivées temporelles contenues dans ces trois termes font donc état de l'évolution de l'orientation de cette base par rapport à  $\mathcal{R}$ .

On donne le nom de vecteur *vitesse d'entraînement* du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ , noté  $\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ , à tous les termes figurant dans l'expression de  $\vec{v}_a$  qui contiennent en substance le mouvement de  $\mathcal{R}'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \frac{d\overline{OO'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + x' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + y' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + z' \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$$

de sorte que la *loi de transformation des vitesses* se met sous la forme :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{v}_r \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{v}'$$

**Interprétation de la vitesse d'entraînement.** Imaginons que le point matériel  $M$  soit au repos vis-à-vis du référentiel  $\mathcal{R}'$ . On a alors :  $\vec{v}' = \vec{v}_r = \vec{0}$  et, dans ce cas particulier :  $\vec{v} = \vec{v}_a = \vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ . C'est-à-dire que  $\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  s'identifie ici au vecteur vitesse (absolue) du point matériel observé depuis  $\mathcal{R}$ . Comme ce constat est valable pour tout point fixe de  $\mathcal{R}'$ , l'ensemble des points fixes de  $\mathcal{R}'$  sont donc tous entraînés à la vitesse  $\vec{v} = \vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dit autrement :  $\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  est la vitesse absolue d'un point fixe quelconque de  $\mathcal{R}'$ .

**29. Vecteur rotation instantanée et expression vectorielle de la vitesse d'entraînement.** La loi de transformation des vitesses qui vient d'être énoncée n'est pas aboutie : en effet, les coordonnées et la base cartésiennes de  $\mathcal{R}'$  figurent encore dans l'expression du vecteur vitesse d'entraînement qui vient d'être défini. Or, chaque observateur est en droit d'utiliser un système de coordonnées quelconque : il nous faut donc obtenir une expression de  $\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  qui soit indépendante des systèmes de coordonnées utilisés, c'est-à-dire trouver une expression vectorielle de  $\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ . Les termes concernés sont relatifs à l'orientation des vecteurs de la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  : ces vecteurs étant normés à l'unité, ils ne peuvent qu'être en rotation vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ , l'axe de cette rotation et son amplitude étant *a priori* variables au cours du temps. On montre ci-dessous qu'une telle rotation peut être représentée par un vecteur.

**Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\omega}$ .** Considérons un point matériel  $M$  qui, à l'instant  $t$ , et pendant la durée  $dt$ , est en mouvement circulaire de centre  $C$  autour d'un axe instantané  $\Delta = \Delta(t)$  qui passe par l'origine  $O$  du référentiel vis-à-vis duquel ce mouvement a lieu (figure 29). On note :  $\omega = \omega(t)$  la vitesse angulaire instantanée

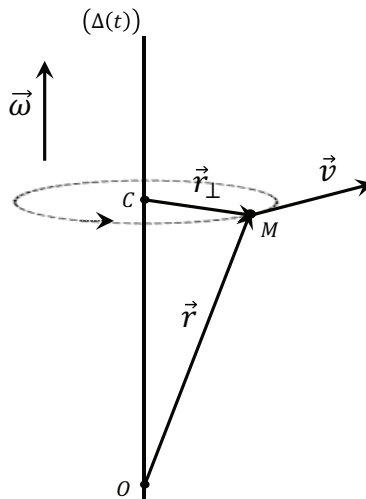


Figure 29. Le vecteur rotation (instantanée)  $\vec{\omega}$ .

du point  $M$ . On sait, après notre étude du mouvement circulaire (13), que la vitesse du point  $M$  est reliée à sa vitesse angulaire par la relation :

$$v = |\omega| r_{\perp}$$

où  $r_{\perp}$  est le rayon du cercle, c'est-à-dire la distance du point  $M$  à l'axe de rotation ( $CM$  sur la figure 29). Introduisons alors le vecteur  $\vec{\omega}$  défini par le produit vectoriel :

$$\vec{\omega} := \frac{\vec{r}_{\perp} \wedge \vec{v}}{r_{\perp}^2}$$

où  $\vec{r}_{\perp}$  est le vecteur  $\overrightarrow{CM}$  et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse du point  $M$ . Avec cette définition, le vecteur rotation instantanée  $\vec{\omega}$  a pour norme à l'instant  $t$  la valeur absolue de la vitesse angulaire  $\omega(t)$ , et pour direction, celle de l'axe de rotation instantané  $\Delta(t)$ . Son sens est donné par la règle « des trois doigts de la main droite ».

Les trois vecteurs  $\vec{r}_{\perp}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{\omega}$ , sont orthogonaux, de sorte que l'on peut inverser la relation précédente pour obtenir :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\perp}$$

Cette dernière relation prend une forme plus générale en remarquant que le rayon vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  peut toujours se décomposer sous la forme :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$ . Or,  $\overrightarrow{OC}$  étant le long de  $\Delta$ , son produit vectoriel avec  $\vec{\omega}$  est nul. Si bien que l'on peut écrire :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \iff \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

On retiendra que cette relation importante n'est correcte que pour un mouvement de rotation pure autour d'un axe passant par l'origine.

**Expression vectorielle du vecteur vitesse d'entraînement.** L'introduction du vecteur rotation instantanée permet d'écrire la rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  de chacun des 3 vecteurs de la base  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$  de la façon suivante :

$$\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{x'} \wedge \vec{u}_{x'} \quad \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{y'} \wedge \vec{u}_{y'} \quad \left. \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{z'} \wedge \vec{u}_{z'}$$

où les trois vecteurs  $\vec{\omega}_{x'}$ ,  $\vec{\omega}_{y'}$  et  $\vec{\omega}_{z'}$  sont *a priori* différents. Mais la base  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$  devant rester orthonormée au cours du temps, on démontre que ces trois vecteurs n'en sont qu'un seul que nous appellerons : *vecteur rotation instantanée de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$*  :  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ . Ce vecteur est connu si le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est supposé connu.

À partir de ces considérations, l'expression de  $\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  énoncée au 28 s'écrit maintenant :

$$\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + x' \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{x'} + y' \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{y'} + z' \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_{z'}$$

Ayant reconnu la présence du rayon vecteur  $\overrightarrow{O'M}$  dans cette formulation, on arrive finalement à une expression vectorielle de  $\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  indépendante des systèmes de coordonnées utilisés :

$$\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

**Résumé : la loi d'addition des vitesses.** Dans cette section et la précédente, nous avons démontré la relation suivante :

$$\vec{v} = \vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{v}'$$

où  $\vec{v} = \vec{v}_a = \vec{v}_{\mathcal{R}}(M)$  est le vecteur vitesse du point  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{v}' = \vec{v}_r = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$  est le vecteur vitesse du point  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}'$ , et  $\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  le vecteur vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  qui contient tout à la fois le mouvement de l'origine  $O'$  et la rotation de la base  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$ .

**30. Opération de dérivation dans un référentiel donné : formule de Bour.** En introduisant le vecteur rotation, nous avons pu exprimer vectoriellement le vecteur vitesse d'entraînement. Il en résulte aussi que nous avons établi une relation qui relie les dérivées temporelles d'un vecteur vis-à-vis de l'un ou l'autre des deux référentiels. En effet, au 28, lorsque nous avons voulu estimer la dérivée temporelle de  $\overrightarrow{O'M}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , nous l'avons décomposée en d'une part : la dérivée temporelle de  $\overrightarrow{O'M}$  par rapport à  $\mathcal{R}'$  ( $\vec{v}_r$ ), et d'autre part : un second terme que nous avons pu finalement mettre sous la forme :  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$ . On a donc cette relation :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

dont on montre facilement qu'elle est valable pour un vecteur  $\vec{X}$  quelconque puisque le point  $M$  est quelconque :

$$\left. \frac{d\vec{X}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{X}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{X}$$

C'est la *formule de Bour* (vers 1860).

Dans le but d'établir la loi de transformation des accélérations à la section suivante, nous allons formaliser cette formule en la voyant comme une opération que l'on

réalise sur un vecteur : à gauche, il s'agit de l'opération de dérivation temporelle dans  $\mathcal{R}$ , que nous symbolisons pour un temps par le symbole :  $\widehat{D}$ . À droite, le résultat est énoncé sous la forme de deux opérations : une dérivation temporelle dans  $\mathcal{R}'$ , qui sera symbolisée par  $\widehat{D}'$ , à laquelle s'ajoute un produit vectoriel qui sera symbolisé simplement par :  $\vec{\omega} \wedge$ , où nous omettons ici d'indiquer le vecteur rotation dans un souci de simplification d'écriture. Dans ces conditions, la formule de Bour prend une forme épurée :

$$\widehat{D} \cdot = \widehat{D}' \cdot + \vec{\omega} \wedge \cdot$$

où le point indique la place de l'objet (ici le vecteur) dans ces opérations.

**31. Loi de transformation des accélérations.** Nous partons de l'accélération absolue du point  $M$  qui s'écrit, à l'aide de « l'opérateur »  $\widehat{D}$  :

$$\vec{a} = \vec{a}_a = \left. \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} = \widehat{D}^2\overline{OM} = \widehat{D} (\widehat{D} \overline{OM}) = \widehat{D} (\widehat{D} [\overline{OO'} + \overline{O'M}])$$

Il s'agit maintenant d'appliquer  $\widehat{D}$  deux fois et de nous servir de la formule de Bour, mais à bon escient : cette formule doit nous aider à faire apparaître des quantités qui sont soit relatives au mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , soit relatives au mouvement du point  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}'$ . Le calcul pas à pas est alors le suivant :

$$\begin{aligned} \vec{a}_a &= \widehat{D} (\widehat{D} [\overline{OO'} + \overline{O'M}]) = \widehat{D}(\widehat{D} \overline{OO'}) + \widehat{D}[\widehat{D}' + \vec{\omega} \wedge] \overline{O'M} \\ &= \widehat{D}^2\overline{OO'} + \widehat{D}(\widehat{D}'\overline{O'M}) + \widehat{D}(\vec{\omega} \wedge \overline{O'M}) \\ &= \widehat{D}^2\overline{OO'} + [\widehat{D}' + \vec{\omega} \wedge](\widehat{D}'\overline{O'M}) + \widehat{D}(\vec{\omega} \wedge \overline{O'M}) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{a}_a &= \widehat{D}^2\overline{OO'} + \widehat{D}'^2\overline{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\widehat{D}'\overline{O'M}) + (\widehat{D} \vec{\omega}) \wedge \overline{O'M} \\ &\quad + \vec{\omega} \wedge [\widehat{D}' + \vec{\omega} \wedge] \overline{O'M} \end{aligned}$$

soit enfin :

$$\vec{a}_a = \widehat{D}'^2\overline{O'M} + \widehat{D}^2\overline{OO'} + (\widehat{D} \vec{\omega}) \wedge \overline{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'M}) + 2 \vec{\omega} \wedge \widehat{D}'\overline{O'M}$$

ce qui se réécrit dans un langage plus habituel :

$$\begin{aligned} \vec{a}_a &= \left. \frac{d^2\overline{O'M}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}'} + \left. \frac{d^2\overline{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M}) \\ &\quad + 2 \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left. \frac{d\overline{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \end{aligned}$$

C'est la *loi de transformation des accélérations*. On a l'habitude de mettre cette expression sous la forme d'une somme de trois vecteurs permettant une interprétation physique :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{a}_{c, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} \iff \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{a}_{c, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

**Accélération relative.** Le premier terme,  $\vec{a}' = \vec{a}_r$ , est l'*accélération relative* du point matériel  $M$ . Il se calcule naturellement à partir de la dérivée temporelle par rapport à  $\mathcal{R}'$  du vecteur vitesse relative  $\vec{v}' = \vec{v}_r$  :

$$\vec{a}' = \vec{a}_r = \left. \frac{d^2 \overline{O'O'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\vec{v}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$$

**Accélération d'entraînement.** Le second terme,  $\vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ , est appelé *accélération d'entraînement* du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M})$$

Comme pour le vecteur vitesse d'entraînement, c'est le vecteur accélération absolue d'un point  $M$  fixe de  $\mathcal{R}'$ . D'ailleurs, on peut obtenir  $\vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  en dérivant  $\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  par rapport au temps par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  tout en maintenant fixes les coordonnées qui repèrent  $M$  dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}, M \text{ fixe } / \mathcal{R}'}$$

Cette façon de calculer  $\vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  est appelée *méthode du point coïncident*. Elle fait référence au fait que le point matériel  $M$  coïncide à chaque instant avec un point fixe du référentiel  $\mathcal{R}'$  (voir le 4).

L'accélération d'entraînement est à l'origine de ce qu'en dynamique on appelle les forces d'inertie d'entraînement qui sont introduites au chapitre 18.

*Remarque :* Dans l'expression de  $\vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ , il arrive souvent que l'on ne précise pas que la dérivée du vecteur rotation par rapport au temps se réalise vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ . C'est qu'en effet, en vertu de la formule de Bour appliquée à ce vecteur, cette dérivée est la même pour les deux référentiels.

**Accélération de Coriolis.** Le dernier terme,  $\vec{a}_{c, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ , est dénommé *accélération de Coriolis* du nom de son découvreur (1835) :

$$\vec{a}_{c, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} = 2 \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left. \frac{d\overline{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$$

Il s'agit d'un terme hybride où interviennent à la fois le mouvement de rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  et le mouvement du point  $M$  observé depuis  $\mathcal{R}'$  via sa vitesse relative. Il n'est non nul que si, et seulement si, ces deux mouvements existent. L'accélération de Coriolis est à l'origine des forces de Coriolis en dynamique.

**32. Inversion des lois de transformation.** La distinction entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  était arbitraire. En prenant maintenant le point de vue de  $\mathcal{R}'$  qui se considère fixe, *il suffit alors de changer les quantités primées en « non primées » et inversement.*

- Ainsi, la loi de transformation des positions sera écrite sous la forme :

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$$

- La loi de transformation des vitesses prendra la forme inversée :

$$\vec{v}' = \vec{v}_{e, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} + \vec{v}$$

Avec :

$$\vec{v}_{e, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(O) + \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \overrightarrow{OM}$$

En comparant cette forme inversée de la loi de transformation des vitesses avec la précédente, il en résulte la relation attendue :

$$\vec{v}_{e, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Relation qui exprime que la vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}'$  est égale et opposée à la vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

À partir de cette égalité, on démontre également, comme attendu, que le vecteur rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}'$  est égal et opposé au vecteur rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

- La loi de transformation des accélérations inversée prend la forme :

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_{e, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{c, \mathcal{R}/\mathcal{R}'}$$

avec maintenant :

$$\begin{cases} \vec{a}_{e, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} = \left. \frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}'} + \left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \overrightarrow{OM}) \\ \vec{a}_{c, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} = 2 \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \end{cases}$$

Il faut signaler que l'accélération d'entraînement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}'$  n'est pas l'opposée de l'accélération d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , et qu'il en est de même pour l'accélération de Coriolis : seule la somme de ces deux accélérations vérifie cette propriété que l'on obtient en comparant l'écriture inversée de la loi de transformation des accélérations avec la précédente :

$$\vec{a}_{e, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{c, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} - \vec{a}_{c, \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

En fait, en examinant de plus près la situation, on peut démontrer les relations :

$$\begin{cases} \vec{a}_{e, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{a}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} + 2 \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} \\ \vec{a}_{c, \mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{a}_{c, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} - 2 \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{e, \mathcal{R}'/\mathcal{R}} \end{cases}$$

En conclusion de ce chapitre, les lois cinématiques de transformation des positions, vitesses et accélérations viennent d'être établies sous une forme vectorielle pour un changement de référentiel quelconque. Ces lois reposent sur la conception euclidienne de l'espace et sur l'hypothèse d'un temps absolu.

## Compléments et exercices du chapitre 7

**C39.  $\mathcal{R}'$  en mouvement rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , transformation de Galilée, principe de relativité.** Considérons un référentiel  $\mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}'\{O', x' y' z'; t\}$  en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse d'entraînement  $\vec{v}_e = \vec{V}$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}\{O, xyz; t\}$ .

- Montrer que l'accélération d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est nulle.
- Écrire les lois de transformation des vitesses et des accélérations dans ces conditions.
- Un point matériel  $M$  est en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en suivant une trajectoire d'équations paramétriques  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  et  $z = z(t)$ . Quelles sont les équations paramétriques de la trajectoire de  $M$  vue depuis  $\mathcal{R}'$  (en coordonnées cartésiennes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ) sachant qu'au temps  $t = 0$  on a :  $\overrightarrow{OO'}(t = 0) = X_0 \vec{u}_x + Y_0 \vec{u}_y + Z_0 \vec{u}_z$ . Note : on écrira :  $\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z$ .
- Par un choix judicieux des axes et de l'origine du référentiel  $\mathcal{R}$ , on peut toujours s'arranger pour écrire  $\vec{V} = V \vec{u}_x$  et pour qu'à l'instant  $t = 0$ ,  $O'$  soit confondu avec  $O$ . Écrire à nouveau les relations entre  $x, y, z$  et  $x', y', z'$  dans ces conditions. Ces relations auxquelles on adjoint la relation  $t' = t$  forment la transformation de Galilée. Cette transformation prend une grande importance lorsque l'on érige en principe le fait que les lois physiques (ici, ce sera la dynamique) se doivent d'être

invariantes par changement de référentiel en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre : c'est le *principe de relativité*.

**C40. Trochoïde et cycloïde.** Considérons un référentiel  $\mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}'\{O', x'y'; t\}$  (un vélo) en mouvement rectiligne uniforme tel que :  $\overrightarrow{OO'} = V t \vec{u}_x + R \vec{u}_y$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}\{O, xy; t\}$  (le sol) où  $R$  et  $V$  sont deux constantes positives. Les axes  $Ox$  et  $O'x'$  sont parallèles au sol et dirigés vers la droite ; les axes  $Oy$  et  $O'y'$  sont parallèles et indiquent la verticale vers le haut.

- Faire un schéma des deux référentiels.
- Le point  $O'$  représente le centre de la roue avant du vélo qui a pour rayon  $R$ , et on considère, depuis  $\mathcal{R}'$ , un point matériel  $M$  placé à la distance  $d$  de ce centre avec  $0 \leq d \leq R$  (on peut s'imaginer une pastille collée sur l'un des rayons de la roue). Ce point matériel suit le mouvement circulaire uniforme de la roue qui s'effectue à la vitesse angulaire  $\omega$ , de sorte que :  $x'(t) = d \cos \omega t$ ,  $y'(t) = -d \sin \omega t$ . Quelles sont les équations paramétriques de la trajectoire de  $M$  vue depuis  $\mathcal{R}$  ?
- Calculer les vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  ainsi que leurs normes, dans chacun des deux référentiels.
- Il existe un lien entre la vitesse angulaire  $\omega$  de la roue et la vitesse  $V$  du vélo : la distance parcourue par le vélo doit être égale au périmètre de la roue lorsque celle-ci a effectué un tour<sup>1</sup>. En déduire que :  $V = R\omega$ .
- Remplacer  $V$  par cette valeur dans les équations paramétriques de la trajectoire vue depuis le sol  $\mathcal{R}$  et montrer que ces équations paramétriques prennent la forme :

$$\begin{cases} x = R \{\theta + p \cos \theta\} \\ y = R \{1 - p \sin \theta\} \end{cases}$$

où l'on a posé :  $\theta = \omega t$  et  $p = d/R$ .

- Les courbes définies par les équations paramétriques ci-dessus s'appellent des trochoïdes. On obtient une trochoïde différente pour chaque valeur du paramètre constant  $p$ . Lorsque  $p = 1$ , la trochoïde est appelée cycloïde. Tracer quelques trochoïdes pour différentes valeurs du paramètre  $p$  à l'aide d'un logiciel graphique.

**C41.  $\mathcal{R}'$  en mouvement circulaire uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , spirale d'Archimède.** On considère un référentiel  $\mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}'\{O', x'y'z'; t\}$  en mouvement circulaire uniforme par rapport à un référentiel  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}\{O, xyz; t\}$ . L'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  est confondue avec l'origine  $O$  de  $\mathcal{R}$ . Les plans  $xOy$  et  $x'O'y'$  représentent une surface horizontale ; les axes  $Oz$  et  $O'z'$  sont confondus et indiquent la verticale vers

<sup>1</sup> On appelle cette hypothèse : *condition de roulement sans glissement*. En effet, on pourrait imaginer que la roue glisse sur le sol tout en tournant, comme c'est le cas sur un terrain boueux.

le haut. L'équation horaire de l'angle  $\alpha$  entre les axes  $Ox$  et  $Ox'$  est :  $\alpha = \omega t$  où  $\omega$  est une constante et représente la vitesse angulaire du mouvement de rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  autour de l'axe  $Oz$ .

Un point  $M$  en mouvement sera représenté par ses coordonnées cartésiennes dans chacun des deux référentiels.

- Faire un schéma des deux référentiels à un instant donné et en déduire les relations donnant les vecteurs de base  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$  en fonction des vecteurs de base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  à l'aide de l'angle  $\alpha$ .
- Écrire la vitesse d'entraînement  $\vec{v}_e$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  dans la base  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$  et dans la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ . Calculer l'accélération d'entraînement  $\vec{a}_e$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  grâce à la méthode du point coïncident dans la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ . Vérifier votre résultat à partir de la formule du cours donnant  $\vec{a}_e$ .
- Écrire les lois de transformation des vitesses et des accélérations dans ces conditions.
- Le point  $M$  se déplace en fait sur l'axe  $Ox'$  de sorte que  $\overrightarrow{O'M} = x'(t) \vec{u}_{x'}$ , avec  $x'(t) > 0$ . Montrer que dans ce cas les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  sont  $r = x'$  et  $\theta = \alpha = \omega t$ , et que les vecteurs  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}\}$  s'identifient à la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ .
- Exprimer les vecteurs vitesse  $\vec{v}_e, \vec{v}_a, \vec{v}_r$ , ainsi que les vecteurs accélération  $\vec{a}_e, \vec{a}_a, \vec{a}_r, \vec{a}_c$  à l'aide des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ . Réfléchir à ces résultats.
- La loi horaire du mouvement de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}'$  correspond maintenant à un mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe  $Ox'$  :  $x'(t) = v_0 t$ . Montrer que les équations paramétriques du mouvement de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  sont, en coordonnées polaires :  $r = x' = v_0 t$  et  $\theta = \alpha = \omega t$ . L'équation de sa trajectoire par rapport à  $\mathcal{R}$  prend ainsi la forme  $r = p \theta$  où l'on a posé  $p = v_0/\omega$ . Il s'agit d'une spirale d'Archimède. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération absolues dans cette base et trouver la base de Serret-Frenet. Déterminer le rayon de courbure de cette spirale.
- Quelle est la longueur de la spirale après avoir réalisé un nombre  $n$  de tours à partir du point  $O$  ?

*Nota Bene* : pour cette question, on donne :

$$\int \sqrt{1+u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1+u^2})$$

DEUXIÈME PARTIE

**DYNAMIQUE CLASSIQUE**  
**DU POINT MATÉRIEL**



## CHAPITRE 8

# ORIGINES DES PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE

« L'étude historique du processus de développement d'une science est indispensable, si l'on ne veut pas que l'ensemble des principes qu'elle a réunis ne dégénère peu à peu en un système de choses acquises qu'on ne comprend qu'à moitié, ou même entièrement en un ensemble de purs *préjugés*. Non seulement cette recherche historique fait mieux comprendre l'état actuel de la science mais, en montrant qu'il est en partie *conventionnel* et *accidentel*, elle fait ressortir des possibilités nouvelles. De ce point de vue supérieur, auquel on arrive par des chemins divers, on peut embrasser d'un regard plus libre l'ensemble de la science et reconnaître des voies non encore parcourues. »

Ernst Mach, *La Mécanique : exposé historique et critique de son développement*, Librairie scientifique Hermann, Paris, 1904.

Les premières théories élaborées du mouvement des objets ont pris forme dans la Grèce antique. Elles furent partagées par les intellectuels perses, byzantins, arabes et européens après qu'Aristote (vers -310) eut fait autorité ; autorité légitimée par le formalisme qu'il mit en place pour ériger la logique d'un raisonnement en un système fiable.

**33. Introduction.** Pourquoi une pierre lancée d'une façon quelconque retombe-t-elle systématiquement au sol ? Pourquoi la lune ne tombe-t-elle pas ? Pourquoi les étoiles réalisent-elles un mouvement circulaire uniforme autour d'un axe passant par le centre de la Terre ? Pourquoi un chariot lancé sur une route horizontale s'arrête-t-il au bout d'un certain temps ? Des objets de poids différents en chute libre tombent-ils sur le sol à des vitesses différentes ? Répondre à ces questions, c'est forger une théorie du mouvement des objets. On attend d'une telle théorie qu'elle soit logiquement cohérente et rende compte au moins des observations les plus élémentaires comme celles suggérées dans les questions précédentes.

Il est aussi nécessaire dans une théorie de façonner des outils conceptuels en rapport avec les phénomènes étudiés : par exemple, les notions d'espace, de durée, de matière, de vitesse, etc... semblent être au cœur d'une théorie du mouvement. Il est inévitable que certaines de ces notions soient explicitées sous l'influence d'une certaine métaphysique qui dépend de l'imaginaire des personnes se préoccupant de ces questions et de l'époque à laquelle ces personnes vivent. La forme sphérique de l'univers de la physique aristotélicienne en est un exemple.

Construire une théorie peut également reposer sur l'expérimentation, c'est-à-dire : ne pas se contenter de l'observation des phénomènes tels qu'ils se présentent dans la nature, mais les provoquer, les isoler, les simplifier, les modéliser. Par exemple : lâcher systématiquement toute une série d'objets, de même taille, depuis une certaine hauteur, toujours la même, à l'intérieur d'une cloche à vide, et vérifier si oui ou non les objets les plus lourds tombent plus vite que les moins lourds dans ces conditions, du moins selon Aristote.

Cela peut inciter aussi à vouloir nombrer certains concepts pour en faire des grandeurs physiques et introduire les mathématiques dans la théorie qui sera ainsi susceptible de donner lieu à des « lois du mouvement » quantifiables. Par exemple, se proposer de définir une longueur étalon et une durée étalon afin d'examiner si, dans cette expérience de la chute libre, la durée de la chute d'un objet est proportionnelle à la hauteur de la chute ? à sa racine carrée ? à la durée de la chute ? Etc... Enfin, le développement plus élaboré d'un formalisme mathématique permettra d'accréditer la cohérence interne de la théorie, de la faire évoluer et de la rendre quantitativement prédictive. Par exemple, depuis l'époque de l'astronome Hipparque (vers -140), on savait prédire les éclipses de Lune.

À l'époque d'Aristote, l'expérimentation et le développement d'un formalisme mathématique n'étaient pas toujours au centre d'une théorie physique comme cela a commencé de l'être systématiquement lors de ladite révolution scientifique du XVII<sup>e</sup> siècle en Europe. Ces deux méthodologies se sont développées au cours des siècles avec des hauts et des bas selon les périodes historiques et selon les progrès réalisés en mathématiques. En raison de l'ensemble de ses travaux, on attribue à Galilée (vers 1610) le fait d'avoir amplement œuvré à ce qu'elles soient inhérentes à toute théorie physique ainsi qu'on le conçoit aujourd'hui.

**34. Généralités sur la physique du mouvement d'Aristote.** Selon les thèses aristotéliennes, l'astronomie était propice au développement mathématique<sup>1</sup> en raison de l'harmonie permanente des régions du ciel au-delà de la Lune : on pouvait bien comprendre que cette harmonie puisse s'exprimer au travers de nombres, à l'inverse des phénomènes terrestres toujours changeants et complexes, imparfaits, ne pouvant que mal se prêter à ce genre de recherche. Ainsi, les théories aristotéliennes du mouvement s'inscrivent dans une métaphysique qui opère une distinction entre l'aspect immuable des cieux - l'éternelle course régulière des astres - et les continuel changements observés sur Terre où tout est périssable. Une distinction entre le perpétuel et l'éphémère ; entre le repos et le mouvement ; entre

---

<sup>1</sup> La Musique, la Statique (science de l'équilibre des objets), l'Hydrostatique (l'équilibre des objets au sein d'un fluide) et l'Optique géométrique furent les autres sciences grecques où les mathématiques ont été développées.

l'inaltérable et l'altérable, l'infini et le fini ; l'infini étant pensé comme physiquement irréalisable (impossible en acte) mais possible en pensée (en puissance).

La physique aristotélicienne est aussi une physique réaliste du sens commun où l'observation des phénomènes naturels est en quelque sorte prise à la lettre, comme cette distinction perçue entre les phénomènes célestes et les phénomènes terrestres. Cette physique possède sa propre cohérence interne et explique (dans le cadre de sa métaphysique) une large partie des phénomènes observés, hormis naturellement un certain nombre de points délicats comme cela arrive régulièrement dans toute théorie voulant rassembler l'ensemble des connaissances humaines. C'est qu'en effet, il faut insister sur le fait que la physique aristotélicienne est une philosophie naturelle qui n'est que partie d'une philosophie plus générale de la vie.

L'univers d'Aristote est sphérique. Il possède un haut constitué par la sphère du Ciel (voir 36) et un bas que constitue son centre. Cet Univers fini est le réceptacle des corps existants mais n'existe pas sans eux : le vide n'existe pas, et les cinq substances primordiales dont sont constitués les corps existants de cet univers forment un substrat continu. Ces corps se meuvent sans s'interpénétrer en cédant leur place les uns aux autres.

Quant au temps, « *il concerne également tous les lieux et tous les êtres* » dit Aristote ; il est absolu dirions-nous. Le temps est associé au mouvement : il en est le nombre ; car, « *quand nous percevons l'antérieur et le postérieur nous disons alors qu'il s'est passé du temps* ». Il est continu et s'écoule régulièrement.

**35. Les causes du mouvement des objets terrestres dans la physique aristotélicienne.** Depuis toujours on avait constaté qu'il faut produire une certaine action sur un objet pour qu'il se meuve, et que cet objet finit par s'arrêter si on cesse d'agir sur lui. Aristote en avait déduit que « *Tout mobile suppose nécessairement un moteur* ». Ainsi, sans moteur pas de mouvement.

Dans ce cadre, on distinguait deux types de mouvements terrestres : le mouvement naturel et le mouvement violent.

Le mouvement naturel des objets était en phase avec la théorie des quatre éléments : Air, Eau, Terre, Feu, dont les aristotéliciens pensaient qu'ils étaient les quatre substances fondamentales de l'univers observables sur Terre. Le mouvement naturel de l'élément Terre, en raison de sa lourdeur absolue qui l'entraînait vers le bas, était d'aller trouver le repos au centre de l'Univers. Ainsi s'expliquait la chute libre des

objets solides – les graves disait-on – ; ainsi s’expliquait la place de la Terre, immobile au centre de l’univers, lieu naturel des graves<sup>1</sup>.

Aristote et les aristotéliens avaient bien reconnu que lors de sa chute libre, la vitesse d’une pierre augmentait ; soit en raison de la proximité de son lieu naturel disaient-ils, soit en raison de la raréfaction de l’air due à la chaleur dégagée par l’objet lors de sa chute. L’attitude générale toutefois était de traiter le problème de la chute libre de façon approximative comme si la vitesse était constante, et Aristote d’argumenter pour conclure que cette vitesse  $V$  était dans le rapport de la lourdeur de l’objet (sa pesanteur  $P$ ) à la densité  $D$  du milieu au sein duquel s’effectuait la chute libre ; c’est-à-dire, en notations actuelles<sup>2</sup> :  $V \propto P/D$ . Cette thèse expliquait l’observation courante qu’une pierre chute moins vite dans l’eau que dans l’air ; et que dans un même milieu, les corps les plus pesants semblaient tomber plus vite que les corps les moins pesants, du moins selon l’opinion d’Aristote. Dans le vide, milieu de densité nulle, la formule donne une vitesse infinie, impliquant une propriété absurde d’ubiquité de l’objet qui pourrait être partout à la fois : nouvelle preuve de l’inexistence du vide ainsi que l’exigeait Aristote.

Le mouvement violent était quant à lui un mouvement venant contrarier l’aptitude des éléments à rejoindre leur lieu naturel. Pour cela, il fallait qu’un moteur extérieur générât une force motrice qui les y contraigne.

Les Anciens avaient bien remarqué que pour un même effort produit sur un objet, ce dernier se déplace plus ou moins facilement selon sa pesanteur. Il fallait donc conclure qu’un objet devait posséder une certaine capacité de résistance, une *inertie*, à quitter son lieu de repos naturel. Cette observation et les précédentes, conduisirent à une dynamique du mouvement violent qui se traduit à peu près par une loi du type :  $V \propto F_A/R$ , exprimant que la vitesse  $V$  acquise par un objet serait proportionnelle à la force motrice<sup>3</sup>  $F_A$  agissant sur cet objet. Le coefficient  $R$ , faisant office de résistance globale au mouvement violent, rendait compte à la fois de l’inertie de l’objet et de la résistance du milieu dans lequel il évoluait. Ainsi, à force motrice

---

<sup>1</sup> L’élément Feu quant à lui avait la propriété inhérente d’aller vers le haut (penser aux flammes) en raison de sa légèreté absolue ; son lieu naturel est la sphère rattachée à la Lune (voir 36). Attention : dans la pensée aristotélienne, la notion de légèreté s’oppose à la notion de lourdeur : ainsi, il faut dire de deux objets de type Terre que l’un est plus lourd que l’autre et non pas que cet autre est plus léger. Eau et Air sont des éléments intermédiaires s’élevant ou tombant selon qu’ils sont en présence de l’élément Terre ou de l’élément Feu. Il est important de comprendre que ces quatre éléments sont également pensés en tant qu’éléments fondamentaux de la vie.

<sup>2</sup> Où le symbole  $\propto$  signifie : « proportionnel(le) à ».

<sup>3</sup> L’indice A - pour Aristotélien - indique que les forces de la physique aristotélienne ne sont qu’en correspondance approximative avec nos forces actuelles : selon les auteurs aristotéliens et les sujets discutés elles peuvent apparaître comme des équivalents de nos notions de travail, de moment, de puissance ou encore de quantité de mouvement.

nulle, l'état naturel de repos était atteint, tandis qu'un objet en mouvement violent à la vitesse  $V$  subissait forcément l'effet d'un moteur externe caractérisé par  $F_A$ .

Pendant les quelques 1600 ans que perdura cette dynamique terrestre, on ne manqua pas d'examiner les points épineux qu'elle soulevait. Ce fut le cas en particulier de la question lancinante du mouvement violent projeté : comment une pierre poursuit-elle son mouvement violent une fois qu'elle est lâchée par la main qui la projette ? Pourquoi ne rejoint-elle pas immédiatement son lieu naturel en entamant un mouvement rectiligne vers le bas ?

Selon la conviction générale que le moteur devait être en contact avec la pierre pour générer un mouvement violent, les aristotéliens firent appel à l'influence de l'air : Platon (vers -360) avait proposé que l'air, chassé par la pierre, la chassait en retour pour reprendre sa place. Aristote, y voyant-là l'introduction du vide ne serait-ce qu'un instant, proposait plutôt que l'air situé dans le voisinage de la pierre subissait la force transmise par la main et la communiquait de proche en proche à la pierre, tout en s'amenuisant en raison de cette dispersion.

D'autres (Philopon vers 517 ; Al Farabi vers 900 ; Ibn Sina dit Avicenne vers 1010, ...), ne pensant pas que ces explications soient suffisantes – un courant d'air peut-il faire se déplacer une pierre au repos ? – imaginèrent l'existence d'une « force imprimée » au sein de l'objet : la main (le moteur) imprimerait au sein de la pierre une force, un *impetus*<sup>1</sup>, lui permettant de poursuivre son mouvement forcé. Selon les auteurs, cet *impetus* se dissipait soit spontanément (Philopon ; Galilée à ses débuts) ou alors sous l'effet de la résistance de l'air (Buridan vers 1340), expliquant par là un retour progressif au repos sous l'effet du mouvement naturel.

De son côté, Ibn Bajja (dit Avempace, vers 1110) remettait en cause la loi du mouvement naturel,  $V \propto P/D$ , en prenant comme exemple le mouvement naturel à vitesse finie des sphères célestes (voir 36) qui se produisait dans un milieu sans résistance aux dires même d'Aristote. Ibn Bajja avançait plutôt une loi du type  $V \propto P - R$  en voyant le milieu comme un simple agent retardant le mouvement naturel qui aurait lieu dans un vide hypothétique, ainsi que Philopon l'avait déjà suggéré<sup>2</sup>.

Ces deux objections aux lois aristotéliennes du mouvement furent propagées en Europe et devinrent des lieux communs lorsque cette physique connut un renouveau tout au long du XIV<sup>e</sup> siècle où l'on se préoccupa surtout de cette question du

<sup>1</sup> C'est Buridan qui nomma « *impetus* » cette force imprimée à l'intérieur de l'objet par le moteur. Les auteurs arabes en faveur de ce point de vue la dénommaient « *mayl* ».

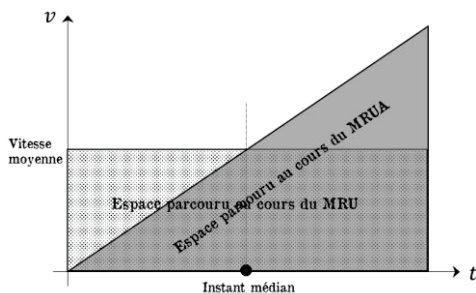
<sup>2</sup> Philopon avait aussi affirmé, après en avoir fait l'expérience, qu'il était faux que les temps de chute de deux corps de poids différents soient dans le rapport de ces poids comme le prétendait Aristote.

mouvement naturel dans un vide hypothétique<sup>1</sup>. Certains auteurs inventèrent la notion de résistance interne au mouvement,  $R_{int}$  : un facteur propre à l'objet et dépendant de son degré de légèreté, l'objet étant alors pensé comme un mélange proportionné des quatre éléments. En écrivant  $R = R_{ext} + R_{int}$ , on pouvait ainsi sauvegarder la loi d'Aristote tout en admettant le mouvement naturel à vitesse finie dans le vide.

D'autres empruntèrent plutôt la voie dégagée par Ibn Bajja et Philopon en proposant de considérer non pas la pesanteur des objets mais leur « gravité spécifique », c'est-à-dire, *grosso modo*, leur densité :  $V \propto D_{objet} - D_{milieu}$ . Cette thèse fut défendue par Benedetti (vers 1560), le maître de Galilée qui la défendit lui-même à ses débuts. De cette loi, il fallait conclure que, pour un même milieu, les objets de même densité interne devaient tous réaliser un mouvement naturel de chute libre à la même vitesse. La théorie de l'*impetus* quant à elle, qui permettait aussi de penser le mouvement à vitesse finie dans le vide, fut développée de diverses façons par les « parisiens » Buridan, Albert de Saxe, et Oresme. Buridan en particulier l'appliquait au mouvement circulaire et conjecturait qu'en l'absence de résistance extérieure une roue de moulin continuerait de tourner indéfiniment sous l'effet de l'*impetus* reçu. Il en déduisait que le mouvement circulaire permanent des astres (voir le 36) était dû à un *impetus* originel.

Dans le même temps, les mécaniciens anglais (Bradwardine, Heytesbury, Swineshead, Dumbleton) introduisaient des raisonnements mathématiques novateurs. Ainsi, en définissant clairement la notion d'accélération uniforme comme un changement égal de vitesse dans des intervalles de temps constants et quelconques, ils en déduisirent le théorème dit de la vitesse moyenne : *Un objet amorçant à partir de l'état de repos une accélération uniforme parcourt la même distance que si cet objet se déplaçait pendant la même durée avec une vitesse uniforme égale à la vitesse acquise à l'instant médian lors de son accélération uniforme.*

C'est sur la base de ce théorème, qui jette un pont entre mouvement rectiligne uniforme (MRU) et mouvement



**Figure 30.** Démonstration géométrique du théorème de la vitesse moyenne par Oresme dans un diagramme vitesse-temps où les espaces parcourus sont représentés par des surfaces.

<sup>1</sup> En 1277, les religieux condamnèrent 219 propositions d'Aristote incompatibles avec la pensée chrétienne. Parmi elles, la non-existence du vide vue comme une limitation à la toute-puissance du dieu chrétien.

rectiligne uniformément accéléré (MRUA), que Galilée finira par étudier le problème de la chute libre.

### 36. Le mouvement des objets célestes dans la physique aristotélicienne et la question de la rotation de la Terre sur elle-même. Le mouvement perpétuel des

étoiles est un mouvement circulaire qui s'observe chaque nuit. Il est élevé au rang de mouvement parfait, n'ayant ni début ni fin, et posé en tant que mouvement naturel des astres dans la théorie aristotélicienne.

La Terre, sphérique, est donc au repos au centre de l'univers, lieu naturel de l'élément Terre, et les astres les plus éloignés - les étoiles - sont répartis sur la surface d'une sphère tournant sur elle-même en 24 heures : c'est le modèle géocentrique du Monde ; un univers fini, limité par cette sphère du Ciel. En son sein évoluent la Lune, le Soleil et les cinq planètes que sont Venus, Mars, Jupiter, Mercure et Saturne. Ces astres singuliers ne réalisent pas des mouvements circulaires parfaits (figure 31). Les 5 planètes en particulier – dont le mot d'origine grecque signifie « les astres qui errent dans le ciel » – suivent un lent mouvement autour de la Terre ponctué par des rétrogradations régulières que les astronomes vont s'efforcer d'expliquer en composant divers types de mouvements circulaires entre eux. Il s'agit alors de « sauver les apparences » conformément à l'attitude préconisée par Platon, c'est-à-dire ici : rendre compatible la contradiction entre le mouvement observé et le principe du mouvement circulaire (uniforme).

**Primauté du mouvement circulaire** (*Aristote, Physique*). « Il est évident que le transport circulaire est le premier des transports. En effet tout transport, comme nous l'avons dit précédemment, est, ou circulaire, ou rectiligne, ou mixte ; ceux-là sont nécessairement antérieurs à celui-ci, puisqu'il en est composé ; et le circulaire est antérieur au rectiligne, car il est plus simple et plus parfait. En effet il n'y a pas de transport sur une droite infinie, car un tel infini n'existe pas ; et, s'il existait, rien ne serait ainsi mû, car l'impossible ne se produit pas et parcourir l'infini est impossible. Maintenant, le mouvement sur une droite finie, quand il est rebroussé, est composé et forme deux mouvements ; quand il n'est pas rebroussé, il est imparfait et destructible. Or le parfait est antérieur à l'imparfait selon la nature, selon la notion, selon le temps ; et l'indestructible, au destructible. En outre, un mouvement qui peut être éternel est antérieur à celui qui ne le peut ; or le mouvement circulaire peut être éternel, tandis qu'aucun des autres, ni le transport ni d'ailleurs aucun autre, ne le peut ; car un arrêt doit se produire et, s'il y a arrêt, le mouvement est détruit. »



**Figure 31.** Le mouvement rétrograde de Mars vu depuis la Terre. Régulièrement, à la même heure, on photographie la région du ciel où évolue Mars. Sa trajectoire apparaît sur le fond des étoiles fixes en superposant les clichés. En arrière-plan on distingue la trajectoire d'Uranus. Image réalisée d'après un travail photographique de T. Tezel.

Eudoxe de Cnide (vers -370) avait ainsi construit un système de sphères principales dont l'axe de rotation était connecté à l'axe de rotation de la sphère des étoiles. Ces sphères avaient pour centre la Terre et chacune était rattachée à l'un des astres singuliers ; ce qui fournit l'image première du modèle géocentrique du Monde qui perdura jusqu'à l'époque de Copernic (figure 32). Puis, toujours afin de « sauver les apparences », chaque sphère principale contenait d'autres sphères homocentriques intérieures, l'astre singulier se situant sur la sphère la plus intérieure. Avec un choix adéquat des axes et des vitesses de rotations, Eudoxe parvint à un système du Monde composé de 27 sphères permettant de rendre compte de façon presque satisfaisante des mouvements effectivement observés. Aristote, dans son *Traité du Ciel*, avait suivi le modèle d'Eudoxe. Les sphères homocentriques, invisibles et solides, remplissaient l'univers, de sorte que le vide y était absent. Leur substance, ainsi que celle des astres, ne pouvait pas être un élément terrestre. Ce cinquième élément, noble, subtil, ni lourd ni léger, sans résistance au mouvement, fût dénommé : Ether. Un défaut important de cette modélisation géocentrique du Monde était connu

d'Eudoxe lui-même semble-t-il : les planètes étaient toujours situées à égale distance de la Terre. Or, à chacune de leur rétrogradation, on observe que leur éclat augmente, signe qu'elles se rapprochent de la Terre. Les astronomes des générations

suivantes abandonnèrent donc le modèle des sphères homocentriques et construisirent d'autres mécanismes de mouvements circulaires<sup>1</sup> où cette fois les sphères pouvaient s'interpénétrer et les planètes se rapprocher de la Terre à diverses périodes. Ptolémée (vers 130), qui fit autorité en astronomie, innova lui

aussi en admettant que certaines sphères principales n'avaient pas pour centre la Terre. Il régla la question délicate de l'interprétation de ce centre en affirmant que

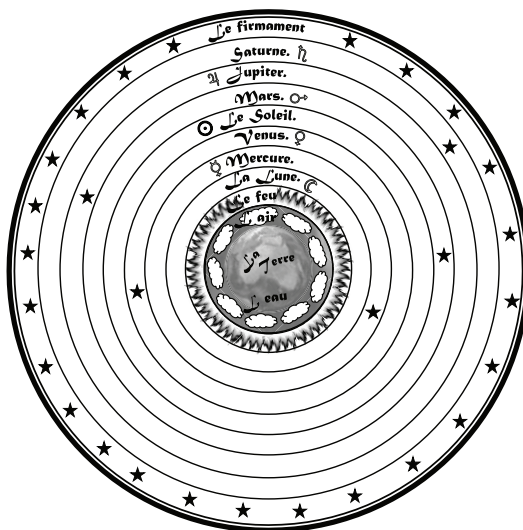
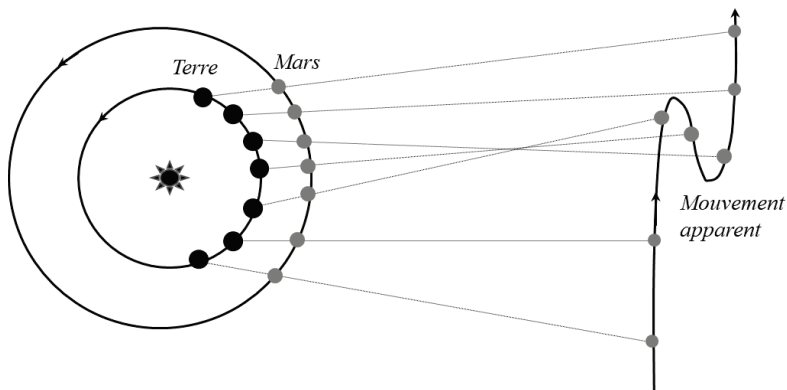


Figure 32. Le modèle géocentrique de l'Univers dans son image simplifiée. D'après *La theorie des cielz*, O. Fine, Paris, 1528.

<sup>1</sup> C'est la théorie des épicycles, des excentriques et des déférents, probablement inaugurée par Apollonius de Perge (vers -240), poursuivie et améliorée par Hipparque de Nicée (vers -140), Ptolémée (vers 130), Al Battani (vers 900), Al Khazin (vers 930), Omar Khayyam (vers 1080), Al Tusi (vers 1250), Ibn Al Shatir (vers 1340), Copernic (vers 1510), Tycho Brahe (vers 1580) et d'autres.

les hypothèses astronomiques ne prétendaient pas représenter la réalité du mouvement des astres : elles ne servaient qu'en tant qu'elles étaient utiles pour les calculs, afin de sauver les apparences. À la suite de Ptolémée, une majorité d'astronomes pencha en faveur de cette attitude sans toutefois cesser toute critique vis-à-vis des conceptions aristotéliennes.

Dès l'époque d'Aristote d'ailleurs, il fut proposé, puis discuté au cours des siècles, un autre modèle de l'univers dont l'avantage était d'expliquer simplement le mouvement régulier des étoiles, la course journalière du Soleil et de la Lune, ainsi que le mouvement rétrograde des planètes (Aristarque de Samos vers -280, Al-Biruni vers l'an 1000, Copernic vers 1510) : c'est le modèle héliocentrique où le Soleil est placé au centre de l'univers. Dans ce modèle, la Terre, à l'instar des planètes, tourne autour du Soleil en une année et réalise un tour sur elle-même en 24 heures. Le mouvement des astres observé depuis la Terre n'est alors qu'un mouvement apparent, un simple effet cinématique dû aux mouvements de la Terre elle-même (figure 33).



**Figure 33.** Explication cinématique du mouvement rétrograde des planètes dans le cadre du modèle héliocentrique : ce n'est qu'un mouvement apparent dû au mouvement de la Terre autour du Soleil.

Naturellement, le modèle héliocentrique posait des difficultés théoriques (puis religieuses) encore plus graves que les innovations de Ptolémée. Parmi l'ensemble des objections que l'on put faire à l'encontre de cette thèse, celle du devenir des objets situés à la surface d'une Terre en rotation sur elle-même est de première importance pour nous. Déjà formulée par Ptolémée, cette objection avait pris la forme de « l'argument de la tour » à l'époque de Galilée : à supposer que la Terre tourne sur elle-même, une pierre lâchée depuis le haut d'une tour chuterait sur le sol non pas au pied de la tour comme on l'observe communément, mais à grande distance de cet endroit car, pendant le temps de la chute, la Terre continue de tourner.

**37. De Copernic à Newton.** L'argument de la tour fut avancé par les partisans les plus fidèles à la pensée aristotélicienne pour contrer les idées émises par Copernic lorsque cet astronome se prononça en faveur du modèle héliocentrique de l'univers (vers 1510). Copernic avait pour tâche de réformer le calendrier qui datait de l'époque de Jules César (calendrier julien) et qui avait pris une dizaine de jours de retard par rapport aux saisons au cours des siècles. Copernic avançait que le modèle héliocentrique permettait des calculs astronomiques plus simples et il militait pour son adoption en autorisant le mouvement circulaire en tant que mouvement naturel possible pour l'élément Terre. Ce faisant, il brisait la dichotomie entre physique du ciel et physique terrestre que ni les astronomes aristotéliens ni les religieux ne pouvaient accepter.

Nicolas Copernic ↓	1473 - 1543	Pierre de Fermat	1601 - 1665
Giambattista Benedetti	1530 - 1590	Evangelista Torricelli	1608 - 1647
Tycho Brahe	1546 - 1642	Blaise Pascal	1623 - 1662
Giordano Bruno	1548 - 1600	Jean-Dominique Cassini	1625 - 1712
Simon Stevin	1548 - 1620	Christiaan Huygens	1629 - 1695
Francis Bacon	1561 - 1626	Robert Hooke	1635 - 1703
Galileo Galilei	1564 - 1642	Isaac Newton	1642 - 1727
Johannes Kepler	1571 - 1630	Olaf Römer	1644 - 1710
Willebrord Snell	1580 - 1626	Gottfried Leibniz	1646 - 1716
Isaac Beeckman	1588 - 1637	Johann Bernoulli	1667 - 1748
Marin Mersenne	1588 - 1648	James Bradley	1693 - 1762
Pierre Gassendi	1592 - 1655	Pierre Maupertuis	1698 - 1759
René Descartes	1596 - 1650	Émilie du Châtelet	1706 - 1749

**Figure 34.** Tableau chronologique incomplet des principaux contributeur(e)s à la naissance de la nouvelle dynamique.

Toutefois, ces idées coperniciennes diffusèrent en pleine période de la Renaissance en Europe et ne firent que s'amplifier par la suite. De Copernic en 1543 (date de la publication du *de revolutionibus orbium coelestium*) à Newton en 1687 (date de la publication des *Philosophiae naturalis principia mathematica*), près de 150 ans se passèrent au cours desquels les vues aristotéliciennes, souvent affaiblies par un dogmatisme aveugle, furent mises en défaut pour être finalement déclarées obsolètes. La période la plus singulière est probablement celle qui court de 1590 à 1640 environ, lorsque Galilée et Kepler sont en activité (figure 34).

**Kepler.** D'influence platonicienne et copernicien convaincu, Kepler cherchait l'harmonie du ciel à l'aide des nombres et des figures mathématiques. Il étudia pendant six années les données observationnelles de l'orbite de Mars que lui avait léguées l'astronome Tycho Brahe. Six années à la fin desquelles, en désespoir de cause, il finit par briser la doctrine du mouvement circulaire pour découvrir que la trajectoire de Mars était en parfait accord avec une ellipse dont le Soleil est un foyer. Il vérifia que les autres planètes obéissaient bien à cette nouvelle loi astronomique et dans le même temps il découvrait la loi des aires. Ces premières études furent publiées en 1609. En 1618, Kepler, calculateur infatigable, énonça sa troisième loi qui relie le carré des périodes de révolution des planètes autour du Soleil au cube du demi-grand axe de leurs orbites elliptiques.

Après Kepler et ses orbites elliptiques, après que Galilée ait pu observer les montagnes de la Lune et les satellites de Jupiter avec son télescope (1610), les astronomes pencheront franchement pour le modèle héliocentrique du Monde et pour la nature matérielle (pesante) des astres. L'Ether environnant allait disparaître<sup>1</sup> lui aussi pour être remplacé par le vide que Torricelli puis Pascal commenceront de mettre en évidence (1644).

**Galilée.** Les bases nécessaires à la mise en place d'une dynamique nouvelle, en phase avec l'idée d'une Terre en mouvement, fut l'œuvre de Galilée qui mis l'expérimentation et la rigueur mathématique au centre de cette construction. Il recourut aussi très souvent aux raisonnements faisant appel à *l'expérience de pensée* : expérience imaginaire, idéalisée, où les conditions requises pour cerner et discuter d'un phénomène physique particulier sont censées être pleinement satisfaites : par exemple, la chute libre dans le vide.

Dans son *Dialogue sur les deux systèmes du Monde* et ses *Discours sur deux sciences nouvelles*, qui synthétisent une grande partie de ses travaux, Galilée soutient ce qui va devenir plus tard le principe de relativité en faisant référence à de nombreux exemples simples : si on lâche une pierre depuis le haut du mât d'un navire en mouvement uniforme entre Venise et Alexandrie, cette pierre tombera au pied du mât (abstraction faite de l'influence du vent), tout comme si le navire était au repos dans le port de Venise. De même, dit Galilée, on ne peut distinguer les mouvements naturels ou forcés des objets ou animaux volants qui seraient enfermés dans une cabine de ce navire, que ce navire soit en mouvement uniforme ou au repos. Par ces arguments issus de l'expérience courante, Galilée faisait entendre qu'aucune expérience de dynamique ne permettrait de distinguer si le navire était en mouvement uniforme ou au repos. Il concluait que le mouvement rectiligne uniforme

---

<sup>1</sup> Pour réapparaître au cours du XIX<sup>e</sup> siècle en tant que support de la propagation des ondes électromagnétiques.

était « comme nul », en contradiction totale avec les fondements de la théorie aristotélicienne qui réclamait un moteur pour tout mouvement.

Ces affirmations de Galilée résonnaient avec les résultats de ses expériences sur des plans inclinés se terminant par une longue rampe horizontale : il avait démontré (1604) que plus on rendait lisse la rampe, moins les objets étaient freinés dans leur course horizontale qu'ils effectuaient avec la vitesse acquise au sortir du plan incliné. Il en déduisit par extrapolation qu'un objet se déplaçant sur une rampe horizontale parfaitement lisse ne s'arrêterait jamais. Si l'objet s'arrêtait comme l'avaient constaté les Anciens, c'est parce qu'il subissait encore des forces - une résistance au mouvement - de la part du support. Mais dans la limite d'une force de résistance nulle, cet objet continuerait de se mouvoir dans un mouvement uniforme jusqu'à ce qu'une action extérieure quelconque opère sur lui : cette conclusion formera la première loi de Newton et constitue notre principe d'inertie<sup>1</sup>. Ainsi, dans la future dynamique newtonienne, le rôle d'une force ne sera pas de créer le mouvement comme le pensaient les aristotéliciens, mais de le modifier en modifiant la vitesse de l'objet, en grandeur et en direction.

Il faut remarquer que lorsqu'il argumentait contre l'existence du vide en raison de son incompatibilité avec l'idée de mouvement, Aristote écrivait (Physique, livre IV) : « *Il serait encore bien impossible de dire pourquoi, dans le vide, un corps mis une fois en mouvement pourrait jamais s'arrêter quelque part. Pourquoi, en effet, s'arrêterait-il ici plutôt que là ? Par conséquent, ou il restera nécessairement en repos, ou nécessairement s'il est en mouvement, ce mouvement sera infini, si quelque obstacle plus fort ne vient à l'empêcher.* ». Aristote imagine donc très bien, et prend même pour une évidence, l'idée du principe d'inertie. Mais ce qu'il y voit, c'est que la notion même de mouvement dans le vide est physiquement absurde, puisque ce mouvement sera infini et que l'infini en actes n'existe pas. Galilée, habitué à l'idée de mouvement dans un vide hypothétique que les mécaniciens du XIV<sup>e</sup> siècle avaient étudié, voit quant à lui qu'un mouvement uniforme perdure sans moteur.

De même, Aristote connaît cette expérience antique des marins qui savent qu'à bord d'un bateau en mouvement sur une mer calme, tout se passe comme si l'on y était au repos. Mais ce que voit Aristote, c'est que ce bateau est mû par un moteur (le vent au contact des voiles). Pour Galilée, le moteur d'Aristote vient seulement combattre la résistance du milieu qu'est l'eau ; ce qui compte c'est que cet exemple du bateau permet de penser un mouvement uniforme dans le vide et qu'aucune expérience ne

---

<sup>1</sup> La description du mouvement uniforme est ambiguë chez Galilée : en fait, on ne sait pas s'il parle de mouvement uniforme rectiligne ou circulaire. C'est Descartes qui explicitera le principe d'inertie tel que nous le connaissons.

pourra rendre compte de l'existence d'un moteur pour l'entretenir : principe de relativité.

Ainsi, d'une certaine façon, Galilée se permet de poser les bases d'une théorie du mouvement idéalisée (existence supposée du vide, aucune résistance au mouvement de la part des supports ou du milieu, possibilité d'un mouvement infini), ce qu'Aristote s'empêche de faire par réalisme.

*La chute libre des corps.* Les expériences de Galilée sur la chute libre furent effectuées aux débuts de sa carrière. Pour arriver à la conclusion finale que tous les corps en chute libre tombent à la même vitesse dans le vide et que cette vitesse est proportionnelle au temps de chute, il aura fallu que Galilée abandonne les concepts aristotéliens de lourdeur et de légèreté absolues, qu'il parvienne à maîtriser empiriquement les influences (diverses selon les corps) de la poussée d'Archimède et de la force de frottement fluide inhérentes à la présence du milieu qu'est l'air, qu'il comprenne clairement la notion de mouvement uniformément accéléré, qu'il puisse réaliser des mesures fiables du temps. C'est finalement par l'argumentation opérée sur un grand nombre d'expériences de pensée - argumentation guidée par les expériences réelles qu'il avait faites - que Galilée écrivit ces conclusions vers la fin de sa carrière.

Guidé par son principe d'inertie, il comprit aussi que, lors d'un mouvement violent projeté, la pierre emportait avec elle la vitesse que la main lui avait procurée juste avant qu'elle ne la lâche. Le mouvement qui s'ensuivait n'était alors qu'un mouvement de chute libre qu'il fallait composer avec cette vitesse initiale : ce faisant, Galilée découvrait que la pierre réalisait une trajectoire parabolique.

En 1971, Galilée fut mis à l'honneur lorsque l'astronaute David Scott fit l'expérience télévisée de la chute libre simultanée d'un marteau et d'une plume sur la Lune. Ce résultat que tous les corps en chute libre tombent dans le vide à la même vitesse indépendamment de leur forme et de leur poids est l'un des piliers de la physique newtonienne et aussi de la théorie einsteinienne de la gravitation.

On pourrait appréhender cette loi physique dans un langage aristotélien : plus un corps est lourd, plus il est difficile de le déplacer (inertie aristotélienne des corps) ; mais plus il est lourd plus il est attiré vers son lieu naturel (loi de la gravitation aristotélienne) : lors de la chute libre, les deux effets se combinent pour donner lieu à ce mouvement d'accélération uniforme, la même pour tous les corps. Mais ce discours est devenu trop imprécis à l'époque de Galilée où la volonté est maintenant de comprendre cette loi de la chute libre dans un cadre plus général, avec un formalisme mathématique et expérimental plus élaboré qui engloberait aussi les lois découvertes par Kepler.

Après ses observations du ciel à la lunette, puis au télescope qu'il conçut, Galilée était persuadé de la justesse du système copernicien et le faisait savoir. Il combattit l'argument de la tour en reprenant l'exemple de la pierre chutant du mât d'un bateau en mouvement uniforme : cette pierre tombait bien au pied du mât. Il en était de même pour la pierre tombant d'une tour, car, comme pour le mouvement violent projeté, cette pierre emportait avec elle la vitesse que la terre en rotation lui avait conférée juste avant sa chute libre ; ainsi, le fait que la pierre tombe bien au pied de la tour n'était pas en contradiction avec l'idée d'une Terre en mouvement.

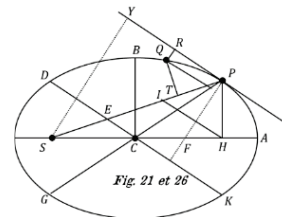
**Newton.** C'est essentiellement Newton qui, aidé par les travaux de ses contemporains (Huygens, Hooke et Leibniz en particulier), surmonta la tâche de synthétiser cette nouvelle physique du mouvement et de la rendre compatible avec les trois lois de Kepler. Ernst Mach<sup>1</sup> a réalisé un exposé détaillé du cheminement de Newton. On peut également lire Newton dans le texte<sup>2</sup>. Nous en tirerons ici les raisonnements approchés suivants en prenant pour base le principe d'inertie mis en valeur par Galilée et reformulé par Descartes.

Nous appellerons alors « force » toute quantité donnant lieu à une accélération (c'est-à-dire un changement de vitesse) qui lui est proportionnelle :  $\vec{a} = \vec{F}/\alpha$ .<sup>3</sup> Il reste à trouver la constante de proportionnalité  $1/\alpha$  qui doit représenter l'inertie du corps étudié, cette propriété que les

**PROPOSITION XI. PROBLEME VI.**

*Un corps faisant sa révolution dans une ellipse; on demande la loi de la force centripète, lorsqu'elle tend à un de ses foyers*

Comme la force qui tend au centre de l'ellipse, & par laquelle le corps  $P$  peut faire sa révolution dans cette courbe, est par le Cor. I de la Prop. 10 proportionnelle à la distance  $CP$  du corps au centre  $C$  de l'ellipse; en menant  $CE$  parallèle à la tangente  $PR$  de l'ellipse, on verra par le Cor. 3 de la Prop. 7 que la force par laquelle ce même corps  $P$  feroit sa révolution autour d'un autre point quelconque  $S$  de l'ellipse feroit comme  $\frac{PE^3}{SP^3}$  en supposant que  $E$  soit la rencontre de  $CE$  et de la droite  $SP$ , tirée au point  $S$ . Done, lorsque le point  $S$  sera le foyer, & que par conséquent  $PE$  sera constante, la force centripète sera comme  $\frac{1}{SP^2}$  C.Q.F.T.



**Figure 35.** Un extrait de la démonstration géométrique par Newton de la loi de la gravitation en «  $1/R^2$  » à partir de la première loi de Kepler. La force attractive  $F$  qui s'exerce sur un corps de masse  $m$  en présence d'un autre corps de masse  $M$  situé à la distance  $R$  du premier corps est :  $F = G m M / R^2$  où  $G$  est appelée constante de la gravitation. D'après la traduction de la marquise du Chastellet.

<sup>1</sup> Ernst Mach, *La Mécanique : exposé historique et critique de son développement*, Librairie scientifique Hermann, Paris, 1904.

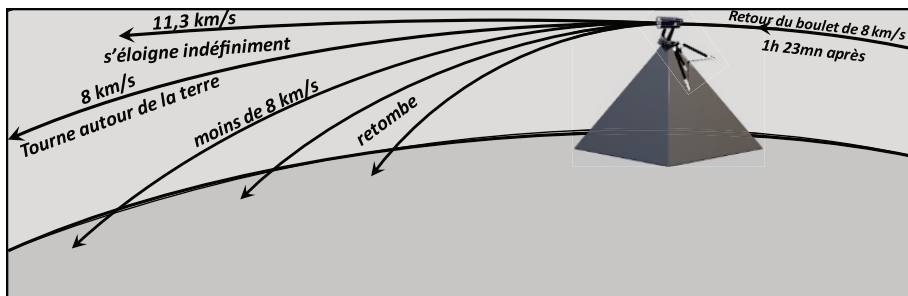
<sup>2</sup> Isaac Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Traduction de la Marquise du Chastellet, Paris, 1756.

<sup>3</sup> On passe ici l'étape qui consiste à reconnaître l'aspect vectoriel (c'est-à-dire directionnel) de cette loi ; et que si ce corps subit deux forces simultanément, son accélération prendra la direction de la somme de ces deux forces, somme réalisée selon la règle du parallélogramme.

Anciens avaient constaté que plus les corps sont lourds plus il est difficile de les faire se mouvoir.

Pour cela, il faut expliciter ce que l'on entend par lourdeur, pesanteur d'un corps : influencé par Kepler et Hooke, Newton eut l'inspiration que cette pesanteur devait avoir la même origine que la force d'attraction qui devait exister entre une planète et son soleil, ou entre la Terre et la Lune. Simplement, au voisinage de la surface d'un astre, cette force devait être telle que la loi de la chute libre des corps pesants découverte par Galilée devait avoir lieu. Ce programme l'amena à définir la masse  $m$  d'un corps en tant que grandeur représentant la quantité de matière contenue dans ce corps. Il put ainsi rendre compte que  $m$  s'identifiait à  $\alpha$  et intervenait aussi dans la loi de la gravitation universelle des corps qu'il venait d'énoncer grâce aux lois de Kepler (figure 35).

Ainsi, tout comme une pomme, la Lune tombait aussi sur la Terre à cause de son attraction gravitationnelle, mais, en raison de son mouvement inertiel initial<sup>1</sup>, cette chute de la Lune était continue et devenait mouvement orbital (figure 36).



**Figure 36.** Pour expliciter la chute permanente de la lune, Newton prit comme exemple un boulet de canon tiré depuis le sommet d'une montagne : selon la valeur de l'impulsion initiale du boulet de canon, celui-ci réalisera soit un mouvement de chute libre parabolique, soit un mouvement orbital autour de la Terre. Au-delà de la vitesse initiale limite de  $11.2 \text{ km/s}$ , le boulet pourra même se libérer de l'attraction terrestre. D'après une image de *l'Astronomie populaire*, Camille Flammarion, 1890.

Au cours de ses réflexions sur la notion de masse, d'inertie, de gravitation et aussi à partir d'expériences sur les chocs qu'il réalisa, Newton dût aussi admettre que si un corps subissait une force de la part d'un autre corps, alors il fallait que cet autre corps subisse lui aussi une force de la part du premier, égale et opposée : principe dit de l'action et de la réaction, aussi dénommé principe des actions réciproques.

On peut donner ici l'argument suivant : on sait qu'un corps en équilibre sur une table par exemple subit la force de gravitation terrestre, c'est-à-dire son poids  $\vec{P}$ . Or, puisqu'il est à l'équilibre, il faut bien qu'une autre force  $\vec{X}$  agisse sur lui afin que son accélération soit nulle, de sorte que l'on puisse écrire :  $\vec{P} + \vec{X} = \vec{0}$ . Cette force ne

<sup>1</sup> C'est-à-dire son impulsion ou quantité de mouvement initiale :  $m\vec{v}$  où  $m$  est la masse et  $\vec{v}$  la vitesse qu'aurait la lune dans son mouvement rectiligne uniforme si elle n'était pas soumise à la pesanteur terrestre.

peut provenir que de la table puisque sans elle le corps tomberait : il faut conclure que sous l'effet du poids  $\vec{P}$  que le corps exerce sur la table, celle-ci, en retour, exerce sur le corps une force égale et opposée  $\vec{X} = -\vec{P}$ .

Outre les nombreux exemples tirés de l'observation et de l'expérience que Newton invoqua pour justifier ce principe, il proposa aussi l'expérience de pensée suivante : imaginons deux corps 1 et 2 sous l'effet d'une interaction attractive et qu'un obstacle quelconque, insensible à cette interaction, les empêche de se rejoindre. Si la force  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  qu'exerce le premier corps sur le second est plus faible que la force  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  qu'exerce le second sur le premier, alors l'obstacle subira une pression plus importante de la part du corps 1 que celle exercée sur lui par le corps 2 : il ne sera donc pas à l'équilibre et le système formé par les deux corps et l'obstacle va alors se mouvoir dans un mouvement continuellement accéléré ; ce qui est absurde en vertu du principe d'inertie. Il faut donc conclure que les deux corps doivent interagir avec des forces égales et opposées. Par cet argument, Newton nous suggère que si l'on n'observe jamais un corps solide isolé partir spontanément dans un mouvement accéléré, c'est parce que les forces d'interactions qui relient entre eux les composants de cet objet satisfont au principe des actions réciproques.

L'usage a montré que les trois principes qui viennent d'être ébauchés, assortis de la loi de la gravitation, forment un ensemble cohérent qui parvient à rendre compte de façon quantitative de la plupart des mouvements classiques observés sur Terre et dans l'univers en général, à l'exception des systèmes microscopiques (mécanique quantique), des cas où les vitesses mises en jeu ne sont pas négligeables devant la vitesse de la lumière dans le vide (relativité restreinte), et des cas à forte gravité (relativité générale).

Bien que les newtoniens fussent convaincus du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même, il leur restait encore à réaliser une preuve expérimentale de ce phénomène. En 1689, Newton prédisait un aplatissement de la Terre aux pôles en raison de la force d'inertie centrifuge<sup>1</sup> qui est la plus élevée à l'équateur. Mais la mesure du méridien terrestre fut longue et difficile à mettre en œuvre, et les résultats ne convainquirent que les spécialistes. En 1679, Newton avait aussi proposé, à la suite de Galilée, qu'en raison des différences de vitesse de rotation terrestre entre le haut d'une tour et le bas de la tour on devrait observer une très légère déviation vers l'Est du mouvement de chute libre d'une pierre lâchée depuis cette tour. L'expérience ne fut réalisée qu'en 1803 dans un puits de mine à Schlebusch (Westphalie), mais là encore elle ne fut pas convaincante car trop sensible à l'humidité et à la façon de lâcher l'objet.

---

<sup>1</sup> Ces forces inertielles sont traitées au chapitre 18. Elles apparaissent lorsque le référentiel choisi est en mouvement accéléré relativement à un référentiel galiléen défini au prochain chapitre.

C'est Foucault, en 1851, qui comprit que les oscillations d'un grand pendule devaient permettre de détecter le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même grâce à l'effet Coriolis (1835) que le pendule devait subir. Cet effet, assimilable à l'existence d'une force inertielle (de Coriolis), devait induire un lent mouvement de rotation du plan des oscillations du pendule vers l'Est. L'expérience fut un succès scientifique et populaire.

Le modèle héliocentrique réclamait d'agrandir l'univers fini d'Aristote, sans quoi on aurait dû observer de légers changements de la position des étoiles selon les saisons en raison du mouvement orbital de la Terre. Or il n'en est rien. En outre, l'existence d'un centre revenait à donner au Soleil une place privilégiée qu'aucun argument de nature physique ne pouvait soutenir. Il fallait donc que le rayon de l'univers associé à la nouvelle science du mouvement soit infini et que les étoiles se répartissent non pas sur la sphère céleste des aristotéliens, mais au sein de cet espace infini à des distances très variables et lointaines de la Terre.

Ainsi, l'espace newtonien est un espace vide, infini, au sein duquel évoluent les corps en interactions. Cet espace dit « absolu » est muni d'une géométrie euclidienne qui permet de repérer les corps les uns vis-à-vis des autres. Les mouvements de ces corps sont décrits par l'évolution temporelle de leurs positions grâce au paramètre « temps » qui reste conforme aux idées d'Aristote en ce sens que pour Newton aussi le temps coule uniformément, indépendamment de toute chose.

## Compléments et exercices du chapitre 8

**C42. Bibliographie.** La lecture des auteurs anciens tels Aristote, Copernic, Galilée, Newton, etc... est toujours instructive. On trouve de nombreux extraits de leurs œuvres en accès libre sur le net. Celles de Galilée se lisent (presque) comme des romans.

Du côté de l'histoire des sciences, on pourra commencer par lire :

- I. Bernard Cohen, *Les origines de la physique moderne*, Éditions du Seuil, 1993
- E. Grant, *La physique au Moyen-Âge*, Presses Universitaires de France, 1995

Puis :

- E. Mach, *La Mécanique : exposé historique et critique de son développement*, Editions Jacques Gabay, 1987
- R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, Éditions Jacques Gabay, 1996
- T.S. Kuhn, *La révolution copernicienne*, Fayard, 1973



## CHAPITRE 9

# PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE NEWTONNIENNE

Les trois lois qui suivent, accompagnées de la théorie newtonnienne de la gravitation exposée au prochain chapitre, fondent la dynamique classique du point matériel qui se propose de déterminer le mouvement des objets si ses causes en sont connues.

**38. Principe d'inertie (première loi de Newton) et référentiels galiléens.** La première loi du mouvement fût énoncée par Newton de la façon suivante : « *Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.* »

Le principe d'inertie décrit donc tout à la fois l'incapacité qu'ont les objets à changer seuls leur état de mouvement et le caractère particulier du mouvement rectiligne uniforme (qui comprend l'état de repos) en tant que mouvement naturel d'un objet s'il est *libre*, c'est-à-dire si rien d'extérieur ne vient le perturber. On dit aussi de cet objet qu'il est *isolé* de son environnement.

Cette première loi du mouvement cache une difficulté et la solution newtonnienne à cette difficulté est discutable. La critique en sera donnée dans les compléments du chapitre 19. Dans cette section, on se satisfera des raisonnements qui suivent.

Comme tout mouvement est relatif à un référentiel donné, le mouvement rectiligne uniforme d'un point matériel libre et observé depuis un certain référentiel  $\mathcal{R}$  sera perçu tout autrement vis-à-vis d'un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement accéléré par rapport à  $\mathcal{R}$ . C'est précisément le cas du mouvement circulaire des étoiles lointaines que l'on observe depuis le référentiel  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_T$  qu'est la Terre en rotation sur elle-même : ce mouvement des étoiles lointaines n'est qu'apparent, un effet purement cinématique dû au choix du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Aussi, sur la base de ces remarques, il est absolument nécessaire de préciser le référentiel vis-à-vis duquel le principe d'inertie est vérifié afin de lui donner du sens. Un tel référentiel sera appelé référentiel galiléen :

***Référentiel galiléen.** Un référentiel galiléen est un référentiel vis-à-vis duquel le principe d'inertie est vérifié.*

Cette définition est opérationnelle : pour savoir si le référentiel choisi est galiléen, on isole un objet de toute influence extérieure et on vérifie si son mouvement est conforme au principe d'inertie ou non.

**Référentiels galiléens, référentiel de Copernic et référentiel terrestre.** Supposons qu'il existe un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  ; alors, d'après la loi classique de transformation des vitesses ( $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ ), on conclut facilement que tous les référentiels en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{v}_e$  par rapport à  $\mathcal{R}$  sont également galiléens.

Existe-t-il dans la nature au moins un référentiel galiléen ? Si la Terre tourne sur elle-même, alors elle doit tourner par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_C$ , appelé *référentiel de Copernic*, vis-à-vis duquel les étoiles lointaines sont supposées fixes et isolées. Ce référentiel doit donc être galiléen. On place aujourd'hui l'origine du référentiel de Copernic au centre de masse du système solaire<sup>1</sup>. D'après nos connaissances,  $\mathcal{R}_C$  apparaît bien comme un référentiel proche de la notion de référentiel galiléen en dépit de sa rotation autour du centre de notre galaxie : son accélération d'entraînement  $\|\vec{a}_e\|$  par rapport à ce centre est estimée à  $3 \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$ . Or, c'est la petitesse de cette quantité  $\|\vec{a}_e\|$  qui est susceptible de nous indiquer jusqu'à quel point un référentiel peut être considéré comme galiléen. En effet, si un point matériel possède une accélération  $\vec{a}_a$  nulle dans un référentiel purement galiléen  $\mathcal{R}$ , alors son accélération relative dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  quelconque est, d'après la loi de transformation des accélérations :  $\vec{a}_r = -\vec{a}_e - \vec{a}_c$  où  $\vec{a}_c$  est l'accélération de Coriolis. Comme  $\|\vec{a}_c\|$  peut être rendue négligeable<sup>2</sup> devant  $\|\vec{a}_e\|$ , il s'ensuit que plus  $\|\vec{a}_e\|$  sera petit, plus  $\|\vec{a}_r\|$  le sera aussi, au point de pouvoir assimiler  $\mathcal{R}'$  à un référentiel galiléen avec une précision plus ou moins grande.

C'est sur cette base que le *référentiel terrestre*  $\mathcal{R}_T$  peut être considéré comme galiléen, mais avec une moins bonne approximation : l'accélération d'entraînement due à la rotation de la Terre sur elle-même est d'environ  $3.4 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$  à sa surface et à l'équateur<sup>3</sup>. En outre, son mouvement presque circulaire autour du Soleil ajoute une autre accélération d'entraînement de l'ordre de  $5.9 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$ .

Dans ce référentiel  $\mathcal{R}_T$  presque galiléen, la dynamique de la plupart des objets pourra être décrite avec une assez bonne précision grâce à la seconde loi de Newton qui va suivre, mais pas toujours : l'évolution du plan des oscillations du pendule de Foucault, le mouvement rotatoire des vents qui diffère selon que l'on est dans

<sup>1</sup> Voir le chapitre 16 pour une définition du centre de masse.

<sup>2</sup> Au sens où l'on peut s'arranger *a priori* pour que le point matériel que l'on isole afin de vérifier le principe d'inertie ait une vitesse  $\vec{v}_r$  qui rende négligeable  $\vec{a}_c$  devant  $\vec{a}_e$ .

<sup>3</sup> On obtient cette valeur grâce aux lois de la cinématique concernant les accélérations :  $\|\vec{a}_e\| = R\omega^2 \cos\lambda$ , où  $R$  est le rayon terrestre,  $\lambda$  la latitude du lieu et  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même :  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  étant la période de rotation. Cette formule sera établie au chapitre 18.

l'hémisphère Nord ou l'hémisphère Sud, le mécanisme des marées, l'aplatissement de la Terre aux pôles, la déviation de la chute libre vers l'Est, ne s'expliquent que parce que  $\mathcal{R}_T$  n'est pas galiléen.

Finalement, un énoncé du principe d'inertie qui inclut la notion de référentiel galiléen peut être le suivant :

***Principe d'inertie.** Dans un référentiel galiléen, un point matériel persévère dans son état de mouvement rectiligne uniforme à moins que quelque force n'agisse sur lui.*

**39. Principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton) : équations du mouvement.** « Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et le sont dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. ». Dans l'énoncé de Newton, « les changements qui arrivent dans le mouvement » sont compris comme les variations du vecteur vitesse, et le facteur de proportionnalité entre ces variations et la force motrice - assimilée à un vecteur - fait intervenir la quantité de matière  $m$  qui est associée au point matériel. Dans un langage différentiel, il faut comprendre la seconde loi de Newton comme<sup>1</sup> :

$$d\vec{v} = \vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t) \doteq \frac{\vec{F}}{m} dt$$

Autrement dit : la variation  $d\vec{v}$  du vecteur vitesse (en norme et en direction) du point matériel pendant la durée infinitésimale  $dt$  est proportionnelle à la résultante  $\vec{F}$  de toutes les forces qui agissent sur lui à l'instant  $t$ . La constante de proportionnalité,  $1/m$ , reflète la plus ou moins grande inertie de ce point matériel à voir son vecteur vitesse changer sous l'effet de cette résultante des forces.

En divisant par  $dt$  la relation différentielle ci-dessus (et à la limite  $dt \rightarrow 0$ ), le principe fondamental de la dynamique apparaît comme la donnée du vecteur accélération du point matériel à un instant donné en fonction des forces qui agissent sur lui à cet instant ; c'est l'énoncé actuel de cette seconde loi du mouvement :

***Principe fondamental de la dynamique.** Un point matériel de masse  $m$  soumis à un ensemble de forces dont la résultante est  $\vec{F}$  développe un vecteur accélération  $\vec{a}$  tel que :  $\vec{a} \doteq \vec{F}/m$ .*

---

<sup>1</sup> On conviendra de mettre un point au-dessus du signe égal pour spécifier qu'une équation est vérifiée seulement pour les courbes solutions du problème : ce n'est pas une égalité qui a lieu pour n'importe quelle courbe de l'espace. Cependant, pour ne pas compliquer les notations, ce point ne sera indiqué que lorsque cela sera jugé nécessaire ; par exemple, en l'indiquant seulement au début d'un calcul.

En l'absence de force, la loi fournit :  $\vec{a} \doteq \vec{0}$ . Le mouvement du point matériel est alors rectiligne uniforme, en conformité avec le principe d'inertie. Tel qu'il est énoncé, le principe fondamental s'applique donc au sein d'un référentiel galiléen. On notera que si la résultante des forces est nulle alors le mouvement du point matériel est aussi rectiligne uniforme. On dit dans ce cas que le point matériel est *pseudo-isolé*. C'est dans cette situation que Galilée a réalisé toutes les expériences qui l'ont mené à énoncer le principe d'inertie.

**Équations du mouvement.** Les deux quantités dynamiques « masse » et « force » qui sont introduites dans cette loi sont discutées plus en détail au chapitre suivant. En ce qui concerne les forces, on y montre en particulier qu'elles dépendent de certains paramètres  $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n)$  qui les spécifient, mais aussi, en général, du vecteur position du point matériel, voire de son vecteur vitesse, ainsi que du temps. De sorte que la seconde loi de Newton mène à l'équation vectorielle :

$$\vec{a} \doteq \frac{\vec{F}(p, \vec{r}, \vec{v}, t)}{m}$$

En coordonnées cartésiennes par exemple, cette équation se décline en trois équations scalaires dont la forme générale s'écrit, si  $(F_x, F_y, F_z)$  sont les composantes dans la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  de la résultante  $\vec{F}$  des forces en présence :

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} \doteq F_x(p, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)/m \\ a_y = \ddot{y} \doteq F_y(p, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)/m \\ a_z = \ddot{z} \doteq F_z(p, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)/m \end{cases}$$

Il faut comprendre ces trois équations comme un système d'équations différentielles<sup>1</sup> que doivent satisfaire les coordonnées  $(x(t), y(t), z(t))$  du point matériel dont les expressions en fonction du temps sont encore inconnues. Ces équations, qu'il va falloir résoudre, sont du second ordre vis-à-vis de ces coordonnées ; elles sont généralement couplées et non linéaires.

**40. Principe des actions réciproques (troisième loi de Newton).** « *L'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est à dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont égales, et dans des directions contraires.* ». Newton justifiait cette troisième et dernière loi par des exemples concrets : « *si on presse une pierre avec le doigt, le doigt est pressé en même temps par la pierre* », ou encore « *Si un cheval tire une pierre par le moyen d'une corde, il est également tiré par la pierre : car la corde qui les joint et qui est tendue des deux côtés, fait un effort égal pour tirer la pierre vers le cheval, et le cheval vers la pierre ; et cet effort s'oppose autant*

<sup>1</sup> Annexe 4.

au mouvement de l'un [le cheval], qu'il excite le mouvement de l'autre [la pierre]. ». Ce dernier exemple est détaillé au **C43**.

Le principe des actions réciproques donne lieu à plusieurs applications pratiques comme le fonctionnement d'une fusée par exemple : imaginons un objet capable d'éjecter une substance (gaz) animée d'une grande vitesse. D'après le principe des actions réciproques, le gaz éjecté agit sur cet objet avec une force égale et opposée à la force d'éjection et lui communique une accélération opposée à la sienne : c'est le fondement de la théorie du mouvement d'une fusée énoncée par Tsiolkovski (1857-1935). Une fusée est un corps de masse variable au cours du temps et l'équation de la dynamique doit être modifiée pour ce genre de cas ; nous y reviendrons au chapitre 16.

Ramené à deux points matériels en interaction l'un avec l'autre, le principe des actions réciproques s'exprime de la façon suivante :

***Principe des actions réciproques.** Quand deux points matériels 1 et 2 interagissent entre eux, la force  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  produite par 1 sur 2 est à chaque instant égale et opposée à la force  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  produite par 2 sur 1.*

On sait aujourd'hui que cette troisième loi du mouvement n'est qu'approximative : elle présuppose en effet que la particule 1 par exemple réagisse dans l'instant à tout déplacement de la particule 2 quelle que soit la distance qui les sépare. Or, il faut un intervalle de temps fini pour que l'information relative au déplacement de la particule 2 parvienne à la particule 1 puisque la vitesse de cette information a pour limite la vitesse de la lumière. C'est pourquoi il arrive que l'on remplace la troisième loi de Newton par une autre loi qui lui est équivalente : la conservation de la quantité de mouvement qui est étudiée au chapitre 16. Si, en mécanique classique, ces deux lois sont équivalentes, il n'en est pas de même en mécanique relativiste où seule la loi de conservation de la quantité de mouvement est maintenue<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> La quantité de mouvement relativiste ne s'écrit pas de la même façon que la quantité de mouvement classique :  $\vec{p}_{class} = m \vec{v}$  où  $m$  est la masse du point matériel dont la vitesse est  $\vec{v}$ . En fait, la loi classique de conservation de la quantité de mouvement se déduit de la loi relativiste en faisant tendre la vitesse de la lumière  $c$  vers l'infini ; on a en effet :  $\vec{p}_{rel} = m \vec{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

## Compléments et exercices du chapitre 9

**C43. Principe des actions réciproques.** Il est utile de reprendre l'exemple du cheval de Newton qui tire un chariot pour un examen plus fouillé de la troisième loi. Remplaçons le triptyque cheval-corde-chariot par un drone (le cheval) de masse  $M$  auquel est attachée une pierre (le chariot) de masse  $m$  grâce à un fil inextensible de masse négligeable (la corde). Imaginons qu'avant l'expérience qui va suivre, le fil n'est pas tendu et que le drone et la pierre sont isolés dans l'espace et au repos vis-à-vis d'un certain référentiel galiléen.

Le drone est muni d'un moteur télécommandé par une expérimentatrice. À l'instant initial, elle actionne ce moteur programmé pour fournir une force de poussée toujours constante  $\vec{F}$ . Le drone démarre avec une accélération :  $\vec{a}_1 \doteq \vec{F}/M$ . Au moment où le fil se tend, la pierre se met en mouvement. L'expérimentatrice conclut qu'une force  $\vec{Y}$  agit sur cette pierre pour lui communiquer une accélération :  $\vec{a}_2 \doteq \vec{Y}/m$  ; cette force provient bien sûr de l'action exercée par le drone sur la pierre par l'intermédiaire du fil qui les relie. Lorsque le fil s'est tendu, l'expérimentatrice a aussi constaté que l'accélération du drone a diminué pour prendre une nouvelle valeur  $\vec{a}'_1$  alors que la force de poussée  $\vec{F}$  n'a pas changé. Si elle fait confiance au principe fondamental de la dynamique, l'expérimentatrice doit admettre qu'une nouvelle force  $\vec{X}$  résistante agit sur le drone ; elle l'interprète comme étant la force de réaction exercée par la pierre (son inertie) sur le drone par l'intermédiaire du fil. Les équations du mouvement pour chacun des deux objets (drone et pierre), une fois le fil tendu, doivent s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{pour le drone : } & \vec{F} + \vec{X} \doteq M \vec{a}'_1. \\ \text{pour la pierre : } & \vec{Y} \doteq m \vec{a}_2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, lorsque le fil s'est tendu, les deux objets ont adopté le même mouvement accéléré :  $\vec{a}'_1 = \vec{a}_2$ . En outre, ces deux objets reliés maintenant par le fil tendu ne forment plus qu'un seul et même objet rigide de masse  $(M + m)$  en mouvement accéléré sous l'effet de la seule force de poussée  $\vec{F}$  ; de sorte que l'on peut aussi écrire :

$$\vec{a}'_1 = \vec{a}_2 \doteq \vec{F}/(M + m)$$

Injectant cette troisième équation dans les deux précédentes, l'expérimentatrice trouve :

$$\vec{Y} = -\vec{X} = \frac{m}{M + m} \vec{F}$$

Elle conclut que l'action ( $\vec{Y}$ ) est égale et opposée à la réaction ( $\vec{X}$ ).

**C44. Grandeurs physiques, dimensions et unités.** Les lois de Newton qui viennent d'être passées en revue introduisent des nouvelles grandeurs physiques (force et masse) auxquelles on rattache des dimensions et des unités. Ces notions sont précisées ci-dessous.

**Grandeurs physiques.** On appelle *grandeur physique* toute propriété rattachée à l'étude d'un phénomène telle que l'on puisse l'exprimer au travers d'un nombre<sup>1</sup>.

**Dimensions.** On a reconnu depuis longtemps qu'il existe de telles propriétés nombrables et qu'elles peuvent être de natures *a priori* différentes : une distance parcourue, une durée qui s'écoule, le poids d'un objet,... en sont des exemples rattachés à la mécanique. Chacune de ces grandeurs est généralement affectée d'une *dimension* qui permet précisément de reconnaître ou de caractériser sa nature.

Pour chaque grandeur physique que l'on voudra bien définir on convient de noter la dimension qui lui est affectée par un symbole (le plus souvent une lettre) entre crochets. Ainsi, une distance est affectée de la dimension *longueur*  $[L]$ , une durée ou une date est affectée de la dimension *temps*  $[T]$ , le poids d'un objet est affecté de la dimension *force*  $[F]$ , etc...

**Unités.** Afin de pouvoir nombrer une grandeur physique affectée d'une certaine dimension, on est amené à définir la *valeur étalon* de cette grandeur que l'on choisit égale à l'*unité*. Le nombre qui permet de quantifier la grandeur physique est alors compris comme : le nombre de fois où l'on retrouve la valeur de l'étalon dans la grandeur physique en question.

Comme le choix de la valeur étalon est *a priori* arbitraire, il existe évidemment un nombre arbitraire d'unités rattachées à une certaine dimension : le mètre ( $m$ ), le centimètre ( $cm$ ), le pied ( $ft$ ), l'angström ( $\text{\AA}$ ), le fermi ( $fm$ ), le parsec ( $pc$ ), l'année-lumière ( $al$ ), le mille nautique ( $nmi$ ), etc... sont des exemples d'unités pour la dimension *longueur*  $[L]$ , chaque unité possédant son propre sigle distinctif.

**Dimensions et unités fondamentales.** Afin d'éviter les difficultés qui surviennent lorsque les unités choisies par tels ou tels auteur(e)s sont très différentes et pour limiter l'utilisation d'un trop grand nombre de grandeurs physiques aux dimensions variées, on a convenu de qualifier certaines grandeurs physiques de *fondamentales* ainsi que leurs dimensions, et de définir le plus proprement possible les unités officielles dans lesquelles elles s'expriment. Le choix de ce *Système International*

---

<sup>1</sup> Dans un souci de simplicité, il est sous-entendu ici que la propriété appelée « grandeur physique » contient les notions de « plus grand que » et « plus petit que », en correspondance avec la relation d'ordre des nombres réels. On trouvera d'autres précisions sur la mesurabilité d'une propriété dans un article de A. Friedmann intitulé *L'univers comme espace et temps*, traduit en français dans : A. Friedmann, G. Lemaître, *Essais de cosmologie*, Seuil, 1997.

(S.I.) donne lieu à de nombreux débats qui sont brièvement résumés sur le site internet du Bureau International des Poids et Mesures (<http://www.bipm.org>).

Les dimensions de ces grandeurs sont dites fondamentales en ce sens que la dimension de toute autre grandeur physique s'exprimera en fonction de ces dimensions fondamentales qui doivent être considérées comme indépendantes. En mécanique classique, on travaille avec trois dimensions indépendantes qui sont *longueur*, *masse* et *temps*, et qui expriment des propriétés associées à des phénomènes que nos sens estiment être de nature très différente : espace, matière et durée.

**Dimensions et unités des grandeurs dérivées.** On dit des autres grandeurs physiques qu'elles sont *dérivées* des premières puisque leurs dimensions vont s'exprimer en fonction des dimensions fondamentales. Par exemple, la dimension de la grandeur physique « *vitesse* » est (en raison de sa définition même) une longueur rapportée à un temps que l'on peut traduire par :  $[v] := [L]/[T]$ . Ainsi, si les unités de la grandeur physique « *longueur* » sont multipliées par un facteur  $L$  et que celles de la grandeur physique « *temps* » sont multipliées par un facteur  $T$ , il s'ensuit que les unités de la grandeur physique « *vitesse* » seront multipliées par un facteur  $L T^{-1}$ . On convient alors d'écrire la dimension de cette grandeur physique sous la forme :

$$[v] = L T^{-1}$$

Des raisonnements similaires basés sur les définitions des grandeurs physiques concernées ou sur les lois fondatrices des théories (ici la mécanique) permettent de construire le tableau ci-dessous :

<i>Grandeur physique</i>	<i>Symbole</i>	<i>Dimension</i>	<i>Unité (S.I.)</i>
<i>Longueur</i>	[L]	$L$	<i>mètre (m)</i>
<i>Temps</i>	[T]	$T$	<i>seconde (s)</i>
<i>Masse</i>	[M]	$M$	<i>kilogramme (kg)</i>
<i>Vitesse</i>	[v]	$LT^{-1}$	$(m \cdot s^{-1})$
<i>Accélération</i>	[a]	$LT^{-2}$	$(m \cdot s^{-2})$
<i>Energie</i>	[E]	$ML^2T^{-2}$	<i>joule (J)</i>
<i>Force</i>	[F]	$MLT^{-2}$	<i>newton (N)</i>
<i>Moment cinétique</i>	[ℓ]	$ML^2T^{-1}$	$(kg \cdot m^2 \cdot s^{-1})$
<i>Moment d'une force</i>	[M]	$ML^2T^{-2}$	$(N \cdot m)$
<i>Quantité de mouvement</i>	[p]	$MLT^{-1}$	$(kg \cdot m \cdot s^{-1})$
<i>Puissance</i>	[P]	$ML^2T^{-3}$	<i>watt (W)</i>

**Figure 37.** Dimensions et unités dans le système international des principales grandeurs physiques introduites en dynamique.

On y remarque que les unités rattachées aux dimensions de certaines grandeurs physiques n'ont pas reçu de noms particuliers et s'expriment simplement en fonction des unités fondamentales : une vitesse par exemple s'exprime en mètres par seconde. D'autres grandeurs physiques ont des dimensions qui se sont vues attribuer des unités spécifiques : par exemple, une force s'exprime en newtons ; la dimension qui lui est rattachée,  $MLT^{-2}$ , permet de définir le newton :  $1 N$  est la force qui communique à une masse de  $1 kg$  une accélération de  $1 m \cdot s^{-2}$ . Ou encore :  $1 N$  est la force qui augmente la vitesse d'une masse de  $1 kg$  de  $1 m \cdot s^{-1}$  à chaque seconde. Certaines grandeurs physiques a priori différentes se voient malgré tout attribuer des dimensions similaires : c'est le cas pour le moment d'une force qui possède les dimensions d'une énergie. Afin de marquer la différence de conception de ces deux grandeurs, on convient alors d'exprimer leurs unités avec des noms différents : énergie en *joules* et moment d'une force en *newton.mètre*...

**Deux remarques.** On observe d'abord que :

*Les dimensions des grandeurs physiques s'expriment  
toutes comme des produits de puissances des dimensions  
fondamentales.*

Cette propriété peut s'ériger en théorème dont la démonstration repose sur le fait que l'addition de deux grandeurs physiques aux dimensions différentes n'a *a priori* pas de sens.

La seconde remarque est relative aux grandeurs ne possédant pas de dimensions. Comme une telle grandeur est un nombre pur, elle ne sera jamais affectée par un changement d'unités quelconque des autres grandeurs physiques. Il en résulte la convention suivante :

*Une grandeur  $C$  sans dimension se note,  
dimensionnellement, sous la forme :  $[C] = 1$ .*



## CHAPITRE 10

### FORCES ET MASSES

Avant de rentrer dans la pratique mathématique de la seconde loi de Newton au prochain chapitre, on examine de plus près les deux concepts dynamiques que sont les notions de force et de masse qui façonnent cette loi. En particulier, les forces observées dans la nature sont répertoriées en différentes classes et on discute de la distinction entre masse inertielle et masse grave.

**41. Forces et principe de superposition.** Les deux chapitres précédents ont fait apparaître que la dynamique newtonienne identifie les causes du mouvement accéléré d'un point matériel  $M$  au concept de force. Une force est donc une grandeur physique qui représente une action exercée sur  $M$  avec une certaine intensité, une certaine direction et un certain sens. Ce faisant, on assimile la notion de force à un vecteur de la géométrie euclidienne et on admet que si deux forces différentes  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  agissent simultanément sur un même point matériel, alors la force résultante qui agit sur lui est à chaque instant la somme vectorielle :  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , conformément à la règle du parallélogramme. Cette affirmation constitue le principe de superposition des forces (ou des accélérations) qui se vérifie expérimentalement.

L'unité internationale de la grandeur physique force est le newton ( $N$ ), de sorte que  $1 N$  est la force nécessaire pour accélérer une masse de  $1 kg$  de  $1 m \cdot s^{-2}$ . En termes dimensionnels :  $[F] = MLT^{-2}$ .

En première approche, on peut cataloguer les différentes forces observées dans la nature en trois grandes classes. Les forces inertielle que nous rencontrerons au chapitre 18 en formeront une quatrième.

**42. Forces fondamentales.** Une première classe de forces concerne les interactions dites fondamentales de la nature. La physique actuelle en reconnaît quatre : l'interaction gravitationnelle entre deux corpuscules massifs, l'interaction électromagnétique (électrique + magnétique) entre deux corpuscules portant chacun une charge électrique, l'interaction forte entre les particules élémentaires douées d'une charge dite de couleur que sont les quarks, et l'interaction faible entre toutes les particules de type fermion<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Les particules élémentaires se scindent en deux catégories : les fermions et les bosons. Les fermions possèdent un spin demi-entier, les bosons un spin entier. Dans une approche simpliste, on peut comparer la notion de spin à un moment cinétique (chapitre 15) propre à chaque particule.

L'interaction forte, domaine de la chromodynamique quantique, a pour conséquence de lier entre eux les constituants du noyau atomique (protons et neutrons, qui sont chacun formés de trois quarks) et de les confiner dans une zone dont les échelles de distance sont celles du noyau atomique ( $10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ Fermi} = 1 F$ ). Cela, en dépit de l'interaction électromagnétique répulsive que ces constituants peuvent exercer entre eux.

L'interaction faible est à l'œuvre sur des échelles de distance qui sont aussi celles du noyau atomique. Elle a pour conséquence essentielle la possible désintégration de la plupart des particules composées.

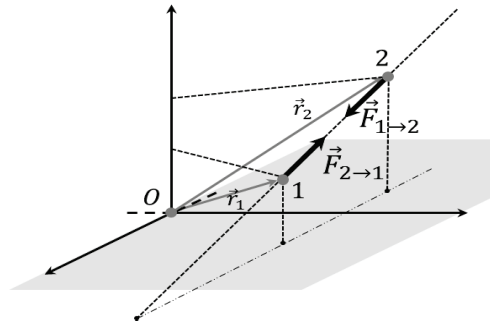
Nous ne détaillerons ici que les interactions gravitationnelles et électromagnétiques. On dit de ces deux interactions qu'elles sont à *longue portée* : elles décroissent moins vite avec la distance  $d$  séparant les corpuscules qu'une exponentielle de type  $\exp(-d/d_0)$  où  $d_0$  est une distance unité quelconque. Ces forces décroissent en effet comme  $1/d^2$ .

#### 43. Forces fondamentales : interaction gravitationnelle entre deux corpuscules.

La théorie de l'interaction gravitationnelle qui suit est due à Newton. Deux points matériels 1 et 2 de masses  $m_1$  et  $m_2$ , situés aux positions  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$ , sont en interaction gravitationnelle. Si  $r_{12} = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = r_{21} = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$  est la distance séparant les deux points matériels, alors le point matériel 1 subit de la part du point matériel 2 une force gravitationnelle attractive :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$$

où  $\vec{u}_{2 \rightarrow 1}$  est le vecteur unitaire associé à la droite passant par les points 1 et 2, dans le sens de 2 vers 1.



**Figure 38.** Forces d'interaction gravitationnelle entre deux points matériels. Ces forces sont dirigées selon la droite qui joint les deux particules et obéissent au principe des actions réciproques. Le schéma est aussi valable pour les forces d'interaction coulombienne existant entre deux points matériels électriquement chargés (45). Dans ce dernier cas, ces forces sont soit attractives (charges de signes contraires), soit répulsives (charges de mêmes signes).

La constante de calibration  $G$  est appelée *constante universelle de la gravitation* :

$$G = (6.673 \pm 0.003) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Inversement, et conformément au principe des actions réciproques, 2 subit de la part de 1 une force gravitationnelle attractive  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  égale et opposée à  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_2 m_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

où  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{u}_{2 \rightarrow 1}$ .

On postule et on vérifie expérimentalement que la présence d'un troisième point matériel 3 ne change pas la théorie qui vient d'être énoncée : la force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur 1 en présence de 2 et 3 est la somme vectorielle de la force que 2 exerce sur 1 en l'absence de 3 et de la force que 3 exerce sur 1 en l'absence de 2 :

$$\vec{F} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1}$$

C'est le principe de superposition appliqué aux forces gravitationnelles.

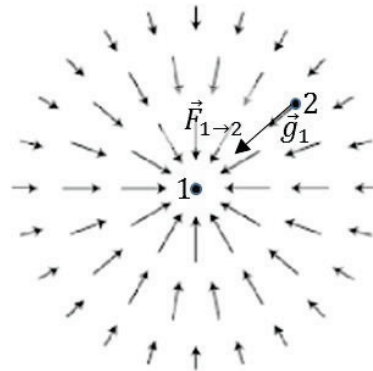
**44. Notion de champ : champ gravitationnel.** Cette interaction à distance existant entre deux points matériels pose question : comment en effet, par quel agent, chacun de ces deux points matériels peut-il ressentir la présence de l'autre ? La question fut résolue (en partie) avec la notion de *champ vectoriel*.

**Champ de vecteurs.** Si, à chaque point  $M$  de l'espace euclidien on associe un vecteur  $\vec{V} = \vec{f}(M)$ , on dira de l'ensemble de ces vecteurs qu'il constitue un *champ de vecteurs*. L'application vectorielle  $\vec{f}$  qui à tout point  $M$  fait correspondre un vecteur  $\vec{V} = \vec{f}(M)$  est appelée *champ vectoriel*.

Avec cette notion de champ, on peut maintenant voir  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  comme la force subie par la particule 2 lorsqu'elle est plongée dans le *champ gravitationnel*  $\vec{g}_1$  créé en tout point de l'espace par la particule 1 :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{g}_1$ . Cette force  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  est le *poids* de 2 relativement au champ gravitationnel généré par 1.

De même,  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  est la force subie par 1 lorsqu'elle est plongée dans le champ gravitationnel  $\vec{g}_2$  créé par 2 :  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = m_1 \vec{g}_2$ . Cette force est le *poids* de 1 relativement au champ gravitationnel généré par 2.

En identifiant ces nouvelles écritures de  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  et de  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  avec les précédentes, on déduit que,



**Figure 39.** Le champ gravitationnel généré dans tout l'espace par le point matériel 1 est représenté ici par quelques flèches suggestives représentant la direction et l'intensité de ce champ en quelques endroits de l'espace.

de façon générale, un point matériel  $P$  de masse  $m$  constitue la source d'un champ de gravitation  $\vec{g} = \vec{g}(M)$  créé en tout point  $M$  de l'espace et qui vaut :

$$\vec{g} = \vec{g}(M) = \vec{g}(r) = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

où  $\vec{u}_r$  et  $r = \|\overrightarrow{PM}\|$  sont respectivement le vecteur unitaire et la distance qui relie le point matériel  $P$  au point  $M$  où l'on veut connaître la valeur de ce champ. On notera que ce champ possède une symétrie sphérique, c'est-à-dire qu'il est toujours dirigé vers le point matériel qui le génère et son intensité (sa norme) ne dépend que de la distance  $r = \|\overrightarrow{PM}\|$ .

#### 45. Forces fondamentales : interaction électrostatique ou coulombienne.

Cavendish (1731 ; 1810) et Coulomb (1736 ; 1806) ont déduits de leurs expériences sur les charges électriques la proposition suivante. Deux points matériels 1 et 2 de charges électriques<sup>1</sup> respectives  $q_1$  et  $q_2$ , sont en *interaction coulombienne* ; cette interaction coulombienne est telle que le point matériel 1 subit de la part du point matériel 2 une force :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$$

avec les mêmes notations que précédemment (figure 38).

La constante de calibration  $\epsilon_0$  est appelée *permittivité du vide*. Elle est reliée à la constante universelle  $c$  par la relation :  $\epsilon_0 = 10^7/4\pi c^2$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide :

$$\epsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{s}^{-2}$$

où le coulomb ( $C$ ) est l'unité de charge électrique dans le système international.

La force  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  est attractive si les charges sont de signes opposés ; elle est répulsive si les charges sont de mêmes signes.

Inversement, 2 subit de la part de 1 une force  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  égale et opposée à  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

Le principe de superposition énoncé pour les forces gravitationnelles tient aussi pour ces forces coulombiennes.

---

<sup>1</sup> Une charge électrique attribuée à un point matériel indique la *quantité d'électricité, positive ou négative*, qui est attribuée à ce point matériel, au même titre que la masse qui lui est attribuée indique la quantité de matière qu'il représente. L'électricité a été reconnue en tant que nouvelle « vertu » de la matière au cours du XVIII<sup>e</sup> siècle.

On lève là-aussi la critique d'une interaction électrostatique à distance en introduisant la notion de *champ électrostatique ou coulombien*.  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  est donc la force que subit la particule 2 lorsqu'elle est plongée dans le champ électrostatique  $\vec{E}_1$  créé dans tout l'espace par la particule 1 :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1$ . De même,  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  est la force subie par 1 plongée dans le champ coulombien  $\vec{E}_2$  créé par 2 :  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = q_1 \vec{E}_2$ . On en déduit que le champ électrostatique généré dans tout l'espace par un point matériel  $P$  possédant une charge électrique  $q$  est :

$$\vec{E} = \vec{E}(M) = \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

où  $\vec{u}_r$  et  $r = \|\overrightarrow{PM}\|$  sont respectivement le vecteur unitaire et la distance qui relie le point matériel  $P$  au point  $M$  où on veut connaître la valeur du champ.

Comme pour le champ gravitationnel, ce champ électrique possède une symétrie sphérique : sa norme ne dépend que de la distance  $r$  et, si la charge  $q$  est négative, ce champ est dirigé vers le point matériel qui le génère. Il est de sens contraire si  $q$  est positive.

À strictement parler, les deux charges  $q_1$  et  $q_2$  doivent être fixes l'une par rapport à l'autre pour que les expressions données ci-dessus soient correctes. C'est pourquoi il est préférable de parler de champ électrostatique plutôt que de champ électrique bien que l'usage courant confonde souvent les deux terminologies. Si les charges sont en mouvement l'une par rapport à l'autre, il faut prendre en compte des corrections relativistes qui sont données par les équations de Maxwell (vers 1870) régissant les phénomènes électromagnétiques.

**46. Forces fondamentales : comparaison des interactions gravitationnelle et électrostatique.** En dépit de l'analogie formelle existant entre les forces gravitationnelle et électrostatique, il existe une différence de nature importante puisqu'un champ gravitationnel est toujours attractif tandis qu'un champ électrostatique est soit répulsif, soit attractif en raison de l'existence de charges électriques positives et négatives. À l'échelle de l'atome et des molécules, les forces électrostatiques l'emportent largement : dans l'atome d'hydrogène, composé d'un proton de masse  $m_p = 1.6727 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , de charge  $q_p = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , et d'un électron de masse  $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , de charge  $q_e = -q_p$ , le rapport des intensités des deux interactions est indépendant de la distance qui sépare le proton de l'électron et vaut :

$$\left\| \frac{\vec{F}_{grav}}{\vec{F}_{él}} \right\| = -4\pi\epsilon_0 G \frac{m_e m_p}{q_e q_p} \cong 4.3 \times 10^{-40}$$

Ce sont donc les interactions électromagnétiques qui sont responsables de la cohésion atomique de la matière : stabilité des atomes, liaisons chimiques entre molécules, propriétés physiques et chimiques des matériaux. En revanche, la force gravitationnelle l'emporte à des échelles de distance plus importantes où la matière apparaît globalement neutre. La dynamique du système solaire par exemple est gouvernée par l'interaction gravitationnelle.

**47. Forces décrivant l'interaction entre les sources d'un champ et un corpuscule test.** Dans notre classement des forces, nous abordons maintenant la seconde classe où un corpuscule interagit avec le champ généré par tout un ensemble d'autres corpuscules. En voici trois exemples caractéristiques où le corpuscule, assimilé à un point matériel de masse  $m$  et de charge électrique  $q$ , est plongé tantôt dans un champ de gravitation, tantôt dans un champ électrique, tantôt dans un champ magnétique, tous générés par un ensemble d'autres corpuscules constituant les *sources du champ* en question.

**Force de gravitation (poids).** La Terre est un ensemble de  $N$  points matériels qui constituent les sources du champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$ . De façon générale, la force créée par un champ de pesanteur quelconque sur un point matériel de masse  $m$  s'écrit :  $\vec{P} = m\vec{g}$ .

Quelques *lignes du champ* gravitationnel terrestre ont été représentées sur la figure 40 ci-contre. Les flèches indiquent le sens du champ : il est dirigé vers le centre de la terre. Il n'a pas la même intensité partout : les lignes de champ indiquent juste sa « géométrie » sphérique. En effet, si la Terre est assimilée à une boule parfaite, alors on démontre au **C47** que le champ gravitationnel terrestre s'écrit, en tout point  $M$  de l'espace situé au-delà du rayon terrestre  $R_T$  :

$$\vec{g} = \vec{g}(M) = \vec{g}(r) = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r, \quad r \geq R_T$$

où  $M_T$  est la masse de la Terre,  $r$  est la distance depuis le centre  $O$  de la Terre jusqu'au point  $M$  où l'on veut connaître la valeur du champ et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire dans la direction du vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} : \vec{u}_r = \overrightarrow{OM} / \|\overrightarrow{OM}\|$ .

La gravitation (terrestre en particulier) est étudiée plus en détails aux **C47**, **C48** et **C49**.

**Force électrique.** Soient par exemple deux plaques métalliques reliées aux bornes d'une pile électrique (figure 41). Les deux plaques constituent ce que l'on appelle un

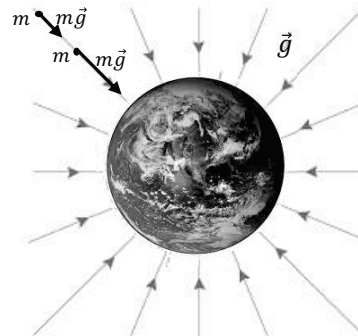


Figure 40. Le champ gravitationnel terrestre.

*condensateur* :  $N$  particules chargées positivement apparaissent sur une plaque (l'anode) et  $N$  particules chargées négativement apparaissent sur l'autre plaque (la cathode). Ces  $2N$  particules constituent les sources d'un champ électrique  $\vec{E}$  régnant entre les deux plaques. Il est illustré sur la figure par ses lignes de champ dont on démontre dans ce cas qu'elles sont perpendiculaires aux plaques.

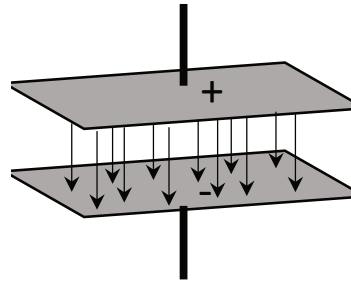


Figure 41. Le champ électrique généré entre deux plaques chargées.

De façon générale, la force créée par un champ électrique  $\vec{E}$  quelconque sur un point matériel de charge électrique  $q$  est :  $\vec{F}_{el} = q \vec{E}$ , c'est-à-dire dans le sens du champ si la charge est positive ou dans le sens inverse si la charge est négative.

**Force magnétique.** Un aimant de fer en forme de U par exemple génère un champ magnétique  $\vec{B}$  dans l'espace dont quelques lignes de champ sont visualisées sur la figure 42 au niveau de l'entrefer. Les sources de ce champ magnétique sont les électrons à l'intérieur de l'aimant qui, en plus de posséder une charge et une masse, possèdent une troisième caractéristique appelée *spin*, qui donne lieu - dans une image trop simpliste - à ce qu'on appelle un moment magnétique assimilable à un vecteur. Si tous ces moments magnétiques attachés à chaque électron s'additionnent pour donner une résultante non nulle, comme dans le fer en dessous de 1300 degrés Celsius, ils génèrent un champ magnétique dans tout l'espace.

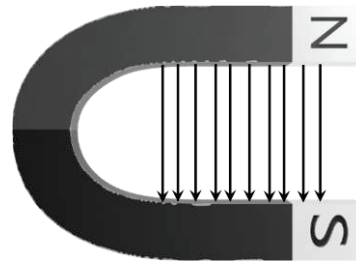


Figure 42. Le champ magnétique généré dans l'entrefer d'un aimant en forme de U.

Une autre façon de produire un champ magnétique est de faire circuler des particules chargées dans un fil par exemple : ce courant de charges constitue également la source d'un champ magnétique généré dans tout l'espace.

De façon générale, la force créée par un champ magnétique  $\vec{B}$  quelconque agissant sur un point matériel de charge électrique  $q$  et de vecteur vitesse  $\vec{v}$  est donnée par la relation :  $\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ . Cette force est donc perpendiculaire au champ magnétique et à la vitesse du point matériel.

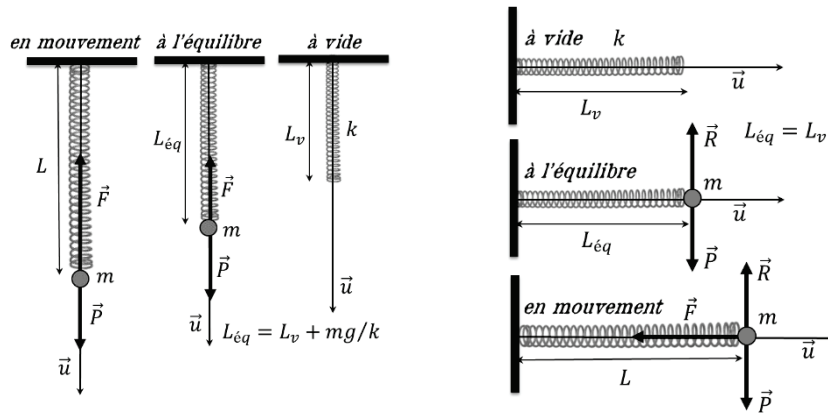
**48. Forces effectives.** Dans de nombreux cas, les forces fondamentales de la nature nous apparaissent à l'échelle macroscopique sous la forme de forces *effectives* que

l'on peut considérer comme le résultat moyenné de la multitude d'interactions gravitationnelles et/ou électromagnétiques qu'il nous faudrait considérer. Ces forces effectives constituent la troisième classe de notre catalogue élémentaire des forces.

**Forces de rappel.** Un objet accroché à un ressort ou bien à un fil possédant une certaine élasticité, subit de la part de ce ressort ou de ce fil, une force dite de rappel qui s'écrit :  $\vec{F} = -k \Delta L \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigé vers l'extrémité libre du ressort (figure 43) et  $\Delta L = L - L_v$  est la différence entre la longueur  $L$  du ressort à un instant donné et sa longueur à vide  $L_v$ , c'est-à-dire sa longueur lorsque l'objet n'est pas accroché au ressort. La constante  $k$  est propre au ressort ou au fil utilisé ; elle est appelée *constante de raideur du ressort*.

Les forces mises en jeu dans le cas d'un ressort horizontal ne sont pas les mêmes que dans le cas vertical. Mais on montre (C54 et C55) que si l'on choisit l'origine  $O$  du référentiel d'étude à la position d'équilibre de l'objet, alors le traitement dynamique des deux problèmes est le même.

On montre aussi dans les chapitres ultérieurs que l'étude du mouvement d'un objet au voisinage de sa position d'équilibre dans un problème de dynamique quelconque est équivalent au cas du ressort horizontal : l'objet subit une force de rappel qui le ramène constamment vers sa position d'équilibre. On comprend ainsi tout l'intérêt d'étudier la dynamique de ce ressort horizontal que l'on dénomme : *oscillateur harmonique*.



**Figure 43.** La force de rappel,  $\vec{F} = -k \Delta L \vec{u}$ , d'un ressort de constante de raideur  $k$ . Le mouvement de la masse accrochée à l'une des extrémités du ressort est rectiligne sinusoïdal : c'est l'*oscillateur harmonique* que l'on retrouve dans tous types de mouvement qui se réalisent au voisinage d'une position d'équilibre stable (voir exercices et chapitres ultérieurs).

**Forces de frottements visqueux.** Un objet qui se déplace dans un milieu fluide (l'air par exemple) subit une force de *frottement visqueux* qui dépend de sa vitesse et qui s'oppose systématiquement au mouvement. La façon dont s'écrit cette force dépend

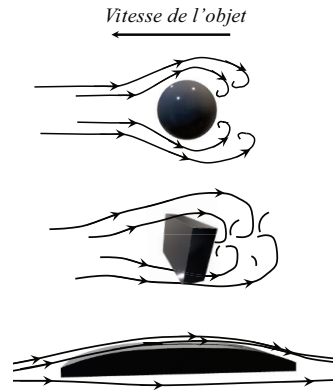
tout à la fois de la nature du fluide, de la forme de l'objet et de sa vitesse  $\vec{v}$  par rapport au fluide. Souvent, on admet que cette force prend la forme :  $\vec{f} = -k \vec{v}$  où la constante positive  $k$  est appelée *coefficient de frottement fluide*. On dit alors que l'écoulement du fluide autour de l'objet - sa traînée - est dans un *régime laminaire* : il ne se produit pas ou très peu de turbulences comme dans le cas de l'objet effilé de la figure 44. Mais il est courant que cette écriture de  $\vec{f}$  soit mal adaptée à la situation, en particulier pour des vitesses élevées où il est souvent préférable d'écrire  $\vec{f} = -k'v \vec{v}$ , où  $k'$  est un autre coefficient de frottement fluide. Les coefficients  $k$  et  $k'$  dépendent fortement de la forme et des dimensions de l'objet, de sa direction de mouvement, de l'état de sa surface, et des propriétés du fluide.

Pour limiter ces forces d'origine électromagnétique, l'objet doit être effilé pour permettre au fluide de bien se disperser, à l'avant comme à l'arrière.

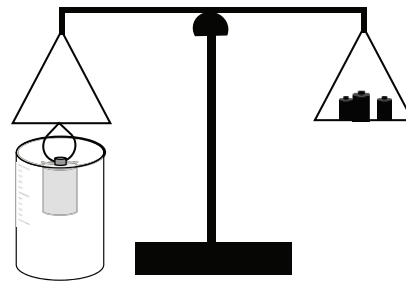
**Poussée d'Archimède.** « *Tout corps plongé dans un fluide (liquide ou gazeux) subit de la part de ce fluide une poussée verticale, dirigée du bas vers le haut, et dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé* ». La figure 45 montre le principe de

la vérification expérimentale de l'existence et de la valeur de la poussée d'Archimède : on suspend un corps quelconque sur le fléau gauche de la balance dont on mesure le poids. Puis on le plonge dans une coupole graduée remplie de liquide. On mesure la variation de poids que cela engendre ainsi que la variation de volume du liquide.

L'origine de la poussée d'Archimède est la différence de pression existant au sein du fluide selon sa profondeur en raison de la gravitation terrestre. Ainsi, la partie haute de l'objet plongé dans le fluide subit une pression moindre que sa partie basse, avec pour résultat net cette poussée verticale découverte par Archimède.



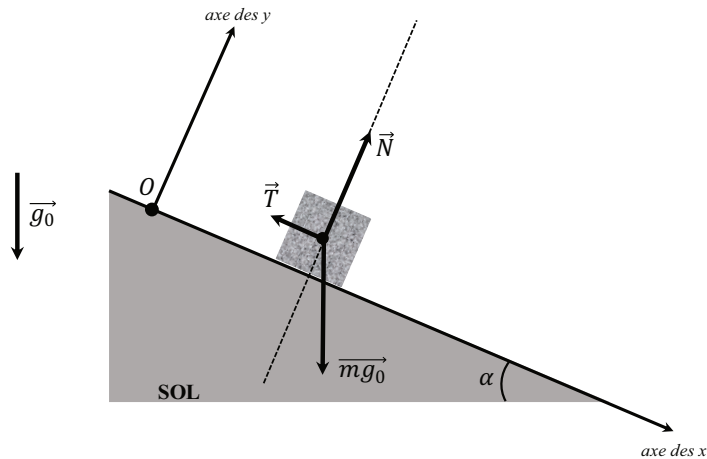
**Figure 44.** Les mouvements d'un fluide occasionnés par le déplacement d'un objet en son sein. L'objet subit une force qui va à l'encontre de son mouvement, plus ou moins importante selon la forme de l'objet et qui s'accompagne de perturbations à l'arrière de l'objet.



**Figure 45.** Un procédé un peu vieillot mais efficace pour vérifier et mesurer l'intensité de la poussée d'Archimède. Voir texte.

**Forces de réactions et frottements solides.** Un objet posé sur un support, subit de la part de ce support une *force de réaction*  $\vec{R}$  en vertu du principe des actions réciproques. Si l'objet est au repos sur un support horizontal, cette réaction est égale et opposée au poids de l'objet, puisqu'alors :  $\vec{R} + m\vec{g} \doteq \vec{0}$ .

Si l'objet est au repos sur un plan incliné, la réaction totale du support se décompose en une partie  $\vec{N}$  perpendiculaire au support et une partie tangentielle  $\vec{T}$  de telle sorte que :  $\vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} \doteq \vec{0}$ .  $\vec{T}$  rend compte de l'existence d'une force de *frottement solide* exercée par le support sur l'objet qui l'empêche de glisser le long du plan incliné, comme on peut l'observer expérimentalement. L'importance de ce frottement dépend de la forme de l'objet, de son poids, de la nature de sa surface ainsi que de celle du support. En projetant l'équation précédente sur les axes perpendiculaire et tangentiel au plan incliné on déduit facilement :  $N \doteq mg \cos\alpha$  et  $T \doteq mg \sin\alpha$  où  $\alpha$  est l'angle que fait le plan incliné avec le sol horizontal.



**Figure 46.** Équilibre d'un cube sur un plan incliné dans le champ de pesanteur terrestre. Pour représenter les forces en présence, on a utilisé le théorème du centre de masse (chapitre 16) qui spécifie que tout se passe comme si les forces s'appliquaient au centre de masse de l'objet.

Lorsque l'objet est en mouvement sur le plan incliné, on écrit cette fois la seconde loi de la dynamique :  $\vec{N} + \vec{T}' + m\vec{g} \doteq m\vec{a}$ . L'expérience montre en effet que le *frottement solide statique*  $\vec{T}$  n'est pas forcément égal au *frottement solide cinétique*  $\vec{T}'$ . En projetant cette équation sur les axes précédents, on obtient maintenant :  $N \doteq mg \cos\alpha$  et  $mg \sin\alpha - T' \doteq ma_{tg}$  où  $a_{tg}$  est la composante de l'accélération de l'objet le long du plan incliné. On voit alors que, sans autre information, on ne peut pas déterminer le mouvement de l'objet puisqu'on ne connaît pas  $T'$ ...

Ce sont les *lois du frottement solide* dues à Coulomb qui viennent combler cette lacune. En particulier, elles établissent un lien entre  $\vec{N}$  et  $\vec{T}'$  en posant qu'il existe un

coefficient  $f$ , sans dimension, ne dépendant que de la nature et de l'état des surfaces en contact, et qui est tel que :  $T' = f N$ . Cette loi empirique est plus ou moins bien vérifiée.

**Remarque.** Les forces de réactions (ou de liaison, voir le **C63**) sont systématiquement associées à la donnée préalable d'une ou de plusieurs relation(s) existant entre les coordonnées du point matériel. Ces relations sont l'expression mathématique des assujettissements ou *liaisons* auxquelles est soumis le point matériel lors de son mouvement. Par exemple : « la bille est astreinte à se mouvoir sur la table » se traduit par :  $z = H$  si  $H$  est la hauteur de la table.

Il arrive aussi que la vitesse du point matériel soit impliquée dans une liaison : une roue qui tourne sans patiner sur le sol est soumise à la liaison :  $\dot{x} - R\dot{\theta} = 0$ , si  $\dot{x}$  est sa vitesse linéaire,  $R$  son rayon et  $\dot{\theta}$  sa vitesse angulaire.

**49. Conclusion pratique sur la grandeur physique force.** Au travers des exemples qui précèdent, il faut conclure qu'une force est loin d'être un vecteur constant : elle peut dépendre de la position  $\vec{r}$  du point matériel sur lequel elle agit ou même de sa vitesse  $\vec{v}$ . Il faut également rajouter le temps  $t$  lui-même si l'on pense par exemple à un point matériel sous l'influence d'un champ quelconque variable dans le temps. La règle générale est donc qu'une force dépend d'une part de certains paramètres  $p_1, p_2, \text{etc.}$  qui caractérisent son origine (par exemple :  $G, m, k, \text{etc.}$ ), et d'autre part des grandeurs cinématiques  $\vec{r}, \vec{v}$  et  $t$  :

$$\vec{F} = \vec{F}(p, \vec{r}, \vec{v}, t)$$

où  $p \equiv \{p_1, p_2, \dots\}$  représente un ensemble de paramètres physiques.

**50. Masse inertielle et masse grave.** La deuxième loi de Newton ( $\vec{F} \doteq m \vec{a}$ ) stipule qu'entre les deux grandeurs physiques force et accélération, il existe un coefficient de conversion qui est la masse  $m$  associée au point matériel et qui correspond à la quantité de matière se voyant entraînée dans ce mouvement accéléré imposé par  $\vec{F}$ . Ce coefficient exprime la réponse physique du point matériel à cette sollicitation : sous l'effet d'une même force, plus la masse associée au point matériel est importante plus son accélération est faible. Cette masse a donc pour rôle de résister à une variation de vitesse imposée, ce qui traduit *l'inertie de la matière*. À ce titre, on devrait qualifier  $m$  d'inertielle et l'indicer  $m_i$  afin de ne pas la confondre avec la masse qui intervient dans la force gravitationnelle subie par le point matériel lorsqu'il est sous l'influence d'un champ de gravitation : on devrait qualifier cette « autre » masse de *masse grave* et l'indicer  $m_g$  pour éviter toute confusion puisque derrière la seule notion de masse, se cachent deux phénomènes physiques *a priori* différents : inertie et gravitation. Il n'est pas immédiat en effet de penser que

l'aptitude des objets matériels à créer autour d'eux des champs de gravitation et à réagir à de tel champs ait quelque chose à voir avec l'inertie.

Pour montrer que masse inertielle et masse grave ne sont bien qu'une seule et même propriété liée à la quantité de matière mise en jeu, on peut examiner la chute libre d'un point matériel au voisinage de la surface de la Terre. L'interaction entre ce point matériel et le champ gravitationnel terrestre  $\vec{g}_0$  (constant au voisinage de la surface de la Terre) est le poids de l'objet :  $\vec{P} = m_g \vec{g}_0$ . La seconde loi de Newton pour la chute libre s'écrit donc :

$$\vec{P} \doteq m_i \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \doteq \frac{m_g}{m_i} \vec{g}_0$$

Si  $m_i$  et  $m_g$  diffèrent entre elles pour chaque corps, on s'attend à ce que ces corps ne tombent pas avec la même accélération lors de l'expérience de la chute libre. Or, les expériences de Galilée démontrent le contraire : tous les objets tombent en chute libre dans le vide avec la même accélération. Par conséquent, le rapport de la masse grave à la masse inertielle doit être le même pour tous les corps et il suffit de choisir un système d'unités pour que ce rapport soit égal à 1 (le Système International par exemple).

Pour se convaincre de l'égalité entre masse grave et masse inertielle, Newton expérimenta sur les oscillations du pendule simple en y suspendant les objets les plus divers<sup>1</sup>. Sa conclusion fut que la période des oscillations est indépendante de l'objet, ce qui démontrait que masse grave et masse inerte ne sont qu'une seule et même quantité physique.

Bessel (1784-1846) reprit les expériences de Newton et trouva  $m_i = m_g$  avec une erreur relative de 1/60 000. Eötvös (1848-1919) réalisa des expériences en prenant en compte la rotation de la Terre sur elle-même et obtint une erreur relative de  $5 \times 10^{-9}$ . En 1961-64, Dicke a obtenu  $m_i = m_g$  avec une précision relative de  $3 \times 10^{-11}$ . Enfin, la mission spatiale Microscope réalisée en 2017 a fourni une précision relative voisine de  $10^{-15}$ .

L'égalité entre masse grave et masse inertielle est donc bien établie expérimentalement depuis les débuts de la mécanique classique. Mais, ainsi que l'a souligné Einstein, la physique se contenta d'enregistrer ce résultat sans en tirer de conséquences. En 1907-1916, Einstein en déduisit le principe d'équivalence qui conclut le chapitre 19.

---

<sup>1</sup> Pour les petits angles d'oscillation, la période du pendule simple de longueur  $L$  est donnée par :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i L}{m_g g_0}}$$

où  $g_0$  est la valeur de champ gravitationnel à la surface de la Terre.

## Compléments et exercices du chapitre 10

**C45. Principe de relativité galiléenne : invariance galiléenne des lois du mouvement, invariance de la masse, transformation des forces.** Les lois de Newton ont été forgées sur la singularité du mouvement rectiligne uniforme que Galilée a certifié être « comme nul », en ce sens qu'aucune expérience de dynamique ne pourrait permettre de le distinguer de l'état de repos. Les lois de Newton sont donc énoncées en faisant référence à un référentiel galiléen quelconque, sans quoi il y aurait contradiction. On exprime cette propriété sous la forme suivante :

*Principe de relativité galiléenne : les lois newtoniennes du mouvement sont invariantes par changement de référentiels galiléens.*

Ce principe impose aux grandeurs physiques masse et force de se comporter d'une certaine façon lors d'un changement de référentiel galiléen. Considérons en effet deux tels référentiels :  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}\{O, xyz; t\}$  et  $\mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}'\{O', x'y'z'; t\}$ . En choisissant arbitrairement  $\mathcal{R}$  fixe pour la clarté du raisonnement,  $\mathcal{R}'$  est alors en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse d'entraînement constante :  $\vec{v}_e = d\overline{OO'}/dt$ .

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans  $\mathcal{R}$  :  $m \vec{a} \doteq \vec{F}$  si  $m$  est la masse du point matériel à l'étude,  $\vec{a}$  son accélération (absolue selon la terminologie du chapitre 7) et  $\vec{F}$  la résultante des forces qui agissent sur lui.

*Stricto sensu*, l'invariance galiléenne de la seconde loi du mouvement sera réalisée si elle s'écrit dans  $\mathcal{R}'$  :  $m' \vec{a}' \doteq \vec{F}'$ , où  $m'$  est la masse de ce point matériel vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ ,  $\vec{F}'$  la résultante des forces qui agissent sur lui du point de vue de  $\mathcal{R}'$ , et  $\vec{a}'$  son accélération relative. Or, la loi de transformation des accélérations démontrée au chapitre 7 impose ici :  $\vec{a}' = \vec{a}$  puisque les accélérations d'entraînement et de Coriolis sont nulles. Il faut donc que :

$$\frac{\vec{F}'}{m'} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Il est tacitement accepté en physique classique du mouvement que la masse d'un objet inerte - en tant que quantité de matière contenue au sein de cet objet - soit un concept physique ne dépendant pas du référentiel adopté. Dans le cas des référentiels galiléens, on peut faire appel à l'expérience pour l'affirmer : prenons deux balances identiques, l'une dans  $\mathcal{R}$  (le sol terrestre par exemple), l'autre dans  $\mathcal{R}'$  (un train) : la pesée du point matériel dans chacun des deux référentiels fournira le même résultat. Comme masse grave et masse inertielle forment une seule et même propriété en vertu des expériences initiées par Newton, il faut conclure que l'on a bien :  $m' = m$ . D'où :

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

Cette dernière relation doit être considérée comme la *loi classique de transformation des forces lors d'un changement de référentiel galiléen*. Elle garantit le principe de relativité galiléenne.

De cette loi de transformation des forces, on déduit que si un point matériel est *isolé* (c'est-à-dire : libre) vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ , il l'est également vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ , et on vérifie aisément que le principe d'inertie s'énonce bien à l'identique pour tout référentiel galiléen, ce qui était nécessaire en vertu de la définition même d'un référentiel galiléen.

Enfin, considérons deux point matériels 1 et 2 en interaction. Le principe des actions réciproques appliqué dans  $\mathcal{R}$  stipule que  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  où la notation est celle indiquée dans l'énoncé de ce principe (40). De la loi de transformation des forces, on déduit immédiatement :

$$\vec{F}'_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{F}'_{2 \rightarrow 1}$$

**C46 : « Boosts » galiléens et transformation des forces.** Au C39, nous avons rencontré la transformation de Galilée qui permet de passer des coordonnées spatio-temporelles  $(\vec{r}; t)$  du point matériel vis-à-vis d'un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  aux coordonnées spatio-temporelles  $(\vec{r}'; t')$  du même point matériel vis-à-vis d'un autre référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ . Exprimée sous une forme vectorielle, cette transformation est communément dénommée aujourd'hui « *boost galiléen* » et s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \\ t' = t \end{cases}$$

où  $\vec{V} = \vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{v}_e$  est la vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

C'est au regard de cette transformation que les lois de la dynamique classique se doivent d'être invariantes, et donc les forces comme on vient de le voir dans le complément qui précède.

Ceci dit, après avoir passé en revue les principales forces rencontrées en dynamique classique, nous avons conclu que celles-ci peuvent dépendre tout à la fois de la position  $\vec{r}$  du point matériel, de sa vitesse  $\vec{v}$ , du temps  $t$  et d'un ensemble de paramètres  $p$  qui la caractérisent :

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t; p)$$

Cette façon d'écrire les variables dont peut dépendre une force est adaptée à notre étude de la dynamique du point matériel, mais l'invariance de cette force par changement de référentiel galiléen ne transparaît pas au travers de cette notation. Disons pour simplifier que cette invariance est cachée au sein des paramètres  $p$ . Pour illustrer ce propos sans rendre la discussion compliquée, considérons par exemple la force gravitationnelle  $\vec{F}$  qui s'exerce sur un point matériel 1 en raison de la présence

d'un point matériel 2 : cette force dépend bien sûr de  $\vec{r}_1$  et on écrit ici :  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_1 ; p)$  si on étudie le mouvement de 1. L'ensemble des paramètres  $p$  inclut la constante  $G$  de la gravitation, les masses  $m_1$  et  $m_2$  et aussi la position  $\vec{r}_2$  du point matériel 2 puisque l'expression exacte de  $\vec{F}$  est :

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Lors d'un boost galiléen,  $\vec{r}_1$  est transformé en :  $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{V}t$ , de même que  $\vec{r}_2$  est transformé en :  $\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{V}t$ . Il devient clair alors que :

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1\|^3} (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1) = \vec{F}'$$

On voit sur cet exemple que l'invariance de cette force vis-à-vis du boost galiléen est due au fait qu'elle dépend de la distance entre la source qui la génère (ici le point matériel 2) et le point matériel 1 sur lequel elle s'exerce, et pas seulement de la position  $\vec{r}_1$  de ce point matériel vis-à-vis d'une certaine origine.

Il en sera de même pour les forces de frottement fluide dépendant de la vitesse du point matériel : elles dépendent en fait de la vitesse relative entre le milieu et le point matériel qui s'y déplace.

**C47 : Le champ gravitationnel généré par la Terre.** Pour calculer explicitement le champ gravitationnel généré par la Terre, nous allons la considérer comme un corps solide et rigide avec un point de vue macroscopique. Dans ce point de vue, on se représente le solide rigide comme un domaine borné à trois dimensions au sein duquel existe une répartition continue de matière indépendante du temps (pour assurer le qualificatif de rigidité). On considère alors un élément de volume  $dV$  autour d'un point  $P$  du solide. Si  $dm = dm(P)$  est la masse élémentaire contenue dans cet élément de volume, on écrit :

$$dm := \rho(P) dV$$

où  $\rho(P)$  est appelée *densité volumique de masse* au point  $P$ . La masse totale du solide est alors la somme (continue) de toutes les masses élémentaires, ce qui revient à réaliser une intégrale de la densité volumique sur tout le volume du solide :

$$M = \int_{\text{solide}} dm = \iiint_{\text{solide}} \rho(P) dV$$

Si  $\rho(P)$  est constante pour tout point  $P$  du solide, on dit de ce solide qu'il est homogène. C'est l'hypothèse que nous ferons pour la Terre, assimilée ici à une boule homogène  $\mathcal{T}$  de rayon  $R_T$  et de masse  $M_T$ . La densité volumique  $\rho_T$  de la Terre est alors simplement le rapport de sa masse à son volume :

$$\rho(P) = \rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$$

Pour calculer le champ gravitationnel  $\vec{g}_T(M)$  que la Terre génère en tout point  $M$  de l'espace, considérons une masse élémentaire  $dm$  associée à un point  $P$  de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  au sein de notre boule terrestre (figure 47). Cette masse  $dm$  crée un champ gravitationnel élémentaire  $d\vec{g}_P(M)$  en un point  $M$  situé le long d'un axe  $Cz$  à la distance  $z$  du centre  $C$  de la Terre [ $\overrightarrow{CM} = z \vec{u}_z$ ,  $z \geq 0$ ] qui s'écrit, en vertu de la loi de Newton :

$$d\vec{g}_P(M) = -G \frac{dm}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \overrightarrow{PM}$$

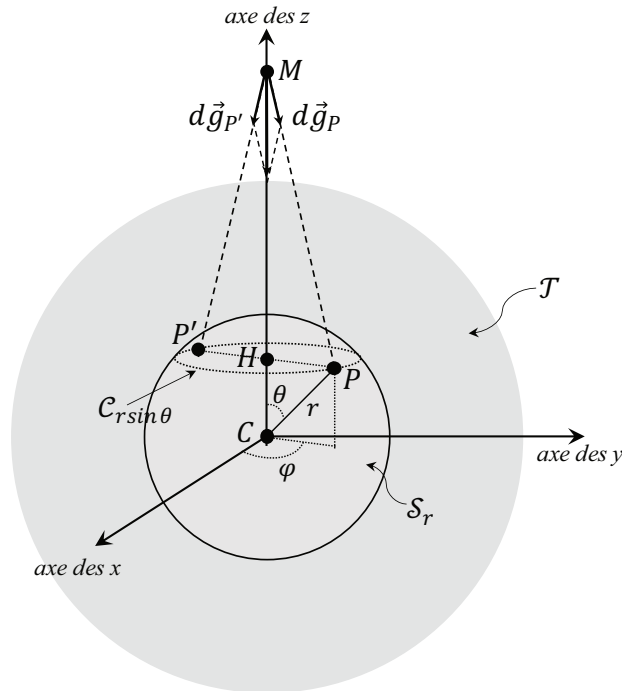


Figure 47. Illustration du calcul du champ gravitationnel terrestre au point  $M$ .

Ainsi que le suggère la figure 47, il existe un point  $P'$  sur la couronne circulaire  $C_{r \sin \theta}$  de rayon  $r \sin \theta$  (où se situe le point  $P$ ) qui est le symétrique de  $P$  par rapport à l'axe  $Cz$ . La masse élémentaire  $dm$  associée à  $P'$  crée elle aussi un champ gravitationnel élémentaire  $d\vec{g}_{P'}(M)$  au point  $M$  tel que :

$$d\vec{g}_{P'}(M) = -G \frac{dm}{\|\overrightarrow{P'M}\|^3} \overrightarrow{P'M}$$

Comme  $P'$  est le symétrique de  $P$ , il est clair que  $\|\overrightarrow{PM}\| = \|\overrightarrow{P'M}\|$  et que le champ généré en  $M$  par  $P$  et  $P'$  vaut :

$$d\vec{g}_{PP'}(M) = d\vec{g}_P(M) + d\vec{g}_{P'}(M) = -G \frac{dm}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{P'M})$$

Or, en appelant  $H$  la projection de  $P$  et de  $P'$  sur l'axe  $Cz$  (figure 47), on a :

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{P'M} = 2\overrightarrow{HM} = 2(\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CH}) = 2(z - r \cos\theta) \vec{u}_z$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PM}\|^2 &= \|\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CP}\|^2 = \|\overrightarrow{CM}\|^2 + \|\overrightarrow{CP}\|^2 - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CP} \\ &= z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta \end{aligned}$$

Enfin, la masse élémentaire  $dm$  s'exprime en fonction de la densité de masse  $\rho_T$  et de l'élément de volume entourant le point  $P$  en coordonnées sphériques :

$$dm = \rho_T dV = \rho_T r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

De sorte que le champ élémentaire généré en  $M$  par  $P$  et  $P'$  s'écrit :

$$d\vec{g}_{PP'}(M) = -2G\rho_T \frac{r^2 \sin\theta (z - r \cos\theta)}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{3/2}} dr d\theta d\varphi \vec{u}_z$$

On remarque maintenant que :

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{1/2}} \right] = -\frac{(z - r \cos\theta)}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{3/2}}$$

ce qui permet d'écrire :

$$d\vec{g}_{PP'}(M) = 2G\rho_T \frac{d}{dz} \left[ \frac{r^2 \sin\theta}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{1/2}} \right] dr d\theta d\varphi \vec{u}_z$$

On obtiendra le champ gravitationnel élémentaire créé en  $M$  par la couronne circulaire  $\mathcal{C}_{r \sin\theta}$  en sommant  $d\vec{g}_{PP'}(M)$  pour tous les points  $P$  de la demi-couronne,  $0 \leq \varphi \leq \pi$  :

$$\begin{aligned} d\vec{g}_{\mathcal{C}_{r \sin\theta}}(M) &= \int_{P \in \frac{1}{2}\mathcal{C}_{r \sin\theta}} d\vec{g}_{PP'}(M) \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} 2G\rho_T \frac{d}{dz} \left[ \frac{r^2 \sin\theta}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{1/2}} \right] dr d\theta d\varphi \vec{u}_z \end{aligned}$$

Soit, puisque l'intégrande ne dépend pas de  $\varphi$  :

$$d\vec{g}_{\mathcal{C}_r \sin\theta}(M) = 2\pi G \rho_T \frac{d}{dz} \left[ \frac{r^2 \sin\theta}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{1/2}} \right] dr d\theta \vec{u}_z$$

On obtient ensuite le champ gravitationnel  $d\vec{g}_{\mathcal{S}_r}(M)$  généré en  $M$  par la sphère  $\mathcal{S}_r$  de rayon  $r$  en sommant les champs générés en  $M$  par toutes les couronnes  $\mathcal{C}_r \sin\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  (en se permettant d'intégrer avant de dériver par rapport à  $z$ , ce qui est mathématiquement justifié) :

$$d\vec{g}_{\mathcal{S}_r}(M) = 2\pi G \rho_T \frac{d}{dz} \left[ \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{1/2}} r^2 dr \right] \vec{u}_z$$

L'intégrale à réaliser est du type  $u'/2\sqrt{u}$  et fournit :

$$\begin{aligned} d\vec{g}_{\mathcal{S}_r}(M) &= 2\pi G \rho_T \frac{d}{dz} \left[ \frac{r}{z} \left[ \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta} \right]_{\theta=0}^{\pi} dr \right] \vec{u}_z \\ &= 2\pi G \rho_T \frac{d}{dz} \left[ \frac{r}{z} (r + z - |r - z|) \right] dr \vec{u}_z \end{aligned}$$

Enfin, le champ généré en  $M$  par notre boule terrestre  $\mathcal{T}$  de rayon  $R_T$  sera obtenu en sommant les champs générés en  $M$  par toutes les sphères  $\mathcal{S}_r$ ,  $0 \leq r \leq R_T$ . À ce stade, il faut distinguer deux cas en raison de la valeur absolue qui est apparue dans le résultat ci-dessus : soit le point  $M$  est à l'intérieur de  $\mathcal{T}$  ( $z < R_T$ ), soit il est à l'extérieur ( $z > R_T$ ).

→ Si  $z > R_T$  alors  $z > r$  pour tout  $r$ , et le calcul donne :

$$\vec{g}_{\mathcal{T}}(M) = 4\pi G \rho_T \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{z} \int_{r=0}^{R_T} r^2 dr \right] \vec{u}_z = \frac{4}{3}\pi R_T^3 G \rho_T \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{z} \right] \vec{u}_z$$

En remplaçant  $\rho_T$  par sa valeur, on obtient ainsi :

$$\vec{g}_{\mathcal{T}}(M) = -\frac{GM_T}{z^2} \vec{u}_z, \quad z > R_T$$

→ Dans le cas où  $z < R_T$ , alors le calcul à réaliser est maintenant :

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\mathcal{T}}(M) &= 2\pi G \rho_T \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{z} \left( \int_{r=0}^{R_T} r(r+z) dr + \int_{r=0}^z r(z-r) dr \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{r=z}^{R_T} r(r-z) dr \right) \right] \vec{u}_z \end{aligned}$$

Ce qui fournit finalement :

$$\vec{g}_T(M) = - \frac{GM_T}{R_T^3} z \vec{u}_z, \quad z < R_T$$

Pour terminer et résumer ce calcul, il faut remarquer qu'en raison de la symétrie sphérique de notre boule terrestre homogène, l'axe  $Cz$  sur lequel est situé le point  $M$  est arbitraire : il représente en fait l'axe porté par  $\overrightarrow{CM}$  et la distance  $z$  est la distance  $\|\overrightarrow{CM}\|$ . Ainsi, en changeant de notations pour appeler maintenant  $(r, \theta, \varphi)$  les coordonnées sphériques du point  $M$  relatives au centre  $C$  de la Terre, le vecteur  $\vec{u}_z$  joue maintenant le rôle du vecteur  $\vec{u}_r$  et le champ de gravitation terrestre généré en tout point  $M(r, \theta, \varphi)$  de l'espace est :

$$\vec{g}_T(M) = \begin{cases} - \frac{GM_T}{R_T^3} r \vec{u}_r, & r < R_T \\ - \frac{GM_T}{r^2} \vec{u}_r, & r > R_T \end{cases}$$

À l'extérieur de la boule terrestre, on constate qu'en raison de la symétrie sphérique le champ ressenti en  $M$  est le même que le champ qui y serait généré par un point matériel de masse  $M_T$  placé en  $C$ . À l'intérieur par contre, le champ croît linéairement en intensité au fur et à mesure que l'on s'approche de la surface de la Terre.

**C48 : le champ gravitationnel au voisinage de la surface terrestre.** De nombreux problèmes de dynamiques sont relatifs au mouvement d'un objet situé dans le voisinage immédiat de la surface terrestre. Dans ces conditions, l'approximation la plus crue et la plus commune consiste à admettre que l'objet subit le champ gravitationnel existant à la surface de la Terre, c'est-à-dire - en faisant  $r = R_T$  dans le résultat du commentaire précédent - que ce champ est constant et vaut :

$$\vec{g}_0 = - \frac{GM_T}{R_T^2} \vec{u}_r := - g_0 \vec{u}_r$$

Cette valeur,  $g_0 = GM_T/R_T^2$ , est appelée *accélération de la pesanteur terrestre*, et vaut approximativement  $9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Sous l'effet de ce champ, un objet de masse  $m$  situé au voisinage de la surface terrestre subit une force qui est son poids (relativement à la Terre) :  $\vec{P} = m \vec{g}_0$ . Cette force constante est dirigée vers le centre de la terre, c'est-à-dire le long de la verticale du lieu où se trouve l'objet, « vers le bas ». Ce dernier point demandera à être corrigé car nous verrons que la rotation de la Terre sur elle-même induit un léger écart directionnel à cette verticale qui ne pointe pas exactement vers le centre de la Terre.

Afin d'avoir une idée de la correction à réaliser si l'objet est un peu éloigné de la surface terrestre, on peut poser  $r = R_T + z$ , où  $z$  est cette fois la hauteur où se situe l'objet  $M$  par rapport au sol. On a ainsi, d'après le résultat du **C47** :

$$\vec{g}_T(M) = - \frac{GM_T}{(R_T + z)^2} \vec{u}_r = - \frac{GM_T}{R_T^2(1 + z/R_T)^2} \vec{u}_r = -g_0(1 + z/R_T)^{-2} \vec{u}_r$$

Pour  $z \ll R_T$ , on peut réaliser un développement à l'ordre 1 en  $\varepsilon = z/R_T$  de ce résultat exact à partir de la formule approchée :  $(1 + \varepsilon)^\alpha \cong 1 + \alpha \varepsilon$  (Annexe 2) ; et ainsi :

$$\vec{g}_T(M) \cong -g_0(1 - 2z/R_T) \vec{u}_r$$

La correction à apporter à  $g_0$  est donc en  $2z/R_T$  ; elle est de l'ordre du millièème pour  $z = 3 \text{ km}$ .

D'autres corrections du même ordre de grandeur doivent être apportées à la valeur de  $g_0$  comme la non-sphéricité de la Terre due à sa rotation propre ou encore les différences de densité au voisinage de sa surface (mers – montagnes).

**C49 : interaction gravitationnelle, ordres de grandeur.** La distance entre la galaxie du Sculpteur (NGC 253) et notre galaxie est aujourd'hui estimée à  $10.8 \times 10^6 \text{ al}$  ( $\text{al}$  : année lumière,  $1 \text{ al} \cong 9.461 \times 10^{15} \text{ m}$ ). Les mesures actuelles permettent de penser que la masse totale de cette galaxie est de l'ordre de  $4 \times 10^{10} M_\odot$  ( $M_\odot$  : masse du Soleil) tandis que celle de notre galaxie, la Voie Lactée, est estimée à  $1.5 \times 10^{12} M_\odot$ . L'éloignement de ces deux objets permet de les penser comme des points matériels.

- Estimer la force d'interaction gravitationnelle existant entre notre galaxie et celle du Sculpteur à partir de ces données.
- Supposons que la galaxie du Sculpteur soit en orbite circulaire (uniforme) autour de notre galaxie. Utiliser les données numériques et la troisième loi de Kepler (qui sera démontrée au chapitre 17) indiquées à la fin de ce **C49** pour estimer sa période de révolution. Estimer ensuite sa vitesse orbitale.
- Mêmes questions en remplaçant les deux galaxies par la Terre et le Soleil, compte tenu des données suivantes : distance Terre-Soleil :  $1 \text{ UA}$  ( $\text{UA}$  : Unité Astronomique,  $1 \text{ UA} \cong 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$ ) ; masse de la Terre :  $M_\oplus = 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$ , masse du Soleil :  $M_\odot = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ .
- Mêmes questions en remplaçant cette fois les deux galaxies par deux boules d'acier avec une distance entre les deux boules de  $1 \text{ m}$ . Masse de la première boule :  $M_1 = 1 \text{ kg}$ , masse de la deuxième boule :  $M_2 = 1000 \text{ kg}$ .

- Faire encore le même raisonnement en prenant cette fois un électron et un proton : rayon de l'atome d'hydrogène :  $0.53 \text{ \AA}$  ( $\text{\AA}$  : angström,  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ), masse de l'électron :  $m_{e^-} = 0.911 \times 10^{-30} \text{ kg}$ , masse du proton :  $m_{p^+} = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .
- En fait, ces deux particules possèdent une charge électrique, négative pour l'électron,  $q_{e^-} = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , positive pour le proton,  $q_{p^+} = -q_{e^-}$ . Comparer l'intensité de l'attraction gravitationnelle qui vient d'être calculée avec l'intensité de la force coulombienne existant entre ces deux particules. Que conclure à propos des calculs qui viennent d'être faits sur la vitesse orbitale et la période de ce mouvement circulaire ?

*Troisième loi de Kepler (adaptée à cet exercice) :* si un point matériel de masse  $m$  est en orbite circulaire de rayon  $R$  autour d'un point matériel de masse  $M \gg m$  en raison de leur interaction gravitationnelle, alors la troisième loi de Kepler stipule :

$$T \cong \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

où  $T$  est la période de révolution de ce mouvement circulaire et  $G$  la constante universelle de la gravitation.

*Données :* constante de la gravitation :  $G = 6.6732 \times 10^{-11} \text{ USI}$   
 permittivité du vide :  $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ USI}$

**C50 : chute libre verticale.** On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  en chute libre verticale sous l'influence de la gravité terrestre  $\vec{g}_0$  supposée constante. On néglige les forces de frottement. L'origine  $O$  du référentiel d'étude est choisie au niveau du sol et on appelle  $Oz$  l'axe le long duquel le point  $M$  est en chute libre. Cet axe est orienté vers le haut et on appelle  $z$  la coordonnée de ce point matériel à l'instant  $t$ .

- Écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire la valeur de l'accélération  $\ddot{z}$  du point matériel.
- En déduire sa vitesse  $\dot{z}$  en fonction du temps sachant que cette dernière est nulle au temps  $t = 0$ .
- En déduire la coordonnée  $z$  du point matériel sachant que  $z(t = 0) = H$ .
- Tracer  $\ddot{z}(t)$ ,  $\dot{z}(t)$  et  $z(t)$  en fonction de  $t$ .
- Soit  $t_c$  le temps au bout duquel le point matériel arrive au sol. Trouver  $t_c$  en fonction de  $g_0 = \|\vec{g}_0\|$  et  $H$ . Quelle est alors la vitesse du point matériel à cet instant ? Application numérique :  $H = 2 \text{ m}$ .
- Cette fois, le point matériel est lancé depuis la hauteur  $H$  au temps  $t = 0$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}(t = 0) = V \vec{u}_z$  où  $V$  est une constante qui peut être positive ou

négative. Trouver et tracer  $\ddot{z}(t)$ ,  $\dot{z}(t)$  et  $z(t)$  en fonction de  $t$  avec ces nouvelles conditions initiales.

Trouver également le temps de chute  $t_c$  en fonction de  $g_0 = \|\vec{g}_0\|$ ,  $H$  et  $V$  ainsi que la vitesse du point matériel à cet instant.

**C51. Le plan incliné.** Un point matériel  $M$  de masse  $m$  glisse le long d'un plan incliné sous l'influence de la gravité terrestre  $\vec{g}_0$  supposée constante (figure 46). On appelle  $Ox$  l'axe le long duquel se déplace le point  $M$ . Cet axe fait un angle  $\alpha$  avec le sol ; son origine  $O$  est située à la hauteur  $H$  du sol.

- Dans un premier temps, on néglige les forces de frottement. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le point  $M$  repéré par son abscisse  $x$  depuis  $O$ . Montrer que la norme de la réaction  $\vec{N}$  du support vaut  $N = mg_0 \cos\alpha$  et intégrer l'équation horaire du mouvement sachant qu'à  $t = 0$ ,  $M$  est en  $O$  avec une vitesse  $\dot{x}(t = 0) = v_0$ .

- Déterminer le temps  $t_S$  au bout duquel le point  $M$  atteint le sol en fonction de  $H$ ,  $\alpha$ ,  $g_0$  et  $v_0$ . Que vaut la vitesse (sa norme) du point matériel à cet instant ?

- On prend maintenant en compte l'existence d'une force de frottement (solide) qui s'écrit :  $\vec{T}' = -T' \vec{u}_x$ ,  $T' > 0$ , et qui est supposée obéir aux lois du frottement solide de Coulomb, à savoir qu'il existe un coefficient  $f > 0$  constant tel que  $T' = f N$ . Déterminer à nouveau l'équation horaire du mouvement du point  $M$ . À quelle condition doit satisfaire  $f$  pour que ce mouvement soit plausible ?

- Déterminer à nouveau le temps  $t'_S$  au bout duquel le point  $M$  atteint le sol en fonction de  $H$ ,  $\alpha$ ,  $g_0$  et  $v_0$  et  $f$ , et déterminer sa vitesse (en norme) à cet instant.

**C52. Annexe 4.** Étudier l'Annexe 4 sur les équations différentielles avant de résoudre le problème du **C53** et d'aborder le chapitre suivant.

**C53. Particule soumise à une force de frottement fluide.** Une particule assimilée à un point matériel de masse  $m$  pénètre dans un milieu fluide avec une vitesse initiale :  $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{u}_x$  où  $v_0$  est une constante et  $\vec{u}_x$  le vecteur unitaire de l'axe  $Ox$  le long duquel elle se déplace. L'origine  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}(O, x)$  est choisie à la frontière du milieu fluide et la particule est repérée par son abscisse  $x$  : au temps  $t = 0$ , on a donc  $x(t = 0) = 0$ . Dans ce milieu, la particule subit une force de frottement fluide de la forme :  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  où  $\alpha$  est un coefficient constant et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de la particule. Le poids de la particule est négligeable comparé à cette force de frottement.

- Écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait l'abscisse  $x$ .

- On pose  $v_x := \dot{x}$ . Montrer que l'équation précédente devient une équation différentielle d'ordre 1 pour la variable  $v_x$  et suivre la méthode de l'Annexe 4 pour résoudre cette équation différentielle compte tenu de la condition initiale donnée dans l'énoncé.
- Intégrer le résultat précédent pour obtenir  $x(t)$  compte tenu de la condition initiale pour  $x$ .
- Tracer  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$ .
- Que se passe-t-il pour un temps infiniment long ? Quelle distance aura parcouru la particule ?



## CHAPITRE 11

### APPLICATION DU SECOND PRINCIPE DE LA DYNAMIQUE

**51. Procédure à suivre<sup>1</sup>.** Dans la pratique, le principe fondamental de la dynamique sert à répondre à la question : étant données les forces qui agissent sur un point matériel, quel sera son mouvement ? Voici une procédure standard à suivre pour y répondre :

- On recense les forces en présence pour le problème étudié.
- On se choisit un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , un système de coordonnées et sa base associée, bien adaptés aux éventuelles symétries du problème. Le point matériel est repéré par un point  $M$ , et on connaîtra le mouvement de ce point matériel si on connaît le rayon vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  à chaque instant.
- On écrit le vecteur  $\vec{r}$  dans la base et le jeu de coordonnées choisis et on calcule les vecteurs vitesse  $\vec{v}$  et accélération  $\vec{a}$  comme nous l'avons fait en cinématique.
- Après avoir écrit les forces en présence (dont la résultante est  $\vec{F}$ ) dans le système de coordonnées et la base choisis, on applique le principe fondamental de la dynamique :  $\vec{F} \doteq m \vec{a}$ . On projette ensuite cette équation vectorielle sur chacun des vecteurs de la base choisie pour obtenir les équations différentielles du mouvement.
- On résout les équations différentielles pour obtenir leur solution générale. Cette tâche est assez facile pour les cas simples abordés dans cet ouvrage mais, bien souvent, c'est à ce niveau que surgissent les difficultés mathématiques assorties de discussions physiques en rapport avec ces difficultés.
- S'il y a des conditions initiales dans le problème (par exemple, au temps  $t = 0$  la particule a une vitesse  $\vec{v}_0$  donnée et elle est au point  $O$ ), on les injecte dans les solutions générales trouvées précédemment, ce qui permet de déterminer les constantes qui sont survenues au cours de la résolution des équations.
- À ce niveau, le problème du mouvement est résolu puisque le rayon vecteur a été obtenu en fonction du temps, c'est-à-dire que les équations paramétriques de la trajectoire sont maintenant connues. Il reste à analyser cette trajectoire et ses propriétés en relation avec la physique du problème.

---

<sup>1</sup> Avant d'étudier ce chapitre, il est conseillé d'avoir déjà étudié les Annexes 3 et 4 et d'avoir résolu les **C50**, **C51** et **C53** du chapitre 10.

**52. Un exemple d'application.** L'exemple qui suit est plus complexe que ce qui est généralement demandé aux examens de première année d'université. Mais on doit pouvoir le comprendre de bout en bout au cours de cette première année. Il faut le suivre pas à pas en effectuant les calculs intermédiaires qui ne sont pas écrits.

On considère une particule de masse  $m$ , de charge électrique  $q > 0$ , soumise à un champ magnétique  $\vec{B}$  constant. La particule évolue dans un milieu tel que si elle se déplace à la vitesse  $\vec{v}$ , elle est aussi soumise à une force de frottement fluide du type habituel :  $\vec{f} = -k \vec{v}$  où  $k > 0$  est un coefficient de frottement constant. Quel mouvement adopte la particule dans ces conditions ?

Il faut d'abord effectuer les tâches nécessaires à l'établissement des équations du mouvement.

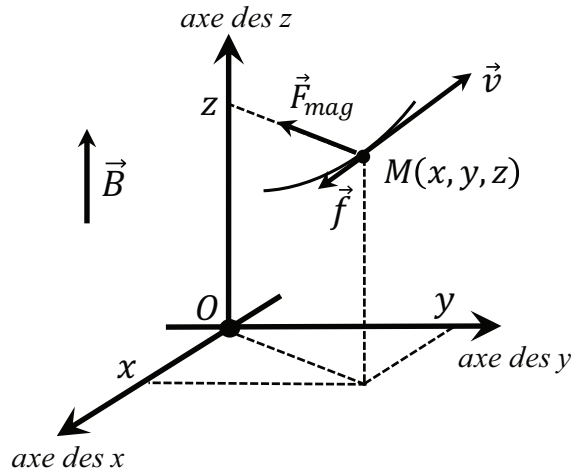
**Inventaire des forces.** En général, les forces sont données dans l'énoncé, hormis les éventuelles forces de réaction qu'il faut prendre en compte si le point matériel est soumis à des liaisons. Ici, la particule n'est assujettie à aucune liaison préalable et l'inventaire des forces est le suivant :

- *Force magnétique.* D'après l'énoncé, la particule est soumise à un champ magnétique. La force qu'elle subit sous l'effet de ce champ  $\vec{B}$  est :  $\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  si  $\vec{v}$  est sa vitesse à l'instant  $t$  et  $q$  la charge électrique qu'elle transporte.
- *Force de frottement fluide.* Cette force est clairement indiquée dans l'énoncé ; elle a la forme :  $\vec{f} = -k \vec{v}$ , si  $\vec{v}$  est la vitesse de la particule à l'instant  $t$ .
- *Poids de la particule ?* En règle générale, une particule en physique est un point matériel dont le poids est largement négligeable devant toutes les autres forces du problème : on ne le prend donc pas en compte. C'est ce que nous ferons ici.

**Référentiel.** Lorsqu'un champ électrique ou magnétique est présent dans le problème, on adopte comme règle que l'origine du référentiel galiléen est un point fixe par rapport aux objets-sources  $\mathcal{R}$  générant le champ en question<sup>1</sup>, si cela est possible. Le choix de notre origine  $O$  sera donc conforme à cette règle. Un choix judicieux sera aussi de prendre l'un des axes du référentiel, l'axe  $Oz$  par exemple, parallèle au champ magnétique. On choisit donc le référentiel  $\mathcal{R}\{O, xyz ; t\}$  indiqué sur la figure 48 et on convient de travailler avec les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  de la particule et la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  associée la repérer.

<sup>1</sup> Cette règle est due au fait que champ électrique et champ magnétique sont intimement liés. Ainsi, une particule chargée fixe vis-à-vis d'un certain référentiel galiléen génère un champ électrique ; mais, vis-à-vis d'un autre référentiel galiléen, elle y apparaît en mouvement et fait office de courant électrique qui génère aussi un champ magnétique. En général, on parle de champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Dans un champ électromagnétique, une particule chargée subit la force de Lorentz :  $\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$ . Les équations de Maxwell qui régissent les phénomènes électromagnétiques montrent aussi qu'un champ électrique variable dans le temps génère inévitablement un champ magnétique variable dans le temps, et réciproquement.

**Vitesse, accélération et forces dans le système de coordonnées cartésiennes.** Soit  $M$  le point matériel représentant la particule. On a :  $\overline{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ . Le vecteur vitesse est alors :  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$  ; et le vecteur accélération est :  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$ .



**Figure 48.** Les forces en présence agissant sur le point matériel de charge électrique  $q$  à un instant donné (pour  $q < 0$ ) et le choix de prendre l'axe  $Oz$  parallèle au champ magnétique  $\vec{B}$ .

Concernant la force magnétique : le choix du référentiel permet d'écrire :  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ , où  $B$  est un paramètre constant. Le calcul du produit vectoriel fournit :

$$\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q B \dot{y} \vec{u}_x - q B \dot{x} \vec{u}_y$$

Concernant la force de frottement, on a simplement :

$$\vec{f} = -k \vec{v} = -k (\dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z)$$

**Équations du mouvement.** Le principe fondamental de la dynamique s'écrit ici :

$$\vec{F}_{mag} + \vec{f} \doteq m \vec{a}$$

C'est-à-dire, en identifiant chaque composante sur les vecteurs de base des membres de droite et de gauche de cette équation :

$$\begin{cases} qB \dot{y} - k \dot{x} \doteq m \ddot{x} \\ -qB \dot{x} - k \dot{y} \doteq m \ddot{y} \\ -k \dot{z} \doteq m \ddot{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} k/m - \dot{y} qB/m \doteq 0 & (1) \\ \ddot{y} + \dot{y} k/m + \dot{x} qB/m \doteq 0 & (2) \\ \ddot{z} + \dot{z} k/m \doteq 0 & (3) \end{cases}$$

**53. Résolution des équations.** Les équations (1) et (2) sont des *équations couplées*, c'est à dire que les variables  $x$  et  $y$  apparaissent dans chacune de ces deux équations (*via* leurs dérivées première et seconde par rapport au temps). Elles sont linéaires, homogènes et à coefficients constants. Elles semblent être du second ordre, mais on observe que ni  $x$  ni  $y$  ne sont présents : ces équations sont en fait du premier ordre si on considère que les variables sont  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$ .

L'équation (3) quant à elle est découplée : elle ne concerne que la variable  $z$ . Elle est linéaire, homogène, à coefficients constants et, comme les deux autres équations, elle n'est du second ordre qu'en apparence car  $z$  n'intervient que *via* ses dérivées première et seconde par rapport au temps : l'équation (3) peut donc être vue comme une équation différentielle du premier ordre en  $\dot{z}$ .

**Résolution de l'équation (3).**  $\dot{z}$  est la composante selon l'axe  $Oz$  (axe du champ magnétique) du vecteur vitesse. Dans un souci de clarté, posons  $v_z := \dot{z}$  ; alors l'équation (3) prend bien la forme d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $v_z$  :

$$\dot{v}_z + \frac{k}{m} v_z = 0 \Leftrightarrow \frac{dv_z}{v_z} = -\frac{k}{m} dt$$

Cette équation s'intègre directement par séparation des variables et fournit la solution générale<sup>1</sup> :

$$v_z = C_1 \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$$

où  $C_1$  est une constante arbitraire. La composante du vecteur vitesse le long de l'axe du champ magnétique décroît donc exponentiellement avec le temps. Manifestement, le rapport  $k/m$  a les dimensions de l'inverse d'un temps. Posons, pour simplifier l'écriture :  $\tau := m/k$ . On interprète  $\tau$  comme un temps de relaxation, temps au bout duquel la composante  $v_z$  est divisée par le nombre :  $e = 2.71828 \dots$ . Au temps  $t = 5 \tau$ ,  $v_z$  devient quasiment nulle.

La constante  $C_1$  est déterminée par les conditions initiales du problème. Rien n'est indiqué dans l'énoncé concernant ces conditions initiales ; nous prendrons donc les plus générales qui soient : au temps  $t = 0$ , la composante  $v_z$  du vecteur vitesse vaut :  $v_{0z}$ . On a alors, d'après la solution générale :  $v_z(t = 0) = v_{0z} = C_1$ . Au final, la composante du vecteur vitesse le long de l'axe  $Oz$  s'écrit :

$$v_z = \dot{z} = v_{0z} \exp(-t/\tau)$$

Nous n'en avons pas fini avec l'axe  $Oz$  puisqu'il faut encore déterminer  $z(t)$ . On l'obtient facilement en intégrant le résultat précédent par rapport au temps :

<sup>1</sup> Cette équation est résolue dans l'Annexe 4.

$$z = \int \dot{z} dt = -\tau v_{0z} \exp(-t/\tau) + C_2$$

où  $C_2$  est une constante arbitraire déterminée par les conditions initiales. En posant :  $z(t = 0) = z_0$ , cela permet d'écrire finalement  $z$  sous la forme :

$$z = z_0 + \tau v_{0z} [1 - \exp(-t/\tau)]$$

On observe dans ce mouvement amorti le long de l'axe  $Oz$  que la coordonnée  $z$  tend vers une valeur fixe  $z_\infty := z_0 + \tau v_{0z}$  aux temps longs.

**Résolution des équations (1) et (2).** On devrait résoudre les équations (1) et (2) de façon simultanée en raison du couplage entre les variables  $x$  et  $y$ . Toutefois, comme ces équations sont aussi linéaires, il est facile de les découpler. Il existe différentes façons de procéder ; en voici une : l'équation (1) permet d'écrire  $\dot{y}$  en fonction de  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  :

$$\dot{y} = \frac{k}{qB} \dot{x} + \frac{m}{qB} \ddot{x}$$

Cette relation, dérivée par rapport au temps, fournit  $\ddot{y}$  en fonction de  $\ddot{x}$  et  $\dddot{x}$  :

$$\ddot{y} = \frac{k}{qB} \ddot{x} + \frac{m}{qB} \dddot{x}$$

En injectant maintenant ces deux résultats dans l'équation (2), on obtient une équation différentielle découplée pour la seule variable  $x$  :

$$\left( qB + \frac{k^2}{qB} \right) \dot{x} + 2 \frac{km}{qB} \ddot{x} + \frac{m^2}{qB} \dddot{x} = 0$$

Cette équation différentielle d'ordre 3 en  $x$  n'est en fait que du second ordre puisque  $x$  n'apparaît pas. Comme précédemment, on pose :  $v_x := \dot{x}$ , la composante du vecteur vitesse le long de l'axe  $Ox$ . En remplaçant  $k$  par son expression en fonction de  $m$  et du temps de relaxation  $\tau$  défini plus haut, on obtient ainsi :

$$\left( qB + \frac{m^2}{qB\tau^2} \right) v_x + 2 \frac{m^2}{qB\tau} \dot{v}_x + \frac{m^2}{qB} \ddot{v}_x = 0$$

Les deux termes entre parenthèses dans cette équation doivent avoir les mêmes dimensions puisqu'ils s'ajoutent. Comme  $\tau$  est un temps, il s'ensuit que la quantité  $qB/m$  a les dimensions de l'inverse d'un temps. On posera :  $\omega := qB/m$  ;  $\omega$  a les dimensions d'une pulsation et, après simplification, l'équation à résoudre prend maintenant la forme :

$$\ddot{v}_x + \frac{2}{\tau} \dot{v}_x + \left( \omega^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) v_x = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre en  $v_x$  : la solution générale d'une telle équation est connue<sup>1</sup> et se met sous la forme :  $C_3 \exp(r_1 t) + C_4 \exp(r_2 t)$  où  $C_3, C_4$  sont des constantes et  $r_1, r_2$  sont les racines du polynôme caractéristique de l'équation. Dans notre cas, ces racines sont égales à :  $(-1/\tau) \pm i \omega$ . La solution générale peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= C_3 \exp[(-1/\tau) + i\omega)t] + C_4 \exp[(-1/\tau) - i\omega)t] \\ &= \exp(-t/\tau) [C_3 \exp(+i\omega t) + C_4 \exp(-i\omega t)] \end{aligned}$$

Pour notre problème, il sera préférable d'écrire  $v_x$  sous une forme équivalente<sup>2</sup> :

$$v_x = \dot{x} = \exp(-t/\tau) [A \cos(\omega t + \phi)]$$

où les constantes arbitraires  $A$  et  $\phi$  sont reliées aux constantes arbitraires  $C_3$  et  $C_4$  et sont *a priori* déterminées par la condition initiale : au temps  $t = 0$ ,  $v_x(t = 0) = v_{0x}$ . Mais on obtient ici une seule condition pour les deux constantes inconnues  $A$  et  $\phi$  :

$$v_{0x} = A \cos \phi \tag{4}$$

ce qui empêche de les déterminer. Cette difficulté provient du fait que les équations (1) et (2) étaient couplées au départ, ce qui veut dire que pour déterminer  $A$  et  $\phi$ , il faut aussi considérer  $v_y := \dot{y}$  que l'on obtient directement en fonction de  $v_x = \dot{x}$  et de sa dérivée grâce à l'équation (1) :

$$\dot{y} = v_y = \frac{k}{qB} \dot{x} + \frac{m}{qB} \ddot{x} = \frac{1}{\omega\tau} \dot{x} + \frac{1}{\omega} \ddot{x}$$

Après un calcul simple, on trouve alors :

$$\dot{y} = v_y = -\exp(-t/\tau) [A \sin(\omega t + \phi)]$$

en posant  $v_y(t = 0) = v_{0y}$  comme autre condition initiale, on déduit que  $A$  et  $\phi$  doivent aussi vérifier l'équation :

$$v_{0y} = -A \sin \phi \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) permettent maintenant de déterminer  $A$  et  $\phi$  en fonction des conditions initiales :

$$\begin{cases} A^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \\ \tan \phi = -\frac{v_{0y}}{v_{0x}} \end{cases}$$

Il faut s'arrêter un instant sur ce résultat intermédiaire afin de le simplifier. Sans restreindre la généralité du problème, l'axe  $Oz$  a été choisi selon l'axe du champ

<sup>1</sup> Annexe 3.

<sup>2</sup> Cette équivalence d'écriture est démontrée au C8.

magnétique. De la même façon, on peut très bien imaginer avoir choisi l'axe  $Ox$ , par exemple, de telle sorte qu'il soit parallèle à la projection du vecteur vitesse initiale de la particule dans le plan  $xOy$  (c'est-à-dire, faire en sorte que :  $v_{0y} = 0$ ). Ce choix n'enlève rien à la généralité de la solution : une personne qui aurait fait un autre choix trouvera la même solution, à une rotation des axes  $Ox$  et  $Oy$  près. Avec ce choix particulier, les équations précédentes fournissent :  $\phi = 0$  et  $A = v_{0x}$ . Les composantes selon  $Ox$  et  $Oy$  du vecteur vitesse en fonction du temps sont alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = v_{0x} \exp(-t/\tau) \cos \omega t \\ \dot{y} = v_y = -v_{0x} \exp(-t/\tau) \sin \omega t \end{cases}$$

On observe que chacune de ces deux composantes oscille dans le temps à la pulsation  $\omega$  et subit un amortissement dont le temps caractéristique est  $\tau$ . Ces composantes sont quasiment nulles lorsque le temps  $t$  atteint  $5\tau$ , à l'image de la composante  $v_z$ .

Il reste encore à déterminer  $x(t)$  et  $y(t)$  à partir de  $v_x$  et  $v_y$ , ce qui demande de faire des intégrations par parties. En effet, on a d'abord :

$$\begin{cases} \int \int \exp(-t/\tau) \cos \omega t \, dt = -\tau [\exp(-t/\tau) \cos \omega t] - \omega\tau \int \exp(-t/\tau) \sin \omega t \, dt \\ \int \int \exp(-t/\tau) \sin \omega t \, dt = -\tau [\exp(-t/\tau) \sin \omega t] + \omega\tau \int \exp(-t/\tau) \cos \omega t \, dt \end{cases}$$

Et à partir de ces deux expressions, on déduit :

$$\begin{cases} \int \int \exp(-t/\tau) \cos \omega t \, dt = \frac{\exp(-t/\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} [-\tau \cos \omega t + \omega\tau^2 \sin \omega t] \\ \int \int \exp(-t/\tau) \sin \omega t \, dt = \frac{\exp(-t/\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} [-\tau \sin \omega t - \omega\tau^2 \cos \omega t] \end{cases}$$

on a donc :

$$\begin{cases} x = \int \dot{x} \, dt = v_{0x} \frac{\exp(-t/\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} [-\tau \cos \omega t + \omega\tau^2 \sin \omega t] + C_5 \\ y = \int \dot{y} \, dt = v_{0x} \frac{\exp(-t/\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} [\tau \sin \omega t + \omega\tau^2 \cos \omega t] + C_6 \end{cases}$$

où les constantes arbitraires  $C_5$  et  $C_6$  sont déterminées par les dernières conditions initiales à notre disposition : lorsque  $t = 0$ ,  $x(t = 0) = x_0$  et  $y(t = 0) = y_0$ . Ce qui fournit :

$$\begin{cases} C_5 = x_0 + v_{0x} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ C_6 = y_0 - v_{0x} \frac{\omega \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \end{cases}$$

**Solution finale.** Après cette longue partie mathématique, il est temps de rassembler les résultats obtenus. La vitesse de la particule est, avec un choix de l'axe  $Oz$  dans la direction du champ et d'un axe  $Ox$  tel que  $v_{0y} = 0$  :

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_{0x} \exp(-t/\tau) \cos \omega t \\ v_y = \dot{y} = -v_{0x} \exp(-t/\tau) \sin \omega t \\ v_z = \dot{z} = v_{0z} \exp(-t/\tau) \end{cases}$$

La position de la particule (après avoir remplacé  $C_5$  et  $C_6$  par leurs valeurs) est :

$$\begin{cases} x = v_{0x} \frac{\exp(-t/\tau)}{1 + \omega^2 \tau^2} [-\tau \cos \omega t + \omega \tau^2 \sin \omega t] + x_0 + v_{0x} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ y = v_{0x} \frac{\exp(-t/\tau)}{1 + \omega^2 \tau^2} [\tau \sin \omega t + \omega \tau^2 \cos \omega t] + y_0 - v_{0x} \frac{\omega \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ z = z_0 + \tau v_{0z} [1 - \exp(-t/\tau)] \end{cases}$$

À ce stade, le problème est résolu : les équations horaires de la trajectoire de la particule, lorsqu'elle subit l'effet des deux forces - magnétique et de frottement fluide - viennent d'être déterminées, compte tenu de sa vitesse et de sa position initiales.

**54. Étude plus précise de la trajectoire.** Il est possible de simplifier encore les expressions de  $x$  et de  $y$  en faisant appel aux deux formules trigonométriques :

$$F \cos(\omega t + \beta) = F \cos \beta \cos \omega t - F \sin \beta \sin \omega t$$

$$D \sin(\omega t + \gamma) = D \cos \gamma \sin \omega t + D \sin \gamma \cos \omega t$$

En comparant ces formules avec les expressions entre crochets dans l'écriture de  $x$  et  $y$ , on observe que :

$$\begin{cases} D = -F = \tau \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \\ \tan \gamma = \tan \beta = \omega \tau \end{cases}$$

Nous garderons  $\beta$  comme paramètre ; il est tel que :  $\tan \beta = \omega \tau$ , de sorte que les équations paramétriques de la trajectoire s'écrivent maintenant :

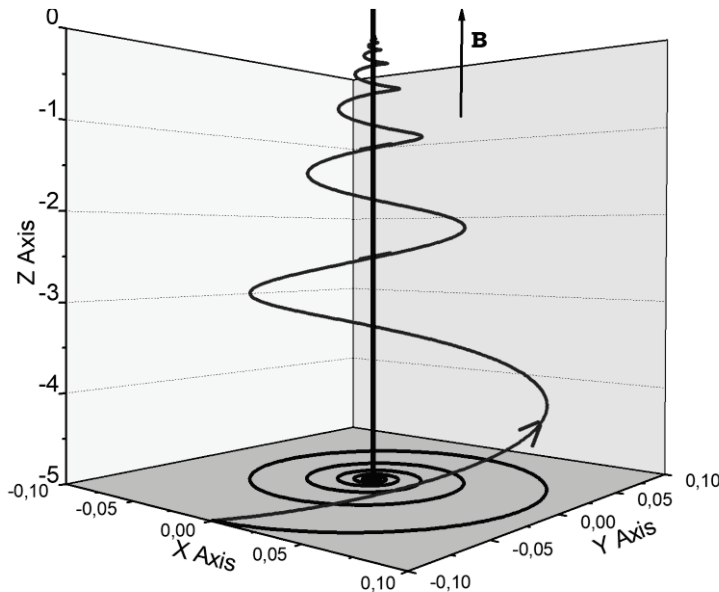
$$\begin{cases} x = -\tau v_{0x} \cos\beta \exp(-t/\tau) \cos(\omega t + \beta) + x_0 + \tau v_{0x} \cos^2\beta \\ y = \tau v_{0x} \cos\beta \exp(-t/\tau) \sin(\omega t + \beta) + y_0 - \tau v_{0x} \cos\beta \sin\beta \\ z = z_0 + \tau v_{0z} [1 - \exp(-t/\tau)] \end{cases}$$

Lorsque le temps  $t$  devient très grand ( $t \rightarrow \infty$ ), la vitesse de la particule s'annule et elle s'arrête en un point que nous dénommerons  $M_\infty$  qui a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{OM_\infty} = \begin{cases} x_\infty = x_0 + \tau v_{0x} \cos^2\beta \\ y_\infty = y_0 - \tau v_{0x} \cos\beta \sin\beta \\ z_\infty = z_0 + \tau v_{0z} \end{cases}$$

Il est avantageux de choisir ce point - qui est fixe par rapport à l'origine  $O$  - comme nouvelle origine de notre référentiel galiléen. Les équations paramétriques de la trajectoire concernent maintenant le vecteur position  $\overrightarrow{M_\infty M}$  et elles s'écrivent :

$$\begin{cases} X = x - x_\infty = -\tau v_{0x} \cos\beta \exp(-t/\tau) \cos(\omega t + \beta) \\ Y = y - y_\infty = \tau v_{0x} \cos\beta \exp(-t/\tau) \sin(\omega t + \beta) \\ Z = z - z_\infty = -\tau v_{0z} \exp(-t/\tau) \end{cases}$$



**Figure 49.** Trajectoire de la particule chargée soumise à un champ magnétique constant et à une force de frottement fluide. Noter comme la trajectoire s'enroule autour des lignes de champ magnétique : c'est toujours le cas même en l'absence de frottements. La projection de la trajectoire dans un plan orthogonal à l'axe des  $z$  est une spirale logarithmique.

Afin de mieux voir ce qu'est cette trajectoire (figure 49), On peut passer au système de coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  telles que  $X = \rho \cos\varphi$ ,  $Y = \rho \sin\varphi$ ,  $Z = z$ . Avec ce système de coordonnées, les équations paramétriques de la trajectoire s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \exp(-t/\tau) \\ \varphi = \pi - \beta - \omega t \\ z = -z_0 \exp(-t/\tau) \end{cases}$$

avec :  $\rho_0 = \tau v_{0x} \cos\beta$  et  $z_0 = \tau v_{0z}$ . C'est l'équation d'une hélice d'axe  $M_\infty z$  dont la projection dans le plan  $XM_\infty Y$  (plan parallèle au plan  $xOy$ ) est une spirale logarithmique (C28, C35, C36). La particule suit cette trajectoire avec une vitesse angulaire constante  $\dot{\varphi} = -\omega$ .

**55. Commentaires.** Cet exemple d'utilisation du principe fondamental de la dynamique appelle à plusieurs remarques :

- *La résolution des équations du mouvement* a permis de déterminer d'abord les composantes  $(v_x, v_y, v_z)$  du vecteur vitesse en fonction du temps, puis, par intégration, les composantes  $(x, y, z)$  du vecteur position. Ça n'est pas toujours ce qui arrive : dans de nombreux autres cas, la résolution des équations du mouvement permet de déterminer directement les composantes du vecteur position en fonction du temps sans passer par celles du vecteur vitesse ; cela dépend en fait de la forme des équations différentielles à résoudre, c'est-à-dire de l'expression analytique des forces en présence.
- *Importance des conditions initiales.* L'équation de la dynamique est une équation différentielle vectorielle du second ordre qui donne lieu à 3 équations différentielles scalaires du second ordre. La solution générale de chacune de ces trois équations différentielles du second ordre fait intervenir 2 constantes arbitraires, soit, en tout, 6 constantes d'intégration (les constantes  $C_1, C_2$  puis  $C_3, C_4$  [ou  $A$  et  $\phi$ ], puis  $C_5$  et  $C_6$  du problème). Ces constantes, qui surviennent au cours de la résolution des équations différentielles, n'ont pas une signification physique évidente *a priori*. Mais selon les valeurs qu'on leur donne, la trajectoire obtenue peut être radicalement différente : par exemple, si  $A = 0$  la trajectoire est une droite le long de l'axe  $Oz$  ; si  $C_1 = 0$  la trajectoire est plane, etc... Toutes ces trajectoires sont des solutions possibles au problème posé au départ puisqu'elles obéissent à l'équation de la dynamique. Pour mieux voir à quelle situation physique correspond tel ou tel type de trajectoire, on remplace ces constantes d'intégration par 6 autres constantes qui ont une signification physique plus claire et que l'on appelle les *conditions initiales* : bien souvent, il s'agit du vecteur position (3 composantes) et du vecteur vitesse (3 composantes) à l'instant  $t = 0$  où l'on suppose que les forces se mettent en place.

C'est ce que l'on a fait dans le problème ci-dessus. On se rend compte ainsi que la trajectoire rectiligne, par exemple, correspond au cas où la vitesse initiale de la particule est dirigée le long de l'axe du champ magnétique, c'est-à-dire au jeu de valeurs initial :  $v_{0x} = v_{0y} = 0, v_{0z} \neq 0$ . Dans ce cas en effet, on vérifie que la force magnétique est nulle et que seule agit la force de frottement qui ne fait que s'opposer à la vitesse : la trajectoire initialement rectiligne le long de l'axe  $Oz$  (principe d'inertie) reste donc rectiligne le long de cet axe, mais la particule est décélérée jusqu'à s'arrêter. L'interprétation physique pour le cas de la trajectoire plane, avec cette fois  $v_{0z} = 0$ , est laissée à la lectrice.

*Remarque 1.* Il n'est pas toujours simple de passer des constantes d'intégrations aux conditions initiales, comme le montre le problème ci-dessus avec la détermination de  $A$  et  $\varphi$ . Mais on y arrive presque toujours en regardant ce que donne la solution générale au temps  $t = 0$ .

*Remarque 2.* D'autres conditions initiales peuvent être choisies à la place de la position et de la vitesse : il peut arriver en effet que certaines quantités physiques comme l'énergie mécanique (chapitre 13) ou le moment cinétique (chapitre 15) soient constants au cours du mouvement. Ces constantes peuvent être prises comme conditions initiales ; elles sont bien sûr reliées aux positions et vitesses initiales.

- *Paramètres du problème.* Outre les conditions initiales, il n'est pas rare de voir apparaître au cours de la résolution des équations d'autres paramètres qui s'avèrent être physiquement intéressants. C'est le cas dans notre problème des deux paramètres  $\tau$  et  $\omega$  (ou mieux :  $\beta$ ). Ces paramètres sont toujours reliés aux données du problème (masse de la particule, charge de la particule, valeur du champ magnétique, etc...), c'est ce qui permet de les distinguer des conditions initiales. Nous avons déjà interprété  $\tau$  comme un temps de relaxation. Quant à  $\omega$ , il indique la vitesse angulaire de la particule dans son mouvement en spirale dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. On appelle souvent  $\omega$  la *fréquence cyclotron*<sup>1</sup> : c'est la vitesse angulaire acquise par une particule chargée dès lors qu'elle est plongée dans un champ magnétique.

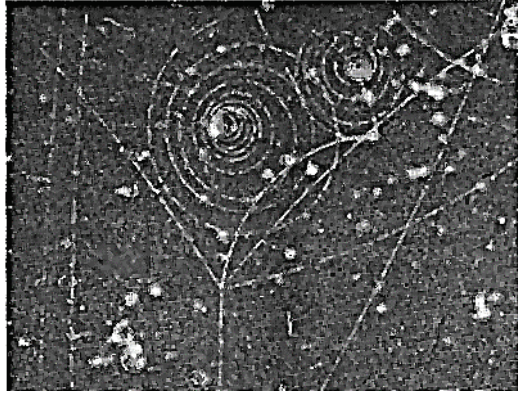
- *Choix de l'orientation des axes du référentiel.* À deux reprises un choix a été fait concernant l'orientation des axes liés au référentiel : d'abord en choisissant l'axe  $Oz$  le long du champ magnétique ; puis, en choisissant l'axe  $Ox$  tel qu'il soit parallèle à la projection du vecteur vitesse initiale dans le plan  $xOy$ . Cette simplification n'a rien enlevé à la généralité du problème ; le référentiel  $\mathcal{R}$  a été orienté de cette façon pour simplifier au mieux l'expression analytique de la trajectoire. Dans tout

---

<sup>1</sup> Un cyclotron est un accélérateur de particules de forme approximativement circulaire conçu et réalisé par Lawrence et Livingstone (1932). Le champ magnétique présent dans le cyclotron sert à rendre circulaire la trajectoire des particules afin que l'appareil reste d'une taille raisonnable (qqm mètres à qqm dizaines de mètres). Un champ électrique pulsé accélère les particules en certains endroits de la trajectoire.

problème, il faut réfléchir à orienter au mieux les axes utilisés dans un souci de simplification.

• *Le problème que l'on vient d'étudier a des applications pratiques* : au cours des années 1950-70, les physicien(ne)s des particules utilisaient des chambres à bulles<sup>1</sup> pour visualiser les trajectoires des particules. Afin d'obtenir des trajectoires suffisamment longues, la chambre à bulles était placée dans un champ magnétique. La mesure expérimentale du rayon de courbure associé à cette trajectoire peut par exemple conduire à déterminer le produit  $\omega\tau$  et ainsi, connaissant le coefficient  $k$  et la valeur du champ, remonter à la charge de la particule inconnue. En réalité, on connaît le plus souvent la nature de la particule et cet appareil sert en fait à déterminer son énergie initiale (sa vitesse initiale à l'entrée de la chambre) en mesurant le rayon de courbure de la trajectoire.



**Figure 50** : traces de particules dans une chambre à bulle. Les deux trajectoires en spirale sont celles de deux positrons (électrons de charge positive). La photographie est prise à peu près parallèlement au champ magnétique. Comparez ces trajectoires avec celle que nous avons obtenue. Image réalisée d'après une photographie obtenue au Berkeley Laboratory dans les années 1970.

## Compléments et exercices du chapitre 11

**C54. Oscillateur harmonique : ressort horizontal.** Un point matériel de masse  $m$  est accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal dont la longueur à vide est  $L_v$  et le coefficient de raideur  $k$  (figure 43).

Dans un premier temps, on place l'origine  $O$  du référentiel d'étude à l'extrémité gauche du ressort et on appelle  $X$  la position du point matériel qui se meut sans frottement le long de l'axe  $OX$  sous l'effet de la force de rappel du ressort.

<sup>1</sup> Une chambre à bulle fonctionne à peu près de la façon suivante : quand une particule chargée traverse la matière liquide, elle ionise quelques atomes voisins et transfère une part d'énergie cinétique aux électrons produits. Ces électrons ralentissent en chauffant localement le liquide. Si ce liquide est déjà surchauffé (cas des chambres à bulles), il commencera à bouillir en ces points chauds localisés, ce qui permet de visualiser la trajectoire de la particule. Une telle chambre peut atteindre plusieurs mètres de cotés.

- Quelles sont les autres forces qui agissent sur ce point matériel ? Ces forces influent-elles sur son mouvement ?
- Écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait l'abscisse  $X$ .
- Résoudre l'équation différentielle obtenue compte tenu des conditions initiales suivantes :  $X(t = 0) = X_0 \neq 0$  et  $\dot{X}(t = 0) = 0$ .
- Quelle est la période de ce mouvement rectiligne sinusoïdal ? On dit de cette période qu'elle est la *période propre de l'oscillateur* (le ressort). Tracer  $X(t)$ ,  $\dot{X}(t)$  et  $\ddot{X}(t)$ . Autour de quelle position oscille le point matériel ?
- Un point matériel est dit à l'équilibre si sa vitesse est constamment nulle ; ce qui implique que son accélération est nulle également et que la résultante des forces qui agissent sur lui est le vecteur nul<sup>1</sup>. Appliquer cette définition pour montrer que la position d'équilibre du point matériel est :  $X_{eq} = L_v$ .

On convient maintenant de placer l'origine du référentiel à la position d'équilibre. Le point matériel est donc cette fois repéré par sa coordonnée :  $x = X - L_v$ . Écrire à nouveau le principe fondamental de la dynamique et résoudre l'équation différentielle à laquelle satisfait l'abscisse  $x$  en prenant les mêmes conditions initiales que précédemment.

**C55. Oscillateur harmonique : ressort vertical.** Faire le **C54** avant d'aborder ce problème. Le ressort du **C54** est cette fois vertical (figure 43). Dans un premier temps, on place l'origine  $O$  du référentiel d'étude à l'extrémité haute du ressort et on appelle  $X$  la position du point matériel qui se meut sans frottement le long de l'axe vertical  $OX$  que l'on oriente vers le bas.

- Quelles sont les forces qui agissent sur ce point matériel ? Ces forces influent-elles sur son mouvement ?
- Écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait l'abscisse  $X$ .
- Résoudre l'équation différentielle obtenue compte tenu des conditions initiales suivantes :  $X(t = 0) = X_0 > 0$  et  $\dot{X}(t = 0) = 0$ .
- Quelle est la période de ce mouvement rectiligne sinusoïdal ? Tracer  $X(t)$ ,  $\dot{X}(t)$  et  $\ddot{X}(t)$ . Autour de quelle position oscille le point matériel ?
- Quelle est la position d'équilibre  $X_{eq}$  du point matériel ?
- On place maintenant l'origine du référentiel à la position d'équilibre. Le point matériel est alors repéré par sa coordonnée  $x$  vis-à-vis de cette position d'équilibre. Écrire à nouveau le principe fondamental de la dynamique en prenant  $x$  pour variable

<sup>1</sup> Le chapitre 14 est dédié à cette notion d'équilibre d'un point matériel.

et résoudre l'équation différentielle à laquelle satisfait  $x$  en prenant les mêmes conditions initiales que précédemment.

En conclusion des **C54** et **C55** : si l'origine est ramenée à la position d'équilibre du ressort, le mouvement du point matériel se décrit de la même façon ; que le ressort soit horizontal ou vertical, il oscille sinusoïdalement à la même fréquence autour sa position d'équilibre. Au chapitre 14, on montre que cette oscillation harmonique se rencontre de façon systématique dès lors qu'un point matériel est en mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable sous l'effet de forces quelconques.

**C56. Oscillateur harmonique amorti.** On reprend le ressort vertical du **C55** (figure 43). Le dispositif est cette fois plongé dans un fluide où il faut tenir compte de l'existence d'une force de frottement fluide de la forme :  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ , où  $\alpha > 0$  est un coefficient de frottement fluide constant et  $\vec{v}$  la vitesse du point matériel à l'instant  $t$ . L'origine  $O$  du référentiel est choisie à la position d'équilibre du point matériel que l'on déterminera. L'axe vertical  $Ox$  est orienté vers le bas et le point matériel  $M$  est repéré par le vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x$ .

- Inventorier toutes les forces qui agissent sur ce point matériel lorsqu'il est en mouvement, écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation différentielle satisfaite par  $x$ .
- Mettre l'équation différentielle trouvée sous la même forme que l'équation différentielle étudiée au **A23** de l'annexe 4 et identifier les paramètres  $\omega$  et  $\tau$  en fonction de  $\alpha$ ,  $k$  et  $m$ .
- Dans chacun des 3 cas répertoriés dans l'annexe 4, tracer  $x(t)$  pour les conditions initiales suivantes :  $x(t = 0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t = 0) = 0$ .

**C57. Un théorème à démontrer.** Démontrer le théorème suivant :

***Théorème.** Le mouvement d'un point matériel soumis à un ensemble de forces dont la résultante  $\vec{F}$  est un vecteur constant se réalise dans un plan. Ce plan contient  $\vec{F}$  et la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  du point matériel et la courbe suivie est une parabole. Si  $\vec{v}_0 = \vec{0}$  ou si  $\vec{v}_0$  est parallèle à  $\vec{F}$ , alors le mouvement est rectiligne uniformément varié d'accélération :  $\vec{a} = \vec{F}$ .*

**C58. Chute libre parabolique.** Une application du théorème précédent est l'étude de la chute libre d'un point matériel lancé depuis l'origine  $O$  d'un référentiel  $\mathcal{R}(O, xy)$  avec une vitesse initiale quelconque :  $\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \vec{u}_x + v_0 \sin\alpha \vec{u}_y$ , où

$\alpha$  est l'angle que fait  $\vec{v}_0$  avec l'axe  $Ox$  qui représente le sol et  $v_0 > 0$  ; l'axe  $Oy$  représentant la verticale du lieu, orienté vers le haut. Le champ de pesanteur terrestre est supposé constant, égal à  $\vec{g}_0$  ; le point matériel se déplace sans frottements, et le référentiel  $\mathcal{R}$  est galiléen.

- On convient de repérer le point matériel  $M$  à l'aide de ses coordonnées cartésiennes :  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$ . Écrire le principe fondamental de la dynamique et intégrer les équations du mouvement pour obtenir les équations paramétriques de la courbe suivie par  $M$ . Expliciter la nature du mouvement projeté du point  $M$  le long de l'axe  $Ox$ . Même demande pour l'axe  $Oy$ . Montrer que la courbe suivie est bien une parabole (Galilée) sauf dans le cas particulier où  $\alpha = \pi/2$  que l'on discutera à part.
- Lorsque  $\alpha \neq 0$  ou  $\pi/2$ , trouver les coordonnées du sommet  $S$  de la parabole, la vitesse du point matériel à cet endroit et le temps  $t_S$  au bout duquel  $M$  atteint  $S$ .
- Mêmes questions pour le point d'impact  $P$  (la portée) de la parabole défini comme le point de l'axe  $Ox$  où retombe le point  $M$ . En déduire que le point  $P$  sera le plus éloigné de  $O$  pour  $\alpha = \pi/4$ .

**C59. Le pendule simple plan.** Un pendule simple est la modélisation la plus crue d'un pendule : il consiste en une tige rigide de longueur  $L$  dont une extrémité est accrochée en un point  $O$  qui fera office d'origine du référentiel utilisé (figure 51 ci-dessous). Un poids assimilé à un point matériel  $M$  est suspendu à l'autre extrémité du pendule. On admet que la masse de la tige est négligeable devant la masse  $m$  du point matériel. Enfin, les conditions initiales de position et de vitesse du point  $M$  sont choisies de telle sorte que le mouvement se réalise dans le plan  $xOy$  du référentiel utilisé (figure 51).

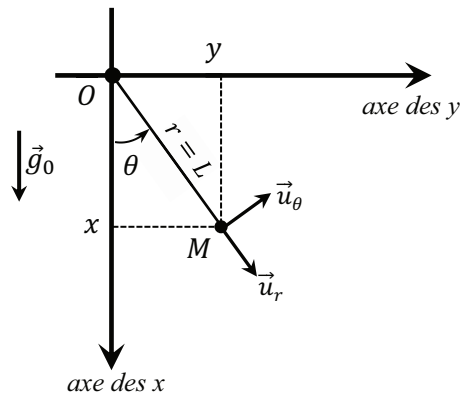


Figure 51. Le pendule simple plan.

Le mouvement de ce pendule simple est supposé se réaliser sans frottement sous l'effet du champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}_0$  et on choisit le système de coordonnées polaires pour repérer le point matériel  $M$ .

- Justifier cette affirmation : la trajectoire se réalise sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R = L$
- Faire le bilan des forces qui agissent sur le point matériel et écrire ces forces dans le système de coordonnées polaires.
- Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour en déduire les équations du mouvement du point matériel. En déduire la valeur de la réaction du pendule en fonction de  $\theta, \dot{\theta}$  et des paramètres du problème.
- *Approximation des petits angles.* Lorsque l'angle  $\theta$  varie de façon importante, la solution générale de l'équation différentielle non linéaire du mouvement (celle obtenue le long de  $\vec{u}_\theta$ ) fait appel aux intégrales elliptiques, qui sont des fonctions définies par une intégrale paramétrée. Nous nous contenterons ici de chercher une solution à l'équation lorsque l'angle  $\theta$  est suffisamment petit, à chaque instant du mouvement, pour que l'approximation  $\sin \theta \cong \theta$  soit justifiée (Annexe 2) ; c'est-à-dire que le point matériel est en mouvement dans le voisinage de sa position d'équilibre stable<sup>1</sup> :  $\theta_{eq} = 0$ .

On pose :  $\omega = \sqrt{g_0/L}$ . Résoudre l'équation différentielle du mouvement dans ces conditions en utilisant le théorème énoncé dans l'Annexe 4.

À l'instant initial, le pendule fait un angle  $\theta_0$  avec la verticale et sa vitesse angulaire est nulle. En déduire l'équation horaire du mouvement du pendule. Interpréter  $\omega$ .

---

<sup>1</sup> La notion de stabilité d'un équilibre est définie au chapitre 14. Intuitivement, on se doute bien ici que  $\theta = 0$  est une position d'équilibre de notre pendule.

## CHAPITRE 12

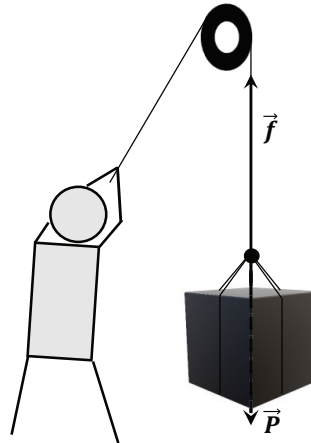
# TRAVAIL ET ÉNERGIE CINÉTIQUE

Le terme « énergie » provient du grec ἐνέργεια [énérgēia] signifiant : « (force) en action ». Le physicien J.C. Maxwell en a donné la définition suivante (1891) : « *L'énergie est la capacité d'un système à accomplir un travail mécanique* ». Les dimensions premières d'une grandeur énergétique - quelle que soit son origine - sont en effet celles d'une force multipliée par une distance, c'est-à-dire les dimensions associées à la notion de *travail* :  $[E] := [F] [L] = ML^2T^{-2}$ . L'unité d'énergie dans le Système International est le joule :  $J$ .

L'intérêt des grandeurs énergétiques tient au fait qu'elles satisfont à des lois-bilan exprimant la conversion incessante de ces quantités entre elles : telle forme d'énergie se transformant en telle autre forme au cours du processus étudié.

**56. Travail réalisé par une force, puissance instantanée.** Le concept de travail réalisé par une force provient de l'expérience première que l'on a de l'effort à produire pour déplacer un corps sur une certaine hauteur : soulever un poids avec une force de traction  $f = \|\vec{f}\|$  constante demande un effort d'autant plus conséquent que la hauteur  $h$  à parcourir est importante. Dans ce cas simple, la physique traduit cet effort par le produit  $f \cdot h$  et convient de le dénommer : travail réalisé par la force de traction  $\vec{f}$  lors du déplacement de l'objet sur une hauteur  $h$ .

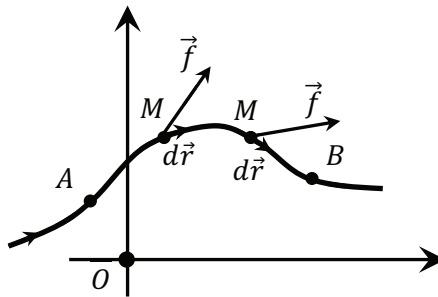
Dans cette expérience, il faut aussi considérer le poids  $\vec{P}$  de l'objet (figure 52) : cette force doit aussi « travailler » lors du déplacement imposé vers le haut, et il est clair qu'elle s'y oppose. Aussi, on convient d'affecter un signe négatif au travail réalisé par le poids au cours de ce déplacement :  $-P \cdot h$ . Et l'on dit que le travail réalisé par le poids a été *résistant*, tandis que le travail positif réalisé par la force de traction a été *moteur*.



**Figure 52.** La définition du travail d'une force : l'effort à réaliser pour soulever le poids sur une certaine hauteur.

Afin d'améliorer la notion de travail, on peut s'imaginer maintenant l'expérience qui consiste à pousser un objet sur un plan incliné : si la force de poussée  $\vec{f}$ , toujours supposée constante, est dans le sens du déplacement voulu de  $A$  vers  $B$  le long du plan incliné, alors le travail réalisé par  $\vec{f}$  sera  $\|\vec{f}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$  comme dans la première expérience. Mais supposons que  $\vec{f}$  soit maintenant dirigée perpendiculairement au plan incliné : il est clair que l'effort ainsi réalisé n'est d'aucune utilité pour déplacer l'objet de  $A$  vers  $B$  ; la physique dira dans ce cas que le travail réalisé par  $\vec{f}$  est nul. Ainsi, la notion de travail ne prend en compte que la fraction utile de  $\vec{f}$ , c'est-à-dire ici sa projection sur le segment de droite  $AB$  :  $\|\vec{f}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\vec{f}, \overrightarrow{AB})$ . On reconnaît-là le produit scalaire :  $\vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$  qui va servir de définition améliorée de la notion de travail réalisé par une force. Cette définition inclut l'idée de travail moteur et de travail résistant puisque si l'angle  $(\vec{f}, \overrightarrow{AB})$  est supérieur à  $\pi/2$ , le travail de  $\vec{f}$  sera compté pour négatif et donc résistant pour aller de  $A$  vers  $B$ .

En vue d'une définition encore plus élaborée, il faut maintenant prendre en compte le fait que le chemin parcouru par un objet entre deux points  $A$  et  $B$  n'est pas forcément rectiligne comme dans les deux expériences précédentes, et que la force  $\vec{f}$  envisagée n'est pas forcément constante tout au long de ce chemin. Considérons alors un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  le long du chemin à parcourir. Ce déplacement élémentaire s'assimile à un segment de droite infiniment petit au voisinage de la position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  de l'objet (notre point matériel). Au cours de ce déplacement élémentaire, la force  $\vec{f}$  pour laquelle on souhaite évaluer le travail qu'elle réalise aura la valeur qu'elle prend à la position  $\vec{r}$  :  $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$ . Ainsi, nous pourrions dire que le produit scalaire  $\vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$  est le *travail élémentaire* réalisé par  $\vec{f}$  au cours du déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  du point matériel le long de sa trajectoire. Et pour évaluer le travail réalisé sur l'ensemble du chemin suivi par  $M$  pour aller de  $A$  à  $B$ , on sommerait toutes ces contributions élémentaires (figure 53).



**Figure 53.** Le travail réalisé par la force  $\vec{f}$  (éventuellement variable) entre les deux points  $A$  et  $B$  de la trajectoire du point matériel  $M$  est la somme (continue) de tous les produits scalaires  $\vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ .

Considérons alors un point matériel qui suit une certaine trajectoire sous l'influence d'un ensemble de forces, et soit  $\vec{f}$  l'une de ces forces. On aura la définition suivante :

**Travail réalisé par une force.** On appelle travail réalisé par la force  $\vec{f}$  entre deux points  $A$  et  $B$  appartenant à la trajectoire suivie par le point matériel repéré par le rayon vecteur  $\vec{r}$ , l'intégrale curviligne :

$$W_{AB}(\vec{f}) := \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

L'intégrale est dite curviligne car elle se calcule le long de la courbe suivie par le point matériel. Ce genre d'intégrale a déjà été rencontré au **20**.

Si le résultat du calcul de cette intégrale est positif, cela signifie que le produit scalaire ( $\vec{f} \cdot d\vec{r}$ ) a été globalement positif le long de la trajectoire : le travail réalisé par  $\vec{f}$  entre  $A$  et  $B$  sera dit moteur et cette force aura globalement agi de façon avantageuse sur le point matériel pour aller de  $A$  vers  $B$ . Si le résultat est négatif, le travail réalisé par  $\vec{f}$  sera dit résistant : globalement, cette force aura agi sur le point matériel à l'encontre de son mouvement de  $A$  vers  $B$ .

**Puissance instantanée.** L'expression du travail réalisé par une force peut prendre la forme d'une intégrale sur le temps de parcours. En effet, si la vitesse du point matériel est  $\vec{v}$ , alors le déplacement élémentaire du point matériel s'écrit :  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , de sorte que le travail élémentaire réalisé par la force  $\vec{f}$  prend la forme :  $\vec{f} \cdot \vec{v} dt$  et on a ainsi :

$$W_{AB}(\vec{f}) := \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{f} \cdot \vec{v} dt$$

La quantité  $\mathcal{P} := \vec{f} \cdot \vec{v}$  a reçu le nom de *puissance instantanée développée par la force  $\vec{f}$* . Elle exprime le travail réalisé par  $\vec{f}$  dans l'unité de temps. L'unité internationale de puissance est le watt ( $W$ ). Du point de vue dimensionnel, on a :  $[\mathcal{P}] = [F] LT^{-1} = [E] T^{-1} = ML^2T^{-3}$ .

**57. Un exemple de calcul du travail réalisé par une force.** Considérons un point matériel, repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , en mouvement dans un plan entre deux points  $A(0,0)$  et  $B(1,1)$  (figure 54) le long d'une certaine trajectoire, et supposons que la force :  $\vec{f} = K x y \vec{u}_x + K x^2 \vec{u}_y$ , où  $K$  est une constante aux dimensions appropriées, fasse partie des forces qui agissent sur ce point matériel. Attendu que  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$ , tout déplacement élémentaire de  $M$  s'écrit :  $d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$ , et le travail réalisé par  $\vec{f}$  entre  $A$  et  $B$  prend la forme :

$$W_{AB}(\vec{f}) := \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{x_A=0}^{x_B=1} K x y dx + \int_{y_A=0}^{y_B=1} K x^2 dy$$

Avant de poursuivre le calcul, il faut bien comprendre ici que les coordonnées  $(x, y)$  de  $M$  ne sont pas indépendantes : elles sont liées entre elles par l'équation de la trajectoire suivie :  $y = y(x)$  qu'il nous faut maintenant préciser.

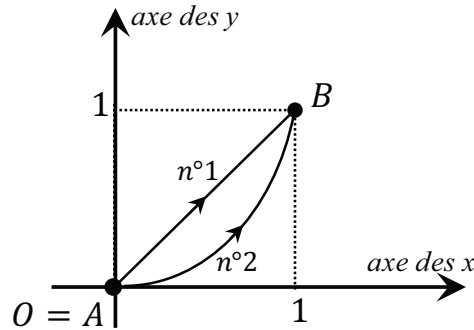


Figure 54. Les deux trajectoires suivies par le point matériel.

Dans un premier temps, admettons que le point matériel suive la trajectoire n°1 de la figure 54, c'est-à-dire la droite d'équation :  $Y = X$ . Dans ce cas, il faut prendre en compte le fait que  $y = x$  dans l'expression précédente. Ainsi, le long de cette trajectoire, on aura :

$$W_{AB}^1(\vec{f}) = \int_{x_A=0}^{x_B=1} K x^2 dx + \int_{y_A=0}^{y_B=1} K y^2 dy = K \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + K \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} K$$

Si  $K$  est positif, le travail réalisé par  $\vec{f}$  aura été moteur.

Supposons maintenant que la trajectoire du point matériel corresponde à la trajectoire n°2 de la figure 54, qui est la parabole d'équation :  $Y = X^2$ . Dans ce cas, il nous faut revenir à l'expression générale de l'intégrale à réaliser puisque les coordonnées de  $M$  satisfont cette fois à la liaison :  $y = x^2$ . Le calcul à faire maintenant est donc :

$$W_{AB}^2(\vec{f}) = \int_{x_A=0}^{x_B=1} K x^3 dx + \int_{y_A=0}^{y_B=1} K y dy = K \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + K \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4} K$$

Le travail réalisé par  $\vec{f}$  aura été moteur comme pour la trajectoire précédente, mais il n'a plus la même valeur.

Ainsi, en règle générale, le travail réalisé par une force  $\vec{f}$  quelconque dépend du chemin suivi par le point matériel.

**58. Énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique.** Considérons à nouveau un point matériel de masse  $m$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$ . On a la définition suivante :

**Énergie cinétique.** On appelle énergie cinétique du point matériel la quantité :

$$E_c := \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

L'énergie cinétique d'un point matériel est son énergie de mouvement. Cette grandeur ne dépend que de la vitesse et de l'inertie de ce point matériel.

La définition de l'énergie cinétique prend son origine dans le théorème qui suit.

**Théorème de l'énergie cinétique.** La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux points  $A$  et  $B$  de sa trajectoire est égale au travail réalisé par la résultante  $\vec{F}$  de toutes les forces qui s'appliquent sur ce point matériel entre  $A$  et  $B$  :

$$E_c(B) - E_c(A) \doteq W_{AB}(\vec{F})$$

*Démonstration* – Soit donc  $\vec{F}$  la résultante de toutes les forces appliquées au point matériel au cours de son trajet entre les deux points  $A$  et  $B$ . Appliquons le principe fondamental de la dynamique, multiplions scalairement l'équation obtenue par le déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  le long de la trajectoire du point matériel et intégrons entre deux points  $A$  et  $B$  quelconques de cette trajectoire ; on obtient :

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \doteq \int_A^B m \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Le membre de gauche de cette égalité est le travail réalisé par l'ensemble des forces appliquées au point matériel entre les points  $A$  et  $B$ . Le membre de droite peut s'écrire autrement compte tenu du fait que le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} &= W_{AB}(\vec{F}) \doteq \int_A^B m \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ &= \left[ \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right]_A^B = E_c(B) - E_c(A) \end{aligned}$$

Ce qui démontre le théorème.  $\square$

Il faut voir ce théorème comme une loi de transformation globale exprimant la transformation du travail réalisé par toutes les forces agissant sur le point matériel en une variation de l'énergie de mouvement de ce point matériel sur toute portion finie de sa trajectoire. On observera aussi qu'aucune hypothèse n'a été faite sur l'origine des forces subies par le point matériel pour établir ce théorème qui est valable quelle que soit leur nature.

**59. Applications pratiques les plus courantes du théorème de l'énergie cinétique.** Dans sa pratique, le théorème qui vient d'être établi s'utilise de deux façons : soit on sait calculer le travail réalisé par les forces mises en jeu et on en déduit la variation d'énergie cinétique qui a lieu sur telle ou telle portion de la trajectoire, soit on connaît cette variation et on en déduit le travail réalisé par ces forces.

Le premier cas peut être illustré par le problème de la chute libre verticale sans frottement étudié au **C50** : le point matériel est lâché depuis la hauteur  $H$  avec une vitesse nulle et on demande la vitesse acquise par ce point matériel lorsqu'il arrive au sol en  $O$ . Au **C50**, il nous a fallu résoudre les équations du mouvement pour obtenir la solution à ce problème. En fait, on peut ici calculer le travail réalisé par la force de pesanteur terrestre  $\vec{P} = m \vec{g}_0$  - qui est la seule force du problème - le long de la trajectoire, c'est-à-dire l'axe  $Oz$ . En appelant  $S$ , le point de départ de la trajectoire :

$$W_{SO}(\vec{P}) = \int_S^O \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{z_S=H}^{z_O=0} (-m g_0 \vec{u}_z) \cdot dz \vec{u}_z = -m g_0 [z]_H^0 = m g_0 H$$

Comme l'énergie cinétique du point matériel en  $S$  est nulle, si on appelle  $v_O$  la vitesse (sa norme) du point matériel lorsqu'il arrive en  $O$ , le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$W_{SO}(\vec{P}) \doteq E_C(O) - E_C(S) = \frac{1}{2} m v_O^2$$

D'où la valeur de  $v_O$  :

$$v_O = \sqrt{2 g_0 H}$$

En accord avec le résultat obtenu au **C50**.

Considérons maintenant le **C53** où un point matériel  $M$  de masse  $m$  est en mouvement rectiligne le long d'un axe horizontal  $Ox$  et subit l'effet d'une force de frottement fluide :  $\vec{f} = -k \vec{v}$  (seule force du problème). Ce point matériel, dont la vitesse est  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  en  $O$ , est appelé à s'arrêter - aux temps longs - en un certain point  $M_\infty$  (inconnu ici) de l'axe  $Ox$  en raison de cette force de frottement qui

s'oppose au mouvement. La différence d'énergie cinétique entre  $O$  et  $M_\infty$  est donc connue et le théorème de l'énergie cinétique permet d'évaluer ici le travail réalisé par  $\vec{f}$  au cours du mouvement :

$$W_{OM_\infty}(\vec{f}) \doteq E_C(M_\infty) - E_C(O) = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

Le calcul direct de  $W_{OM_\infty}(\vec{f})$  nécessitait quant à lui de calculer l'une ou l'autre des intégrales suivantes (la dernière faisant appel à la notion de puissance instantanée) :

$$W_{OM_\infty}(\vec{f}) = \int_0^{M_\infty} \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\alpha \int_0^{M_\infty} \vec{v} \cdot d\vec{r} = -\alpha \int_{t=0}^{t=\infty} v^2 dt$$

Ce qui demandait dans les deux cas d'intégrer l'équation de la dynamique (voir C60).

## Compléments et exercices du chapitre 12

**C60. Point matériel soumis à une force de frottement fluide.** À l'aide des résultats obtenus au C53, calculer directement le travail réalisé par la force de frottement fluide à partir de chacune des deux intégrales proposées à la fin de ce chapitre 12 et retrouver le résultat prédit par le théorème de l'énergie cinétique.

**C61. Plan incliné.** À l'aide des résultats obtenus au C51, calculer directement le travail effectué par la force de frottement  $\vec{T}'$  lors du trajet du point matériel le long du plan incliné, depuis le point  $O$  jusqu'à son arrivée au sol. En déduire la vitesse du point matériel à son arrivée au sol à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

**C62. Le pendule simple plan.** On se réfère ici au C59. La trajectoire du pendule est connue : c'est une certaine portion d'arc du cercle de centre  $O$  et de rayon  $L$ . À l'instant initial, le pendule est au point  $M_0$  de sa trajectoire correspondant à  $\theta(t=0) = \theta_0$ , avec une vitesse nulle. Attention, nous ne sommes pas dans l'approximation des petits angles dans cet exercice.

- Calculer le travail de la force de pesanteur réalisé entre cette position initiale et la position courante du point matériel à un instant donné  $t$ .
- Qu'en est-il du travail réalisé par la force de réaction (sa tension) du pendule ?
- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre ces deux positions pour en déduire une équation différentielle à laquelle doit obéir  $\theta$ .
- Dériver l'équation obtenue par rapport au temps et vérifier qu'il s'agit de l'équation différentielle pour  $\theta$  obtenue au C59.

*Nota Bene* : L'équation différentielle obtenue à l'aide du théorème de l'énergie cinétique est donc une première intégration de l'équation du mouvement fournie par la seconde loi de la dynamique (voir 65). Pour obtenir cette intégration, nous avons dû calculer le travail réalisé par les forces en présence le long de la trajectoire du point matériel qu'il fallait connaître. Or, en général, on ne la connaît pas. Avec la notion d'énergie potentielle définie au chapitre qui suit, nous éviterons cet écueil.

**C63. Forces de réaction – Forces de liaison.** Nous avons déjà eu l'occasion de parler des forces de réaction associées aux supports, et plus généralement aux liaisons imposées dans tel ou tel problème de dynamique. Les quelques exemples qui ont été traités montrent que ces forces ne sont pas connues *a priori* : on les détermine grâce aux équations de Newton écrites en utilisant les liaisons imposées. Ces forces ne sont donc pas à proprement parler des données du problème : elles sont introduites dans le bilan des forces précisément pour rendre compte de ces liaisons. En complément de la première approche effectuée au chapitre 10 à propos de ces forces, on en donne ici une définition plus précise qui implique de distinguer les deux terminologies que sont « force de liaison » et « force de réaction » :

**Forces de liaison.** *On appellera force(s) de liaison(s) associée(s) à une liaison donnée, la ou les forces qui ne servent qu'à maintenir cette liaison tout au long du mouvement considéré.*

Avec cette définition, il faut comprendre qu'une force de liaison ne peut influencer sur le mouvement du point matériel que pour le « forcer » à respecter la liaison imposée. Or, si tel est le cas, le travail élémentaire réalisé à chaque instant par une telle force de liaison  $\vec{F}_L$  au cours d'un déplacement élémentaire du point matériel ne doit donc être ni moteur, ni résistant ; il est donc forcément nul :  $\vec{F}_L \cdot d\vec{r} = 0$ .

De cette affirmation, qui découle de la définition même d'une force de liaison, *il en résulte qu'à chaque instant une force de liaison est perpendiculaire à la trajectoire suivie par le point matériel (trajectoire qui respecte la liaison imposée).*

Attention ! La définition d'une force de liaison implique bien de distinguer, au sein de ce que nous appelons couramment « les forces de réaction », d'une part les forces de liaison proprement dites (celles dont le travail élémentaire est nul) et d'autre part les *forces induites par la liaison* qui elles donnent lieu à un travail non nul et résistant. Dans le cas du plan incliné par exemple (figure 46) :  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}'$  est la force de réaction du support ;  $\vec{N}$  est la force de liaison au sens de la définition ci-dessus ;  $\vec{T}'$  est une force de frottement induite par la liaison et son travail est résistant.

**C64. Annexe 5.** Étudier l'Annexe 5 avant d'aborder le chapitre suivant.

## ÉNERGIE POTENTIELLE ET ÉNERGIE MÉCANIQUE

Dans ce chapitre, on se place dans le cadre restreint mais commun où les forces  $\vec{f}$  mises en jeu dans le problème considéré (ou une partie au moins de ces forces) ne dépendent que de la position du point matériel  $M$  sur lequel elles agissent et s'expriment comme le *gradient d'une fonction scalaire* (au signe près),  $E_p(M)$ , appelée *énergie potentielle* du point matériel<sup>1</sup> :

$$\vec{f} = \vec{f}(M) = -\vec{\nabla}E_p(M)$$

Énergie potentielle et énergie cinétique vont permettre de définir l'*énergie mécanique* du point matériel et d'en déduire le théorème qui lui est associé.

**60. Énergie potentielle.** Considérons une force  $\vec{f}$  ne dépendant que de la position du point matériel sur lequel elle agit :  $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$ . Si on admet que le travail élémentaire de cette force s'assimile, au signe près, à la différentielle d'une fonction scalaire  $E_p(M) = E_p(x, y, z)$ , on a dans ce cas l'égalité :

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

Et le travail réalisé par  $\vec{f}$  entre deux points  $A$  et  $B$  le long de la trajectoire du point matériel est :

$$W_{AB}(\vec{f}) := \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dE_p = E_p(A) - E_p(B)$$

où il faut constater qu'il n'y a pas eu besoin de préciser la trajectoire suivie : le résultat en est indépendant. Le travail réalisé par  $\vec{f}$  est connu en tant qu'il est égal à la différence des valeurs prises par  $E_p$  entre les points  $A$  et  $B$ .

D'après l'hypothèse de départ, la force  $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$  doit s'assimiler au gradient de la fonction scalaire  $E_p(M)$ , si elle existe. En effet, en vertu du lien existant entre la différentielle  $dE_p$  de la fonction  $E_p$  et son gradient<sup>1</sup>, on doit avoir :

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = -dE_p = -\vec{\nabla}E_p \cdot d\vec{r} \Leftrightarrow (\vec{f} + \vec{\nabla}E_p) \cdot d\vec{r} = 0$$

---

<sup>1</sup> Annexe 5.

Cette égalité devant être vraie quel que soit l'élément de courbe  $d\vec{r}$ , cela donne lieu à la définition suivante :

**Énergie potentielle.** On appelle énergie potentielle associée à une force  $\vec{f}(M)$ , la fonction scalaire  $E_p(M)$  qui, si elle existe, est telle que :  $\vec{f}(M) = -\vec{\nabla}E_p(M)$ . Dans ce cas, la force est dite conservative car le travail qu'elle réalise entre deux points A et B de la trajectoire suivie par un point matériel sur lequel elle agit ne dépend pas de cette trajectoire mais seulement de la différence des valeurs prises par  $E_p$  entre les points A et B.

**Précision sur le terme « potentielle ».** En présence de la force  $\vec{f}$ , la particule acquiert une certaine potentialité à modifier son état de mouvement. C'est cette potentialité que l'on veut rappeler dans le terme « énergie potentielle » : il s'agit d'une énergie emmagasinée susceptible de se transformer en énergie de mouvement au travers du théorème de l'énergie mécanique qui va suivre.

**Forces non-conservatives.** Toutes les forces ne sont pas nécessairement issues d'un gradient d'énergie potentielle. Les forces qui ne s'expriment pas comme le gradient d'une énergie potentielle sont dites non-conservatives et, en général, le travail de ces forces dépend du chemin suivi.

**Travail et énergie potentielle.** Au regard de la définition précédente, l'énergie potentielle associée à une force n'est définie qu'à une constante près. Mais peu importe cette constante que l'on peut choisir de façon arbitraire, car le travail réalisé par la force – qui est une différence d'énergie potentielle – reste le même quelle que soit cette constante.

**Nouvelle vision de ce qu'est une force.** Une force (conservative) apparaît maintenant comme le résultat d'une variation spatiale d'énergie potentielle.

**Comment savoir si une force donnée est conservative ?** En coordonnées cartésiennes, l'écriture générale d'une force ne dépendant que de la position  $(x, y, z)$  d'un point matériel est de la forme :

$$\vec{f}(M) = f_x(x, y, z) \vec{u}_x + f_y(x, y, z) \vec{u}_y + f_z(x, y, z) \vec{u}_z$$

L'équation :  $\vec{f}(M) = -\vec{\nabla}E_p(M)$ , se traduit donc par :

$$\begin{cases} f_x = -\partial E_p / \partial x \\ f_y = -\partial E_p / \partial y \\ f_z = -\partial E_p / \partial z \end{cases}$$

Or, d'après le théorème de Schwarz<sup>1</sup>, on doit avoir :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} ; \quad \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial x} ; \quad \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial y}$$

C'est-à-dire que les composantes cartésiennes  $f_x, f_y, f_z$  de  $\vec{f}$  doivent satisfaire aux relations :

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y} ; \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} ; \quad \frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z}$$

On démontre que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

À deux dimensions, seule la condition :  $\partial f_y / \partial x = \partial f_x / \partial y$  a lieu d'être. On vérifiera par exemple que la force utilisée au 57 ne satisfait pas à cette condition.

Pour les autres systèmes de coordonnées, le principe d'existence de  $E_p$  repose sur la même analyse *modulo* l'écriture du gradient de  $E_p$  : par exemple, en coordonnées polaires<sup>2</sup> :

$$\vec{\nabla} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

Il faudra donc, si on a posé :  $\vec{f}(M) = f_r(r, \theta) \vec{u}_r + f_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$  :

$$\frac{\partial f_r}{\partial \theta} = \frac{\partial (r f_\theta)}{\partial r}$$

**61. Énergie mécanique et théorème de l'énergie mécanique.** Supposons que chacune des forces  $\vec{f}_i$  qui agissent sur un point matériel dérive d'une certaine énergie potentielle  $E_{p,i}$ . Soit alors  $E_p$  l'énergie potentielle totale associée au point matériel :

$$E_p := \sum_i E_{p,i}$$

On a la définition suivante :

**Énergie mécanique.** On appelle énergie mécanique  $E_m$  du point matériel la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle totale :  $E_m := E_c + E_p$

<sup>1</sup> Théorème de Schwarz : les dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction  $f$  de plusieurs variables ne dépendent pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation par rapport aux variables concernées, à condition que la fonction  $f$  soit dérivable deux fois pour chacune de ces variables. Ce théorème se généralise aux dérivées d'ordre supérieur.

<sup>2</sup> Annexe 5.

Avec cette définition, on peut énoncer le théorème qui suit :

***Théorème de l'énergie mécanique.*** *L'énergie mécanique d'un point matériel qui n'est soumis qu'à des forces conservatives est une constante du mouvement.*

*Démonstration* – Puisque toutes les forces du problème envisagé sont conservatives, on peut écrire le théorème de l'énergie cinétique sous la forme :

$$E_c(B) - E_c(A) \doteq \sum_i W_{AB}(\vec{f}_i) = \sum_i [E_{p,i}(A) - E_{p,i}(B)] = E_p(A) - E_p(B)$$

ce qui se réécrit :

$$E_c(B) + E_p(B) \doteq E_c(A) + E_p(A)$$

Ce résultat exprime que l'énergie mécanique du point matériel en  $A$  est la même qu'en  $B$ . Or, ces deux points sont choisis de façon arbitraire le long de la trajectoire : il s'ensuit qu'en tout point de la trajectoire, l'énergie mécanique reste la même.  $\square$

***Remarque.*** Lorsqu'une partie seulement des forces qui agissent sur le point matériel sont conservatives, on peut encore définir l'énergie mécanique de ce point matériel à l'aide de ces seules forces conservatives. Mais alors, l'énergie mécanique de ce point matériel ne sera pas constante tout au long du mouvement : sa différence entre deux points  $A$  et  $B$  de la trajectoire sera égale au travail réalisé par les forces non conservatives. La démonstration est laissée au lecteur.

**62. Transformation de l'énergie : exemple du ressort vertical.** Le théorème précédent exprime donc que l'énergie mécanique se conserve si toutes les forces du problème s'identifient à un gradient d'énergie potentielle (au signe près). Mais il montre aussi que cette conservation est sous-tendue par des transformations énergétiques internes. Pour bien le voir, on étudie ici le cas d'un ressort vertical de masse négligeable, de constante de raideur  $k$ , de longueur à vide  $L_v$ , au bout duquel est accroché une bille de masse  $m$  assimilable à un point matériel (figure 43). Le dispositif est conçu pour que seul un mouvement vertical de la bille soit possible et pour que les éventuels frottements soient négligeables. Le référentiel galiléen sera ici la verticale du lieu de l'expérience qui est orienté vers le bas (axe  $Oz$ ) et le plan du sol  $xOy$ . L'origine du référentiel est choisie à l'extrémité haute du ressort.

Les conditions initiales sont choisies de telle sorte qu'au temps  $t = 0$  la bille est à la position  $z_0 > L_v$  avec une vitesse nulle.

Les forces en présence et les vecteurs vitesse et accélération de la bille s'écrivent :

- Poids de la bille :  $\vec{P} = m\vec{g}_0 = mg_0 \vec{u}_z$ .

- *Force élastique du ressort* :  $\vec{F}_{\text{él}} = -k (z - L_v) \vec{u}_z$  où  $z$  est la longueur du ressort lorsque la bille est accrochée et correspond à la position de la bille sur l'axe  $Oz$ .
- *Position de la bille* : le rayon vecteur représentant la position de la bille s'écrit :  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = z \vec{u}_z$ .
- *Vecteurs vitesse et accélération de la bille* :  $\vec{v} = \dot{z} \vec{u}_z$  et  $\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$ .

Compte tenu de ces données, l'équation de la dynamique s'écrit ici :

$$m \vec{a} \doteq \vec{P} + \vec{F}_{\text{él}}$$

Ce qui donne lieu à l'équation du mouvement le long de l'axe  $Oz$  :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = g_0 + \frac{k}{m} L_v$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre en  $z$ , linéaire, à coefficients constants et avec second membre, s'écrit, compte tenu des conditions initiales et en posant :  $\omega = \sqrt{k/m}$  :

$$z(t) = \frac{g_0}{\omega^2} + L_v + \left( z_0 - L_v - \frac{g_0}{\omega^2} \right) \cos \omega t$$

La bille effectue donc un mouvement sinusoïdal à la pulsation  $\omega$  le long de l'axe  $Oz$  autour de la position :  $g_0/\omega^2 + L_v$ , qui est en fait la position d'équilibre de la bille (C55).

Il faut examiner maintenant les différentes énergies mises en jeu dans le problème. On obtient facilement l'énergie cinétique de la bille en dérivant le résultat ci-dessus pour obtenir sa vitesse  $\vec{v}(t)$  à chaque instant, et ainsi :

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \doteq \frac{1}{2} m \omega^2 \left( z_0 - L_v - \frac{g_0}{\omega^2} \right)^2 \sin^2 \omega t$$

On vérifie ensuite que le poids de la bille est le gradient (au signe près) de l'énergie potentielle de gravitation (C65) :

$$E_{p,grav} = -m g_0 z + C_1$$

De même, l'énergie potentielle élastique est (C67) :

$$E_{p,él} = \frac{1}{2} k (z - L_v)^2 + C_2$$

Les deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  peuvent être choisies arbitrairement. Par souci de simplicité, on peut les choisir pour que les énergies potentielles gravifique et élastique s'annulent en un même endroit de l'axe  $Oz$ , par exemple pour  $z = L_v$ . Ce qui implique dans ce cas :  $C_1 = m g_0 L_v$  et  $C_2 = 0$ . D'où, après avoir remplacé  $z$  par sa valeur en fonction du temps :

$$E_{p,grav} \doteq - m g_0 \left[ \frac{g_0}{\omega^2} + \left( z_0 - L_v - \frac{g_0}{\omega^2} \right) \cos \omega t \right]$$

et

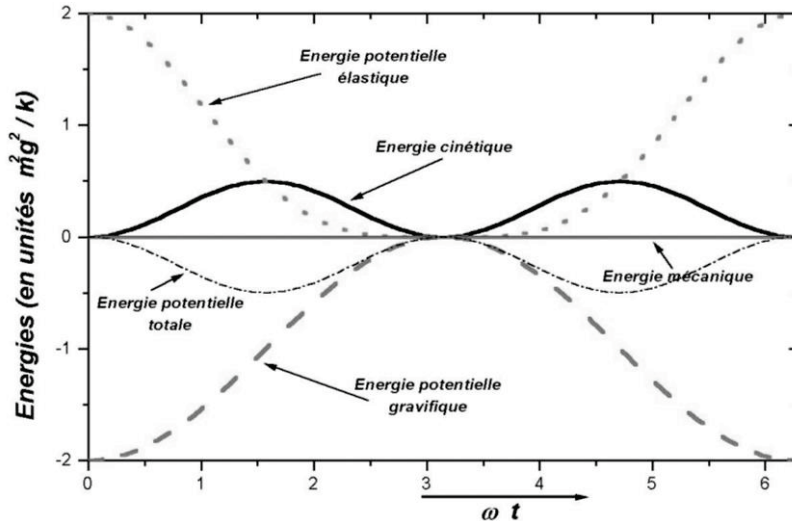
$$E_{p,él} \doteq \frac{1}{2} k \left( \frac{g_0}{\omega^2} + \left( z_0 - L_v - \frac{g_0}{\omega^2} \right) \cos \omega t \right)^2$$

L'énergie mécanique du problème est la somme de l'énergie cinétique de la bille et de son énergie potentielle totale (gravifique et élastique). On vérifie aisément que la somme de ces trois énergies donne bien lieu à une valeur constante au cours du temps comme prévu par le théorème. On trouve en effet :

$$E_m = E_c + E_{p,grav} + E_{p,él} \doteq \frac{1}{2} k (z_0 - L_v) \left( z_0 - L_v - 2 \frac{m g_0}{k} \right) = Cte$$

Le figure 55 montre comment chacune de ces 3 contributions à l'énergie mécanique évoluent dans le temps en se transformant l'une l'autre, leur somme restant constante. La situation est donnée ici pour le choix particulier :  $z_0 = L_v + 2 m g_0 / k$ , ce qui donne une valeur de l'énergie mécanique constamment nulle (cette valeur est arbitraire : le choix de prendre une valeur nulle est un pur souci de simplicité des calculs).

On observe que la périodicité du mouvement entraîne une périodicité dans les valeurs que prennent les différentes énergies.



**Figure 55.** La transformation permanente des différentes formes d'énergie au cours du mouvement se réalise en maintenant constante l'énergie mécanique du système (exemple du ressort vertical).

On observe également que lorsque l'énergie potentielle élastique est à son maximum, l'énergie potentielle de gravité est à son minimum : l'énergie potentielle élastique est à ce moment-là le moteur du mouvement (et inversement lorsque c'est l'énergie potentielle de gravité qui est maximale).

La somme des deux énergies potentielles produit la courbe inverse de l'énergie cinétique : il y a constamment échange entre énergie potentielle globale et énergie cinétique.

Cet exemple est un cas idéal : en réalité, le mouvement de la bille va en diminuant jusqu'à s'arrêter au bout d'un temps plus ou moins long en raison des « frottements » divers que nous avons négligés. Si nous avions inclus ces frottements dans l'analyse, nous aurions trouvé que l'énergie mécanique<sup>1</sup> de la bille ne se conserve pas et qu'elle diminue au fur et à mesure que le temps s'écoule en raison de la présence de ces forces de frottement qui exercent un travail (souvent non conservatif) résistant. Mais, en allant plus loin dans le raisonnement, il faut aussi constater que ces forces de frottement qui naissent sous l'effet du mouvement de la bille ont pour conséquence de faire s'échauffer une partie du système (le ressort ici, ainsi que l'air ambiant). La *thermodynamique* a suggéré que cet échauffement traduit la création d'une énergie de nature thermique qui compense exactement la perte d'énergie mécanique. Ainsi, si l'on tient compte de cette énergie thermique dans le bilan énergétique, la conservation de l'énergie a donc bien lieu pourvu que l'on prenne en compte toutes les formes d'énergies impliquées dans le mouvement envisagé. *L'énergie totale d'un système isolé garde une valeur constante quelles soient les transformations qui se produisent dans ce système.*

On affuble aujourd'hui systématiquement le terme énergie d'un qualificatif indiquant la nature du processus mis en cause : énergie cinétique pour le mouvement, énergie (potentielle) gravitationnelle pour l'interaction gravitationnelle entre les corps, mais aussi énergie hydraulique pour exprimer le fait que la source d'énergie est l'eau, énergie solaire, énergie nucléaire, etc...

**63. Problèmes de dynamique à une dimension ou à un degré de liberté.** Les problèmes de dynamique unidimensionnelle, c'est-à-dire les problèmes où le mouvement n'a lieu que le long d'un axe – que nous appellerons ici l'axe  $Ox$  – sont particuliers. D'une part, la trajectoire est déjà connue : c'est l'axe  $Ox$  lui-même ou une portion de cet axe, et la question que l'on se pose est de savoir comment sera parcourue cette (portion de) droite au cours du temps, c'est-à-dire : trouver  $x(t)$ . D'autre part, quelles que soient les forces envisagées (supposées ne dépendre que de

---

<sup>1</sup> Définie ici comme la somme de l'énergie cinétique du point matériel et de l'énergie potentielle totale des forces conservatives qui agissent sur ce point matériel.

la position  $x$  du point matériel) celles-ci dérivent automatiquement d'une énergie potentielle ; car à une dimension, l'équation :  $\vec{f}(M) = -\vec{\nabla}E_p(M)$ , se traduit par :

$$f_x(x) = -dE_p(x)/dx \Leftrightarrow E_p(x) = -\int f_x(x) dx$$

L'énergie potentielle est donc une primitive de la fonction  $f_x(x)$  au signe près. Or, on sait que si la fonction  $f_x(x)$  est suffisamment régulière (disons continue par morceaux) sa primitive existe toujours.

On généralise facilement ces particularités aux cas où le problème de dynamique ne comporte qu'une seule inconnue, comme celui du pendule simple plan : la longueur  $L$  du pendule est un paramètre connu et l'angle  $\theta$  que fait le pendule avec la verticale du lieu suffit pour déterminer la position du point matériel. La trajectoire du pendule est un cercle de rayon  $L$  (ou une portion de ce cercle) et on cherche alors à connaître  $\theta(t)$ .

Dans ce cas aussi, les forces ne dépendant que de la seule variable  $\theta$  dérivent toutes d'une énergie potentielle  $E_p(\theta)$ . On dit de ce genre de problème qu'il est à un seul *degré de liberté*.

L'équation du mouvement pour ces problèmes prend toujours une forme similaire. Si on s'en tient au mouvement d'un point matériel le long d'un axe  $Ox$  sous l'effet de la force :  $\vec{f} = f_x(x) \vec{u}_x$ , elle s'écrira :

$$m \ddot{x} \doteq f_x(x)$$

Avant d'entamer la résolution mathématique de cette équation différentielle, il est plus judicieux d'avoir recours au théorème de la conservation de l'énergie mécanique qui permet d'envisager une solution graphique semi-quantitative au travers de l'analyse qui suit<sup>1</sup>.

Pour le cas de notre point matériel sur l'axe  $Ox$ , on peut écrire son énergie cinétique facilement :  $E_c = m \dot{x}^2/2$ . Quant à son énergie potentielle  $E_p(x)$ , elle est une primitive de  $f_x(x)$  au signe près, supposée connue. L'énergie mécanique, constante du mouvement, s'écrit donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x) \doteq Cte = E$$

Dans cette relation, on peut isoler le terme représentant l'énergie cinétique qui ne peut être que positif :

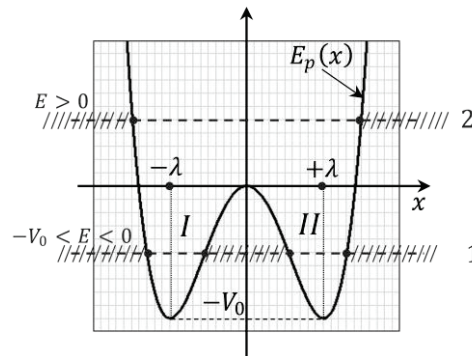
$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E_m - E_p(x) \doteq E - E_p(x) \geq 0$$

---

<sup>1</sup> Nous verrons au 65 que le théorème de l'énergie mécanique n'est rien d'autre qu'une première intégration de l'équation du mouvement.

Il est donc nécessaire que l'énergie mécanique du point matériel soit toujours supérieure ou égale à son énergie potentielle. Si ça n'était pas le cas, le mouvement serait impossible puisqu'il donnerait lieu à une énergie cinétique négative. Cette remarque a pour conséquence la possibilité d'obtenir une solution graphique au problème du mouvement du point matériel : sur un graphe représentant la fonction  $E_p = E_p(x)$ , l'énergie mécanique, puisqu'elle est constante, apparaît comme une droite parallèle à l'axe  $Ox$  située à une certaine hauteur le long de l'axe des énergies qui correspond à sa valeur initiale  $E$  (c'est une donnée du problème, un paramètre qui dépend des conditions initiales, que l'on peut modifier à sa guise). On distinguera alors clairement sur ce graphe, les zones de l'axe  $Ox$  accessibles ou inaccessibles au point matériel selon la valeur de  $E$ , et on pourra en tirer quelques renseignements quantitatifs ainsi que va le montrer l'exemple détaillé qui suit, dont le sens physique est relié à la question générale des systèmes à deux états<sup>1</sup>.

**64. Un exemple à une dimension de l'utilisation d'une courbe d'énergie potentielle et du théorème de l'énergie mécanique.** Le système est ici une particule se déplaçant le long de l'axe  $Ox$ , soumise à une barrière d'énergie potentielle séparant deux cuvettes (figure 56). La particule, selon les valeurs de son énergie mécanique initiale, peut rester soit dans la zone  $I$ , soit dans la zone  $II$ , soit couvrir les deux zones. La hauteur de la barrière ( $V_0$  ici) joue un rôle certain pour classer ces possibilités. Le cas classique étudié ici prédit que si la particule est dans la zone  $I$  à l'instant  $t = 0$  avec une énergie mécanique  $E < V_0$ , alors il n'y a aucune chance de l'observer un jour dans la zone  $II$ .



**Figure 56.** La courbe d'énergie potentielle  $E_p(x)$  que subit le point matériel le long de l'axe  $Ox$  et les situations typiques rencontrées selon la valeur de l'énergie mécanique  $E$  dont dispose le point matériel. Les zones hachurées sont des zones interdites pour le mouvement car cela donnerait lieu à une énergie cinétique négative. La mécanique quantique autorise la particule à « traverser » ces zones.

<sup>1</sup> Il peut s'agir de deux états dynamiques comme ici, mais aussi d'états de moments cinétiques (spin en particulier) ou encore de phases thermodynamiques, etc...

Pour ces mêmes conditions initiales, la mécanique quantique prédit quant à elle que la particule est malgré tout susceptible de « traverser » la barrière, c'est-à-dire qu'il y a une certaine probabilité de l'observer dans la zone II : c'est l'effet tunnel, utilisé aujourd'hui couramment (par exemple, les microscopes à effet tunnel développés dans les années 1980).

Admettons donc que le point matériel soit soumis à une force  $\vec{f}$  dont l'énergie potentielle associée s'écrit<sup>1</sup> :

$$E_p(x) = \frac{2V_0}{\lambda^2} \left( \frac{x^4}{2\lambda^2} - x^2 \right)$$

où  $V_0$  et  $\lambda$  sont deux paramètres positifs non nuls. Un examen de  $E_p(x)$  montre que cette fonction diverge lorsque  $x$  tend vers  $\pm \infty$  et qu'elle s'annule pour  $x = 0$  ainsi que pour  $x = \pm \lambda \sqrt{2}$ . Sa dérivée,  $dE_p/dx$ , est au signe près la composante  $f_x$  de  $\vec{f}$  puisque :

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}E_p = -\frac{dE_p}{dx} \vec{u}_x = -\frac{4V_0}{\lambda^2} \left( \frac{x^3}{\lambda^2} - x \right) \vec{u}_x = f_x(x) \vec{u}_x$$

Cette dérivée s'annule en  $x = 0$  ainsi qu'en  $x = \pm \lambda$ , et les valeurs de  $E_p$  en ces 3 extrema sont respectivement : 0,  $-V_0$  et à nouveau  $-V_0$ . On déduit de cette brève étude le graphe de  $E_p$  reproduit sur la figure 56. On interprète également les deux paramètres du problème :  $\lambda$  est la distance pour laquelle l'énergie potentielle prend sa valeur minimale égale à  $-V_0$ .

Sur ce graphe, on est maintenant amené à tracer les droites correspondant à l'énergie mécanique  $E$  attribuée au point matériel. On remarque d'abord que ce paramètre ne peut pas être inférieur à  $-V_0$  en raison de la condition  $E \geq E_p(x)$  : les valeurs possibles de  $E$  appartiennent donc à l'intervalle  $[-V_0, +\infty[$ .

Au sein de ce domaine de valeurs possibles, on recense ensuite deux situations typiques qui sont déterminées par le nombre de fois où la droite  $E_m = E$  intersecte la courbe  $E_p(x)$ . Dans le cas n°1 où  $E$  est compris dans l'intervalle  $]-V_0, 0[$  on observe 4 intersections (figure 56). Le cas n°2 quant à lui ne compte que 2 intersections et correspond à une énergie mécanique appartenant à l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Ces deux situations typiques sont séparées par le cas spécial où  $E = 0$ . Enfin, le cas où  $E = -V_0$  doit également être discuté à part.

<sup>1</sup> La fonction  $E_p$  proposée ici est une bonne modélisation de l'énergie potentielle que subit l'atome d'azote dans la molécule  $NH_3$  : cet atome peut se trouver soit au-dessous (zone 1) du plan de base  $yOz$  formé par les trois atomes d'hydrogène, soit au-dessus (zone 2), avec une certaine probabilité de transit d'une zone à l'autre qui dépend de la hauteur et de la largeur de la barrière en mécanique quantique.

Démarrons la discussion par le cas n°2 pour lequel  $E > 0$ . Les zones hachurées sur la figure 57 sont les zones inaccessibles au point matériel : il évolue sur l'axe  $Ox$  entre les deux points d'intersection notés  $X_+$  et  $X_-$ . Il est possible de connaître leurs positions pour une valeur de  $E$  donnée. En effet, pour ces points dont la position encore inconnue sera notée  $X$ , on a :  $E = E_p(X)$ , ce qui conduit à l'équation bicarrée :

$$\frac{X^4}{2\lambda^2} - X^2 - \frac{E\lambda^2}{2V_0} = 0$$

Les solutions à cette équation sont a priori :

$$X^2 = \lambda^2 \left[ 1 \pm \sqrt{1 + E/V_0} \right]$$

Comme  $E > 0$  dans ce cas n°2, il nous faut éliminer le signe « - » des solutions possibles qui donnerait lieu à des valeurs complexes de  $X$ , inacceptables physiquement. On obtient ainsi deux solutions  $X_+$  et  $X_-$  correspondant à nos deux points d'intersections :

$$X_{\pm} = \pm \lambda \sqrt{1 + \sqrt{1 + E/V_0}}$$

L'énergie cinétique du point matériel est nulle lorsqu'il est en  $X_+$  ou en  $X_-$  puisque  $E_c = E - E_p(X_{\pm}) = 0$ . Lorsqu'il évolue entre  $X_+$  et  $X_-$ , cette énergie cinétique est visible sur le graphique : à la position  $x$  on a :  $E_c = E - E_p(x)$ . Elle est maximale lorsque  $M$  passe par les minima de  $E_p$  tandis qu'elle est minimale lorsque  $M$  passe par le maximum de  $E_p$ . Le point matériel parcourt donc l'axe  $Ox$  en faisant des allers et retours entre  $X_-$  et  $X_+$  avec des phases d'accélération et de décélération.

Dans le cas n°1, l'énergie mécanique initiale du point matériel est cette fois comprise dans l'intervalle  $]-V_0, 0[$ . Pour déterminer les 4 points d'intersections (figure 58), il faut chercher les solutions à l'équation  $E = E_p(X)$  qui donne encore lieu à l'équation bicarrée précédente. La différence cette fois est que toutes les solutions sont acceptables lorsque  $E$  évolue dans l'intervalle  $]-V_0, 0[$ . Les quatre positions cherchées sont donc :

$$X_1 = -\lambda \sqrt{1 + \sqrt{1 + E/V_0}} \quad ; \quad X_2 = -\lambda \sqrt{1 - \sqrt{1 + E/V_0}}$$

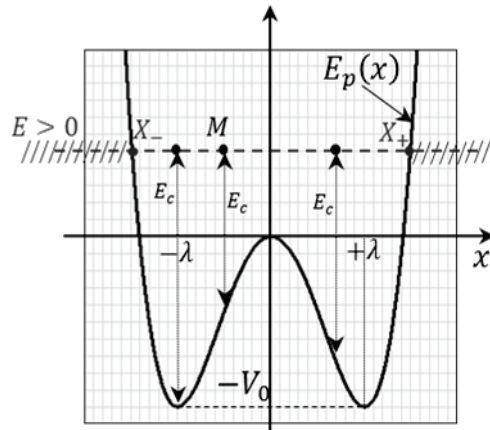


Figure 57. Discussion du cas n°2 :  $E > 0$  (voir texte).

$$X_3 = +\lambda \sqrt{1 - \sqrt{1 + E/V_0}} \quad ; \quad X_4 = +\lambda \sqrt{1 + \sqrt{1 + E/V_0}}$$

Une zone interdite sépare les deux domaines possibles  $[X_1, X_2]$  (zone I) et  $[X_3, X_4]$  (zone II) au sein desquels le point  $M$  peut évoluer. Ainsi, avec la même énergie mécanique, le point  $M$  évolue soit dans l'intervalle  $[X_1, X_2]$  le long de l'axe  $Ox$  : il oscille alors autour du minimum de l'énergie potentielle situé en  $-\lambda$  ; soit dans l'intervalle  $[X_3, X_4]$  où il oscille autour du minimum de  $E_p$  situé en  $+\lambda$ . Cela dépend de la position initiale du point  $M$ . On peut faire par soi-même une analyse sommaire de l'énergie cinétique du point  $M$  lors de ce mouvement oscillant.

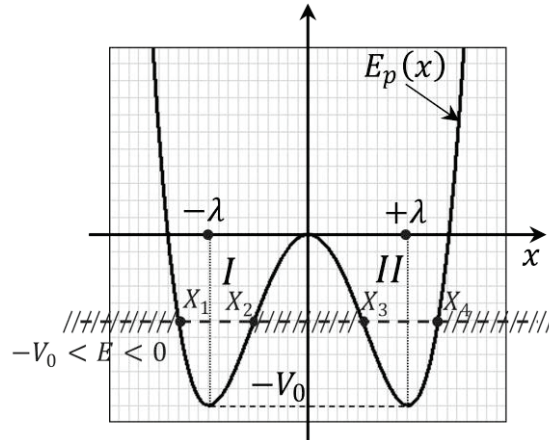


Figure 58. Discussion du cas n°1 :  $-V_0 < E < 0$  (voir texte).

Pour le cas spécial où  $E = -V_0$ , chacun des deux intervalles précédents se réduit à un seul point :  $X = -\lambda$  ou  $X = +\lambda$  (figure 59). Le point  $M$  doit donc être immobile, soit à la position  $-\lambda$ , soit à la position  $+\lambda$ . On vérifie que l'énergie cinétique de  $M$  est bien nulle pour cette valeur de  $E$  :  $E_c = E - E_p(\pm\lambda) = -V_0 + V_0 = 0$ . Ces deux

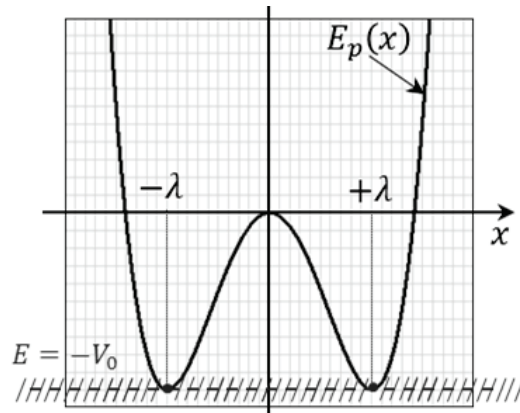


Figure 59. Discussion du cas spécial :  $E = -V_0$  (voir texte).

positions sont donc des positions d'équilibre (stable selon les critères du prochain chapitre).

Enfin, il s'agit maintenant de discuter du cas subtil où  $E = 0$  (figure 60). Les deux intervalles  $[X_1, X_2]$  et  $[X_3, X_4]$  deviennent ici  $[-\lambda\sqrt{2}, 0]$  et  $[0, +\lambda\sqrt{2}]$ . Il semble que l'on puisse réunir ces deux intervalles en un seul, qui serait  $[-\lambda\sqrt{2}, +\lambda\sqrt{2}]$ , et dire que le point  $M$  parcourt tout cet intervalle. En fait, une analyse plus approfondie dément cette affirmation car on peut montrer que si le point  $M$  se situe dans l'un ou l'autre des deux intervalles précédents, alors il atteint la position  $x = 0$  avec une vitesse et une accélération nulles.

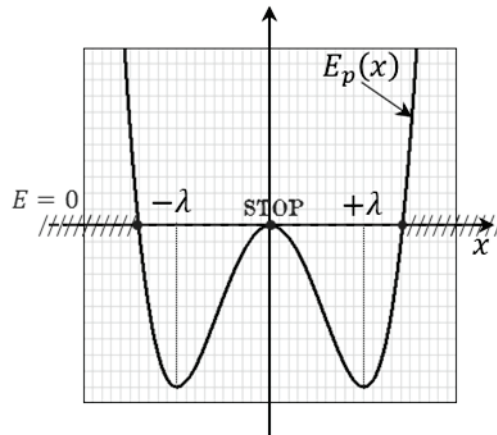


Figure 60. Discussion du cas spécial :  $E = 0$  (voir texte).

En effet, lorsque  $E = 0$ , on a  $E_c = -E_p$ . La valeur de l'énergie cinétique du point  $M$  lorsqu'il est à la position  $x$  dans l'un ou l'autre des deux intervalles est donc :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \doteq \frac{2 V_0}{\lambda^2} \left( x^2 - \frac{x^4}{2 \lambda^2} \right)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, puis en la simplifiant par  $\dot{x}$ , on obtient la loi de la dynamique du problème :

$$m \ddot{x} \doteq \frac{4 V_0}{\lambda^2} \left( x - \frac{x^3}{\lambda^2} \right) = f_x(x)$$

À partir de ces deux résultats on conclut que lorsque  $M$  est en  $x = 0$ , sa vitesse et son accélération sont bien nulles. Mais alors, il s'ensuit forcément que  $M$  est au repos en  $x = 0$  et ne subit aucune force. Ainsi, lorsque  $E = 0$ , le point  $M$ , s'il est situé au départ à une position quelconque dans l'intervalle  $[-\lambda\sqrt{2}, 0]$ , finira par s'immobiliser en  $x = 0$  et ne transitera jamais vers l'intervalle symétrique  $[0, +\lambda\sqrt{2}]$  (et vice versa). En fait, on pourrait démontrer que le point  $M$  prend un temps infini pour aller se stabiliser en  $x = 0$ .

Enfin, si le point  $M$  est en  $x = 0$  à l'instant initial, il reste immobile en ce point qui est donc un point d'équilibre. On montre au chapitre suivant pourquoi cet équilibre est qualifié d'instable.

**Conclusions générales.** La discussion qui précède comporte des résultats propres à l'exemple choisi. Mais ces résultats ont été obtenus selon une méthodologie commune à toutes les fonctions  $E_p(x)$  que l'on aura souhaité étudier. Ainsi, on a le théorème suivant :

**Théorème.** *Dans un problème à un degré de liberté, l'énergie mécanique du point matériel est toujours supérieure à la valeur minimale de l'énergie potentielle.*

*Démonstration :* Soit  $E_{p,min}$  la valeur minimale de l'énergie potentielle. Puisque le mouvement n'est possible que lorsque  $E \geq E_p(x)$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle parcouru par le point  $M$  le long de l'axe  $Ox$  (c'est-à-dire  $E_c \geq 0$ ), il s'ensuit automatiquement que si  $E < E_{p,min}$  cet intervalle se réduit à l'ensemble vide. Donc, pour que le mouvement soit possible, il faut  $E \geq E_{p,min}$ .  $\square$

De même, le recensement des points d'intersections entre la droite  $E_m = E$  et la courbe  $E_p(x)$  amènera systématiquement à distinguer les différents domaines de valeurs de l'énergie mécanique pour lesquels tel ou tel type de mouvement aura lieu. La position  $X$  de ces points d'intersection sera toujours donnée en fonction de  $E$  par l'équation  $E = E_p(X)$  puisqu'en ces points  $E_c = 0$ .

Enfin, les maxima et minima de la fonction  $E_p(x)$  sont toujours des positions d'équilibre ainsi qu'on le démontre dans le chapitre suivant. Les valeurs  $E_{p,max}$  et  $E_{p,min}$  en ces points font toujours office de cas limites qui séparent les différents domaines de valeurs de  $E$ . Lorsque  $E = E_{p,min}$ , le point  $M$  n'a pas d'autre choix que de rester immobile à la position du minimum. Lorsque  $E = E_{p,max}$ , le point  $M$  atteindra la position du maximum en un temps infini pour s'y stabiliser s'il n'y était pas déjà à l'instant initial.

Enfin, si on peut tirer quelques renseignements quantitatifs de ce genre d'analyse, comme ici les positions des points d'équilibre, des points d'intersection et des domaines en énergie donnant lieu à des mouvements différents du point matériel, il reste que la description de ces mouvements est qualitative : on ne connaîtra pas par cette méthode la ou les fréquences d'oscillation, ni la nature exacte du mouvement. Pour connaître ces détails quantitatifs la résolution des équations du mouvement devient nécessaire.

Cette méthode peut aussi s'utiliser dans certains problèmes à 2 voire à 3 dimensions. L'étude du mouvement d'un point matériel sous l'effet de forces centrales en est un

cas typique (C80 et chapitre 17). D'autres cas où le point matériel subit certaines liaisons se prêtent également à la méthode (C81).

**65. L'énergie mécanique en tant qu'intégrale première obtenue le long de la trajectoire.** On redémontre ici de façon plus directe le théorème de l'énergie mécanique afin de voir clairement que ce théorème est obtenu en intégrant une première fois l'équation du mouvement d'un point matériel projetée le long de sa trajectoire. Ce faisant, on est amené à définir la notion d'intégrale première.

L'hypothèse est que la résultante  $\vec{F}(M)$  des forces qui agissent sur le point matériel est le gradient, toujours au signe près, d'une certaine énergie potentielle totale  $E_p(M)$  :  $\vec{F}(M) = -\vec{\nabla}E_p(M)$ . La loi de la dynamique pour ce point matériel s'écrit, si  $\vec{a}$  est son accélération :

$$m \vec{a} = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + m \frac{v^2}{R} \vec{n} \doteq \vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$$

où  $\vec{\tau}$  et  $\vec{n}$  sont deux des vecteurs unitaires de la base  $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$  de Serret-Frenet et  $R$  le rayon de courbure de la trajectoire du point matériel (chapitre 6). En projetant cette équation sur le vecteur  $\vec{\tau}$  tangent à cette trajectoire, on obtient :

$$m \frac{dv}{dt} \doteq -\vec{\nabla}E_p \cdot \vec{\tau}$$

Soit, en remplaçant  $\vec{\tau}$  par sa définition,  $\vec{\tau} := \vec{v}/v$  :

$$m v \frac{dv}{dt} \doteq -\vec{\nabla}E_p \cdot \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}E_p \cdot \vec{dr}}{dt} \Leftrightarrow m v dv \doteq -\vec{\nabla}E_p \cdot \vec{dr}$$

Et en intégrant une fois l'équation qui en résulte :

$$\int m v dv \doteq -\int \vec{\nabla}E_p \cdot \vec{dr} = -\int dE_p \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + E_p \doteq Cte = E \quad \square$$

On dit donc de l'énergie mécanique  $E$  qu'elle est une *intégrale première* du problème obtenue le long de la trajectoire du point matériel.

De façon générale, on définira une intégrale première de la façon suivante :

**Intégrale première.** On appelle *intégrale première* associée au mouvement d'un point matériel toute grandeur physique  $I = I(\vec{r}, \vec{v}, t)$  dont la valeur sur les trajectoires possibles du point matériel reste constante au cours du temps :

$$I(\vec{r}, \vec{v}, t) \text{ intégrale première} \Leftrightarrow dI/dt \doteq 0 \quad \forall t$$

**Équation paramétrique de la trajectoire dans le cas à un seul degré de liberté.** Le théorème de l'énergie mécanique se comprend aussi comme le fait d'avoir pu obtenir la norme du vecteur vitesse du point  $M$  en fonction de sa position :

$$E_c(M) \doteq E - E_p(M) \Leftrightarrow v^2 \doteq \frac{2}{m} (E - E_p(M))$$

C'est-à-dire, en coordonnées cartésiennes par exemple :

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \doteq \frac{2}{m} (E - E_p(x, y, z))$$

On voit qu'il s'agit là d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 en  $x, y, z$ . Il est rare que l'on puisse intégrer une nouvelle fois cette seule équation pour obtenir  $\vec{r}(x, y, z)$  en fonction du temps et d'avoir ainsi résolu le problème. Cela n'est guère possible qu'à une dimension, ou encore à un seul degré de liberté, puisqu'alors la vitesse ne dépend plus que d'une seule inconnue. On peut écrire dans ce cas :

$$\dot{x}^2 \doteq \frac{2}{m} (E - E_p(x)) \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} \doteq \pm \sqrt{2(E - E_p(x))/m}$$

C'est-à-dire, après avoir séparé parties temporelles et parties spatiales :

$$dt \doteq \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x))}}$$

À supposer que l'on intègre sur un intervalle de temps où  $\dot{x} > 0$ , on a ainsi :

$$\int_{t_0}^t dt = t - t_0 \doteq \int_{x_0=x(t_0)}^{x=x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_p(x))}}$$

De cette façon, si on sait trouver une primitive de la fonction  $(E - E_p(x))^{-1/2}$ , on obtient  $t(x)$  et il ne reste plus qu'à inverser le résultat pour obtenir  $x(t)$ .

### 66. Énergie mécanique, conditions initiales et hypersurfaces isoénergétiques.

L'énergie mécanique, lorsque les forces du problème sont toutes issues d'une énergie potentielle globale  $E_p(M)$ , reste donc constante tout au long du mouvement. En conséquence, elle prend la valeur qu'elle a à l'instant initial et s'avère être une fonction des valeurs initiales (indiquées par 0) de la position et de la vitesse du point matériel. En coordonnées cartésiennes, on a ainsi :

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + E_p(x_0, y_0, z_0)$$

De cette relation, on peut tirer *a priori* l'une des 6 valeurs initiales en fonction de  $E$  et des 5 autres. Ce faisant,  $E$  est comprise comme une condition initiale comme une autre.

**Hypersurfaces isoénergétiques.** Mieux, on peut aussi considérer l'énergie mécanique du problème comme une fonction scalaire des 6 grandeurs cinématiques que sont la position et la vitesse du point matériel  $M$  à chaque instant ; c'est-à-dire, toujours avec l'exemple des coordonnées cartésiennes :

$$E_m = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + E_p(x, y, z) = E_m(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z)$$

Or, le théorème de l'énergie mécanique stipule que cette grandeur est une intégrale première tout au long du mouvement. Imaginons alors pouvoir tracer  $E_m$  en fonction de ces 6 variables : on conclut que le mouvement du point matériel a lieu sur une équipotentielle de la fonction scalaire  $E_m$  (annexe 5), c'est-à-dire ici sur une hypersurface d'énergie constante dont l'équation est :

$$E_m(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) = E$$

Pour un problème à un degré de liberté (une seule variable de position), ces hypersurfaces isoénergétiques sont des courbes. En traçant un certain nombre de ces courbes dans le plan  $(x, \dot{x})$ , on dit que l'on a construit le *portrait de phases* du problème. Il est d'une aide précieuse en vue du classement des différents types de trajectoires observables selon les différentes valeurs du paramètre  $E$ .

En outre, chaque point du plan  $(x, \dot{x})$  peut aussi faire office de position et vitesse initiales. Ainsi, la courbe isoénergétique  $E_m(\dot{x}, x, ) = E$  recense toutes les valeurs initiales de la position et de la vitesse du point matériel qui donnent lieu à une même énergie. Il y en a une infinité qui sont visualisables via le graphe  $E_m(\dot{x}, x, ) = E$ . Le portrait de phases de l'oscillateur harmonique est étudié au **C74**.

## Compléments et exercices du chapitre 13

**C65. Chute libre verticale : énergie potentielle et énergie mécanique associées au poids des corps au voisinage de la surface de la Terre.** Soit  $O$  un point de la surface terrestre pris pour origine d'un référentiel dont l'axe  $Oz$  représente la verticale ascendante du lieu.

• Montrer que si  $z$  est la coordonnée d'un point matériel  $M$  le long de cet axe, alors l'énergie potentielle associée à son poids est, à une constante arbitraire près :

$$E_p(M) = m g_0 z$$

où  $g_0$  est l'intensité du champ de pesanteur terrestre supposé constant.

- Le point matériel est en chute libre verticale (sans frottement) depuis la hauteur  $H$  avec une vitesse initiale nulle. Quelle est l'énergie mécanique du point matériel  $M$  à cette position initiale ? Quelle est l'énergie mécanique de  $M$  lorsqu'il est dans son mouvement de chute libre ? Appliquer le théorème de l'énergie mécanique et en déduire l'équation différentielle du premier ordre à laquelle satisfait  $z$ .
- Résoudre l'équation différentielle obtenue pour obtenir  $t(z)$ . En déduire  $z(t)$  et comparer avec la solution du **C50**.

**C66. Énergie potentielle associée une force constante.** On considère une force constante  $\vec{F} = F_0 \vec{u}_x$  où  $\vec{u}_x$  est un vecteur unitaire qui indique le sens et la direction de cette force. Montrer que l'énergie potentielle associée à cette force est, à une constante arbitraire près :  $E_p(M) = -F_0 x$ , où  $x$  est la composante du point matériel  $M$  le long de l'axe porté par  $\vec{u}_x$  vis-à-vis d'une certaine origine  $O$ .

**C67. Énergie potentielle et énergie mécanique associée à la force de rappel d'un ressort (oscillateur harmonique).** On place l'origine  $O$  d'un référentiel  $\mathcal{R}(O, x)$  à la position d'équilibre d'un ressort de coefficient de raideur  $k$  agissant le long de l'axe  $Ox$ .

- Montrer que l'énergie potentielle associée à la force de rappel qui agit sur le point matériel de masse  $m$  situé à la position  $x$  de  $O$  est, à une constante arbitraire près :

$$E_p(M) = \frac{1}{2} k x^2$$

- Soit  $E$ , l'énergie mécanique du point matériel ; déterminer l'équation différentielle du premier ordre à laquelle satisfait  $x$  en fonction des paramètres  $E$ ,  $k$  et  $m$ .
- Résoudre cette équation différentielle et comparer avec les **C54** et **C55**. On donne quelques indications pour cette question un peu délicate : faire le changement de variable :  $u = \omega x / \sqrt{2E/m}$  pour intégrer l'équation et prendre en compte le fait que :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$$

Puis profiter de l'arbitraire de la constante qui survient au cours de l'intégration pour changer la fonction sinus en cosinus et faire disparaître l'indétermination sur le signe de  $x$ .

- Vérifier la justesse de votre résultat en calculant l'énergie mécanique de l'oscillateur à partir de la solution obtenue.

**C68. Énergie mécanique pour le pendule plan.** Reprendre le problème du pendule plan (C59 et C62) avec l'aide cette fois du théorème de l'énergie mécanique : déterminer l'équation différentielle du premier ordre satisfaite par  $\theta$  et la mettre sous une forme intégrable comme aux C65 et C67 sans chercher à calculer l'intégrale à faire.

**C69. Énergie potentielle et énergie mécanique : discussion graphique.** Un point matériel de masse  $m$ , repéré par sa position  $x$  vis-à-vis une origine  $O$ , évolue le long de l'axe  $Ox$  sous l'effet d'une force dont l'énergie potentielle associée est :

$$E_p(x) = k \left( \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$$

où  $k$  et  $a$  sont deux coefficients strictement positifs. À l'instant initial, le point matériel est situé à une position  $x_0 = x(t = 0) > 0$ .

Discuter dans le détail des mouvements possibles de ce point matériel en prenant comme modèle la discussion réalisée sur l'exemple de ce chapitre 13.

*Indication* : on montrera d'abord, en traçant  $E_p(x)$ , que l'abscisse  $x$  du point  $M$  ne peut pas être négative en raison de la condition initiale.

**C70. Forces centrales et énergie potentielle.** On rappelle qu'une force est dite centrale (ou radiale) si elle est constamment dirigée vers un point  $O$  que nous prendrons comme origine du référentiel de travail. En coordonnées sphériques, une force centrale s'écrit donc de façon générale :

$$\vec{F}(M) = F(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

• Montrer que si une force centrale dérive d'une énergie potentielle  $E_p(M)$ , alors  $F$  ne peut dépendre que de  $r$  et :

$$E_p(M) = E_p(r) = - \int F(r) dr$$

• Calculer l'énergie potentielle associée à une force centrale du type :

$$\vec{F}(r) = \frac{K}{r^2} \vec{u}_r$$

où  $K$  est une constante. Que vaut  $K$  pour la force gravitationnelle ? Que vaut  $K$  pour la force coulombienne ?

**C71. Point matériel dans une boucle circulaire.** Le problème qui suit est un grand classique. Un point matériel glisse sans frottement le long d'une gouttière se terminant par une boucle circulaire de rayon  $R$  qui repose sur le sol. Le point matériel est parti depuis le point  $A$  situé à une hauteur  $H$  du sol avec une vitesse initiale nulle.

On demande quelle est la valeur minimale de  $H$  pour que le point matériel fasse un tour complet dans la boucle ?

*Indications* : Faire un schéma du problème, choisir un référentiel et un système de coordonnées judicieux. Tant que le point matériel suit la boucle circulaire, la force qui est associée à cette liaison n'est pas nulle, sinon... Enfin, penser aussi à utiliser le théorème de l'énergie mécanique.

**C72. Point matériel sur un cerceau circulaire.** Un point matériel glisse sans frottement sur un cerceau circulaire de centre  $O$  et de rayon  $R$  qui repose sur le sol. Le point matériel est parti depuis le sommet  $S$  du cerceau sans vitesse initiale mesurable.

- Trouver l'angle critique  $\theta_c$  que fait le rayon vecteur  $\overline{OM}$  avec l'axe vertical lorsque le point matériel quitte le cerceau.
- On appelle  $C$  le point du cerceau correspondant à  $\theta_c$ . Quelle est la vitesse du point matériel lorsqu'il arrive en  $C$  ?
- Quel est la nature du mouvement du point matériel après qu'il ait quitté le point  $C$  ? À quelle distance de la verticale du cerceau le point matériel sera-t-il lorsqu'il arrivera au sol ?

**C73. Particule dans un champ magnétique constant.** Reprendre le problème résolu du chapitre 11 sans force de frottement. Résoudre les équations du mouvement selon la même philosophie et montrer que la trajectoire suivie par la particule est une hélice circulaire parcourue à vitesse constante (*cf* chapitres 4 et 6).

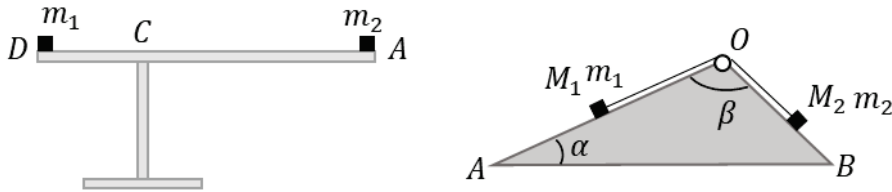
- Montrer que la force magnétique ne travaille pas et en déduire l'énergie mécanique du point matériel.

**C74. Portrait de phases.** Écrire l'énergie mécanique  $E_m(x, \dot{x})$  pour le problème de l'oscillateur harmonique oscillant le long d'un axe  $Ox$ . Utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour construire le portrait de phases du problème dans le plan  $(x, \dot{x})$  et montrer que les courbes isoénergétiques sont des ellipses dont on déterminera les caractéristiques (C10, note 1).

## CHAPITRE 14

### ÉQUILIBRE DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

La dynamique, qui se préoccupe des causes du mouvement, se préoccupe également de l'absence de mouvement : elle englobe dans son formalisme une science ancienne que l'on appelait *la statique*. Le problème que se posait la statique était celui de l'équilibre d'un système mécanique. Archimède (-287, -212) par exemple s'intéressait aux deux grands problèmes de cette science : celui du levier et celui du plan incliné.



**Figure 61.** Les deux grands problèmes de la statique que sont l'équilibre du levier et celui du plan incliné : à quelle condition les masses  $m_1$  et  $m_2$  sont-elles à l'équilibre ? L'équilibre du levier est résolu au C77 à l'aide de la notion de moment. L'équilibre du plan incliné peut être résolu à l'aide d'un bilan des forces (voir le C75).

**67. Équilibre.** Un point matériel au repos sera dit à l'équilibre dynamique. On la définit précise suivante :

*Équilibre dynamique.* Un point matériel est dit à l'équilibre dynamique si sa vitesse est constamment nulle vis-à-vis du référentiel utilisé :  $\vec{v}(t) \doteq \vec{0} \forall t$ .

Il découle de cette définition que la résultante  $\vec{F}$  des forces qui agissent sur le point matériel doit être nulle si ce dernier est à l'équilibre dynamique. En effet, si on a :  $\vec{v}(t) = \vec{0} \forall t$ , alors  $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \vec{0} \forall t$ , et la seconde loi de la dynamique impose  $\vec{F} \doteq \vec{0}$ .

Puisque la vitesse du point matériel est nulle, cette résultante des forces – à l'équilibre – ne dépend que de la position du point matériel et des paramètres qui caractérisent ces forces. Ainsi, si on appelle  $x_{\text{éq}}$ ,  $y_{\text{éq}}$ ,  $z_{\text{éq}}$  les coordonnées cartésiennes de la ou des positions d'équilibre du point matériel, et  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  les

composantes de la résultante des forces sur les axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  du référentiel utilisé, l'équation  $\vec{F} \doteq \vec{0}$  entraîne les 3 équations suivantes :

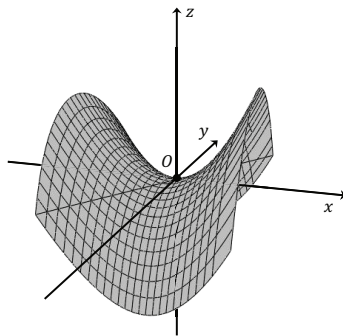
$$\begin{cases} F_x(x_{\acute{e}q}, y_{\acute{e}q}, z_{\acute{e}q}) = 0 \\ F_y(x_{\acute{e}q}, y_{\acute{e}q}, z_{\acute{e}q}) = 0 \\ F_z(x_{\acute{e}q}, y_{\acute{e}q}, z_{\acute{e}q}) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système permet de déterminer  $x_{\acute{e}q}$ ,  $y_{\acute{e}q}$  et  $z_{\acute{e}q}$ .

Dans l'hypothèse où toutes les forces qui agissent sur le point matériel à l'équilibre sont issues d'une énergie potentielle, leur résultante  $\vec{F}(x, y, z)$  s'écrira alors comme le gradient d'une énergie potentielle totale  $E_p(x, y, z)$ , au signe près :  $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$ . Les équations ci-dessus deviennent ainsi :

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que les inconnues  $x_{\acute{e}q}$ ,  $y_{\acute{e}q}$ ,  $z_{\acute{e}q}$  sont obtenues en annulant toutes les dérivées partielles de la fonction  $E_p(x, y, z)$ . La différentielle  $dE_p$  de  $E_p$  est donc nulle aux positions d'équilibre : ces positions sont celles pour lesquelles  $E_p$  est dite *stationnaire*.



**Figure 62.** Exemple à deux dimensions d'une fonction énergie potentielle :

$$z = E_p(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

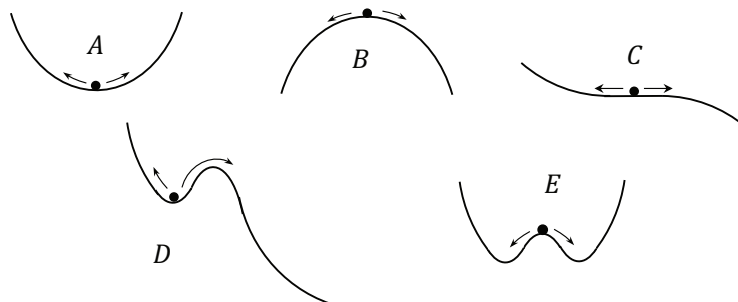
Cette surface en forme de selle de cheval correspond aux valeurs de  $E_p$  en tout point du plan  $xOy$  sur lequel un point matériel est contraint de se déplacer. Ici,  $E_p$  possède un point stationnaire en  $x_{\acute{e}q} = y_{\acute{e}q} = 0$ .

Lorsque l'on a à faire à un système de  $N$  points matériels, on distingue deux types d'équilibres : l'équilibre est dit *statique* si les  $N$  points matériels sont effectivement tous au repos ; l'équilibre est dit *dynamique* si c'est l'objet formé par ces  $N$  points matériels qui est au repos sans que les points matériels ne le soient forcément. Un exemple typique de cette dernière situation est l'eau contenue dans un verre : macroscopiquement, le système (l'eau) est à l'équilibre sur la table sous l'effet de son poids (somme des poids des  $N$  points matériels) et de la réaction de la table ; tandis qu'au niveau microscopique, chacun des  $N$  points matériels qui composent ce système est en mouvement sous l'effet des forces électromagnétiques existant entre eux.

**68. Vocabulaire des situations d'équilibre.** De façon empirique, on sait qu'un équilibre peut être « fragile » en ce sens que la plus légère perturbation peut rompre cet équilibre (un château de cartes, une bille sur une surface incurvée, ...). Dans d'autres cas, l'équilibre est d'une stabilité remarquable (un livre sur une table, ...). Il y a donc différents types d'équilibres.

Dans les problèmes à un degré de liberté qui vont nous intéresser, on définit trois types d'équilibres fondamentaux schématisés en A, B et C sur la figure 63 où l'on fait référence au cas d'une bille soumise à la gravité terrestre et reposant sur diverses surfaces. Dans la situation A, l'équilibre est qualifié de *stable* : si on déplace un peu la bille de sa position d'équilibre et qu'on la lâche sans vitesse initiale, elle y revient. Dans la situation B, l'équilibre est dit *instable* : la bille ne revient jamais à cette position d'équilibre. Dans la situation C, l'équilibre est dit *indifférent* : la bille reste à l'endroit où on l'a déplacée.

Si on rentre dans les détails du problème étudié, on peut définir d'autres types d'équilibres dont les 3 équilibres fondamentaux ne rendent pas complètement compte. C'est ce qu'évoquent les cas D et E de la figure 63. En D, la position d'équilibre est bien stable, mais la bille peut dépasser une position critique au-delà de laquelle elle ne reviendra pas en D ; l'équilibre est alors qualifié de *métastable*.



**Figure 63.** Les différentes situations d'équilibre rencontrées dans les problèmes à un seul degré de liberté. A, B et C sont les 3 types d'équilibres fondamentaux. D et E sont des sous-types (voir texte).

En E, la position d'équilibre instable peut déboucher sur deux situations stables selon que la bille va d'un côté ou de l'autre ; il s'agit d'une *bifurcation*.

À plusieurs dimensions, il existe d'autres types d'équilibres : dans l'exemple précédent de l'énergie potentielle en forme de selle de cheval (figure 62), on devine que dans la direction  $Ox$  la position d'équilibre en  $(0,0)$  apparaît comme stable ; par contre, elle est instable du point de vue de la direction  $Oy$ . Un tel point d'équilibre est appelé *point selle* ou *point col* (en référence aux cols des montagnes).

Nous ne nous intéresserons ici qu'à la recherche de la stabilité d'une position d'équilibre dans les cas à un degré de liberté : équilibre stable, instable ou indifférent.

**69. Recherche de la stabilité de l'équilibre dans les problèmes à un seul degré de liberté.** Pour définir la notion de stabilité ou d'instabilité d'une position d'équilibre, nous avons évoqué un petit déplacement du point matériel au voisinage de cette position. Nous allons transcrire mathématiquement cette opération dans le cas à un seul degré de liberté en nous focalisant sur l'exemple unidimensionnel d'un point matériel astreint à se mouvoir le long d'un axe  $Ox$  sous l'effet d'une énergie potentielle  $E_p(x)$ .

Considérons un point matériel  $M$  évoluant dans le voisinage immédiat d'une position d'équilibre  $x_{\text{éq}}$ . Sa coordonnée,  $x(t)$  à un certain instant  $t$ , peut s'écrire comme :  $x(t) = x_{\text{éq}} + \epsilon(t)$  où  $\epsilon(t)$  est petit devant l'unité de longueur. L'énergie potentielle de  $M$  est alors  $E_p(x_{\text{éq}} + \epsilon)$  et, comme  $\epsilon$  est petit, on peut développer<sup>1</sup> cette fonction à l'ordre 2 en  $\epsilon$  :

$$E_p(x_{\text{éq}} + \epsilon) = E_p(x_{\text{éq}}) + \epsilon \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_{\text{éq}}} + \frac{\epsilon^2}{2!} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_{\text{éq}}} + \dots$$

Le premier terme est la valeur de  $E_p$  en  $x_{\text{éq}}$  : c'est une valeur constante. Le second terme est nul puisque la dérivée de  $E_p$  est estimée en  $x_{\text{éq}}$  qui est une position d'équilibre. Enfin, le troisième terme contient la dérivée seconde de  $E_p$  en  $x_{\text{éq}}$  que nous poserons égale à  $k$  pour simplifier l'écriture. On a ainsi, au voisinage de  $x_{\text{éq}}$  :

$$E_p(x_{\text{éq}} + \epsilon) = E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{1}{2} k \epsilon^2 + \dots$$

L'énergie mécanique, au voisinage de  $x_{\text{éq}}$ , s'écrit donc :

$$E \doteq E_c(x_{\text{éq}} + \epsilon) + E_p(x_{\text{éq}} + \epsilon) = \frac{1}{2} m \dot{\epsilon}^2 + E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{1}{2} k \epsilon^2 + \dots$$

où la quantité  $\dot{x}$  dans la formule de l'énergie cinétique a été remplacée par  $\dot{\epsilon}$  puisque  $x(t) = x_{\text{éq}} + \epsilon(t)$ . On peut alors dériver cette expression de l'énergie mécanique

<sup>1</sup> Il s'agit du développement de Taylor à l'ordre 2 d'une fonction au voisinage d'un point, ici  $x_{\text{éq}}$  (Annexe 2).

par rapport au temps pour obtenir l'équation du mouvement du point matériel au voisinage de la position d'équilibre  $x_{\text{éq}}$  qui se met sous la forme :

$$\ddot{\epsilon} + \frac{k}{m}\epsilon + \dots \doteq 0$$

Pour  $\epsilon$  toujours petit devant l'unité de longueur, les termes supplémentaires représentés par les points de suspension sont négligeables et l'équation du mouvement est alors une équation homogène, linéaire, du second ordre en  $\epsilon$  à coefficients constants que nous savons résoudre. Sa solution générale dépend du signe de  $k$ . Ce signe définit la *concavité* de la fonction  $E_p$  en  $x_{\text{éq}}$  :

- Si  $k > 0$ , la fonction  $E_p$  est dite à concavité positive en  $x_{\text{éq}}$  (et on dit qu'elle est *convexe*). Dans ce cas,  $x_{\text{éq}}$  correspond à un minimum de  $E_p$ . En posant  $\omega = \sqrt{k/m}$ , la solution générale de l'équation différentielle est  $\epsilon(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ , ou encore  $\epsilon(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$ . Le point matériel oscille donc indéfiniment autour de la position  $x_{\text{éq}}$  à la pulsation  $\omega$  : c'est ce qui caractérise un équilibre stable. On notera que cette solution est celle de l'oscillateur harmonique, ce qui donne lieu à la propriété suivante :

***Théorème.*** *Le mouvement d'un point matériel de masse  $m$  situé dans le voisinage d'un minimum d'énergie potentielle est un mouvement harmonique. La pulsation de ce mouvement harmonique, appelée pulsation propre, est :*

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

*où  $k > 0$  est la valeur de la dérivée seconde de l'énergie potentielle à la position  $x_{\text{éq}}$  de ce minimum.*

$$k := \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_{\text{éq}}}$$

- Si  $k < 0$ , la fonction  $E_p$  est à concavité négative en  $x_{\text{éq}}$  (et on dit qu'elle est *concave*).  $x_{\text{éq}}$  correspond alors à un maximum de  $E_p$ . La solution générale de l'équation différentielle est maintenant :  $\epsilon(t) = C_1 e^{+\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ . Le point matériel s'écarte donc de la position  $x_{\text{éq}}$  pour ne pas y revenir : c'est ce qui caractérise un équilibre instable.

- Si  $k = 0$ , la fonction  $E_p$  est à concavité nulle en  $x_{\text{éq}}$  qui est alors un point d'inflexion horizontale de  $E_p$ . Dans ce cas particulier, la solution générale de l'équation différentielle est  $\epsilon(t) \doteq C_1 t + C_2$ . À vitesse initiale nulle :  $C_1 = 0$  et le point matériel reste au repos en  $\epsilon \doteq C_2$  : on dit que l'équilibre est indifférent.

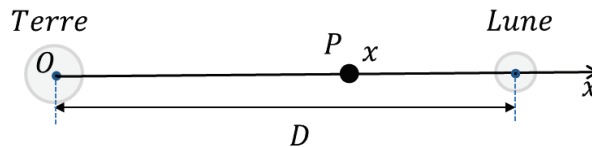
Lorsque le problème est à plusieurs dimensions (à plusieurs degrés de liberté), la recherche de la stabilité d'une position d'équilibre est un peu plus délicate car il faut examiner le signe de toutes les dérivées secondes de  $E_p$ . Ainsi, la concavité de la surface en selle de cheval<sup>1</sup> de la figure 62 réclame l'examen des signes de  $\partial^2 E_p / \partial x^2$ ,  $\partial^2 E_p / \partial y^2$  et aussi de la dérivée seconde croisée  $\partial^2 E_p / \partial x \partial y$ . Il est facile de voir ici qu'en  $x_{\text{éq}} = y_{\text{éq}} = 0$  ces signes sont + et - pour les deux premières dérivées secondes et que la dérivée croisée est nulle. Cela amène donc à des discussions sur la façon dont on a écarté le point matériel de cette position d'équilibre : l'équilibre est stable si l'écart n'a eu lieu que le long de l'axe  $Ox$ , instable si cet écart a eu lieu le long de l'axe  $Oy$ , indifférent si l'écart s'est réalisé le long de la diagonale de ces deux axes. On devine intuitivement que tout autre écart, s'il est trop important le long de  $Oy$ , entraînera l'instabilité de l'équilibre au voisinage du point selle.

## Compléments et exercices du chapitre 14

**C75. Équilibre du plan incliné.** On se réfère à la figure 61 de ce chapitre. Le fil qui relie les deux masses est indéformable et il n'y a pas de frottement. Démontrer que l'équilibre est réalisé si :  $m_1 OB = m_2 OA$ . *Indication* : penser à projeter la loi de l'équilibre des forces pour chaque point matériel sur les axes les mieux adaptés dans chaque cas.

**C76. Point d'équilibre entre la Terre et la Lune.** On considère les deux astres sphériques Terre et Lune de masses  $M_T$  et  $M_L$  respectivement. Ces astres sont supposés fixes dans ce problème et la distance qui sépare leurs centres respectifs est  $D$ . On choisit le point  $O$ , centre de la Terre, comme origine d'un référentiel galiléen et on appelle  $Ox$  l'axe de vecteur unitaire  $\vec{i}$  dirigé vers le centre de la Lune.

Un point matériel  $P$  de masse  $m$  est situé entre la Terre et la Lune à la distance  $x$  du point  $O$  (figure 64).



**Figure 64.** Un point matériel  $P$  situé entre la Terre et la Lune, supposées fixes dans le problème.

On rappelle que la force d'interaction gravitationnelle exercée par un corps sphérique de masse  $M$  sur un point matériel de masse  $m$  est attractive et vaut en intensité :

<sup>1</sup> On dit de cette surface qu'elle est convexe-concave.

$GMm/\ell^2$  où  $\ell$  est la distance qui sépare le centre du corps sphérique du point matériel et  $G$  la constante universelle de la Gravitation.

- Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point matériel et exprimer ces forces en fonction de  $x$  et des paramètres du problème.
- Montrer que la fonction énergie potentielle  $E_p(x)$  dont dérivent ces forces prend la forme :

$$E_p(x) = -G m M_T \left( \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{D-x} \right)$$

où l'on a posé :  $\alpha = M_L/M_T$ .

- Montrer qu'il n'existe qu'un seul point d'équilibre  $A$  situé entre la Terre et la Lune dont la position  $x_A$  est donnée par :

$$x_A = \frac{D}{1 + \sqrt{\alpha}}$$

- Montrer que cette position d'équilibre est instable.
- On appelle  $R_T$  le rayon de la Terre. On souhaite faire partir le point matériel  $P$  depuis la surface de la Terre pour qu'il arrive au point  $A$  avec une vitesse nulle. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique : calculer, en fonction des paramètres du problème, la vitesse initiale  $v_0$  que l'on doit donner à  $P$  pour qu'il en soit ainsi (on négligera les frottements dus à l'atmosphère terrestre). *Nota Bene* : le problème de cette méthode est que le point matériel va mettre un temps infini pour arriver en  $A$  ainsi qu'on l'a déjà affirmé au chapitre 13.



## MOMENT CINÉTIQUE

Lors d'un mouvement quelconque, la trajectoire d'un point matériel est le plus souvent incurvée, ce qui signifie que sous l'effet des forces en présence ce point matériel subit diverses rotations par rapport à l'origine du référentiel d'observation. Le lien existant entre ces rotations et les forces qui les génèrent est exprimé au travers de la notion de « moment » et du théorème du moment cinétique.

**70. Moment d'une force.** Le concept de moment<sup>1</sup> d'une force prend ses origines dans le principe du levier qui est un corps solide, mobile, en liaison pivot autour d'un point fixe que l'on appelle point d'appui. Une balance romaine (figure 65), par exemple, est un levier où l'on suspend en  $A$  un corps  $P$  de poids inconnu  $P = m_P g$  qui va être déterminé après avoir réalisé l'équilibre de ce levier en y suspendant un autre corps  $Q$ , de poids étalon  $Q = m_Q g$ , à une certaine position  $D$ . L'expérience montre que l'équilibre est réalisé lorsque le rapport des poids  $Q/P$  est dans le rapport des distances  $|CA|/|CD|$  où  $C$  est le point d'appui du levier. C'est-à-dire que la position  $D$  est déterminée par l'égalité :

$$m_Q g \cdot |CD| \doteq m_P g \cdot |CA|$$

Ces distances,  $|CD|$  et  $|CA|$ , sont appelées les *bras de levier* des poids  $Q$  et  $P$  respectivement.

Il faut remarquer que lorsque la balance n'est pas à l'équilibre, elle tourne autour de  $C$  selon un axe orthogonal au plan formé par les poids et leurs bras de levier, et ce d'autant plus rapidement que le poids étalon est éloigné de la position d'équilibre.

Une clef à molette (figure 66) fait aussi office de levier dont le point d'appui est cette fois le centre  $O$  de l'écrou à visser ou dévisser. L'expérience montre que pour une même force musculaire  $\|\vec{f}\|$ , il est plus facile de visser ou dévisser l'écrou si cette force est appliquée le

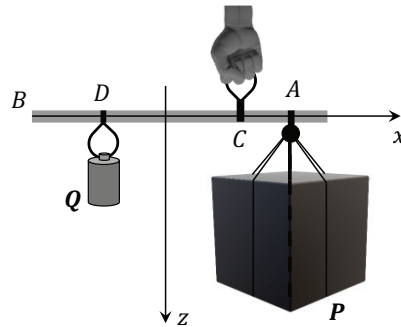


Figure 65. Le principe du levier appliqué à la balance romaine.

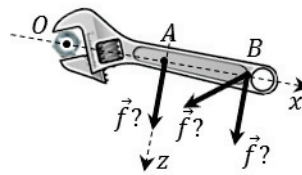


Figure 66. Comment et où appliquer  $\vec{f}$  pour dévisser l'écrou au mieux ?

<sup>1</sup> Le terme « moment » dérive du latin signifiant : quantité, grandeur.

plus loin possible du point d'appui (en  $B$ ), et si elle est appliquée perpendiculairement au bras de levier  $OB$ . Il faut encore remarquer que l'écrrou tourne autour d'un axe dont la direction est orthogonale au plan formé par le bras de levier et la force.

De ces considérations premières, on en a tiré la notion de moment d'une force dont la définition est la suivante :

**Moment d'une force.** On appelle moment d'une force  $\vec{f}$  par rapport à un point  $O$  quelconque la quantité vectorielle  $\vec{\mathcal{M}}(O, \vec{f})$  définie par le produit vectoriel :

$$\vec{\mathcal{M}}(O, \vec{f}) := \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

où  $M$  est le point d'application de la force.

Le produit vectoriel assure d'une part que  $\vec{\mathcal{M}}(O, \vec{f})$  sera orthogonal au plan formé par  $\vec{f}$  et  $\overrightarrow{OM}$ , et d'autre part que sa norme sera maximale lorsque  $\overrightarrow{OM}$  sera perpendiculaire à  $\vec{f}$ . On s'attend donc à ce que ce moment soit en relation avec l'axe de la rotation engendrée par la force et la valeur de la vitesse angulaire associée : autrement dit, on s'attend à ce que  $\vec{\mathcal{M}}(O, \vec{f})$  caractérise la capacité de  $\vec{f}$  à faire tourner le point matériel  $M$  autour du point  $O$ . Ce lien va être concrétisé par le théorème du moment cinétique.

**Simplification de la notation.** Souvent, on convient de calculer le moment des forces par rapport au point  $O$  qui constitue l'origine du référentiel choisi. On ne précise plus dans ce cas qu'il s'agit du point  $O$  ; on parle du moment de la force  $\vec{f}$  et on écrit simplement :

$$\vec{\mathcal{M}}(O, \vec{f}) = \vec{\mathcal{M}}(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{r} \wedge \vec{f}$$

**Dimensions de la grandeur « moment d'une force ».** Du point de vue dimensionnel, la grandeur physique « moment d'une force » (sa norme) est une force multipliée par une distance, c'est-à-dire une énergie. Cette énergie de mise en rotation ne doit pas être confondue avec l'énergie cinétique de  $M$  qui contient déjà une contribution à la rotation de  $M$  autour de  $O$  en raison de son inertie<sup>1</sup>, ni avec le travail qu'effectue la force lorsque  $M$  parcourt sa trajectoire (les distances invoquées ne sont pas du tout les mêmes). Aussi, convient-on de donner aux dimensions de ce moment, celles d'une force multipliée par une distance :  $[\mathcal{M}] = [F] \cdot [L]$ , sans préciser outre mesure. Du point de vue des unités, le moment d'une force sera exprimé en  $N \cdot m$ .

<sup>1</sup> Penser à l'expression de  $v^2$  en coordonnées polaires :  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$  où intervient la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ .

**71. Moment cinétique et théorème du moment cinétique.** Soit  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i$  la résultante de toutes les forces  $\vec{f}_i$  agissant sur le point matériel  $M$ . Il est facile de démontrer que la somme des moments de toutes ces forces sera égale au moment de leur résultante puisque l'opération « produit vectoriel » est distributive par rapport à l'addition :  $\sum_{i=1}^n \vec{M}(\vec{f}_i) = \vec{M}(\vec{F})$ .

Dans cette relation, injectons la loi de la dynamique pour ce point matériel :

$$\vec{M}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n (\vec{r} \wedge \vec{f}_i) = \vec{r} \wedge \vec{F} \doteq \vec{r} \wedge m \vec{a}$$

Le terme de droite de ce résultat se réarrange. En effet, le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles entre eux étant nul, on a la propriété suivante :

$$\vec{r} \wedge m \vec{a} = \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge m \vec{v})$$

La quantité :  $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$  a reçu le nom de *moment cinétique* :

**Moment cinétique.** Soit un point matériel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$ . On appelle moment cinétique du point matériel par rapport à un point  $O$  quelconque, le moment par rapport à  $O$  du produit  $m \vec{v}$  :

$$\vec{\ell}_O := \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}$$

où  $M$  est le point représentatif du point matériel.

Si le point  $O$  est l'origine du référentiel choisi, alors on simplifie le langage et la notation : on parle simplement du moment cinétique du point matériel et on écrit :  $\vec{\ell}_O := \vec{\ell} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$ .

Avec cette définition, on peut énoncer ce qui vient d'être démontré plus haut :

**Théorème du moment cinétique pour un seul point matériel.** La dérivée par rapport au temps du moment cinétique  $\vec{\ell}$  d'un point matériel est égale au moment de la résultante  $\vec{F}$  des forces qui agissent sur ce point matériel :

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} \doteq \vec{M}(\vec{F})$$

Ce théorème est en fait valable quel que soit le point  $A$  par rapport auquel sont calculés les moments, pourvu que ce point  $A$  soit fixe dans le référentiel galiléen utilisé. Refaisons la démonstration en ce sens :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\ell}_A}{dt} &= \frac{d}{dt} (\overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}) = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge m \vec{v} + \overrightarrow{AM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m \vec{v} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \wedge m \vec{v} + \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{a} \end{aligned}$$

Mais :  $d\overrightarrow{OM}/dt = \vec{v}$  et  $d\overrightarrow{OA}/dt = \vec{0}$  puisque  $A$  est fixe ; donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\ell}_A}{dt} &= \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{a} \\ &\doteq \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}(A, \vec{F}) \end{aligned}$$

Et on a le résultat annoncé.  $\square$

**72. Moment cinétique et rotations.** Considérons d'abord l'opération de rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $Oz$  d'un référentiel  $\mathcal{R}$  et examinons son effet sur les vecteurs de la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ .

Le vecteur  $\vec{u}_x$  est transformé en un vecteur :

$$\vec{u}'_x = \cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y$$

Le vecteur  $\vec{u}_y$  est transformé en un vecteur :

$$\vec{u}'_y = -\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y$$

Le vecteur  $\vec{u}_z$  quant à lui reste invariant puisqu'il est l'axe de la rotation.

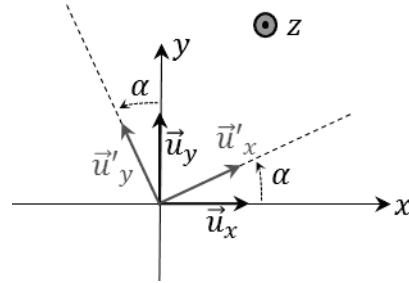


Figure 67. Rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $Oz$ .

Ainsi, un vecteur quelconque :  $\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z$  soumis à cette rotation sera transformé en un vecteur  $\vec{W}$  qui s'écrira :

$$\vec{W} = (V_x \cos \alpha - V_y \sin \alpha) \vec{u}_x + (V_x \sin \alpha + V_y \cos \alpha) \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z$$

En particulier, le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  sera transformé en un vecteur  $\overrightarrow{OM}'$  tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}' &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \vec{u}_x + (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \vec{u}_y + z \vec{u}_z \\ &= x' \vec{u}_x + y' \vec{u}_y + z' \vec{u}_z \end{aligned}$$

**Rotation infinitésimale.** Si l'angle  $\alpha$  de la rotation est infiniment petit, nous le noterons  $d\alpha$  et nous dirons de cette rotation qu'elle est une *rotation infinitésimale*. Dans ce cas, on peut écrire à l'ordre 1 en  $d\alpha$  :  $\cos d\alpha = 1 + o(d\alpha)$  ainsi que  $\sin d\alpha = d\alpha + o(d\alpha)$ . Un vecteur  $\vec{V}$  se transforme sous l'effet de cette rotation infinitésimale en un vecteur voisin  $\vec{W} = \vec{V} + d\vec{V}$  tel que :

$$\overline{\vec{w}} = \vec{V} + d\vec{V} = (V_x - V_y d\alpha) \vec{u}_x + (V_x d\alpha + V_y) \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z + \vec{o}(d\alpha)$$

Le vecteur élémentaire  $d\vec{V}$  engendré par la rotation infinitésimale s'écrit donc :

$$d\vec{V} = d\alpha [-V_y \vec{u}_x + V_x \vec{u}_y] + \vec{o}(d\alpha)$$

Il faut constater que, dans cette expression, le vecteur entre crochets s'avère être le produit vectoriel du vecteur  $\vec{u}_z$  - qui porte l'axe de la rotation infinitésimale - par le vecteur  $\vec{V}$  soumis à cette rotation :

$$d\vec{V} = (\vec{u}_z \wedge \vec{V}) d\alpha + \vec{o}(d\alpha)$$

Le vecteur  $\vec{u}_z$  était un choix arbitraire : sous l'effet d'une rotation infinitésimale d'angle  $d\alpha$  et d'axe porté par un vecteur unitaire  $\vec{u}$  quelconque passant par l'origine  $O$  du référentiel, cette relation devient :

$$d\vec{V} = (\vec{u} \wedge \vec{V}) d\alpha + \vec{o}(d\alpha)$$

**Vecteur rotation.** Considérons maintenant un point matériel  $M$  dans un mouvement de rotation infinitésimale d'angle  $d\alpha$  autour d'un axe porté à l'instant  $t$  par le vecteur unitaire  $\vec{u}(t)$  et passant par le point origine  $O$ . Ce mouvement s'effectue pendant la durée infinitésimale  $dt$ , de sorte que :  $d\alpha = \dot{\alpha} dt$ , où  $\dot{\alpha}(t)$  est la vitesse angulaire instantanée à laquelle s'effectue cette rotation. On aura, d'après ce qui précède :

$$d\overline{OM} = (\vec{u} \wedge \overline{OM}) d\alpha + \vec{o}(d\alpha)$$

C'est-à-dire, en vertu de la notation différentielle :

$$\frac{d\overline{OM}}{d\alpha} = \vec{u} \wedge \overline{OM} \iff \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \dot{\alpha} \vec{u} \wedge \vec{r}$$

Nous dénommerons  $\vec{\omega}$  le vecteur  $\dot{\alpha} \vec{u}$  :  $\vec{\omega} := \dot{\alpha} \vec{u}$ . Ce vecteur a pour norme la vitesse angulaire de la rotation, pour direction l'axe  $\vec{u}$  de cette rotation et pour sens le signe de la vitesse angulaire. C'est bien le vecteur rotation instantanée  $\vec{\omega}$  introduit au chapitre 7. À nouveau, il est important de noter que cette relation n'est vraie que pour un mouvement de rotation (instantané) autour d'un axe (instantané) passant par le point  $O$  origine du référentiel.

**Expression du moment cinétique dans un mouvement de rotation pure.** Puisque, par définition, le moment cinétique d'un point matériel est :  $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$ , il s'ensuit que si ce point matériel est dans un mouvement de rotation quelconque d'axe  $\vec{u}(t)$  passant par le point origine et de vitesse angulaire  $\dot{\alpha}(t)$ , on aura :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = m \vec{r} \wedge (\dot{\alpha} \vec{u} \wedge \vec{r}) = m r^2 \dot{\alpha} \vec{u} - m \dot{\alpha} (\vec{u} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

À partir de cette relation, qui relie le moment cinétique du point matériel au vecteur rotation instantanée, on peut distinguer deux cas :

- Si le point matériel évolue dans un plan, alors il est clair que l'axe de rotation est toujours orthogonal à ce plan :  $\vec{u}(t) = \vec{u}_0$  et  $\vec{u}_0 \cdot \vec{r}(t) = 0, \forall t$ . Le lien entre le vecteur rotation et le moment cinétique, qui sera noté ici  $\vec{\ell}_{2D}$ , est alors direct :

$$\vec{\ell}_{2D} = m r^2 \dot{\alpha} \vec{u}_0 = m r^2 \vec{\omega}$$

- Si le point matériel évolue selon une courbe gauche, alors le lien entre le vecteur rotation et le moment cinétique, noté  $\vec{\ell}_{3D}$  dans ce cas, est :

$$\vec{\ell}_{3D} = m \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = m r^2 \vec{\omega} - m (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

On remarquera que la projection de  $\vec{\ell}_{3D}$  sur  $\vec{\omega}$  vaut :

$$\vec{\ell}_{3D} \cdot \vec{\omega} = m r^2 \omega^2 - m (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 = m r^2 \omega^2 \sin^2(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = m \|\vec{\omega} \wedge \vec{r}\|^2$$

**73. Moment cinétique et forces centrales<sup>1</sup>.** Lorsque la ou les forces qui agissent sur le point matériel sont centrales, le théorème du moment cinétique permet d'obtenir une constante vectorielle du mouvement : le moment cinétique lui-même.

En effet, une force centrale étant par définition une force dont la direction est constamment parallèle au vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , il s'ensuit que le moment d'une telle force est nul. Le théorème du moment cinétique fournit dans ce cas :

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} \doteq \vec{0}$$

ou encore, en intégrant par rapport au temps :  $\vec{\ell} \doteq \overrightarrow{Cte}$ . Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

***Théorème.** Lorsque la résultante des forces qui agissent sur un point matériel est centrale, le vecteur moment cinétique associé à ce point matériel est une intégrale première vectorielle du mouvement.*

Dire du vecteur moment cinétique qu'il est constant dans le temps, c'est dire deux choses : premièrement, que sa direction (et son sens) est toujours la même au cours du temps et deuxièmement, que sa norme est toujours la même :

**Direction du vecteur moment cinétique.** La direction de ce vecteur correspond à l'axe perpendiculaire au plan de la trajectoire. On se rappelle en effet que le mouvement à force centrale se réalise dans un plan (nous l'avons démontré en cinématique). Or ce plan est celui engendré par le rayon vecteur et le vecteur vitesse.

<sup>1</sup> Le mouvement à accélération centrale a déjà fait l'objet du Chapitre 5.

Comme le moment cinétique est par définition proportionnel au produit vectoriel de ces deux vecteurs, il leur est forcément perpendiculaire.

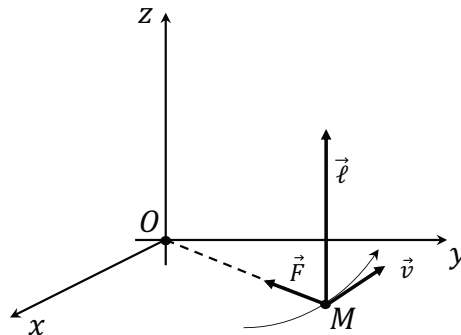
**Norme du vecteur moment cinétique.** La norme de ce vecteur est directement reliée à la loi des aires que nous avons établie dans le cours de cinématique. Pour le démontrer, utilisons les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  (la trajectoire est dans un plan  $xOy$ ) complétées par l'axe  $Oz$  perpendiculaire à la trajectoire, et calculons la norme de  $\vec{\ell}$  :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \Rightarrow \|\vec{\ell}\| = \ell = m r^2 |\dot{\theta}|$$

Or, on se rappelle que la loi des aires s'exprime par le fait que la vitesse aréolaire (vitesse des surfaces balayées par le rayon vecteur) est constante, et que cette vitesse vaut :

$$v_{ar\acute{e}} = \frac{1}{2} r^2 |\dot{\theta}| = \frac{\ell}{2m}$$

Il s'ensuit que si le moment cinétique est constant, la vitesse aréolaire l'est aussi et réciproquement.



**Figure 68.** Dans un mouvement à force centrale, la trajectoire est située dans un plan (ici le plan  $xOy$ ) perpendiculaire au vecteur moment cinétique.

## Compléments et exercices du chapitre 15

**C77. Équilibre de la balance romaine ou équilibre du levier.** En mécanique du solide rigide, moments des forces et loi de la dynamique donnent lieu au théorème suivant : *un solide est à l'équilibre lorsque la somme de toutes les forces qui agissent sur ce solide est nulle et que le moment de ces forces par rapport à un point quelconque du solide est nul.* Notre balance romaine (figure 65) est soumise à quatre forces : son propre poids  $\vec{W}$  qui agit au point d'appui  $C$  - car  $C$  est aussi le centre de

masse de cette balance -, le poids  $\vec{P}$  du corps  $P$  suspendu en  $A$ , le poids  $\vec{Q}$  du corps  $Q$  suspendu à une certaine position  $X$  ( $D$  sera sa position à l'équilibre) et la force  $\vec{E}$  exercée par l'expérimentatrice au point d'appui  $C$  pour soutenir l'ensemble et empêcher la balance de tomber :

$$\vec{E} + \vec{W} + \vec{P} + \vec{Q} \doteq \vec{0}$$

Réalisons maintenant la somme  $\vec{S}$  des moments de toutes ces forces par rapport au point  $C$  :

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{M}(C, \vec{E}) + \vec{M}(C, \vec{W}) + \vec{M}(C, \vec{P}) + \vec{M}(C, \vec{Q}) \\ &= \vec{CC} \wedge \vec{E} + \vec{CC} \wedge \vec{W} + \vec{CA} \wedge \vec{P} + \vec{CX} \wedge \vec{Q} \\ &= \vec{CA} \wedge \vec{P} + \vec{CX} \wedge \vec{Q} \end{aligned}$$

C'est-à-dire, après avoir choisi la base directe  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  indiquée sur la figure 64 :

$$\vec{S} = \{-|CA|P + |CX|Q\} \vec{u}_y$$

En annulant  $\vec{S}$ , on retrouve bien la loi annoncée pour l'équilibre de la balance : il est réalisé lorsque  $X = D$ .

Lorsque  $Q$  est placé à une position  $X$  différente de  $D$ , l'expérience montre que la balance subit une rotation d'axe  $Cy$  qui se fera dans un sens ou dans l'autre selon que  $X$  est d'un côté ou de l'autre de  $D$ , et de façon plus ou moins rapide selon que  $X$  est plus ou moins éloigné de  $D$ . Ce sont précisément ces informations qui sont contenues dans  $\vec{S}$  qui n'est pas nul lorsque  $X \neq D$  :  $\vec{S}$  est alors dirigé le long de l'axe de rotation et sa composante peut effectivement être positive ou négative et plus ou moins importante selon cette position  $X$ . Ainsi, le sens, la direction et la norme de ce moment résultant  $\vec{S}$  contient toutes les informations sur la nature de la rotation : son axe et la valeur de la vitesse angulaire comme énoncé au 70.

**C78. La clef à molette.** Il faut faire le même constat dans le cas de la clef à molette (figure 66). Pour ce qui nous intéresse, on peut ne prendre en compte ici que le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport au point d'appui  $O$  : si  $\vec{F}$  est appliquée à une position  $X$  du bras de la clef et dans une direction portée par un vecteur unitaire  $\vec{u}$  du plan  $xOz$ ,  $\vec{F} = F \vec{u}$ , alors, compte tenu du choix des axes, on a :

$$\vec{M}(O, \vec{F}) = \vec{OX} \wedge \vec{F} = |OX| F (\vec{u}_x \wedge \vec{u}) = |OX| F \sin(\widehat{\vec{u}_x, \vec{u}}) \vec{u}_y$$

avec les axes orientés selon la figure 65. Ainsi, pour une même intensité de force, ce moment sera maximal pour une force perpendiculaire à l'axe  $\vec{u}_x$  de la clef à molette et pour un point d'application le plus éloigné possible du point d'appui.

**C79. Le pendule plan encore.** Appliquer le théorème du moment cinétique au pendule simple plan (cf C59, C62 et C68) et en déduire l'équation différentielle satisfaite par l'angle  $\theta$ .

**C80. Forces radiales et énergie potentielle effective.** Un point matériel est soumis à une force radiale dont l'énergie potentielle associée est  $E_p(r)$ . Le point matériel est repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le plan de la trajectoire. Soit  $\ell$  la norme du moment cinétique du point matériel. Utiliser la loi des aires pour montrer que l'énergie mécanique du point matériel prend la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_p^{eff}(r; \ell)$$

où  $E_p^{eff}(r; \ell)$  est appelée *énergie potentielle effective* du point matériel.

- Montrer que l'on peut étudier les mouvements possibles du point matériel grâce à l'étude de  $E_p^{eff}(r; \ell)$ . En particulier, montrer que si  $E_p^{eff}(r; \ell)$  possède un minimum, alors le point matériel réalise un mouvement circulaire uniforme (lorsque  $\ell \neq 0$ ) lorsque son énergie est égale à la valeur de  $E_p^{eff}$  en ce minimum. Examiner aussi le cas spécial  $\ell = 0$ .
- Faire l'étude graphique des mouvements possibles d'un point matériel en mouvement sous l'effet d'une énergie potentielle radiale :

$$E_p(r) = -K/r \quad , K > 0$$

*Nota Bene* : il s'agit du mouvement d'un point matériel sous l'effet de la force gravitationnelle (ou de la force coulombienne, cf C70) due à un autre point matériel supposé fixe au centre du référentiel. Pour tracer  $E_p^{eff}(r; \ell)$  on cherchera à l'a-dimensionner en posant  $x = r/r_*$ , où  $r_*$  est la position du minimum  $V_{min}$  de  $E_p^{eff}$ , et en étudiant :  $\epsilon(x) = -E_p^{eff}(r; \ell)/V_{min}$ . On pourra ainsi faire le lien avec le C69.

**C81. Le pendule sphérique (simple).** Un pendule sphérique est un pendule simple de longueur fixe  $L$  dont une extrémité est attachée en un point  $O$  à l'aide d'une *liaison rotule*, ce qui permet au pendule de tourner spatialement autour de  $O$ . La liaison rotule est supposée opérer sans frottement. À l'autre extrémité de ce pendule est fixée un poids assimilable à un point matériel  $M$  de masse  $m$ . On repère  $M$  à l'aide de ses coordonnées sphériques vis-à-vis du référentiel  $\mathcal{R}(O, xyz; t)$ , l'axe  $Oz$  étant choisi selon la verticale et orienté vers le haut.

- Écrire les équations de Newton du mouvement du pendule conique.
- Calculer l'énergie potentielle du pendule sphérique et montrer qu'il existe deux positions d'équilibre dont on cherchera la stabilité.

- Calculer l'énergie mécanique  $E$  du pendule sphérique.
- Appliquer le théorème du moment cinétique au pendule sphérique.
- Montrer que la quantité  $\dot{\varphi} \sin^2\theta$  est une intégrale première en la dérivant par rapport au temps. En montrer que cela montre que la composante du moment cinétique le long de l'axe  $Oz$  est une constante du mouvement.
- Injecter cette intégrale première dans l'expression de l'énergie et montrer qu'alors on peut écrire :

$$E = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + E_p^{eff}(\theta; \ell_z)$$

où  $E_p^{eff}(\theta; \ell_z)$  est une énergie potentielle effective à déterminer.

- Examen du cas  $\ell_z = 0$ . Montrer que si  $\ell_z = 0$ , alors le pendule sphérique se comporte comme le pendule plan.
- Lorsque  $\ell_z \neq 0$ , Montrer que l'on peut mettre  $E_p^{eff}(\theta; \ell_z)$  sous la forme :

$$E_p^{eff}(\theta; \ell_z) = m g_0 L \left( \frac{\alpha}{\sin^2\theta} + \cos\theta \right)$$

où  $\alpha$  est un paramètre sans dimensions que l'on déterminera. Tracer  $E_p^{eff}(\theta; \ell_z)$  pour quelques valeurs de  $\alpha$  après avoir vérifié son domaine de variations.

- Trouver une expression reliant le sinus et le cosinus de l'angle  $\theta_e$  pour lequel  $E_p^{eff}(\theta; \ell_z)$  est minimale.
- Déterminer le mouvement du pendule sphérique lorsque son énergie est égale à la valeur minimale de  $E_p^{eff}(\theta_e; \ell_z)$  de  $E_p^{eff}$ .

## CHAPITRE 16

# SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET CENTRE DE MASSE

Nous abordons dans ce chapitre la question des ensembles de points matériels en interaction les uns avec les autres. C'est l'occasion de définir deux nouvelles grandeurs physiques qui sont la quantité de mouvement totale du système et le centre de masse de ce système.

On conviendra des notations suivantes : le système étudié est formé de  $N$  points matériels  $P_\alpha$  de masses respectives  $m_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ . Ils sont repérés depuis un référentiel galiléen d'origine  $O$  et on note  $\overrightarrow{OP_\alpha} := \vec{r}_\alpha$  les vecteurs positions associés,  $\vec{v}_\alpha$  et  $\vec{a}_\alpha$  leurs vecteurs vitesses et accélérations. Enfin, chaque point matériel  $P_\alpha$  est soumis à un ensemble de forces *a priori* quelconques dont la résultante est notée  $\vec{F}_\alpha$ .

**74. Quantité de mouvement et théorème associé.** Pour un seul point matériel, on aura la définition suivante :

*Quantité de mouvement ou impulsion.* On appelle quantité de mouvement ou impulsion  $\vec{p}$  d'un point matériel, le vecteur résultant du produit de la masse de ce point matériel par son vecteur vitesse :

$$\vec{p} := m \vec{v}$$

La quantité de mouvement totale de notre système de  $N$  points matériels sera définie comme la somme des quantités de mouvement associées à chacun de ces points matériels :

$$\vec{p}_{tot} := \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha$$

**Conservation de la quantité de mouvement totale d'un système de points matériels isolé.** Le théorème qui suit se démontre à l'aide du principe des actions réciproques.

*Théorème.* La quantité de mouvement totale d'un système de  $N$  points matériels en interaction, isolé du reste de



La quantité de mouvement totale du système est donc bien une constante (vectorielle) du mouvement.  $\square$

Ce théorème trouve de nombreuses applications, en particulier dans l'étude des chocs. Que ce choc soit élastique ou non (voir **C84**), la quantité de mouvement du système, pourvu qu'il soit isolé ou pseudo-isolé, sera la même avant le choc qu'après le choc.

En voici un exemple simple : imaginons deux patineurs, de masses  $m_1$  et  $m_2$ , initialement au repos au centre d'une patinoire et qui se tiennent l'un l'autre. Après que les deux patineurs se soient repoussés, on demande la relation qui existe entre les vitesses acquises par chacun d'entre eux si on considère que les forces de frottement sur la glace sont négligeables ? *Réponse* : les poids des patineurs sont compensés par les forces de liaison au sol, de sorte que la résultante des forces extérieures agissant sur chacun d'eux est nulle : les patineurs forment à eux deux un système pseudo-isolé. Avant qu'ils ne se repoussent, leur quantité de mouvement totale est nulle :  $\vec{p}_{tot,av} = \vec{0}$ . Après le « choc », le premier patineur a acquis une vitesse  $\vec{v}_1$  et le second une vitesse  $\vec{v}_2$ , de sorte que :  $\vec{p}_{tot,ap} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ . Or, en vertu du théorème de la conservation de la quantité de mouvement, qui peut s'appliquer ici, on a :  $\vec{p}_{tot,av} \doteq \vec{p}_{tot,ap}$ . La relation entre les deux vitesses est donc :  $\vec{v}_2 \doteq -m_1 \vec{v}_1 / m_2$ . Les patineurs partent dans des directions opposées et le rapport des deux vitesses (en norme) est dans le rapport inverse des masses.

**75. Démonstration inverse.** Supposons maintenant que la quantité de mouvement totale de notre système isolé de points matériels soit une constante :

$$\overline{Cte} \doteq \vec{p}_{tot} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

En dérivant cette égalité, on obtient :

$$\vec{0} \doteq \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{a}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha$$

Lorsque  $N = 1$ , cela revient à écrire :  $\vec{F}_1 = \vec{0}$ . Le point matériel est bien isolé au sein du référentiel galiléen utilisé ; c'est le principe d'inertie.

Lorsque  $N = 2$ , la relation ci-dessus implique maintenant :  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ . Et puisque le système est isolé, on a :  $\vec{F}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  et  $\vec{F}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ . Ce faisant, on vient de démontrer l'égalité de l'action et de la réaction.

Lorsque  $N = 3$ , on a cette fois :  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ , avec :  $\vec{F}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1}$ , puis  $\vec{F}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{3 \rightarrow 2}$  et  $\vec{F}_3 = \vec{F}_{1 \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3}$ . Le principe de superposition des

forces et le résultat obtenu pour  $N = 2$ , qui doit être vrai quel que soit le couple de points matériels envisagé, permettent de conclure que cette somme est bien nulle.

Le processus de la démonstration reste le même lorsque  $N = 4$  et ainsi de suite pour  $N$  quelconque.  $\square$

En conclusion, il y a équivalence entre le théorème de la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé de points matériels et le principe des actions réciproques pour ce système. Ce dernier principe devient un théorème si on adopte comme point de départ que la quantité de mouvement d'un système de points matériels isolés est une constante.

**76. Reformulation du principe fondamental de la dynamique.** Il est important de noter que le théorème de la conservation de la quantité de mouvement se réfère à un système isolé ou pseudo-isolé. Sans quoi, la quantité de mouvement du système varie au cours du temps et cette variation reflète la seconde loi de Newton. Examinons en effet le cas particulier d'un seul point matériel. S'il est isolé, son mouvement est rectiligne uniforme et sa quantité de mouvement est bien constante. Si maintenant ce point matériel subit l'action d'une force  $\vec{F}$ , estimons la variation de sa quantité de mouvement au cours du temps. À l'instant  $t$ , elle s'écrit :  $\vec{p}(t) = m \vec{v}(t)$ , tandis qu'à l'instant  $t + dt$ , elle devient :  $\vec{p}(t + dt) = m \vec{v}(t + dt)$ , de sorte que la différence vaut :  $d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = m [\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)] = m d\vec{v}$ . Or, la variation de vitesse pendant la durée infinitésimale  $dt$  nous est donnée par la seconde loi de Newton exprimée sous la forme :

$$d\vec{v} \doteq \frac{\vec{F}}{m} dt$$

Si bien que la variation de quantité de mouvement devient :  $d\vec{p} \doteq \vec{F} dt$ . Ce résultat amène à réécrire le principe fondamental de la dynamique de la façon suivante :

***Principe Fondamental de la dynamique.** Un point matériel soumis à une ou plusieurs forces dont la résultante est  $\vec{F}$  voit sa quantité de mouvement varier de telle sorte que :*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \doteq \vec{F}$$

Cette nouvelle formulation prend tout son intérêt dans le domaine relativiste et dans des études théoriques ou pratiques plus approfondies de la mécanique comme dans l'exemple qui suit.

**77. Equation de la dynamique pour les corps de masse variable.** Dans certains cas, la masse de l'objet en mouvement est variable. Que l'on songe par exemple aux fusées d'où une masse importante de gaz s'échappe au cours de leur ascension, ou à une goutte de pluie dont la masse augmente pendant sa chute dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau.

Mechtcherski (1859 – 1935) a semble-t-il été le premier à avoir écrit une équation de la dynamique modifiée pour ces cas spéciaux. Focalisons-nous sur le problème d'une fusée assimilée à un point matériel dont la masse est variable au cours du temps :  $m = m(t)$ .

Dans une première étape, la fusée n'est soumise à aucune force extérieure. À l'instant  $t$ , la quantité de mouvement de la fusée est :

$\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t)$ . À l'instant  $t + dt$ , elle a vu sa masse varier d'une quantité :  $dm = m(t + dt) - m(t)$ , et sa vitesse de :  $d\vec{v} = \vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)$ . Sa quantité de mouvement à cet instant est donc :

$$\vec{p}(t + dt) = m(t + dt) \vec{v}(t + dt) = [m(t) + dm][\vec{v}(t) + d\vec{v}]$$

On ne peut pas appliquer le théorème de la conservation de la quantité de mouvement à la fusée seule car elle a perdu de la matière (les gaz qui s'échappent) : le seul système isolé entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$  est le système « fusée + gaz ». Il faut donc aussi prendre en compte la quantité de mouvement du gaz échappé. La masse de ce gaz est égale à la perte de masse de la fusée :  $dm_{\text{gaz}} = -dm$ . Quant à sa vitesse, inconnue, nous la noterons :  $\vec{v}_{\text{gaz}}$ .

Appliquons maintenant le théorème de la quantité de mouvement au système « fusée + gaz » :

$$\vec{p}_{\text{tot},av} = m(t) \vec{v}(t) \doteq \vec{p}_{\text{tot},ap} = [m(t) + dm][\vec{v}(t) + d\vec{v}] + dm_{\text{gaz}} \vec{v}_{\text{gaz}}$$

Après avoir négligé le produit  $dm d\vec{v}$  qui est un infiniment petit du second ordre, on tire de cette équation que la variation élémentaire (c'est-à-dire pendant  $dt$ ) de la quantité de mouvement de la fusée seule vaut :

$$d\vec{p} = m(t) d\vec{v} + \vec{v}(t) dm \doteq dm_{\text{gaz}} \vec{v}_{\text{gaz}}$$

Si la fusée est soumise à une ou plusieurs forces extérieures (son poids, les frottements de l'air au décollage, ...) dont la résultante est  $\vec{F}$ , cela ajoute à la variation de la quantité de mouvement de la fusée une quantité  $\vec{F} dt$  en vertu de la seconde loi



Figure 69. Décollage d'une fusée sous la poussée des gaz échappés.

de Newton. De sorte que la variation totale de quantité de mouvement de la fusée est maintenant :

$$d\vec{p} = m(t) d\vec{v} + \vec{v}(t) dm \doteq dm_{gaz} \vec{v}_{gaz} + \vec{F} dt$$

D'où :

$$m(t) d\vec{v} \doteq (\vec{v}_{gaz} - \vec{v}) dm + \vec{F} dt$$

La différence de vitesses qui apparaît au second membre de la dernière relation correspond à la vitesse d'éjection du gaz vu depuis la fusée. On a coutume d'appeler cette vitesse : vitesse du jet,  $\vec{v}_{jet} := \vec{v}_{gaz} - \vec{v}$ . Enfin, en divisant membre à membre par  $dt$  le résultat ci-dessus, on obtient l'équation de la dynamique pour la fusée :

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} \doteq (\vec{v}_{gaz} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} + \vec{F}$$

Le terme supplémentaire qui vient s'ajouter à la résultante  $\vec{F}$  est une force de propulsion : c'est la force appliquée à la fusée par le gaz qu'elle éjecte. La vitesse du jet est considérée comme une donnée du problème, tout comme la variation de masse au cours du temps ; ces deux paramètres conditionnent le mouvement de la fusée.

**78. Centre de masse et théorème du centre de masse.** Revenons à notre système de  $N$  points matériels  $P_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ . Pour un tel système, on peut définir un point particulier  $C$ , que nous appellerons *centre ou barycentre des masses*, ou encore *centre d'inertie* du système.

Définissons d'abord la masse totale  $M$  du système de  $N$  points matériels :

$$M := \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$$

Alors, le point  $C$  est défini par la relation :

$$\overrightarrow{OC} := \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \overrightarrow{OP_\alpha}$$

On démontre facilement que le point  $O$  importe peu dans cette définition (voir **C82**). En particulier, on notera que si l'on remplace  $O$  par  $C$ , on obtient une propriété qui peut être prise aussi comme définition de ce point singulier qu'est  $C$  :

$$\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \overrightarrow{CP_\alpha} = \vec{0}$$

La particularité du vecteur  $\overrightarrow{OC}$  est qu'il satisfait au théorème qui va suivre. Comme il est construit à partir de l'ensemble des variables que sont les vecteurs position  $\vec{r}_\alpha$ , on dit de  $\overrightarrow{OC}$  qu'il s'agit d'une *variable collective*.

**Théorème du centre de masse.** *Le centre de masse d'un système discret de points matériels adopte le même mouvement que celui d'un point matériel fictif auquel serait affecté la masse totale du système et sur lequel serait appliquée la résultante de toutes les forces extérieures au système :*

$$M \frac{d^2 \overrightarrow{OC}}{dt^2} \doteq \vec{F}_{ext}$$

Ce théorème est dû à Huygens (1629 - 1695) et il est systématiquement utilisé dès lors qu'il y a plus d'un point matériel qui composent le système dynamique étudié. Pour le démontrer, appliquons d'abord le principe fondamental de la dynamique, vis-à-vis du référentiel galiléen  $\mathcal{R}(O, xyz)$ , à chacun des points matériels  $P_\alpha$  appartenant au système, chacun de ces points étant soumis à une force quelconque  $\vec{F}_\alpha$ . Puis, en sommant l'ensemble des équations vectorielles ainsi obtenues, il vient :

$$\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \frac{d^2 \overrightarrow{OP}_\alpha}{dt^2} \doteq \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N [\vec{F}_{\alpha,ext} + \vec{F}_{\alpha,int}]$$

où l'on a décomposé chaque  $\vec{F}_\alpha$  en une partie provenant des forces extérieures au système de points matériels,  $\vec{F}_{\alpha,ext}$ , et l'autre due aux interactions intérieures au système,  $\vec{F}_{\alpha,int}$ .

Comme les masses  $m_\alpha$  sont des données indépendantes du temps, le membre de gauche de ce résultat se réécrit sous la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha \right) = M \frac{d^2 \overrightarrow{OC}}{dt^2}$$

Quant au membre de droite, il contient d'une part la résultante,  $\vec{F}_{ext}$ , de toutes les forces extérieures au système :

$$\vec{F}_{ext} := \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha,ext}$$

et d'autre part la résultante,  $\vec{F}_{int}$ , de toutes les forces intérieures, qui n'est rien d'autre que la somme de toutes les interactions de paire existant entre chacun de nos points matériels :

$$\vec{F}_{int} := \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha,int} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N \vec{F}_{\beta \rightarrow \alpha}$$

Or, cette somme est nulle (74), et le théorème est donc démontré.  $\square$

**Cas où le système est isolé.** Si le système de points matériels est isolé, alors le théorème du centre de masse devient :

$$\frac{d^2 \overline{OC}}{dt^2} \doteq \vec{0}$$

Le centre de masse  $C$  réalise dans ce cas un mouvement rectiligne uniforme. C'est un résultat qui équivaut au théorème de la quantité de mouvement totale d'un système isolé. En effet, d'après la définition du point  $C$ , on peut écrire :

$$\frac{d \overline{OC}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{d \overline{OP}_{\alpha}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \frac{\vec{p}_{tot}}{M}$$

Ce qui amène à conclure que lorsque le système est isolé, le vecteur  $\overline{OC}$  s'écrit, au cours du temps :

$$\overline{OC}(t) \doteq \frac{\vec{p}_{tot}}{M} t + \overline{OC}(t_0)$$

où  $\overline{OC}(t_0)$  est le vecteur position du point  $C$  à un instant  $t_0$  donné.

Le mouvement rectiligne uniforme du point matériel fictif  $C$  permet de choisir un référentiel galiléen dont l'origine est précisément  $C$  pour étudier les mouvements des  $N$  points matériels, à l'exemple du cas  $N = 2$  du chapitre qui suit.

## Compléments et exercices du chapitre 16

**C82. Définition du centre de masse indépendante de l'origine choisie.** Démontrer par l'absurde que si  $C$  est le barycentre des points  $P_{\alpha}$  affectés des masses  $m_{\alpha}$ , alors sa définition est indépendante de l'origine choisie.

**C83. Centre de masse de deux points matériels.** Montrer que le centre de masse  $C$  de deux points matériels  $M_1, M_2$ , de masses  $m_1, m_2$  respectivement, est situé sur la droite portée par  $\overline{M_1 M_2}$  entre  $M_1$  et  $M_2$ . Regarder les cas limites  $m_1 \gg m_2$  et  $m_2 \gg m_1$ .

**C84. Chocs élastiques, chocs inélastiques.** On traite souvent le choc entre deux particules isolées  $P_1, P_2$ , de masses  $m_1, m_2$  respectivement, de la façon suivante : tout d'abord, il faut dire que la notion de choc est d'origine macroscopique. En réalité, les deux points matériels interagissent entre eux (via la force de Coulomb par exemple s'ils sont chargés) et on appelle « *choc* » toute la durée pendant laquelle elles interagissent. Ainsi, avant le choc, les deux particules sont supposées être très éloignées l'une de l'autre pour ne pas interagir et leur quantité de mouvement totale est :  $\vec{p}_{tot,avt} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ . Après le choc, les deux particules sont à nouveau très éloignées l'une de l'autre et n'interagissent plus ; leur quantité de mouvement totale est  $\vec{p}_{tot,apr} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$ . Le théorème de la conservation de la quantité de mouvement totale énonce :

$$\vec{p}_{tot,avt} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \doteq \vec{p}_{tot,apr} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Si, au cours du choc, l'énergie mécanique totale des deux particules s'est conservée (pas de nouvelle particule émise suite au choc, pas de changement de l'état interne des deux particules) alors on dit que le choc est *élastique*. Avant le choc, l'énergie n'est que de l'énergie cinétique puisque les deux particules n'interagissent pas, et après aussi ; si bien qu'en cas de *choc élastique*, on peut ajouter l'équation de conservation suivante :

$$E_{tot,avt} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \doteq E_{tot,apr} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Dans le cas contraire, on parle de *choc inélastique*. Pour prendre un exemple macroscopique : si, au cours du choc entre deux boules, l'une d'elles a été déformée alors le choc est inélastique.

Un cas particulier est celui d'un *choc parfaitement inélastique* : les deux particules (ou point matériels) se sont accolées l'une à l'autre sans qu'il y ait perte de masse.

**C85. Chocs élastiques unidimensionnels.** Deux particules isolées  $P_1, P_2$ , de masses  $m_1, m_2$  respectivement, évoluent sur un axe  $Ox$ . Lorsqu'elles se rencontrent, le choc est élastique. On suppose connues les vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  des deux particules avant le choc. Déterminer leurs vitesses  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$  après le choc.

**C86. Chocs parfaitement inélastiques unidimensionnels.** Les deux particules du **C85** subissent maintenant un choc parfaitement inélastique : déterminer la vitesse de la nouvelle particule de masse  $(m_1 + m_2)$  après ce choc.

**C87. Chocs à deux et trois dimensions.** Hormis le cas particulier du choc unidimensionnel (**C85**, **C86**), les équations à notre disposition ne sont pas en nombre

suffisant pour pouvoir trouver les vitesses des deux particules après le choc. En effet, dans un problème de choc élastique à 3 dimensions, la conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie cinétique nous fournit 4 (3 + 1) équations pour 6 inconnues qui sont les composantes des vitesses après le choc ; tandis que pour un problème à 2 dimensions, on dispose de 3 (2 + 1) équations pour 4 inconnues. Il faut avoir recours à la nature de l'interaction entre les particules et aux lois de Newton pour chacune d'entre elles afin aller plus loin dans ce genre d'étude. On peut toutefois résoudre certains problèmes si on connaît l'une des deux vitesses finales à l'avance.

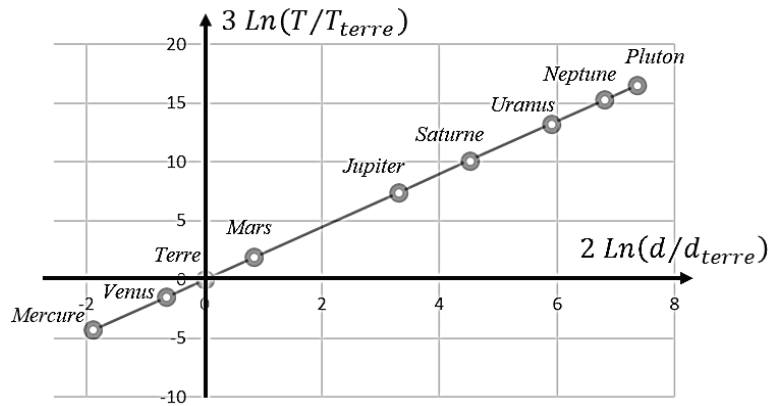
## LE PROBLÈME DE KEPLER

**79. Lois de Kepler.** Rappelons d'abord les trois lois découvertes par Kepler<sup>1</sup> :

**Première loi de Kepler.** Chaque planète décrit une ellipse autour du Soleil qui occupe un de ses foyers.

**Deuxième loi de Kepler.** Le rayon-vecteur joignant le Soleil à la planète balaie des aires égales en des durées égales.

**Troisième loi de Kepler.** Les carrés des périodes de révolution des planètes autour du Soleil sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.



**Figure 70.** Graphe logarithmique de la troisième loi de Kepler représentant  $\ln(T^3)$  en fonction de  $\ln(d^2)$  où  $d$  est le grand axe de l'orbite elliptique de la planète autour du Soleil ramené à celui de la Terre et  $T$  la période de révolution de cette planète ramenée à celle de la Terre. On remarque le « vide » entre Mars et Jupiter. Entre ces deux planètes se trouve la ceinture (principale) d'astéroïdes.

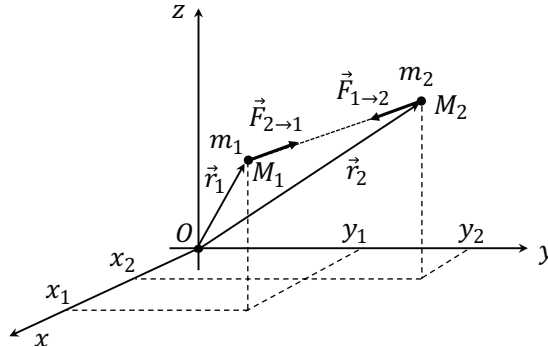
Nous allons maintenant démontrer ces trois lois empiriques à l'aide de la dynamique de Newton et de sa théorie de la gravitation.

**80. Le problème à deux corps ou problème de Kepler.** Le problème à deux corps ou problème de Kepler se pose de la façon qui suit : considérons deux corps célestes raisonnablement éloignés l'un de l'autre pour que l'on puisse les modéliser par deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$ , de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ . On suppose ces deux

<sup>1</sup> Chapitre 8.

points matériels isolés du reste de l'univers, ou tout au moins suffisamment éloignés de tout autre corps céleste pour que l'on puisse les considérer comme tels. Les deux corps célestes sont en interaction gravitationnelle et on demande le mouvement suivi par chacun d'eux.

Rapportons les vecteurs positions  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$  et  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$  à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}\{Oxyz; t\}$  *a priori* quelconque, tel que celui de la figure 71.



**Figure 71.** Les deux points matériels  $M_1, M_2$  en interaction gravitationnelle et le référentiel utilisé *a priori* pour décrire leurs mouvements.

Les mouvements possibles de chacun de ces deux points matériels seront connus si on parvient à résoudre les deux équations vectorielles de la dynamique ayant lieu pour chacun d'eux :

$$\begin{cases} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \doteq m_1 \vec{a}_1 & (1) \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \doteq m_2 \vec{a}_2 & (2) \end{cases}$$

où  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  est la force gravitationnelle que  $M_2$  exerce sur  $M_1$  et  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  celle que  $M_1$  exerce sur  $M_2$ . En vertu de la théorie newtonienne de la gravitation, ces forces s'écrivent :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

où  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  est le vecteur unitaire qui va de  $M_1$  vers  $M_2$ .

### 81. Réduction du problème à deux corps en un problème à un seul corps fictif.

Une fois le système de coordonnées choisi, les équations vectorielles (1) et (2) donnent lieu à 6 équations différentielles du second ordre, *a priori* couplées et non linéaires. Nous allons simplifier ce problème fastidieux en réalisant un changement de variables qui fait apparaître le centre de masse  $C$  des deux points matériels ; ce

qui devra nous permettre d'utiliser le théorème du centre de masse (ou celui de la quantité de mouvement totale du système) pour ce système isolé.

**Changement de variables.** Posons à cet effet :

$$\begin{cases} \vec{OC} := \vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{cases}$$

La variable  $\vec{R}$  est le vecteur position du centre de masse du système, comme convenu. Quant au choix de la variable  $\vec{r}$ , on peut considérer qu'il est dicté par l'expression des forces de gravitation où intervient le vecteur différence :  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Ce vecteur, lorsqu'il est connu, définit de façon univoque la position du second point matériel par rapport au premier (ou inversement) : il décrit le mouvement relatif d'un point matériel par rapport à l'autre

Il est clair que trouver les nouvelles variables  $\vec{R}$  et  $\vec{r}$  en fonction du temps est équivalent à trouver  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  en fonction du temps puisque ces relations linéaires s'inversent sans difficulté :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases}$$

Ce changement de variables étant posé, il nous faut maintenant écrire les équations du mouvement pour les nouvelles variables.

**Solution pour la nouvelle variable  $\vec{R}$ , référentiel du centre de masse.** L'équation qui régit l'évolution du centre de masse a déjà été obtenue au chapitre précédent. On la retrouve simplement ici en ajoutant les équations vectorielles (1) et (2) :

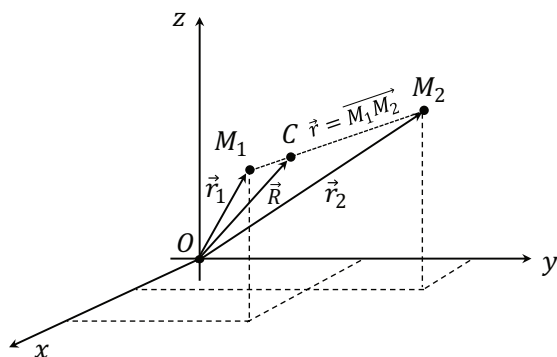
$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 \doteq \vec{0} &\Leftrightarrow m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \doteq \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \doteq \vec{0} \Leftrightarrow \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \doteq \vec{0} \end{aligned}$$

Le centre de masse effectue donc un mouvement rectiligne uniforme qui, combiné avec la conservation de la quantité de mouvement totale du système, s'écrit sous la forme déjà rencontrée au chapitre 16 :

$$\vec{R}(t) \doteq \frac{\vec{p}_{tot}}{(m_1 + m_2)} t + \vec{R}(t_0)$$

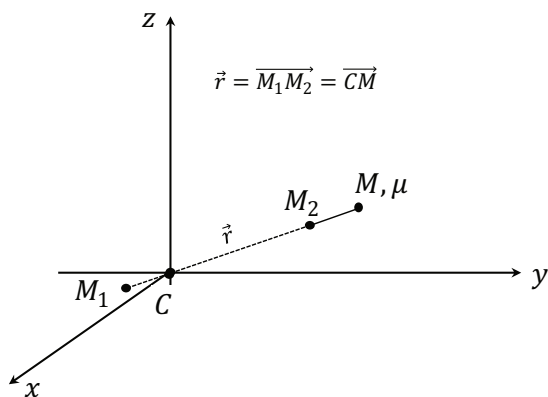
où  $\vec{p}_{tot}$  est la quantité de mouvement totale des deux points matériels qui est un vecteur constant correspondant à une donnée initiale du problème, et où  $\vec{R}(t_0)$  est la position initiale (au temps  $t_0$ ) du centre de masse relativement au référentiel  $\mathcal{R}$ .

Profitons de ces résultats pour opérer un changement de référentiel galiléen. Jusqu'à présent le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  était arbitraire, mais le mouvement rectiligne uniforme du point  $C$  permet d'adopter  $\mathcal{C}\{C, xyz ; t\}$  en tant que nouveau référentiel galiléen. Le point  $C$  étant situé sur le segment de droite  $[M_1M_2]$ , le caractère central des forces gravitationnelles en présence va ressortir clairement.



**Figure 72.** Le centre de masse  $C$  est situé sur le segment de droite qui relie les deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$ .  $C$  évolue dans un mouvement rectiligne uniforme vis-à-vis du référentiel  $\mathcal{R}\{O, xyz ; t\}$ .

Pour réaliser ce changement de référentiel, il suffit de déplacer notre ancienne origine  $O$  au point  $C$  et de considérer ce dernier point comme fixe, c'est-à-dire de prendre le point de vue de  $\mathcal{C}\{C, xyz ; t\}$ . On vérifie à l'aide des lois de la cinématique que cela revient à poser  $\vec{R}(t_0) \doteq \vec{0}$  et  $\vec{p}_{tot} \doteq \vec{0}$  dans les résultats obtenus ci-dessus, tout en considérant que dorénavant notre origine  $O$  est le point  $C$ . Ce choix n'enlève



**Figure 73.** Le nouveau référentiel  $\mathcal{C}\{C, xyz ; t\}$  et le point matériel fictif  $M$  auquel est associée la masse réduite  $\mu$  (voir texte).

rien à la généralité du problème à deux corps : il s'agit d'un simple choix de référentiel galiléen mieux adapté que les autres pour décrire le mouvement des deux astres.

Au sein du référentiel  $\mathcal{C}$ , les nouveaux rayons vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  sont directement proportionnels à la variable  $\vec{r}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \overrightarrow{CM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_2 = \overrightarrow{CM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{array} \right. \quad (4)$$

Ainsi, à des facteurs constants près, déterminer  $\vec{r}(t)$  c'est déterminer  $\vec{r}_1(t)$  et  $\vec{r}_2(t)$ .

**Équation pour la variable  $\vec{r}$  : retour à un problème à un corps.** On obtient l'équation d'évolution pour la variable  $\vec{r}$  en divisant (1) par  $m_1$ , (2) par  $m_2$  et en soustrayant membre à membre ces équations. En effet, on a d'abord :

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \doteq \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{m_1} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

ou encore :

$$\left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \doteq \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

avec  $r = \|\vec{r}\|$ . Il faut remarquer que tout se passe comme si on avait là une équation de la dynamique pour un point matériel  $M$  de masse  $\mu := m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , repéré depuis le point  $C$  par le rayon vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{CM}$ , en mouvement sous l'effet de la force  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  : le problème initial à deux corps est donc ramené à un problème à un seul corps fictif. La masse  $\mu$  est appelée *masse réduite* du problème à deux corps. Elle est telle que :

$$\frac{1}{\mu} := \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Finalement, l'équation de la dynamique de ce corps fictif prend la forme :

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \doteq -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r = -G \frac{\mu (m_1 + m_2)}{r^2} \vec{u}_r \quad (5)$$

où  $\vec{u}_r = \vec{r}/r$  est le vecteur unitaire qui joint l'origine  $C$  du référentiel au point  $M$ <sup>1</sup>. De cette équation, on conclut que notre point fictif est en interaction gravitationnelle avec le point matériel fictif  $C$ , centre de masse du système, affecté de sa masse totale  $m_1 + m_2$ . La force subie par le point  $M$  est donc centrale, constamment dirigée vers

<sup>1</sup> Dit autrement, le changement de référentiel nous a permis d'écrire :  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \vec{u}_r$ .

le point origine  $C$ , et nous allons pouvoir utiliser nos connaissances vis-à-vis de ce type de forces.

**82. Application du théorème du moment cinétique : loi des aires.** Aux chapitres 5 et 15 nous avons démontré que le mouvement d'un point matériel sous l'influence d'une force centrale s'effectue dans un plan perpendiculaire à la direction du moment cinétique qui est une intégrale première vectorielle du mouvement. Convenons alors d'orienter les axes  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$  du référentiel  $\mathcal{C}$  de telle sorte que ce mouvement ait lieu dans le plan  $xCy$ , le moment cinétique du point matériel fictif  $M$  étant dirigé le long de l'axe  $Cz$ . Deux coordonnées seulement suffisent à repérer  $M$  dans le plan  $xCy$  : nous choisirons les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre l'axe  $Cx$  et le rayon vecteur  $\vec{r} = \overline{CM}$ .

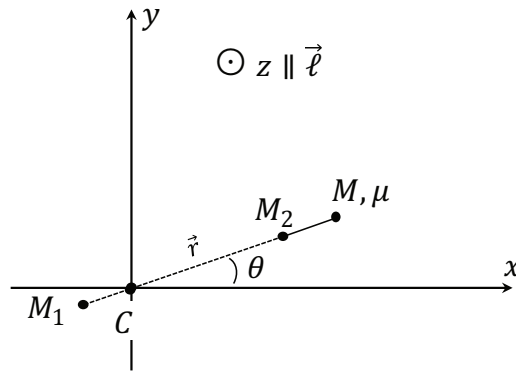


Figure 74. Choix d'orientation des axes du référentiel  $\mathcal{C}\{C, xyz; t\}$  : le mouvement du point matériel fictif  $M$  a lieu dans le plan  $xCy$ .

Dans ces conditions, le moment cinétique  $\vec{\ell}$  du point matériel fictif s'écrit :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \mu \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \wedge \mu (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

Puisque la norme  $\ell = \|\vec{\ell}\|$  de ce moment cinétique est constante, cela entraîne la relation suivante entre les variables  $r$  et  $\theta$  :

$$r^2 |\dot{\theta}| \doteq Cte = \frac{\ell}{\mu}$$

relation qui n'exprime rien d'autre que la loi des aires déjà rencontrée aux chapitres 5 et 15. Comme les rayons vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  sont proportionnels à  $\vec{r}$ , ils satisfont également à la loi des aires et la seconde loi de Kepler est démontrée.

**83. Trajectoire : formule de Binet.** Déterminer les équations horaires de la trajectoire :  $r(t)$  et  $\theta(t)$  demande des efforts mathématiques importants. On se

contentera ici de déterminer l'équation de la trajectoire  $r(\theta)$ . Pour cela, la formule de Binet démontrée au chapitre 5 est tout indiquée.

Après transposition des notations et après avoir remplacé la constante des aires  $C$  par  $\ell/\mu$ , cette formule qui relie la trajectoire cherchée à l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\left(\frac{\ell}{\mu}\right)^2 w^2 \left[ \frac{d^2w}{d\theta^2} + w \right] \vec{u}_r$$

où on a posé :  $w := 1/r$ . Puis, en identifiant cette écriture de l'accélération avec la précédente (équation (5)), on obtient l'équation différentielle suivante pour  $w$  :

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w \doteq \frac{G \mu m_1 m_2}{\ell^2}$$

La solution générale d'une telle équation nous est maintenant familière : elle est la somme de la solution générale à l'équation sans second membre [ici :  $A \cos(\theta + \phi)$ ] et d'une solution particulière de l'équation avec second membre [ici :  $G \mu m_1 m_2 / \ell^2$ ]. Nous l'écrivons sous la forme :

$$w = \frac{1}{r} \doteq \frac{G \mu m_1 m_2}{\ell^2} \{1 + e \cos(\theta + \phi)\} \quad (6)$$

où  $e$  et  $\phi$  sont des constantes à déterminer par les conditions initiales. Il s'agit là d'une famille de courbes bien connues appelées *coniques*<sup>1</sup>. La constante  $\phi$  importe peu : elle nous renseigne sur la valeur de  $r$  pour  $\theta = 0$  lorsque  $e$  est donnée ; mais la valeur de  $\theta$  contient une part d'arbitraire puisqu'elle dépend du choix initial de l'orientation de l'axe  $Cx$  qui n'a pas encore été convenu : on peut donc choisir maintenant, sans restreindre la généralité du problème, une orientation de cet axe telle que  $\phi = 0$ .

La constante  $e$  est sans dimensions et s'appelle *excentricité*. Elle génère la famille des courbes coniques lorsqu'elle varie dans l'intervalle  $[0, \infty[$ <sup>2</sup>. On démontre dans les cours de géométrie que :

- Lorsque  $e = 0$  : la courbe est un cercle de centre  $C$  et de rayon  $r = \ell^2 / G \mu m_1 m_2$ .
- Lorsque  $0 < e < 1$  : la courbe est une ellipse dont l'un des foyers est  $C$ . Le grand axe de l'ellipse est dirigé le long de  $Cx$  et le petit axe le long de  $Cy$ .
- Lorsque  $e = 1$  : la courbe est une parabole de foyer  $C$  et d'axe de symétrie  $Cx$ .
- Lorsque  $e > 1$  : la courbe est une branche d'hyperbole de foyer  $C$  et d'axe de symétrie  $Cx$ .

<sup>1</sup> Ces courbes sont issues de l'intersection entre un plan et un cône.

<sup>2</sup> Le cas  $e < 0$  n'apporte pas de nouvelles courbes car il est équivalent à avoir fait le choix :  $\phi = \pi$  et  $e > 0$ .

La première loi de Kepler est donc démontrée : les courbes fermées ( $0 \leq e < 1$ ) réalisées par les astres  $M_1$  et  $M_2$  sont bien des ellipses (le cercle en est une forme dégénérée) dont l'un des foyers est le centre de masse du système (figure 75). Kepler énonça cette loi pour le cas  $m_1 \gg m_2$  discuté un peu plus bas.

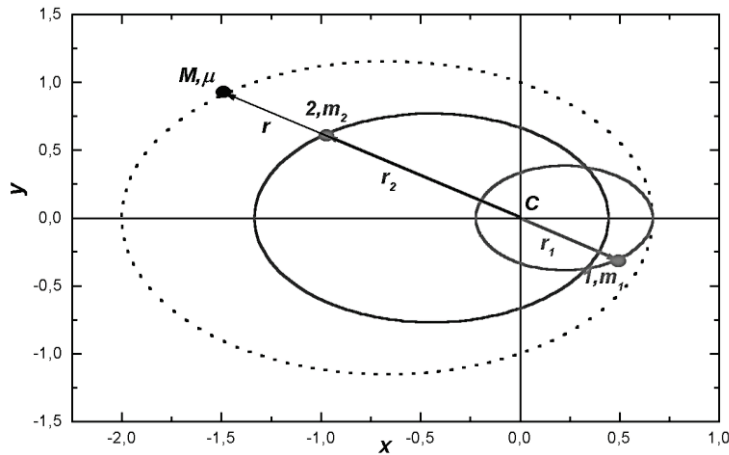


Figure 75. Trajectoires obtenues pour le cas  $e = 0.5$  et  $m_1/m_2 = 2$ .

Le cas des courbes ouvertes ( $e \geq 1$ , figure 76) montre que les deux astres s'éloignent définitivement l'un de l'autre après avoir interagi.

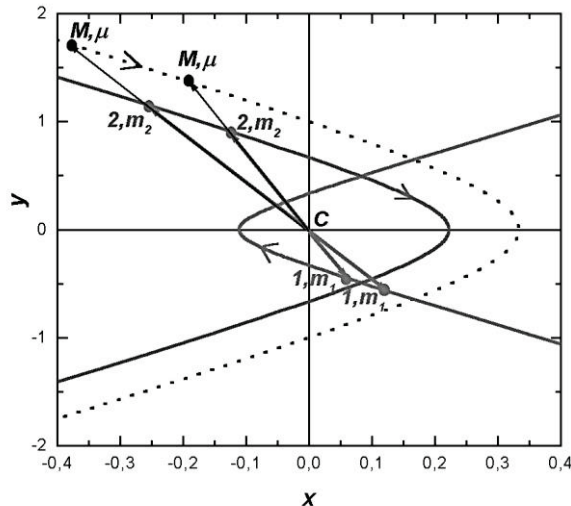
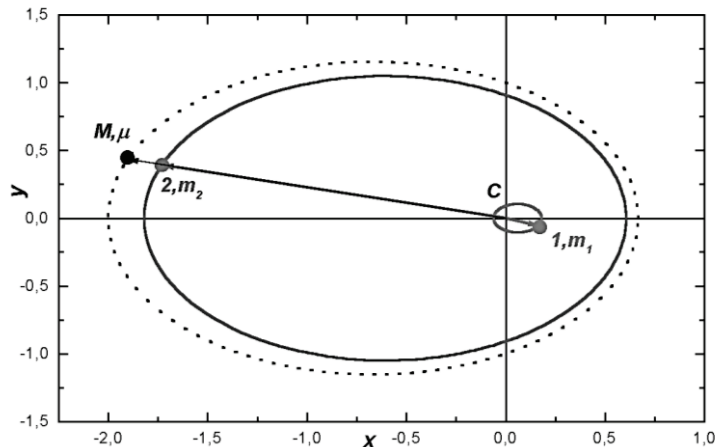


Figure 76. Trajectoires obtenues pour le cas  $e = 2$  et  $m_1/m_2 = 2$ . La trajectoire en pointillé est la trajectoire du mouvement relatif du point matériel 1 vu par le point matériel 2 (ou réciproquement). Les deux autres trajectoires sont les trajectoires « absolues » des deux points matériels 1 et 2 vues depuis le référentiel du centre de masse C.

**Cas où  $m_1 \gg m_2$ .** Dans de nombreuses situations, l'un des deux objets a une masse bien plus importante que l'autre : c'est le cas du système Soleil-Terre puisque la masse de la Terre est :  $m_T = m_2 = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ , tandis que celle du soleil est :  $m_S = m_1 = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ , soit un rapport  $m_2/m_1$  voisin de  $3 \times 10^{-6}$ . Les relations (3) et (4) donnant  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  en fonction de  $\vec{r}$  s'approximent :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \cong -\frac{m_2}{m_1} \vec{r} \xrightarrow{m_2/m_1 \rightarrow 0} \vec{0} \\ \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \cong \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \vec{r} \xrightarrow{m_2/m_1 \rightarrow 0} \vec{r} \end{cases}$$

Le mouvement de l'objet le plus massif (ici le soleil,  $\vec{r}_1$ ) se confond alors avec celui du centre de masse  $C$  (figure 77) : dans le référentiel du centre de masse, cet objet reste donc immobile en  $C$ , tandis que le mouvement de l'objet le moins massif (ici la terre,  $\vec{r}_2$ ) se confond avec le mouvement relatif des deux objets qui est repéré par  $\vec{r}$ . C'est dans le cadre de cette approximation que la première loi de Kepler doit être comprise.



**Figure 77.** Trajectoires obtenues pour le cas  $e = 0.5$  et  $m_1/m_2 = 10$ . Plus ce rapport augmente, plus la trajectoire du point matériel 2 (le moins massif) se confond avec la trajectoire du mouvement relatif entre les deux points matériels, tandis que le point matériel 1 (le plus massif) tend à rester immobile au point  $C$ , centre de masse du système. C'est ce qui se passe pour le cas des planètes autour du soleil.

**84. Une autre constante du mouvement : l'énergie mécanique.** Le mouvement des planètes autour du Soleil vient d'être décrit à l'aide de plusieurs paramètres qui sont : la constante de la gravitation  $G$ , les masses  $m_1$  et  $m_2$ , le moment cinétique  $\ell$  du point matériel fictif (qui s'identifie au moment cinétique de la planète dans l'approximation  $m_2/m_1 \ll 1$ ) et enfin l'excentricité  $e$  qui génère la famille de

courbes possibles pour les trajectoires<sup>1</sup>. Parmi ces paramètres, certains sont des données du problème ( $G$ ,  $m_1$  et  $m_2$ ), caractéristiques du système étudié, tandis que d'autres correspondent à des conditions initiales ( $\ell$  et  $e$ ) qui peuvent donner lieu, pour un même système, à différentes trajectoires possibles. Le moment cinétique  $\ell$ , constante du mouvement, est relié à la vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}(t=0)$  et à la distance initiale  $r(t=0)$  de la planète par rapport au soleil. Par contre, l'excentricité  $e$  est apparue dans la section précédente comme un paramètre géométrique issu de la résolution de l'équation différentielle de la trajectoire sans être relié à une quelconque condition initiale. L'objectif de cette section est de combler cette lacune : l'excentricité est reliée à une intégrale première du mouvement qui est l'énergie mécanique du système.

Au chapitre 13, nous avons longuement discuté du théorème de l'énergie mécanique et de son utilisation via le tracé d'une courbe d'énergie potentielle pour résoudre de façon qualitative le problème du mouvement unidimensionnel en fonction des valeurs possibles du paramètre énergie. On peut appliquer cette méthode au problème bidimensionnel du mouvement des planètes de la façon qui suit (voir **C80**). L'énergie cinétique du système peut s'écrire, après quelques calculs :

$$E_C = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 \doteq \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$$

où l'expression finale est obtenue après avoir remplacé  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  par leurs valeurs en fonction de  $\vec{R}$  et  $\vec{r}$  en utilisant les équations (3) et (4), puis en ayant fait  $\vec{R} \doteq \vec{0}$  en raison du changement de référentiel.

Vous vérifierez par vous-même que l'énergie potentielle du système est<sup>2</sup> :

$$E_P = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

de sorte que l'énergie mécanique du système, constante du mouvement, s'écrit :

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} \doteq E$$

Puis, en remplaçant  $\dot{\vec{r}}$  par son expression dans la base polaire :  $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ , et en utilisant la loi des aires :

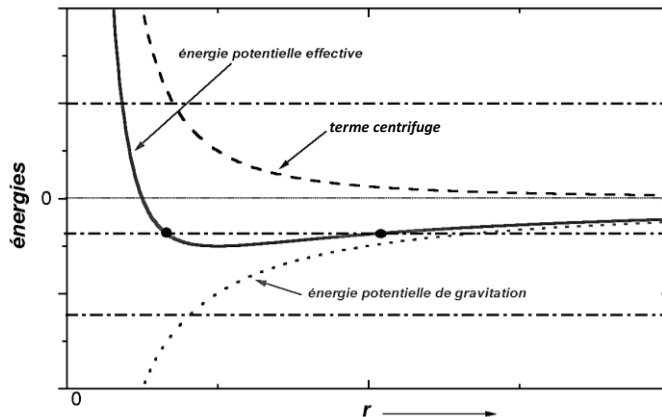
$$E_m \doteq E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \left[ \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{\mu r^2} - G \frac{m_1 m_2}{r} \right] \quad (7)$$

<sup>1</sup> On devrait rajouter à ces données la position initiale du centre de masse  $\vec{R}_0$  et la quantité de mouvement du système  $\vec{P}_{tot}$ . Toutes deux ont été prises égales à  $\vec{0}$  lors du changement de référentiel galiléen.

<sup>2</sup> En prenant le gradient de  $E_P$  par rapport à  $\vec{r}_1$ , on trouve la force de gravitation que 2 exerce sur 1, tandis qu'en prenant le gradient de  $E_P$  par rapport à  $\vec{r}_2$ , on trouve la force de gravitation que 1 exerce sur 2.

En examinant bien ce résultat, on découvre une expression très analogue à ce que nous avons obtenu au chapitre 13 : tout se passe en effet comme si le premier terme représentait l'énergie cinétique d'une particule de masse  $\mu$  se déplaçant le long de l'axe des  $r$  (axe porté par le vecteur  $\vec{u}_r$ ), tandis que le second terme entre crochets fait office d'une énergie potentielle à laquelle serait soumise cette particule. L'analogie a ses limites car le problème étudié ici est à deux dimensions : ainsi, la variable  $r$  dans ce problème ne peut pas être négative puisqu'elle représente la distance du centre de masse  $C$  au point  $M$  représentant la particule fictive de masse  $\mu$ . Quant à la quantité  $\mu \dot{r}^2/2$ , elle ne représente qu'une fraction de l'énergie cinétique : celle associée au mouvement le long de l'axe porté par  $\vec{u}_r$ . L'autre fraction, celle associée au mouvement de rotation porté par le vecteur  $\vec{u}_\theta$ , a été reportée dans le terme entre crochets et son expression a été modifiée grâce à la loi des aires. On obtient ainsi un terme en  $\ell^2/2\mu r^2$  que l'on a coutume d'appeler « terme *centrifuge* » (qui fuit le centre) : sa présence rend compte de l'inertie<sup>1</sup> de la particule fictive qui empêche sa chute sur le centre  $C$  en raison de sa vitesse initiale qui n'est pas dans la direction de  $C$  si  $\ell \neq 0$ . La somme de ce terme et de l'énergie potentielle de gravitation forme l'*énergie potentielle effective* associée au problème :  $E_p^{eff}(r)$ .

Les différences de cette analogie avec les problèmes unidimensionnels ayant été soulignées, on peut appliquer la méthode décrite au chapitre 13. Le potentiel effectif est représenté sur la figure 78 pour  $\ell \neq 0$  et pour quelques valeurs différentes de l'énergie mécanique du système représentée par des horizontales (puisque  $E_m \doteq E = Cte$ ).



**Figure 78.** Courbe de l'énergie potentielle effective du point matériel fictif dans le problème de Kepler.

<sup>1</sup> Ce terme est en relation directe avec les forces d'inertie (chapitre 18) qui apparaissent dans le référentiel non galiléen qu'est la planète en rotation autour de son soleil.

L'examen de cette figure amène aux conclusions suivantes :

- Si  $E \geq 0$ , nous avons à faire à un *mouvement de diffusion*. Il existe une valeur minimale de  $r$  en deçà de laquelle le mouvement n'est pas possible ; cette valeur est appelée *distance minimale d'approche*. Une fois cette distance atteinte, le point matériel fictif n'a pas d'autre choix que de s'éloigner indéfiniment du centre  $C$  que l'on appelle alors *centre de diffusion*. La distance minimale d'approche,  $b$ , est obtenue en résolvant l'équation :  $E = E_p^{eff}(b)$ .
- Si  $-\mu G^2 m_1^2 m_2^2 / 2\ell^2 < E < 0$ , le *mouvement est lié*. Le point matériel fictif est astreint à rester dans une zone de l'espace dans le voisinage de  $C$  caractérisée par une valeur minimale de  $r$  (le *périhélie*) et une valeur maximale (l'*aphélie*). Ces deux distances,  $r_{\pm}$ , sont obtenues en résolvant l'équation :  $E = E_p^{eff}(r_{\pm})$ .
- Si  $E = 0$ , la valeur  $r_+$  est rejetée à l'infini et la valeur  $r_-$  s'apparente alors à la distance minimale d'approche  $b$  : le mouvement s'assimile donc à un mouvement de diffusion, mais on peut montrer que le point matériel fictif possède dans ce cas spécial une vitesse nulle à l'infini. C'est le cas limite entre mouvement lié et mouvement de diffusion.
- Si  $E = -\mu G^2 m_1^2 m_2^2 / 2\ell^2$ , une seule valeur de  $r$  est possible : le mouvement est donc circulaire et le rayon du cercle correspond au minimum du potentiel effectif. En vertu de la loi des aires, ce mouvement circulaire est uniforme.
- Si  $E < -\mu G^2 m_1^2 m_2^2 / 2\ell^2$ , le mouvement n'est jamais possible.

Cette analyse qualitative montre clairement un lien entre l'énergie du système et le paramètre excentricité, lien qui va maintenant être mis en lumière.

**Lien quantitatif entre excentricité et énergie.** Plusieurs méthodes sont possibles. La plus simple est sans doute d'examiner ce qu'il se passe aux points de la trajectoire où la vitesse radiale  $\dot{r}$  est nulle. Ces points correspondent soit à la distance minimale d'approche, soit à l'aphélie et au périhélie<sup>1</sup>. En ces points, la relation (7) s'écrit :

$$E \doteq \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{\mu r^2} - G \frac{m_1 m_2}{r} \Leftrightarrow r^2 + \frac{G m_1 m_2}{E} r - \frac{\ell^2}{2\mu E} \doteq 0$$

C'est là une équation du second degré en  $r$  dont la résolution nous donnera la valeur de  $r$  pour ces points spéciaux en fonction des paramètres du problème, dont l'énergie. On trouve :

$$r_{min,max} \doteq \frac{G m_1 m_2}{2E} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 E \ell^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}} \right]$$

<sup>1</sup> En effet : c'est forcément en ces deux points que  $\dot{r} = 0$ , car si ça n'était pas le cas, le point matériel dépasserait ces points limites.

Les conditions d'existence de ces solutions sont à discuter ( $r$  doit être positif et l'expression sous la racine aussi). Faites-le et vous observerez que l'on retombe sur la discussion précédente... Pour ce qui suit, on ne traite que le cas  $E \geq 0$ ,<sup>1</sup> ce qui implique de choisir le signe + dans l'expression ci-dessus pour obtenir la seule valeur acceptable  $r_{min}$ .

Par ailleurs, on peut aussi exprimer la valeur de  $r$  en ces points spéciaux grâce à l'équation de la trajectoire (équation (6) avec  $\phi = 0$ ) qui s'exprime en fonction de l'excentricité. On voit facilement que la valeur minimale de  $r$  est obtenue pour la valeur  $\theta = 0$ , ce qui fournit :

$$r_{min} \doteq \frac{\ell^2}{\mu G m_1 m_2 (1 + e)}$$

En égalant ce résultat avec le précédent, on obtient, après quelques manipulations algébriques, la relation cherchée entre énergie mécanique et excentricité :

$$e \doteq \sqrt{1 + \frac{2 E \ell^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}}$$

**85. La troisième loi de Kepler.** La troisième loi de Kepler ne concerne que les mouvements elliptiques (courbes fermées,  $E < 0$ ,  $0 \leq e < 1$ ) et relie la période de révolution au (demi-)grand axe de l'ellipse associée au mouvement relatif. Pour démontrer cette loi, nous allons utiliser la loi des aires qui stipule que la vitesse aréolaire est constante au cours du mouvement. On se rappelle que cette vitesse aréolaire s'écrit :  $v_{aré} = dS/dt = r^2 \dot{\theta} / 2$ , où  $dS$  est l'aire élémentaire balayée par le rayon-vecteur pendant la durée  $dt$ , et qu'en raison de la loi des aires elle est constante et vaut :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2\mu} \Leftrightarrow dS = \frac{\ell}{2\mu} dt$$

Or, au cours d'une période  $T$ , l'aire balayée par le rayon vecteur est simplement égale à l'aire  $S$  de l'ellipse, si bien qu'en intégrant la relation ci-dessus sur une telle période, on trouve :

$$S = \frac{\ell T}{2\mu}$$

Or l'aire d'une ellipse est :  $S = \pi a b$  où  $a$  est le demi-grand axe et  $b$  le demi-petit axe de l'ellipse. Par ailleurs, ce dernier est relié à  $a$  par la relation géométrique :  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ , on obtient ainsi :

---

<sup>1</sup> On vérifie en effet que l'on obtiendra le même résultat final pour les autres valeurs de l'énergie.

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{\ell T}{2 \mu} \Leftrightarrow T = \frac{2 \pi \mu a^2}{\ell} \sqrt{1 - e^2}$$

Enfin, il est possible d'éliminer  $e$  et  $\ell$  de ce résultat en utilisant à la fois les relations du paragraphe précédent donnant  $r_{min,max}$  ainsi que la relation entre excentricité et énergie ; en effet, on a :

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = -\frac{G m_1 m_2}{2E} = \frac{\ell^2}{\mu G m_1 m_2 (1 - e^2)}$$

Soit :

$$\frac{\sqrt{1 - e^2}}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{a \mu G m_1 m_2}}$$

En injectant cette dernière relation dans l'expression de  $T$  ci-dessus et en remplaçant  $\mu$  par sa valeur en fonction de  $m_1$  et  $m_2$ , on trouve la troisième loi de Kepler :

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{G (m_1 + m_2)} a^3$$

qui exprime que le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe.

**Cas particulier où  $m_1 \gg m_2$ .** Kepler découvrit cette loi pour le cas où la masse  $m_2$  de la planète est négligeable devant la masse  $m_1$  du soleil. Dans ces conditions, la loi s'écrit de façon approximée :

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{G m_1} a^3$$

Kepler affirmait que le rapport  $T^2/a^3$  était le même pour toutes les planètes du système solaire ce qui n'est vrai que dans le cadre de cette approximation.

En conclusion de ce chapitre, nous venons de résoudre le problème dit à deux corps en interaction gravitationnelle. Le problème à 3 corps est plus redoutable. On sait qu'il existe une solution mais qui ne s'exprime que sous la forme d'une série qui ne converge que très lentement (solution de Sundman, 1906). Poincaré (1890) a démontré que le problème pouvait être très sensible aux conditions initiales que l'on donne à chacun des 3 corps, et plus généralement à chacun des  $N$  corps pour le même problème à  $N$  corps cette fois. Wang, en 1991, a généralisé la solution de Sundman pour ce problème général.

Planète	½ grand axe (UA)	Période de révolution (années)	Vitesse orbitale moyenne (km/s)	Excentricité de l'orbite	Période de rotation	Masse (réf. Terre)	Pesanteur en surface (m/s <sup>2</sup> )
Mercure	0.3871	0.241	47.4	0.2056	58j 16h	0.055	3.70
Vénus	0.7233	0.615	35.0	0.00678	243j	0.815	8.87
Terre	1.000	1.000	29.8	0.0167	23h 56mn	1.000	9.81
Mars	1.5237	1.881	24.1	0.09339	24h 37mn	0.107	3.71
Jupiter	5.2029	11.86	13.1	0.04839	9h 55mn	317.8	24.8
Saturne	9.5367	29.44	9.64	0.0539	10h 33mn	95.15	10.44
Uranus	19.189	84.05	6.8	0.04726	17h 12mn	14.54	8.87
Neptune	30.069	164.79	5.4	0.00859	16h 06mn	17.14	11.15

**Figure 79.** Principales données du système solaire. Indication :  $1UA = 149\,597\,870\,700\,m$ , qui est à peu près la distance moyenne Terre-Soleil. UA : Unité Astronomique

## Compléments et exercices du chapitre 17

**C88. Encore une intégrale première : le vecteur de Runge-Lenz.** Découvert plusieurs fois depuis les années 1700, ce vecteur constant du problème de Kepler fut popularisé dans la communauté physicienne par Gibbs, Runge, Lenz et Pauli<sup>1</sup>. Il s'écrit :

$$\vec{A} := \vec{p} \wedge \vec{\ell} - \mu G m_1 m_2 \vec{u}_r$$

où  $\vec{p} = \mu \vec{v}$  est la quantité de mouvement du point matériel fictif  $M$  de masse  $\mu$  et de vitesse  $\vec{v}$ , repéré dans le plan  $xCy$  de la trajectoire par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  au sein du référentiel du centre de masse et par son vecteur position :  $\vec{r} = r \vec{u}_r$ .

On vérifie d'abord que ce vecteur est bien constant sur les courbes solutions :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{\ell} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{\ell}}{dt} - \mu G m_1 m_2 \frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= \mu \vec{a} \wedge \vec{\ell} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{\ell}}{dt} - \mu G m_1 m_2 \dot{\theta} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

<sup>1</sup> J.W. Gibbs (1839 – 1903), travaux en thermodynamique statistique et analyse vectorielle. C. Runge (1856 – 1927), travaux en spectroscopie et mathématiques. W. Lenz (1888 – 1957), travaux en physique atomique. W. Pauli (1900, 1958), travaux en relativité, mécanique quantique et théorie des champs.

$$\begin{aligned} &\doteq \left( -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \right) \wedge (\mu r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z) + \vec{p} \wedge \vec{0} - \mu G m_1 m_2 \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ &= \mu G m_1 m_2 \dot{\theta} \vec{u}_\theta - \mu G m_1 m_2 \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0} \end{aligned}$$

Où, pour faire ce calcul, l'équation du mouvement de la particule fictive (**81**, équation (5)) et la conservation de son moment cinétique ont été utilisées (**82**).

À partir de ce vecteur, on déduit aisément l'équation de la trajectoire. Appelons  $\theta'$  l'angle que fait  $\vec{A}$  avec  $\vec{r}$  et  $A := \|\vec{A}\|$  sa norme. Alors :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = A r \cos \theta' = (\vec{p} \wedge \vec{\ell}) \cdot \vec{r} - \mu G m_1 m_2 r$$

Or, le produit mixte dans cette égalité peut se réécrire (Annexe 1) :  $(\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{\ell} = \ell^2$ . D'où :

$$A r \cos \theta' = \ell^2 - \mu G m_1 m_2 r$$

Et puisque  $\ell^2$  et  $A$  sont constantes sur les courbes solutions, on obtient ainsi l'équation de la trajectoire :

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu G m_1 m_2}{\ell^2} \left\{ 1 - \frac{A}{\mu G m_1 m_2} \cos \theta' \right\}$$

En comparant ce résultat à celui obtenu au **83** (équation (6)), on voit que la norme du vecteur de Runge Lenz est directement liée à l'excentricité  $e$  de la courbe :

$$A = e \mu G m_1 m_2$$

en ayant convenu d'orienter l'axe  $Ox$ , comme au **83**, pour que  $\vec{A}$  soit dirigé le long de cet axe ( $\theta' = \theta + \phi$ ,  $\phi = 0$ ). La connaissance du vecteur de Runge Lenz fournit donc la trajectoire du point matériel fictif.

### **C89. Le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène et le modèle de Bohr (1913).**

Vers 1910, les expériences menées par Rutherford, Marsden et Geiger, poussèrent la physique à adopter un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène qui est l'atome le plus simple du tableau périodique. Il est constitué d'un proton de masse  $M$  et de charge  $+q$  ( $q > 0$ ) et d'un électron de masse  $m$  et de charge  $-q$ . Ces deux particules interagissent entre elles via la force de Coulomb qui (*cf* chapitre 10) est environ  $10^{40}$  fois supérieure leur interaction gravitationnelle que l'on néglige. Mais, comme la force de Coulomb possède la même structure que la force gravitationnelle, les résultats de ce chapitre valent aussi pour cette force de Coulomb : reprendre l'ensemble du chapitre en modifiant ce qui doit être modifié pour étudier ce modèle planétaire.

• Ce modèle posait question car on sait grâce à la théorie électromagnétique qu'une particule chargée et accélérée<sup>1</sup> rayonne de l'énergie sous forme de rayonnement lumineux<sup>2</sup>. En 1913, Bohr proposa un modèle simple dans lequel il faisait intervenir les idées de Planck (1900) et d'Einstein (1905) : en ne se préoccupant que des trajectoires circulaires et en admettant le proton fixe au centre du référentiel, il émit l'idée que seules certaines d'entre elles étaient stables<sup>3</sup> et que pour passer d'une telle orbite circulaire à une autre, l'électron émet un quantum de lumière d'énergie  $\Delta E = h\nu$ , où  $\Delta E$  est la différence d'énergie (mécanique) entre les deux orbites circulaires stables,  $h$  est la constante de Planck et  $\nu$  la fréquence lumineuse émise. Ce faisant, il retrouvait une loi expérimentale découverte par Balmer en 1885 et complétée par d'autres (Lyman, Paschen,...) à savoir que les fréquences lumineuses émises par un gaz d'hydrogène lorsqu'il est excité par un champ électrique suivent une loi qui peut s'écrire :

$$h\nu_{nn'} = A \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right), \quad n' > n$$

où  $A$  est un coefficient empirique et  $n, n'$  deux entiers positifs non nuls.

Montrer, comme l'a fait Bohr, que l'énergie d'une orbite circulaire (proton fixe au centre) peut s'écrire de deux façons dans le cadre du modèle classique précédent :

$$E = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0) r_*} = -\frac{1}{2} m r_*^2 \omega_{circ}^2$$

Supposer ensuite, comme l'a fait Bohr, que chaque orbite circulaire soit caractérisée par un nombre entier  $n$  de telle sorte que :  $E = E_n = \hbar \omega_{circ} f(n)$  où  $\hbar$  est la constante de Planck  $h$  divisée par  $2\pi$  :  $\hbar = h/2\pi$  et  $f$  une fonction de  $n$  à déterminer. Appliquer les idées de Bohr relatives ci-dessus pour en déduire que la fonction  $f$  doit s'écrire comme :  $f(n) = C n$  où  $C$  est une constante indéterminée.

• Pour déterminer la constante  $C$ , Bohr admit qu'aux grands nombres quantiques on devait retrouver le cas classique, c'est-à-dire que la fréquence de la lumière émise ne devait pas différer de la fréquence de rotation ( $\nu_{circ} = \omega_{circ}/2\pi$ ) de l'électron sur son orbite circulaire. Cela lui permit de déterminer  $C$  qu'il trouva être égale à  $1/2$ .

<sup>1</sup> L'électron est accéléré dans son mouvement autour du proton, de même que le proton si on ne fait pas l'approximation qu'il est fixe au centre du référentiel en raison de sa masse très élevée par rapport à celle de l'électron.

<sup>2</sup> C'est d'ailleurs le principe de fonctionnement des grands instruments que sont les synchrotrons par exemple pour obtenir des rayonnements lumineux allant des rayons  $\gamma$  aux rayons ultra-violets.

<sup>3</sup> Sur ces orbites, l'électron est supposé ne pas rayonner pour une raison inconnue que la mécanique quantique des années 1920 explicitera en termes d'ondes (d'amplitudes de probabilité) stationnaires.

Connaissant  $C$ , en déduire la valeur de la constante empirique  $A$  dans le cadre du modèle pré-quantique de Bohr et déterminer sa valeur en électron-volt<sup>1</sup>.

• La valeur théorique de  $A$  était bien celle que l'on trouvait expérimentalement, ce qui donna un grand crédit aux idées de Bohr en dépit de leur étrangeté. Montrer que dans ce modèle pré-quantique de l'atome d'hydrogène les énergies des orbites circulaires s'écrivent :

$$E_n = - \frac{A}{n^2}$$

et que les rayons de ces orbites sont quantifiés et croissent comme  $n^2$ . Calculer la valeur du rayon le plus faible : c'est le rayon de Bohr, généralement noté :  $a_0$ . Le niveau le plus bas en énergie est appelé niveau fondamental de l'atome d'hydrogène, les autres sont les niveaux excités. Lorsque  $n \rightarrow \infty$  que vaut l'énergie de l'atome d'hydrogène ? Définir l'énergie d'ionisation de cet atome.

Ce modèle proposé par Bohr en 1913 donna lieu à la « *mécanique des quanta* » dont Sommerfeld fut l'un des principaux artisans. Elle fut supplantée vers 1925-27 par la naissance de la *mécanique quantique* qui remet en cause la notion de trajectoire électronique au sein d'un espace aussi confiné que celui de l'atome et introduit à la place la notion de (densité de) probabilité de présence : ainsi, les rayons du modèle de Bohr sont en fait une moyenne statistique. En revanche, les énergies possibles de l'atome d'hydrogène restent celles que nous venons d'établir. Elles forment pour ainsi dire la « carte d'identité » de cet atome.

---

<sup>1</sup> L'électron-volt ( $eV$ ) est une unité d'énergie bien adaptée à la physique de l'électron au sein de l'atome ou dans la matière. Un électron-volt est l'énergie acquise par un électron initialement au repos accéléré sous une différence de potentiel de  $1 V$  :

$$1 eV = 1.602 \times 10^{-19} J$$

## CHAPITRE 18

# DYNAMIQUE EN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

Lorsque nous avons postulé les lois de la dynamique classique au chapitre 9, nous avons dû recourir à la notion de référentiel galiléen afin de donner du sens au principe d'inertie. Dans ce chapitre, nous regardons ce qu'il en est des lois de Newton lorsque le référentiel utilisé n'est pas galiléen. Ces idées sont ensuite appliquées à l'étude du poids des corps et de leur chute libre sur une Terre en rotation sur elle-même. Enfin, les théorèmes de l'énergie mécanique et du moment cinétique au sein d'un référentiel non galiléen sont énoncés.

**86. Le principe fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen et la loi de transformation des forces : forces inertielles.** Au chapitre 7, nous avons démontré la loi de transformation des accélérations lors d'un changement de référentiel quelconque sous la forme :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

où  $\vec{a}_a$  est l'accélération (dite « absolue ») du point matériel dont le mouvement est vu depuis un certain référentiel  $\mathcal{R}$ , et  $\vec{a}_r$  l'accélération (dite « relative ») de ce même point matériel vu cette fois depuis un référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement quelconque vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ . L'accélération d'entraînement,  $\vec{a}_e$ , ne contient que des termes caractéristiques du mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  (voir la section 31 et ci-dessous), tandis que l'accélération de Coriolis,  $\vec{a}_c$ , est un terme hybride dans lequel intervient aussi le mouvement du point  $M$  vu depuis  $\mathcal{R}'$  via sa vitesse relative (31 et ci-dessous).

Cette loi de transformation nous a déjà servi de tremplin pour établir le principe de relativité galiléenne qui stipule l'invariance des trois lois de Newton par changement de référentiel galiléen (C45). Suivons ici la même voie et partons d'un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen pour lequel la seconde loi de Newton s'écrit, en renommant  $\vec{a}_a$  par  $\vec{a}$  :

$$m \vec{a} \doteq \vec{F}$$

où  $m$  est la masse du point matériel qui est soumis à une résultante des forces  $\vec{F}$ . La loi de transformation des accélérations impose alors que l'on écrive dans  $\mathcal{R}'$ , en tenant l'invariance de la quantité de matière  $m$  pour évidente et en renommant  $\vec{a}_r$  par  $\vec{a}'$  :

$$m \vec{a}' \doteq \vec{F} - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c$$

Ainsi, il est possible de maintenir la seconde loi de la dynamique pour le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  sous la forme habituelle :  $m \vec{a}' \doteq \vec{F}'$ , pourvu que nous acceptions que les forces mises en jeu vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  satisfassent la loi de transformation :

$$\vec{F}' = \vec{F} - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c$$

C'est-à-dire qu'aux forces  $\vec{F}$  existantes vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  viennent s'ajouter deux termes supplémentaires :  $\vec{F}_e = -m \vec{a}_e$  et  $\vec{F}_c = -m \vec{a}_c$  dont l'origine est clairement indissociable du mouvement que réalise  $\mathcal{R}'$  vis-à-vis du référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .

**Forces inertielles.** Ces forces à prendre en compte dès lors que le référentiel est non galiléen ont reçu le qualificatif de *forces inertielles*. Elles sont d'autant plus intenses que l'inertie du point matériel (sa masse  $m$ ) est élevée.

La première,  $\vec{F}_e$ , dénommée *force inertielle d'entraînement*, s'écrit explicitement en fonction de l'accélération du point origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  et du vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de  $\mathcal{R}'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{F}_e = -m \vec{a}_e = -m \left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} - m \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'M})$$

Les trois termes dont elle est composée nous sont intuitivement connus dès lors que nous avons expérimenté diverses situations au sein de référentiels non galiléens. La force qui nous comprime contre le siège de la voiture lorsqu'elle accélère en ligne droite fait intervenir le premier terme de  $\vec{F}_e$  (C90). Celle qui tend à nous éloigner de l'axe de rotation du manège - la fameuse force centrifuge - correspond souvent au troisième terme de  $\vec{F}_e$  (C91). Enfin, les manèges à rotation variable de la foire nous donnent un aperçu expérimental des effets induits par le second terme de  $\vec{F}_e$ .

Ces exemples doivent nous aider à comprendre que cette force  $\vec{F}_e$  est la manifestation de l'inertie des corps, c'est-à-dire de leur résistance à être entraînés dans le mouvement varié imposé par le référentiel  $\mathcal{R}'$  auquel ils sont liés.

La seconde force inertielle,  $\vec{F}_c$ , est dénommée *force de Coriolis*. Elle fait intervenir tout à la fois le mouvement de  $\mathcal{R}'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  via le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  et le mouvement du point matériel à l'étude vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  via son vecteur vitesse  $\vec{v}'$ , redénoté  $\vec{v}'$  ici :

$$\vec{F}_c = -m \vec{a}_c = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Son rôle est le même que  $\vec{F}_e$  : résister au mouvement varié imposé par  $\mathcal{R}'$ .

Cela dit, la compréhension de  $\vec{F}_c$  paraît plus évidente lorsque le point matériel n'est lié en aucune façon au référentiel  $\mathcal{R}'$  (pas de liaison ou de force de contact avec  $\mathcal{R}'$ ). Imaginons par exemple une balle que l'on lance horizontalement depuis un

tournequin en rotation : pour l'observateur au sol, la balle part selon une trajectoire horizontale rectiligne initiée par une certaine vitesse  $\vec{v}_0$  acquise lors de son jeté et s'incurve vers le bas sous l'effet de la gravitation. En revanche, l'observatrice sur le tournequin voit la balle prendre immédiatement une trajectoire courbe dans le plan horizontal : c'est qu'en effet, immédiatement après que la balle ait été jetée, l'observatrice poursuit son mouvement de rotation ; elle voit donc la balle entamer un mouvement de rotation inverse qui s'ajoute au mouvement rectiligne initié par son jeté : c'est de ce phénomène dont la force de Coriolis rend compte.

Pour cette raison, on dit souvent des forces inertielles ( $\vec{F}_e$  et  $\vec{F}_c$ ) qu'elles sont fictives ou qu'elles sont des pseudo-forces. En effet, lorsque le choix est fait d'étudier le mouvement d'un point matériel vis-à-vis d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  non galiléen auquel ce point n'est pas lié, comme pour l'exemple qui vient d'être pris, il est clair que  $\vec{F}_e$  et  $\vec{F}_c$  sont précisément là pour tenir compte du mouvement supplémentaire de  $\mathcal{R}'$  que l'on impose artificiellement au point matériel du fait de ce seul choix : l'origine de  $\vec{F}_e$  et  $\vec{F}_c$  est donc purement cinématique.

Il faut tout de même tempérer quelque peu ce point de vue. En effet, comme nous l'avons souligné pour  $\vec{F}_e$ , lorsque le point matériel est lié d'une façon ou d'une autre au référentiel  $\mathcal{R}'$ , le fait est que l'inertie du point matériel résiste au mouvement imposé par  $\mathcal{R}'$  et que les forces de réactions des supports auxquels est lié le point matériel prennent des directions et des intensités qui sont en rapport direct avec les forces inertielles qui expriment précisément la manifestation de cette résistance.

Cela étant, la discussion n'est pas finie : la question de l'origine des forces inertielles a généré des écoles de pensée qui pénètrent jusqu'aux fondements de la physique du mouvement. Un aperçu en est donné aux **C95** et **C96** du prochain chapitre. Nous poursuivrons ici dans un esprit pragmatique en rangeant ces forces inertielles au sein d'une quatrième classe de forces qui vient compléter notre classement des forces du chapitre 10.

**87. Le poids des corps sur une planète en rotation sur elle-même ou la direction du fil à plomb.** Une planète en rotation sur elle-même constitue un référentiel non galiléen,  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'\{O', x'y'z'; t\}$ , en rotation par rapport au référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_C = \mathcal{R}\{O, xyz; t\}$  des étoiles fixes (cf **38**). L'axe  $Oz$  de  $\mathcal{R}_C$  sera ici l'axe de la rotation diurne de la planète caractérisée par son vecteur rotation :  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ , où la vitesse angulaire  $\omega$  est uniforme. L'origine  $O$  de  $\mathcal{R}_C$  est placée au centre de la planète, que l'on suppose sphérique de rayon  $R$ . L'origine  $O'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  sera confondue ici avec  $O$ , de même que l'axe  $O'z'$  sera confondu avec  $Oz$  (figure 80).

Considérons alors un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , situé à la surface de cette planète. Ses coordonnées sphériques vis-à-vis de  $\mathcal{R}_C$  sont  $(r = R, \theta, \varphi)$ . En physique

terrestre, on préfère souvent utiliser la *latitude*  $\lambda$  du lieu (figure 80), en référence à l'Équateur pour lequel  $\lambda = 0$ , plutôt que sa colatitude  $\theta$  qui fait référence au Nord ( $\theta = 0$ ). Toutefois, nous garderons la variable  $\theta$  ici sachant que si besoin est, on a la relation :

$$\theta + \lambda = \pi/2$$

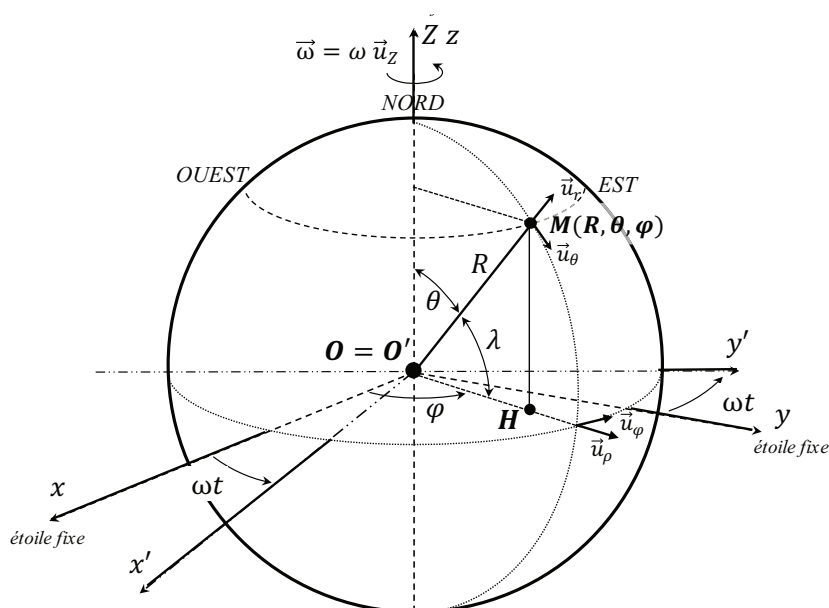


Figure 80. Géométrie utilisée pour décrire le poids des corps sur une planète en rotation.

**Lorsque la planète ne tourne pas sur elle-même**, le point matériel est à l'équilibre sous l'effet de son poids (champ gravitationnel en surface :  $\vec{g}_0$ ) et de la réaction  $\vec{N}$  de la surface. Cette réaction vaut alors :  $\vec{N} = -m \vec{g}_0 = m g_0 \vec{u}_r$  où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire radial associé aux coordonnées sphériques ( $r = R, \theta, \varphi$ ) de  $M$  (figure 80). La direction et le sens de  $\vec{N}$  (ici  $\vec{u}_r$ ) indiquent la *verticale ascensionnelle du lieu*. C'est la direction que prend un fil à plomb à l'équilibre dans ces conditions<sup>1</sup>.

**Lorsque la planète est en rotation sur elle-même**, on peut encore repérer  $M$  à l'aide de ses coordonnées sphériques vis-à-vis de  $\mathcal{R}_C$  : ( $r = R, \theta, \varphi = \omega t + \varphi_0$ ). L'équilibre de  $M$  sur la planète en rotation (i.e. vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ ) se réalise maintenant

<sup>1</sup> En effet, imaginons que le fil à plomb effleure la surface. L'équilibre est réalisé lorsque  $\vec{T} = -m \vec{g}_0$  où  $\vec{T}$  est la tension du fil.  $\vec{T}$  a donc bien la même direction et le même sens que  $\vec{N}$ .

sous l'effet de son poids :  $m \vec{g}_0 = -m g_0 \vec{u}_r$ , de la réaction de la surface :  $\vec{N}'$ , et aussi des forces inertielles qui se résument ici à<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m \vec{a}_e = -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = \dots \\ &= m R \omega^2 \sin^2 \theta \vec{u}_r + m R \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{u}_\theta \\ &= m R \omega^2 \sin \theta \vec{u}_\rho\end{aligned}$$

où  $\vec{u}_\rho$  est le vecteur unitaire dans la direction de  $\overrightarrow{OH}$ ,  $H$  étant la projection du point  $M$  sur le plan  $xOy = x'O'y'$  (figure 80, voir aussi le C32).  $\vec{F}_e$  tend donc à éloigner  $M$  de l'axe de la rotation. Cette *force centrifuge* se décompose en une contribution ascensionnelle (le long de  $\vec{u}_r$ ) et une contribution dans la direction Nord-Sud<sup>2</sup> (le long de  $\vec{u}_\theta$ ) en raison de la géométrie sphérique du problème.

L'équilibre de  $M$  est réalisé vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  lorsque :

$$\vec{N}' = -m \vec{g}_0 - \vec{F}_e = m (g_0 - R \omega^2 \sin^2 \theta) \vec{u}_r - m R \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{u}_\theta$$

Sur cette planète en rotation, un fil à plomb à l'équilibre s'alignera selon la direction prise par  $\vec{N}'$  qui indique donc la verticale ascensionnelle du lieu qui sera caractérisée par le vecteur unitaire :

$$\vec{u} = \vec{N}' / \|\vec{N}'\|$$

Cette verticale ne passe plus par le centre  $O$  de la planète : elle est déviée vers le Nord ( $-\vec{u}_\theta$ ) si  $M$  est situé dans l'hémisphère Nord ( $\theta \in ]0, \pi/2[$ ), ou vers le Sud ( $+\vec{u}_\theta$ ) si  $M$  est situé dans l'hémisphère Sud ( $\theta \in ]\pi/2, \pi[$ ). Il n'y a qu'aux pôles Nord ( $\theta = 0$ ) et Sud ( $\theta = \pi$ ), ainsi qu'à l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ) que la verticale du lieu passe encore par le centre de la planète.

**Poids apparent.** La réaction  $\vec{N}'$  réagit au poids du point matériel et à son inertie qui résiste à l'entraînement que lui impose la planète en rotation. Aussi, on a coutume d'appeler *poids apparent* du point matériel la somme de son poids gravitationnel et de son inertie d'entraînement :

$$\begin{aligned}\vec{P}_{\text{apparent}} &= m \vec{g}_0 + \vec{F}_e \\ &= -m g_0 \left[ \left( 1 - \frac{R \omega^2}{g_0} \sin^2 \theta \right) \vec{u}_r + \frac{R \omega^2}{g_0} \sin \theta \cos \theta \vec{u}_\theta \right]\end{aligned}$$

L'ordre de grandeur de ces corrections est gouverné par le paramètre sans dimensions caractéristique de la planète en rotation :

<sup>1</sup> En effet,  $O'$  est confondu avec  $O$ ,  $\vec{\omega}$  est constant, et, puisque l'on réclame l'équilibre :  $\vec{v}' = \vec{0}$  impose alors  $\vec{F}_c = \vec{0}$ . Pour faire le calcul de  $\vec{F}_e$ , on observera que  $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$ .

<sup>2</sup> Ou Sud-Nord si le point  $M$  est situé dans l'hémisphère Sud ( $\theta > \pi/2$ ).

$$\alpha = \frac{R \omega^2}{g_0}$$

La correction, pour la Terre<sup>1</sup>, est :

$$\alpha_T = \frac{R_T \omega_T^2}{g_0^T} = 0.00345 = 3.45 \times 10^{-3}$$

La faiblesse de cette correction impose de prendre en compte d'autres facteurs : la Terre n'est pas sphérique, c'est un ellipsoïde aplati aux pôles en raison même de sa rotation propre, ce qui induit des corrections à la valeur de  $g_0^T$  qui sont du même ordre de grandeur. De même, nous l'avons vu (Chapitre 10, **C48**), la variation du champ de pesanteur en fonction de la distance au centre de la planète induit des corrections du même ordre de grandeur au sommet d'une montagne comme le Mont-Blanc par exemple.

*Remarque* : si le paramètre  $\alpha$  n'est pas négligeable et devient supérieur à 1, on observe que la composante radiale du poids apparent du point matériel peut changer de signe, signifiant par-là que l'inertie centrifuge du point matériel l'emporterait sur son poids gravitationnel jusqu'à le faire décoller ... Plaçons-nous sur l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ) : pour que ce décollage ait lieu, la vitesse angulaire de rotation de la planète devra être telle que  $\omega^2 > g_0/R$ . Il existe donc une vitesse angulaire critique de rotation correspondant à une période de rotation critique  $T_c$  au-delà de laquelle le point matériel décollera effectivement. Pour la Terre, le calcul fournit :

$$T_c^T \cong 1h 25 mn$$

**88. Déviation de la chute libre vers l'Est.** Galilée avait déjà observé qu'en raison des différences de vitesse que subissent les différentes parties d'un corps en rotation selon leur éloignement de l'axe de cette rotation, il doit s'ensuivre qu'une pierre lâchée sans vitesse initiale depuis le haut d'une tour dévie légèrement vers l'Est par rapport à la verticale du lieu. Le haut de la tour possède en effet une vitesse un peu plus élevée que sa base en direction de l'Est sur une Terre en rotation d'Ouest en Est. La pierre tombera donc sur le sol, non pas à la verticale du lieu, mais avec un léger écart vers l'Est.

---

<sup>1</sup> Pour l'estimation de  $\alpha_T$ , on a pris les données suivantes : La Terre tourne sur elle-même en  $T_T = 24 h$  environ, ce qui fournit une vitesse angulaire :  $\omega_T = 2\pi/T_T = 7.292 \times 10^{-5} (rd).s^{-1}$ . Le rayon (moyen) de la Terre, supposée sphérique, est quant à lui :  $R_T = 6371 km$ . Enfin, compte tenu de la masse de la Terre,  $M_T = 5.972 \times 10^{24} kg$ , et de la constante gravitationnelle,  $G = 6.674 \times 10^{-11} USI$ , on obtient la valeur de  $g_0$  sur Terre :  $g_0^T = GM_T/R_T^2 = 9.819 m.s^{-2}$ .

**Ordre de grandeur de la déviation.** Pour avoir une idée de l'importance de cette déviation, on peut estimer la hauteur de la tour à  $H = 100 \text{ m}$ . La durée d'une chute libre verticale depuis cette hauteur est  $\Delta t = \sqrt{2H/g_0}$ . Ainsi, en prenant la valeur  $g_0 = 9.819 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , on trouve :  $\Delta t = 4.5 \text{ s}$ .

Par ailleurs, la vitesse  $v(d)$  d'un point en rotation uniforme situé à la distance  $d$  de l'axe de rotation est :  $v(d) = d \omega$  si  $\omega$  est la vitesse angulaire de la rotation (cf **13** ou **C25**). Cette relation permet d'obtenir la différence de vitesse entre deux points situés à la distance  $H$  l'un de l'autre (le long de la même droite qui coupe l'axe de la rotation) :  $\Delta v = H \omega$ . C'est-à-dire, en prenant  $\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ (rd)} \cdot \text{s}^{-1}$ , une valeur  $\Delta v = 7.292 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ainsi, l'écart attendu doit être de l'ordre de :  $\Delta v \Delta t = 33 \text{ mm}$ .

Cette estimation ne tient pas compte de la géométrie sphérique de notre problème, mais c'est un ordre de grandeur. Pour obtenir une estimation plus correcte, il faut entrer dans une analyse plus serrée de la question car il s'avère qu'un certain nombre de paramètres interviennent dans les calculs, tous avec des degrés de petitesse qu'il faut estimer pour espérer obtenir un résultat probant. La physique est souvent confrontée à cette problématique qui consiste à rendre compte de phénomènes tenus envers lesquels il faut entreprendre un certain nombre d'approximations. Il faut pendre ce qui va suivre comme un exemple non trivial.

**Calcul perturbatif à l'ordre 1 en  $\alpha$  : choix d'un référentiel de laboratoire.** Il nous faut d'abord déterminer un *référentiel de laboratoire*, c'est-à-dire un référentiel  $\mathcal{R}'$  suffisamment bien adapté pour que les résultats de l'expérience de la chute libre sur une planète en rotation soient facilement identifiables avec l'analyse théorique que l'on peut en faire. Dans la pratique, l'expérience consiste à lâcher la pierre sans vitesse initiale du haut d'une tour et à la voir chuter au sol. Or la tour est construite avec des fils à plomb qui indiquent la verticale du lieu. Par conséquent, nous ferons le choix de prendre une origine  $O'$  sur la surface de la planète et d'adopter la verticale du lieu pour l'un des 3 axes de notre référentiel d'étude  $\mathcal{R}'$  non galiléen (figure 81).

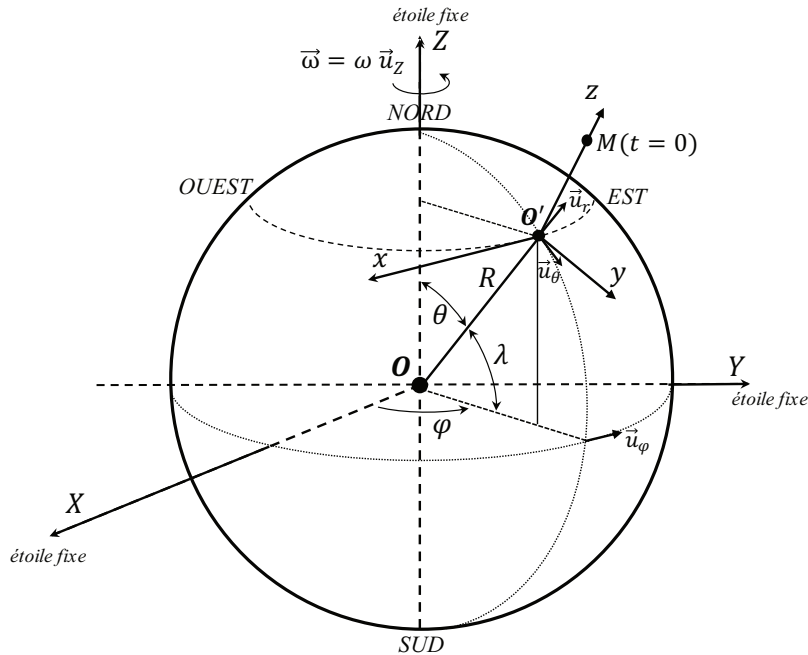
Convenons aussi d'un changement de notation des axes du référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_C$  qui seront notés maintenant :  $\mathcal{R}_C = \mathcal{R}_C\{O, XYZ ; t\}$ . Ce changement de notations va nous permettre d'éviter d'écrire des coordonnées primées pour le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

Plaçons donc l'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  de sorte que ses coordonnées sphériques vis-à-vis de  $\mathcal{R}_C$  soient  $(r = R, \theta, \varphi)$  comme indiqué sur la figure 81. Le point  $O'$  est situé à la latitude  $\lambda = \pi/2 - \theta$  sur la surface terrestre qui est en rotation uniforme autour de l'axe  $OZ$  à la vitesse angulaire :  $\dot{\varphi} = \omega$ . La distance  $R$  sépare  $O'$  de  $O$  et le vecteur  $\overrightarrow{OO'}$  fait un angle  $\theta$  constant avec l'axe  $OZ$ . En résumé, les coordonnées sphériques de  $O'$  sont :  $(r = R, \theta, \varphi = \omega t + \varphi_0)$  et on a :  $\overrightarrow{OO'} = R \vec{u}_r$ .

La verticale du lieu quant à elle a été déterminée à la section précédente. Nous appellerons  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire  $\vec{u}$  qui la caractérise, c'est-à-dire, après avoir injecté notre paramètre de contrôle  $\alpha$  :

$$\vec{u}_z = (\vec{N}' / \|\vec{N}'\|) = \frac{\{(1 - \alpha \sin^2 \theta) \vec{u}_r - \alpha \sin \theta \cos \theta \vec{u}_\theta\}}{\sqrt{1 + (\alpha^2 - 2\alpha) \sin^2 \theta}}$$

Nous pourrions poursuivre en gardant cette expression exacte de  $\vec{u}_z$ . Mais cela mène à des calculs compliqués et finalement peu utiles pour notre cas terrestre puisque  $\alpha_T = 3.45 \times 10^{-3}$  : avec cette faible valeur de  $\alpha$  nous allons convenir de ne garder dans l'expression de  $\vec{u}_z$  que son développement limité à l'ordre 1 en  $\alpha$  : cela signifie que par la suite, tous les termes qui seront multipliés par un facteur inférieur ou égal à l'ordre 2 en  $\alpha$ ,  $\alpha^2 = 1.2 \times 10^{-5}$ , seront considérés comme négligeables. Nous appellerons le calcul qui va s'ensuivre : *un calcul perturbatif à l'ordre 1 en  $\alpha$*  ; la perturbation étant ici la rotation lente de la planète sur elle-même en comparaison de la même planète fixe.



**Figure 81.** Le référentiel  $\mathcal{R}'\{O', xyz; t\}$  adopté pour l'étude de la chute libre d'un point matériel  $M$  sur une Terre en rotation. L'écart entre la verticale du lieu  $O'z$  et  $\vec{u}_z$  (verticale du lieu si la Terre ne tourne pas) est exagéré sur la figure. L'axe  $O'x$  est dirigé vers l'Ouest et l'axe  $O'y$  indique presque le Sud.

Moyennant cette approximation, on obtient :

$$\vec{u}_z \cong \vec{u}_r - \alpha \sin \theta \cos \theta \vec{u}_\theta$$

Ayant défini la verticale du lieu à l'ordre 1 en  $\alpha$ , il est facile ici de construire un second axe qui lui soit perpendiculaire et qui soit bien adapté à l'expérience à réaliser. En effet, il est évident que le vecteur  $\vec{u}_\varphi$  remplit ce rôle puisqu'il indique l'Est. L'Ouest est donc caractérisé par  $-\vec{u}_\varphi$  et nous ferons ce choix pour l'axe  $O'x$  de  $\mathcal{R}'$ , de sorte que :

$$\vec{u}_x = -\vec{u}_\varphi$$

Enfin, le troisième axe,  $O'y$ , est obtenu en réalisant le produit vectoriel  $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$  afin d'obtenir une base directe :

$$\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \alpha \sin\theta \cos\theta \vec{u}_r + \vec{u}_\theta$$

Ce troisième axe indique, à peu près, le Sud (figure 81). On peut vérifier que  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  forme bien une base orthonormée à l'ordre 1 en  $\alpha$ . Cette base définit le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'\{O', xyz; t\}$ .

Un point matériel  $M$  sera repéré à chaque instant par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  vis-à-vis du référentiel  $\mathcal{R}'$  :

$$\overrightarrow{O'M} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

Ses vecteurs vitesse et accélération seront simplement :

$$\vec{v}' = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}' = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

**Calcul perturbatif à l'ordre 1 en  $\alpha$  : estimation des différents termes intervenant dans le problème.** L'équation exacte de la dynamique pour le point matériel en mouvement vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  s'écrit :

$$m \vec{a}' = m \vec{g}(M) - m \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) - 2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

où il faut d'abord constater que la masse  $m$  du point matériel se simplifie ; ce qui permet de conclure que tous les corps tombent avec une accélération indépendante de leur masse dans  $\mathcal{R}'$ . Mais cette accélération n'est plus proportionnelle au champ de pesanteur  $\vec{g}(M)$  comme sur une planète fixe, elle est maintenant modifiée par les forces inertielles en présence.

Examinons maintenant les diverses quantités qui donnent lieu à cette équation afin de faire apparaître leurs intensités respectives.

- Le champ de pesanteur  $\vec{g}(M)$  de la planète de masse  $M_P$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{g}(M) &= -GM_P \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} = -GM_P \frac{(\overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'})}{\|\overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'}\|^3} \\ &= -GM_P \frac{(x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z + R \vec{u}_r)}{\|x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z + R \vec{u}_r\|^3}\end{aligned}$$

Attendu que  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont très inférieurs au rayon  $R$  de la planète, on peut factoriser  $R$  dans cette expression pour en dégager le terme principal :

$$\vec{g}(M) = -\frac{GM_P}{R^2} \frac{(\vec{u}_r + \vec{u}_x x/R + \vec{u}_y y/R + \vec{u}_z z/R)}{\|\vec{u}_r + \vec{u}_x x/R + \vec{u}_y y/R + \vec{u}_z z/R\|^3}$$

Cela fait apparaître trois paramètres sans dimension au sein des différents termes correctifs qui constituent  $\vec{g}(M)$  :  $\beta_x = x/R$ ,  $\beta_y = y/R$  et  $\beta_z = z/R$ . Pour faire une estimation de ces termes, on peut donner à  $x$  et à  $y$  la valeur de  $33 \text{ mm}$  qui est l'ordre de grandeur de la déviation attendue, et à  $z$  la valeur maximale de  $100 \text{ m}$ . On a ainsi, pour la Terre :  $\beta_x = \beta_y \cong 5 \times 10^{-9}$  qui sont négligeables devant  $\alpha^2$ . Une difficulté surgit avec la valeur de  $\beta_z \cong 1.6 \times 10^{-5}$  : elle est d'un ordre de grandeur légèrement supérieur à celui de  $\alpha^2 = 1.2 \times 10^{-5}$ . Nous ferons ici le choix simplificateur (et discutable) de négliger  $\beta_z$  malgré tout en le voyant comme un terme d'ordre 2. Dans ces conditions, l'approximation de  $\vec{g}(M)$  est la plus crue qui soit puisque nous avons :

$$\vec{g}(M) \cong -g_0 \vec{u}_r, \quad g_0 = GM_P/R^2$$

C'est-à-dire que nous ne conservons que le terme dominant de  $\vec{g}(M)$  qui est naturellement la valeur du champ de pesanteur à la surface de la planète fixe.

Il reste à exprimer cette approximation dans la base choisie. Pour cela, nous avons besoin d'écrire la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  en fonction de notre base de travail  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ , c'est-à-dire d'inverser les expressions obtenues un peu plus haut. On obtient, à l'ordre 1 en  $\alpha$  :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \alpha \sin\theta \cos\theta \vec{u}_y + \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \vec{u}_y - \alpha \sin\theta \cos\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = -\vec{u}_x \end{cases}$$

Ce faisant, l'écriture approximée de  $\vec{g}(M)$  est :

$$\vec{g}(M) \cong -g_0 [\vec{u}_z + \alpha \sin\theta \cos\theta \vec{u}_y]$$

- Le second terme de notre équation dynamique concerne l'accélération de  $O'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ , avec  $\overrightarrow{OO'} = R \vec{u}_r$ . Ce terme contient la force centrifuge que subit  $O'$ . Pour

l'estimer, on peut se rappeler par exemple de la formule de Bour établie à la section **30** (chapitre 7) :

$$\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r$$

et deux relations similaires pour les vecteurs  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$ .

Puis, en notant que :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z = \omega (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} &= -R\omega^2 [\sin^2\theta \vec{u}_r + \sin\theta \cos\theta \vec{u}_\theta] \\ &= -g_0 \alpha \{ \sin^2\theta \vec{u}_r + \sin\theta \cos\theta \vec{u}_\theta \} \end{aligned}$$

où nous avons fait apparaître notre paramètre de contrôle  $\alpha$ . En passant dans la base de travail et en négligeant les termes proportionnels à  $\alpha^2$  qui surviennent, on obtient l'expression approximée de ce second terme :

$$\left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} \cong -g_0 \alpha [\sin^2\theta \vec{u}_z + \sin\theta \cos\theta \vec{u}_y]$$

• L'intensité du troisième terme est négligeable dans le cadre de nos approximations : en effet, elle est manifestement de l'ordre de :  $\omega^2 \|\overline{O'M}\|$ , et son rapport avec le terme dominant  $g_0$  vaut donc :

$$\frac{\omega^2 \|\overline{O'M}\|}{g_0} = \alpha \frac{\|\overline{O'M}\|}{R} = \frac{\alpha}{R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \alpha \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}$$

C'est-à-dire de l'ordre de  $\alpha\beta_z$ , que nous avons déjà négligé.

• Enfin, il reste à estimer l'intensité du dernier terme – la force de Coriolis. Pour ce faire, on peut exprimer  $\vec{\omega}$  dans la base de travail :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \vec{u}_z = \omega (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) \\ &= \omega [(\cos\theta + \alpha \sin^2\theta \cos\theta) \vec{u}_z + (\alpha \cos^2\theta \sin\theta - \sin\theta) \vec{u}_y] \end{aligned}$$

Le calcul de  $2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$  s'ensuit directement et son rapport avec le terme dominant  $g_0$  fait apparaître 3 nouveaux paramètres de contrôle sans dimension qui sont cette fois :  $\gamma_x = 2\omega\dot{x}/g_0$ ,  $\gamma_y = 2\omega\dot{y}/g_0$  et  $\gamma_z = 2\omega\dot{z}/g_0$ .

À nouveau, il nous faut estimer leur ordre de grandeur. Les composantes  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  valent à peu près la différence de vitesse en haut de la tour et en bas de la tour, c'est-à-dire qu'elles sont voisines de  $7.3 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$  comme nous l'avons vu.  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  sont

donc de l'ordre de  $10^{-7}$  et nous pouvons les négliger. La composante  $\dot{z}$  quant à elle est au maximum de l'ordre de grandeur de la vitesse acquise au sol lors de la chute libre depuis  $H = 100\text{m}$  ; soit  $\dot{z} \cong \sqrt{2g_0H} = 44.3 \text{ ms}^{-1}$ , ce qui donne une valeur estimée de  $6.6 \times 10^{-4}$  à  $\gamma_z$  que nous allons donc garder.

Dans ces conditions, la valeur de  $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ , après avoir négligé le produit  $\alpha\gamma_z$ , se trouve être approximativement égale à :

$$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \cong -g_0 \gamma_z \sin\theta \vec{u}_x$$

**Calcul perturbatif à l'ordre 1 en  $\alpha$  : équations et solution de la chute libre vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ .** En regroupant tous les termes que nous venons de passer en revue, les équations approximées du mouvement de chute libre sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \underbrace{g_0 \gamma_z \sin\theta}_{\text{Coriolis}} = 2\omega \dot{z} \sin\theta \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g_0 \left[ 1 - \underbrace{\alpha \sin^2\theta}_{\text{Force centrifuge}} \right] \end{cases}$$

Il faut tout de suite constater que c'est bien la force de Coriolis qui est responsable de la déviation de la chute libre hors de la verticale.

L'équation pour  $z$  s'intègre directement compte tenu des conditions initiales  $\dot{z}(t=0) = 0$  et  $z(t=0) = H$  (chute libre sans vitesse initiale depuis la hauteur  $H$ ), et on obtient :

$$z = -\frac{1}{2} g_0 (1 - \alpha \sin^2\theta) t^2 + H$$

où l'on voit que c'est la valeur  $g_0$  corrigée par la force d'inertie centrifuge en  $O'$  qui intervient dans cette chute libre. Ce résultat, injecté dans l'équation différentielle pour  $x$  assortie des conditions initiales  $x(t=0) = 0$  et  $\dot{x}(t=0) = 0$  fournit :

$$x = -\frac{\omega g_0}{3} (1 - \alpha \sin^2\theta) \sin\theta t^3$$

Enfin, l'équation découplée pour  $y$ , fournit évidemment (conditions initiales :  $y(t=0) = 0$  et  $\dot{y}(t=0) = 0$ ) :

$$y = 0$$

**Calcul perturbatif à l'ordre 1 en  $\alpha$  : une déviation vers l'Est, aucune dans la direction Nord-Sud.** Quels sont les résultats de cette analyse perturbative ? Tout d'abord, il faut prédire qu'on ne doit pas observer de déviation dans la direction

Nord-Sud qui est représentée dans nos calculs par le vecteur unitaire  $\vec{u}_y$ . Deuxièmement, il doit exister une déviation vers l'Est ( $\vec{u}_x$  indique l'Ouest) dont la valeur, à l'arrivée de la pierre au sol, est estimée à (où  $t_c$  est le temps de chute, avec :  $z(t_c) = 0$ ) :

$$x_c = -\frac{\omega g_0}{3} (1 - \alpha \sin^2 \theta) \sin \theta t_c^3 = -\frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{8 H^3}{g_0}} \sin \theta \left( 1 + \frac{\alpha \sin^2 \theta}{2} \right)$$

Plaçons-nous à l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ) pour en avoir une estimation maximale : compte tenu des paramètres du problème, nous trouvons  $x_c^{\text{éq.}} \cong 23 \text{ mm}$ , en bon accord avec notre appréciation initiale.

Cette solution pour la déviation vers l'Est fut obtenue par Gauss et Laplace aux débuts du XIX<sup>e</sup> siècle (en négligeant  $\alpha$  dans le résultat final). L'expérience de Schlegel (Westphalie), déjà relatée au chapitre 8, et d'autres comme celles des allemands Reich et Rendel vers 1831, donnèrent des valeurs moyennes expérimentales plutôt satisfaisantes pour la déviation vers l'Est, mais elles étaient toutes entachées d'importants écarts à la moyenne... Ces expériences ont aussi plaidé pour une déviation Nord-Sud dirigée vers le Sud en général, du même ordre de grandeur que la déviation vers l'Est... Mais avec là encore des écarts à la moyenne si importants que certaines séries d'expériences plaident pour une déviation vers le Nord...

Aux débuts du siècle dernier, on reprit l'analyse théorique pour pousser les calculs à un ordre supérieur à celui qui vient d'être présenté. La difficulté est de bien estimer l'ordre de grandeur des différents termes qui est régi par les 7 paramètres ( $\alpha, \beta_x, \beta_y, \beta_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ ) et leurs produits, ce qui n'est pas si évident<sup>1</sup>.

Il faut aussi bien avoir présent à l'esprit qu'à ce niveau de précision demandé, la question de la non-sphéricité de la Terre ne peut plus être éludée, de même que l'influence de la résistance de l'air sur les objets en chute libre. On a même regardé la question de l'importance de la gravitation de la Lune et du Soleil dans ces expériences, importance qui est à la limite d'être prise en compte... On trouva bien une déviation théorique vers le Sud, mais plus faible d'un ordre de grandeur environ que la déviation vers l'Est. Toutefois, les expériences de Hall et celles de Flammarion (1902/03) furent à nouveau en désaccord vis-à-vis de cette déviation vers le Sud : Hall trouva une déviation presque nulle (en presque bon accord avec les calculs) cependant que Flammarion trouva une déviation non négligeable... vers le Nord...

---

<sup>1</sup> Nous avons par exemple négligé ici les termes facteurs de  $\beta_z \cong 1.6 \times 10^{-5}$  alors que nous avons gardé ceux facteurs de  $\gamma_z \cong 6.6 \times 10^{-4}$ . Un calcul plus correct (mais plus compliqué) réclamerait de maintenir ces deux termes qui sont presque du même ordre de grandeur.

Pour comprendre ces désaccords, il faut dire que le lâché de l'objet et la non-influence des vents sur sa chute sont des conditions essentielles pour la réussite d'une telle expérience, de même que la détermination rigoureuse de la verticale du lieu et de la direction Est associée pour ne citer que ces écueils.

Au regard de ces semi-échecs, on se dit qu'il vaudrait peut-être mieux se placer sur un autre astre pour réaliser ces expériences ! Le coefficient  $\alpha_L$  de la Lune par exemple vaut  $5.7 \times 10^{-3}$  avec cet avantage que la chute libre est « ralentie » par rapport à la chute libre sur Terre. Ainsi, l'estimation du début de cette section - pour la Lune cette fois - donne une déviation vers l'Est (de la Lune) de 81 mm. On peut donc espérer que la déviation vers le Sud (de la Lune), s'il en est bien ainsi, devienne cette fois mesurable et sans ambiguïté. Mais ces expériences seront propres à la Lune, or on soupçonne fortement que ce sont les écarts à la valeur du champ de gravitation local qui sont responsables des difficultés qui viennent d'être relatées<sup>1</sup>...

**89. Comment savoir si un référentiel est galiléen ou pas ?** Pour une bonne partie, nous avons déjà répondu à cette question lors de la définition d'un référentiel galiléen au chapitre 9 section 38. L'équation de la dynamique en référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  prend la forme générale :

$$m \vec{a}' \doteq \vec{F}(M) - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c$$

où  $\vec{F}(M)$  est la résultante des forces non inertielles. Ainsi, dans un point de vue pragmatique, il suffira d'isoler le point matériel pour s'assurer qu'il n'est soumis à aucune des forces rentrant dans l'une des 3 classes que nous avons recensées au chapitre 10. Ce faisant, si le référentiel  $\mathcal{R}'$  est galiléen, le point matériel devra satisfaire au principe d'inertie et réaliser un mouvement rectiligne uniforme. *A contrario*, si  $\mathcal{R}'$  est non galiléen, le point matériel doit réaliser, *indépendamment de sa masse*, un mouvement dont l'accélération est dictée par la loi :

$$\vec{a}' \doteq - \vec{a}_e - \vec{a}_c$$

Le mouvement de ce point matériel se rapprochera donc d'autant plus d'un mouvement rectiligne uniforme que  $\|\vec{a}'\|$  sera proche de zéro, c'est-à-dire d'autant plus que  $\|\vec{a}_e + \vec{a}_c\|$  sera faible, au moins pendant toute la durée de l'expérience.

Cela mène au critère expérimental suivant, qui est directement issu de l'analyse de la déviation vers l'Est : pour que  $\mathcal{R}'$  puisse être considéré comme galiléen, il faut et il suffit que les forces inertielles soient négligeables devant toutes les autres forces du problème posé, au moins pendant la durée de l'expérience à réaliser. Dans ce cas

---

<sup>1</sup> On trouvera une revue et des calculs récents sur la chute libre dans : M.S. Tiersten, H. Soodak, « Dropped objects and other motions relative to the noninertial earth », *American Journal of physics* n°68, 2000, p.129.

en effet, l'équation de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$  prend la forme approximée à l'ordre 0 :  $m \vec{a}' \cong \vec{F}(M)$ , selon un paramètre de contrôle sans dimension  $\epsilon$  qui est :

$$\epsilon = m \frac{\|\vec{a}_e + \vec{a}_c\|}{\|\vec{F}(M)\|}$$

Cependant, le **C96** va apporter quelques perturbations dans ces raisonnements...

**90. Énergie mécanique et moment cinétique en référentiel non galiléen.** Énergie mécanique et moment cinétique sont les données énergétiques du problème du mouvement. L'énergie mécanique apporte quelque lumière sur la dynamique du problème lorsqu'elle est étudiée le long de la trajectoire suivie<sup>1</sup>. Cette étude doit être complétée par l'examen de l'évolution du moment cinétique à l'aide du moment des forces en présence, moment qui se mesure - rappelons-le - en  $N.m$ , c'est-à-dire en joules.

Dans cette section, nous faisons le choix de notations primées (comme au chapitre 7) pour toutes les grandeurs relatives au référentiel  $\mathcal{R}' = \{O', x', y', z'; t\}$  non galiléen, et non primées pour les grandeurs relatives au référentiel  $\mathcal{R} = \{O, x, y, z; t\}$  galiléen.

**Théorèmes de l'énergie cinétique et du moment cinétique en référentiel non galiléen.** Tout d'abord, il est clair qu'à partir du moment où les forces inertielles sont incluses dans le bilan des forces qui s'exercent sur le point matériel, *le théorème de l'énergie cinétique et le théorème du moment cinétique sont également légitimes*<sup>2</sup> vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ . À condition bien sûr d'exprimer toutes les quantités physiques en fonction des vecteurs position,  $\vec{r}'$ , vitesse,  $\vec{v}'$ , et accélération,  $\vec{a}'$ , vis-à-vis de ce référentiel. En particulier, l'énergie cinétique du point matériel y sera définie comme :

$$E'_c := \frac{1}{2} m \vec{v}'^2$$

et son moment cinétique (par rapport à l'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$ ) :

$$\vec{\ell}' := \vec{r}' \wedge m \vec{v}'$$

On peut aussi démontrer un théorème du « moment cinétique total » pour les référentiels en rotation uniforme qui peut avoir son utilité pour interpréter les éventuelles intégrales premières qui peuvent survenir (**C92**).

<sup>1</sup> Au chapitre 14, nous avons effectivement démontré le théorème de l'énergie mécanique du point matériel en projetant l'équation de la dynamique sur le vecteur  $\vec{\tau}$  de Serret-Frenet tangent à la trajectoire.

<sup>2</sup> Il suffit de refaire à l'identique les démonstrations que nous avons faites de ces deux théorèmes.

**Théorème de l'énergie mécanique en référentiel non galiléen.** Ce théorème - qui permet d'obtenir l'intégrale première qu'est l'énergie mécanique du problème - se déduit du théorème de l'énergie cinétique si les forces du problème sont toutes issues du gradient (au signe près) d'une fonction énergie potentielle. Supposons alors que toutes les forces du problème, lorsqu'il est étudié vis-à-vis du référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , sont bien ainsi. En vertu de la loi de transformation des forces lors du passage de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$ , ces forces seront aussi présentes vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ . Elles seront toujours le gradient d'une fonction énergie potentielle<sup>1</sup>  $E'_p$  car cette propriété ne dépend ni du système de coordonnées, ni du référentiel utilisés. Il reste donc à examiner la question de savoir si les forces inertielles sont elles aussi issues d'une certaine énergie potentielle, et si oui quelle est-elle ?

La réponse n'est pas évidente pour le cas d'un référentiel non galiléen quelconque. Elle est discutée au **C92**. Dans ce qui suit, on se penche sur le cas plus simple d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  tournant à la vitesse angulaire constante  $\vec{\omega}$ .

**Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  tournant à vitesse angulaire constante  $\vec{\omega}$ .** L'origine  $O'$  d'un tel référentiel est à une position fixe vis-à-vis de l'origine  $O$  du référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Et puisque le vecteur  $\vec{\omega}$  est constant, il s'ensuit que les seules forces inertielles en présence sont ici la partie centrifuge de la force d'entraînement  $\vec{F}_e$ , c'est-à-dire le terme :  $-m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$ , et la force de Coriolis :  $-2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ .

Or, il faut déjà constater que *la force de Coriolis ne réalise aucun travail*. En effet, elle est constamment perpendiculaire au vecteur vitesse du point matériel et donc à sa trajectoire (vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ ).

Par ailleurs, le terme centrifuge,  $-m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$ , s'avère être le gradient (au signe près) de la fonction énergie potentielle<sup>2</sup> :

$$E_p^c = -\frac{1}{2} m [\vec{\omega} \wedge \vec{r}']^2$$

Ainsi, si  $E'_p$  désigne la somme des énergies potentielles associées aux forces non inertielles (le tout exprimé en fonction de  $\vec{r}'$ ), l'énergie mécanique,  $E'$ , du point matériel vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  sera :

$$E' = E'_c + E'_p - \frac{1}{2} m [\vec{\omega} \wedge \vec{r}']^2$$

Et cette quantité est une intégrale première pour le mouvement du point matériel observé depuis  $\mathcal{R}'$ .

<sup>1</sup> La notion de gradient vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  doit bien sûr être pensée avec les coordonnées du vecteur position  $\vec{r}'$  relatives à  $\mathcal{R}'$ .

<sup>2</sup> Vous pouvez vous en assurer en calculant le gradient de cette expression en coordonnées cartésiennes par exemple et comparer le résultat avec le calcul du terme centrifuge dans le même système de coordonnées.

## Compléments et exercices du chapitre 18

**C90. Force inertielle au sein d'un référentiel en mouvement rectiligne varié.** Considérons un référentiel  $\mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}'\{O', x'y'z'; t\}$  (une voiture) dont le point origine  $O'$  est en mouvement rectiligne varié par rapport à un référentiel attaché au sol terrestre supposé galiléen  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}\{O, xyz; t\}$ . Pour simplifier les calculs, posons que les axes des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont tous parallèles entre eux et que l'accélération  $A(t)$  de  $O'$  ait lieu le long de l'axe horizontal  $Ox$  :

$$\left. \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} = A(t) \vec{u}_x$$

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  est suspendu à l'extrémité d'un pendule simple plan de longueur  $L$  qui est accroché en  $O'$  et qui peut osciller sans frottements dans le plan  $x'O'z'$ .

- Écrire l'équation de la dynamique du point matériel vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  en prenant pour base de travail la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  des coordonnées polaires de  $M$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ .
- On se place dans l'hypothèse où  $A(t) = A$ , une constante, et dans l'approximation des petits angles de sorte que :  $\sin \theta' \cong \theta'$  et  $\cos \theta' \cong 1$  à l'ordre 1 en  $\theta'$ . Résoudre l'équation du mouvement de  $M$  et donner la valeur de la tension  $\vec{T}$  du fil en fonction du temps. Discuter sur la validité de l'approximation des petits angles selon la valeur de  $A$  et discuter aussi de la position d'équilibre de  $M$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ .

**C91. Forces inertielles au sein d'un référentiel en rotation uniforme.** Soit un référentiel  $\mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}'\{O', x'y'z'; t\}$  (un manège) en rotation uniforme, de vecteur rotation  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ , autour de l'axe  $Oz$  d'un référentiel  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}\{O, xyz; t\}$  situé sur le sol terrestre supposé galiléen.

- Dans un premier temps, l'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  est confondue avec  $O$ . On appelle  $\varphi(t)$  l'angle entre les axes  $O'x'$  et l'axe  $Ox$  fixe :  $\dot{\varphi} = \omega$ . Une bille percée sur l'un de ses diamètres, assimilable à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est enfilée le long d'une tige qui forme l'axe  $O'x'$  et peut se déplacer sans frottement. La bille est au repos à la distance  $d$  de  $O$  grâce à un taquet. Quelle est la valeur de la réaction  $\vec{R}$  qui s'exerce sur le taquet ?
- Dans un second temps, l'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  est située sur l'axe  $Ox'$  à la distance  $h$  de  $O$ . Retrouver dans ces conditions la valeur de la réaction  $\vec{R}$  qui s'exerce sur le taquet et comparer les calculs réalisés dans les deux cas.
- L'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  est à nouveau confondue avec  $O$ . Le taquet est retiré. Trouver l'équation horaire du mouvement de la bille le long de la tige vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  et déterminer la réaction  $\vec{N}$  que la tige exerce sur la bille au cours de ce mouvement.

Déterminer également les équations horaires du mouvement de la bille vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ .

**C92. Théorème du « moment cinétique total » dans un référentiel en rotation uniforme.** Le référentiel  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'\{O, x'y'z'; t\}$  est ici en rotation uniforme autour de l'axe  $Oz$  du référentiel galiléen  $\mathcal{R} = \mathcal{R}\{O, xyz; t\}$ . Le vecteur rotation est donc constant et s'écrit :  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ . Après avoir défini la notion de « moment cinétique d'entraînement », on démontre un théorème du moment cinétique total à partir de la formule de Bour.

**Moment cinétique d'entraînement.** Le moment cinétique du point matériel en mouvement vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  est :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$$

Or, la loi de transformation des vitesses :  $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}'$ , permet d'écrire :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = \vec{r} \wedge m (\vec{v}_e + \vec{v}') = \vec{r} \wedge m \vec{v}_e + \vec{r} \wedge m \vec{v}' = \vec{\ell}_e + \vec{\ell}'$$

où  $\vec{\ell}'$  est le moment cinétique du point matériel vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ , puisque l'origine de  $\mathcal{R}'$  est confondue avec celle de  $\mathcal{R}$ . Quant à  $\vec{\ell}_e$ , on peut en faire l'interprétation suivante : chaque point fixe du référentiel  $\mathcal{R}'$ , en raison de la rotation de ce dernier vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ , possède une vitesse d'entraînement :  $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$  ; ce qui fait que tout point fixe de  $\mathcal{R}'$  possède en quelque sorte un « moment cinétique d'entraînement » :

$$\vec{\ell}_e = \vec{r}' \wedge m \vec{v}_e = m \vec{r}' \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = m [r'^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}') \vec{r}']$$

**Théorème du moment cinétique total.** Le théorème du moment cinétique pour le référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\left. \frac{d\vec{\ell}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \doteq \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Or, en utilisant la formule de Bour :

$$\left. \frac{d\vec{\ell}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{\ell}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\ell}_e}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{\ell}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{\ell}' + \left. \frac{d\vec{\ell}_e}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{\ell}_e$$

D'où :

$$\left. \frac{d\vec{\ell}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \left. \frac{d\vec{\ell}_e}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{d(\vec{\ell}' + \vec{\ell}_e)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \doteq \vec{r} \wedge \vec{F} - \vec{\omega} \wedge \vec{\ell}_e - \vec{\omega} \wedge \vec{\ell}'$$

C'est-à-dire, en projetant cette équation sur  $\vec{\omega}$  et en définissant :  $\vec{\mathcal{L}} := \vec{\ell}' + \vec{\ell}_e$ , le *moment cinétique total* du point matériel vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ , somme de son moment cinétique « de mouvement » et de son moment cinétique d'entraînement :

$$\left. \frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \cdot \vec{\omega} \doteq \vec{\mathcal{M}}'(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}$$

Ce théorème a l'avantage de ne pas faire apparaître les forces inertielles et de considérer toujours le « même » moment cinétique pour le point matériel, que ce soit du point de vue de  $\mathcal{R}'$  ou du point de vue de  $\mathcal{R}$  : en effet, son moment cinétique total qui vient d'être défini vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  n'est rien d'autre que son moment cinétique vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  :  $\vec{\mathcal{L}} = \vec{\ell}$ . En outre, puisque  $\vec{r} = \vec{r}'$ , alors :  $\vec{\mathcal{M}}'(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}(\vec{F})$ , et ce théorème s'exprime indifféremment dans chacun des deux référentiels.

**C93. Le théorème de l'énergie mécanique en référentiel quelconque ; fonction de force.** Soit  $\mathcal{R}'$  le référentiel non galiléen par rapport auquel on décrit le mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  qui est repéré par le vecteur position  $\vec{r}' := \vec{O'M}$  et dont la vitesse est  $\vec{v}'$ . On peut démontrer que les forces inertielles qui agissent sur le point matériel sont issues d'une fonction scalaire  $U$  qui s'écrit :

$$U = m \vec{v}' \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')^2 - m \vec{A} \cdot \vec{r}'$$

où, pour simplifier l'écriture, on a posé :

$$\vec{A} = \vec{A}(t) := \left. \frac{d^2 \vec{OO}'}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

Mais cette fonction scalaire n'est pas l'énergie potentielle associée aux forces inertielles. Elle est ce que l'on appelle leur *fonction de force* associée. On a en effet :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_c = \vec{\nabla}_{\vec{r}'} U - \frac{d}{dt} (\vec{\nabla}_{\vec{v}'} U)$$

où  $\vec{\nabla}_{\vec{r}'}$  est l'opération gradient vis-à-vis de  $\vec{r}'$  et  $\vec{\nabla}_{\vec{v}'}$ , l'opération gradient vis-à-vis de  $\vec{v}'$  ; c'est-à-dire, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}'} U = \frac{\partial U}{\partial x'} \vec{u}_{x'} + \frac{\partial U}{\partial y'} \vec{u}_{y'} + \frac{\partial U}{\partial z'} \vec{u}_{z'} ; \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}'} U = \frac{\partial U}{\partial v_{x'}} \vec{u}_{x'} + \frac{\partial U}{\partial v_{y'}} \vec{u}_{y'} + \frac{\partial U}{\partial v_{z'}} \vec{u}_{z'}$$

On montre ensuite que le travail réalisé par les forces inertielles entre deux points  $A$  et  $B$  de la trajectoire du point matériel vaut :

$$W_{AB}(\vec{F}_e + \vec{F}_c) = [U - \vec{v}' \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{v}'} U)]_A^B$$

En écrivant ce résultat sous la forme  $E_p(A) - E_p(B)$ , on en déduit que l'énergie potentielle associée aux forces inertielles est :

$$E_p(\vec{F}_e + \vec{F}_c) = -U + \vec{v}' \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{v}'} U)$$

On trouve ainsi :

$$E_p(\vec{F}_e + \vec{F}_c) = -\frac{1}{2} m (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')^2 + m \vec{A} \cdot \vec{r}'$$

Dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$ , le théorème de l'énergie mécanique pour un point matériel en mouvement sous l'effet de forces conservatives dont la résultante est  $\vec{F}$  s'écrira donc :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p(\vec{F}) + E_p(\vec{F}_e + \vec{F}_c) \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + E_p(\vec{F}) - \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')^2 + m \vec{A} \cdot \vec{r}' \doteq E \end{aligned}$$

*Nota Bene* : la notion de fonction de force est également utilisée pour associer une énergie potentielle à la force de Lorentz,  $\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$ , qui agit sur une particule portant une charge  $q$  plongée dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  et qui va à la vitesse  $\vec{v}$ .

## CHAPITRE 19

### LE PENDULE TOURNANT ET LE PENDULE DE FOUCAULT

Léon Foucault a raconté que l'idée de faire osciller un pendule pour observer la rotation de la Terre sur elle-même lui vint en observant une fine tige en vibration fixée au centre du mandrin d'un tour. Lorsque le tour est en rotation, on observe que la tige continue de vibrer dans son plan initial. Foucault comprit que c'était ce qu'il devait se passer si un pendule était placé au pôle Nord (ou Sud) : le pendule oscillera dans un plan toujours fixe par rapport au référentiel galiléen des étoiles fixes, tandis qu'un observateur terrestre verra ce plan évoluer au cours du temps. Il ne restait plus qu'à adapter cette observation à la géométrie sphérique de la Terre et à estimer l'importance de la rotation du plan des oscillations du pendule pour obtenir une preuve de la rotation de la Terre sur elle-même.

Les mouvements d'un pendule de Foucault placé au pôle Nord (ou Sud) sont équivalents à ceux d'un pendule placé sur une plateforme tournante vis-à-vis du référentiel terrestre supposé galiléen dans ce dernier cas. C'est la raison pour laquelle on fait le choix ici d'étudier d'abord le pendule de Foucault à l'aide de son homologue fixé sur une plateforme qui tourne à vitesse angulaire constante. Lorsque les oscillations de ce pendule tournant sont faibles, on se rapproche des conditions expérimentales du pendule de Foucault ; conditions qui nécessitent encore que l'intensité du vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de la plateforme soit inférieure à la pulsation propre du pendule,  $\omega_0 = \sqrt{g_0/L}$ , où  $L$  est la longueur du pendule et  $g_0$  l'intensité de la pesanteur à la surface terrestre.

Après cette étude, on étend la question à un pendule placé cette fois à un certain endroit caractérisé par sa latitude sur la surface terrestre supposée sphérique.

**91. Le pendule tournant : solution pour les petites oscillations.** L'expérience se réalise ici en laboratoire où le référentiel terrestre est supposé galiléen en raison de la faible valeur de la vitesse de rotation angulaire de la Terre comparée à la vitesse de rotation de la plateforme. Ce référentiel (quasi)-galiléen où l'origine  $O$  est située au centre de la plateforme en rotation (figure 82) sera noté :  $\mathcal{R} = \mathcal{R}\{O, XYZ ; t\}$ . Le référentiel tournant sera noté quant à lui :  $\mathcal{R}'\{O', xyz ; t\}$ . Il est lié à la plateforme sur laquelle est fixé le dispositif de soutien du pendule (figure 82). Son origine  $O'$ , située sur l'axe  $OZ$  de la rotation de  $\mathcal{R}'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ , correspond au point d'accroche du

pendule qui forme une liaison rotule *sans frottement*. Le vecteur rotation de  $\mathcal{R}'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  est constant :  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ .

Le pendule sphérique est rigide, de longueur  $L$  constante, et une masse  $m$ , assimilable à un point matériel, est suspendue à son extrémité libre  $M$ . La distance  $\|\overrightarrow{OO'}\|$  est prise aussi égale à  $L$  pour ne pas compliquer inutilement le problème : lorsque le pendule est à la verticale en  $O$  on considère qu'il ne fait qu'effleurer le sol sans être perturbé.

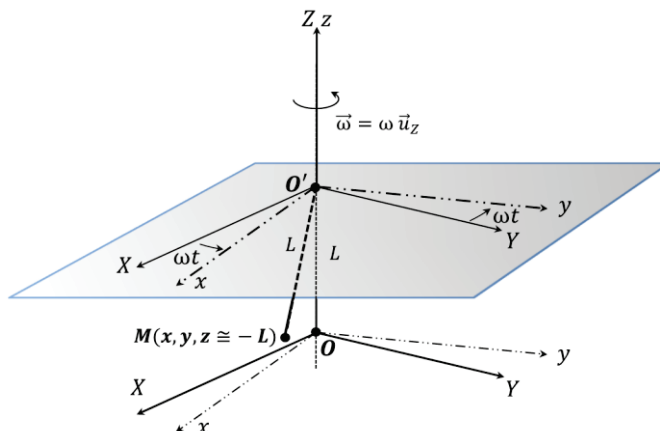


Figure 82. Géométrie adoptée pour le pendule tournant.

Dans ces conditions, la question est : quelles seront les trajectoires du pendule observées depuis  $\mathcal{R}'$ , c'est-à-dire depuis la plateforme tournante ? Attendu que nous sommes appelés à nous focaliser sur les petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre (stable) du pendule, nous ferons le choix des coordonnées cartésiennes comme le veut l'usage : l'emploi des coordonnées sphériques mène en effet à quelques difficultés mathématiques<sup>1</sup>.

**Équations du mouvement en coordonnées cartésiennes.** Puisque le pendule est soumis à son poids, à la tension  $\vec{T}$  du fil, et aux forces inertielles, le principe fondamental de la dynamique exprimé dans le référentiel non-galiléen  $\mathcal{R}'$  prend la forme :

$$m \vec{a}' \doteq \vec{T} + m \vec{g}_0 - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) - 2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Avec le choix des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  de  $M$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ , on aura :

<sup>1</sup> En dehors de l'approximation des faibles oscillations, il est bon d'étudier le pendule tournant en coordonnées sphériques à l'aide des intégrales premières que sont l'énergie du pendule et la projection de son moment cinétique total  $\mathcal{L}_z$  (C92) le long de l'axe de la rotation. Cela fait ressortir en particulier que les trajectoires se scindent en deux catégories : celles qui passent par l'axe de la rotation ( $\mathcal{L}_z = 0$ ) et celles qui n'y passent jamais ( $\mathcal{L}_z \neq 0$ ) comme les trajectoires étoilées qui vont être étudiées ici. Par ailleurs une telle étude montrerait des liens évidents avec celle du pendule sphérique simple (C81).

$$\overrightarrow{O'M} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

où  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  est la base associée aux axes tournants  $O'x$  et  $O'y$  et à l'axe  $O'z$  qui se confond avec l'axe  $OZ$  (id est :  $\vec{u}_z = \vec{u}_Z$ ). Les vecteurs vitesse et accélération de  $M$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  seront simplement :

$$\vec{v}' = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}' = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

La tension  $\vec{T}$  du fil est dirigée le long de  $\overrightarrow{O'M}$  (de  $M$  vers  $O'$ ) puisqu'il n'y a pas de frottements. Son intensité,  $T > 0$ , nous est inconnue, mais on peut écrire  $\vec{T}$  sous la forme :

$$\vec{T} = -T \frac{\overrightarrow{O'M}}{\|\overrightarrow{O'M}\|}$$

Comme le pendule a une longueur imposée  $L$ , on a toujours l'équation de liaison :  $\|\overrightarrow{O'M}\| = r = L$ . Par conséquent, la tension du fil peut s'écrire :

$$\vec{T} = -\frac{T}{L} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z)$$

Le calcul des forces inertielles en présence ne pose pas de soucis particuliers. On trouve pour le terme centrifuge :

$$-m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = m \omega^2 (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y)$$

Et pour la force de Coriolis :

$$-2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 2m \omega (\dot{y} \vec{u}_x - \dot{x} \vec{u}_y)$$

Enfin, le champ de pesanteur  $\vec{g}_0$  qui agit sur  $M$  a été choisi constant :  $\vec{g}_0 = -g_0 \vec{u}_z$ . De sorte que les équations du mouvement du pendule dans le système de coordonnées cartésiennes de  $\mathcal{R}'$  s'écrivent :

$$\begin{cases} m \ddot{x} \doteq -\frac{T x}{L} + m \omega^2 x + 2 m \omega \dot{y} \\ m \ddot{y} \doteq -\frac{T y}{L} + m \omega^2 y - 2 m \omega \dot{x} \\ m \ddot{z} \doteq -m g_0 - \frac{T z}{L} \end{cases}$$

Ce sont là les équations exactes du problème pour un champ gravitationnel constant. La tension  $T$  étant inconnue, il faut les compléter par la relation de liaison :

$$\|\overrightarrow{O'M}\| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \doteq L, \quad \forall t$$

**Solution générale pour les petites oscillations.** Plaçons-nous dans les conditions dites des faibles oscillations où la longueur du pendule est supposée suffisamment grande pour que les rapports :  $\epsilon_x = x/L$  et  $\epsilon_y = y/L$  puissent être considérés comme des infiniment petits (du même ordre de grandeur). Dans ce cadre, la relation de liaison fournit :

$$z^2 = L^2 - x^2 - y^2 = L^2 (1 - \epsilon_x^2 - \epsilon_y^2)$$

C'est-à-dire, en faisant attention à ce que pour les faibles oscillations  $z$  est négatif (figure 82) et en profitant de l'approximation d'ordre 1 :  $(1 - u)^\alpha \cong 1 - \alpha u$  :

$$z = -L \left( 1 - \frac{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2}{2} \right)$$

La cote  $z$  du pendule ne diffère donc de  $-L$  qu'à l'ordre 2 en  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ . Nous nous contenterons alors d'une solution à l'ordre 1 en ces variables pour laquelle  $z$  reste fixe :

$$z = -L$$

Dans ces conditions, la tension du pendule s'obtient directement à partir de l'équation du mouvement pour  $z$  :

$$T = m g_0$$

$T$  prend donc la valeur qu'elle a à la position d'équilibre du pendule en  $O$ .

À ce niveau d'approximation, les mouvements du pendule se réalisent donc dans le plan horizontal  $xOy$ . Et en injectant la valeur obtenue pour  $T$  dans les deux équations qui restent à notre disposition, on obtient, après avoir posé :  $\omega_0 = \sqrt{g_0/L}$  (la pulsation propre du pendule) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\omega^2 - \omega_0^2) x + 2 \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = (\omega^2 - \omega_0^2) y - 2 \omega \dot{x} \end{cases}$$

Ce système d'équations différentielles est couplé, mais il est linéaire et à coefficients constants : on le résoud simplement via diverses méthodes dont la plus courante est d'avoir recours à la variable complexe :  $\zeta := x + i y$ . Avec cette variable, le système ci-dessus (il suffit d'ajouter les deux équations après avoir multiplié la seconde par  $i$ ) est équivalent à l'équation différentielle pour  $\zeta$  :

$$\ddot{\zeta} + 2 i \omega \dot{\zeta} + (\omega_0^2 - \omega^2) \zeta = 0$$

Cette équation rentre dans le cadre du théorème énoncé à l'Annexe 4. Les racines de son équation caractéristique, imaginaires pures, seront écrites sous la forme :

$$-i \omega_{\mp} = -i (\omega \mp \omega_0) \Leftrightarrow \omega_{\pm} = \omega \pm \omega_0$$

La solution générale est ainsi :

$$\zeta(t) = A e^{-i\omega_+ t} + B e^{-i\omega_- t} = e^{-i\omega t} \{A e^{-i\omega_0 t} + B e^{i\omega_0 t}\}$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes complexes arbitraires.

Il reste à développer cette solution en parties réelle et imaginaire pour obtenir  $x(t)$  et  $y(t)$ . Ce faisant, on prendra garde à écrire les deux constantes  $A$  et  $B$  sous leur forme complexe :  $A = A_1 + i A_2$  et  $B = B_1 + i B_2$  où cette fois  $A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  sont des constantes réelles :

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos \omega_+ t + A_2 \sin \omega_+ t + B_1 \cos \omega_- t + B_2 \sin \omega_- t \\ y(t) = A_2 \cos \omega_+ t - A_1 \sin \omega_+ t + B_2 \cos \omega_- t - B_1 \sin \omega_- t \end{cases}$$

Ces constantes sont naturellement déterminées par les conditions initiales<sup>1</sup>  $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$  imposées au pendule. Nous pouvons choisir  $y_0 = 0$  sans perdre la généralité du problème : cela revient à orienter l'axe  $Oy$  pour satisfaire à ce choix. Ce faisant, on obtient le lien cherché :

$$A_1 = -\frac{x_0 \omega_- + \dot{y}_0}{2 \omega_0} ; \quad B_1 = \frac{x_0 \omega_+ + \dot{y}_0}{2 \omega_0} ;$$

$$A_2 = \frac{\dot{x}_0 - y_0 \omega_-}{2 \omega_0} ; \quad B_2 = \frac{y_0 \omega_+ - \dot{x}_0}{2 \omega_0}$$

**Validité des solutions.** Il reste à nous assurer que nous restons bien, sur toute la durée du mouvement, dans les conditions pour lesquelles nous avons obtenu cette solution générale des petites oscillations. Comme  $x(t)$  et  $y(t)$  sont une somme de quatre termes, leur valeur absolue sera inférieure à la somme des valeurs absolues de ces quatre termes. Et puisque les fonctions  $\cos$  ou  $\sin$  sont limitées à 1 en valeur absolue, on en déduit qu'à tout instant :

$$\begin{cases} |x(t)| \leq |A_1| + |A_2| + |B_1| + |B_2| \\ |y(t)| \leq |A_1| + |A_2| + |B_1| + |B_2| \end{cases}$$

• Lorsque  $\omega \leq \omega_0$ , ces inégalités conduisent à :

$$|x(t)|, |y(t)| \leq |x_0| + \frac{|\dot{x}_0| + |\dot{y}_0|}{\omega_0}$$

Ainsi, il faut respecter deux conditions minimales. La première est bien sûr de donner à  $|x_0|$  une valeur telle qu'elle soit très inférieure à  $L$ . La seconde est que la contribution supplémentaire à cette inégalité doit aussi être très inférieure à  $L$ , ce qui

<sup>1</sup> Pour la coordonnée  $z$ , l'approximation impose de prendre  $z_0 = -L$  et  $\dot{z}_0 = 0$ .

peut s'exprimer de façon plus simple en profitant de cette autre inégalité toujours vraie :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$$

La seconde condition sera donc automatiquement satisfaite si nous la remplaçons par la condition :

$$\frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}{\omega_0} = \frac{v'_0}{\omega_0} \ll L \Leftrightarrow v'_0 \ll \sqrt{L g_0}$$

où  $v'_0$  est la norme du vecteur vitesse initial du pendule. Pour un pendule de laboratoire sur une plateforme tournante, en donnant à  $L$  la valeur de  $1 \text{ m}$ , on conclut que  $v'_0$  devra être très inférieure à  $3.13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  : disons alors que  $v'_0$  est au plus de quelques  $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

• Lorsque  $\omega > \omega_0$ , les inégalités précédentes deviennent cette fois :

$$|x(t)|, |y(t)| \leq |x_0| \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{|\dot{x}_0| + |\dot{y}_0|}{\omega_0}$$

La solution proposée ne sera donc acceptable que pour des valeurs de  $\omega$  ne dépassant que de peu la valeur de  $\omega_0$ . On comprend cette limitation en regardant l'intensité de la force centrifuge qui est proportionnelle à  $\omega^2$  : plus  $\omega$  augmente, plus le pendule aura tendance à s'écarter de sa position d'équilibre, ce qui finit par rendre caduques les conditions des faibles oscillations que nous avons posées : les solutions obtenues lorsque  $\omega > \omega_0$  sont donc à prendre avec précaution.

Pour le pendule de Foucault, nous rentrons largement dans le cadre où  $\omega \leq \omega_0$ . Le rapport  $\omega/\omega_0$  est en effet tout au plus de l'ordre de 1 pour 10 000 (voir plus bas).

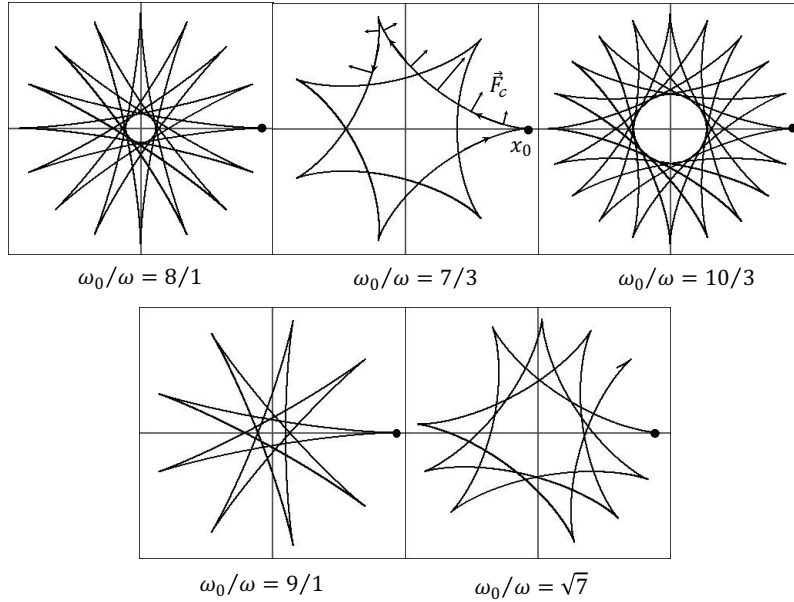
**92. Trajectoires pour les conditions initiales du pendule de Foucault.** Parmi l'ensemble des conditions initiales  $(x_0, y_0 = 0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$  que l'on peut donner au pendule tournant, nous choisirons celles qui sont associées au pendule de Foucault : le pendule est lâché sans vitesse initiale (vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ ) depuis une certaine position :  $(x_0, y_0 = 0, z_0 \cong L)$ . En outre, nous nous limiterons au cas :  $\omega < \omega_0$ .

De la solution générale obtenue au **91**, on tire alors, après quelques réarrangements :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \left\{ \cos \omega t \cos \omega_0 t + \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega t \sin \omega_0 t \right\} \\ y(t) = x_0 \left\{ -\sin \omega t \cos \omega_0 t + \frac{\omega}{\omega_0} \cos \omega t \sin \omega_0 t \right\} \end{cases}$$

Un échantillon des trajectoires obtenues est représenté figure 83. On observe qu'à partir d'une position initiale  $x_0 > 0$ , le pendule se dirige vers  $O$  ( $dx < 0$ ) cependant que la force de Coriolis dévie sa trajectoire vers les  $y$  positifs. Chaque branche

courbée de ces trajectoires étoilées correspond à un aller ou un retour du pendule, la courbure étant initiée par la force de Coriolis qui agit tantôt dans un sens à l'aller, tantôt dans l'autre sens au retour, maximale au milieu de chaque branche.



**Figure 83.** Trajectoires étoilées des faibles oscillations du pendule tournant selon les valeurs du rapport  $\omega_0/\omega$ . Elles ont lieu dans le plan  $xOy$  et sont obtenues pour les conditions initiales dites « du pendule de Foucault ». Le point noir sur chaque image représente la position initiale  $x_0$ .

Au vu du choix de la condition initiale, l'axe  $Ox$  est l'axe le long duquel devrait osciller le pendule si celui-ci n'était pas sur la plateforme tournante (*id est* :  $\omega = 0$ ). Or on peut suivre au cours du temps la déviation de la trajectoire par rapport à cet axe  $Ox$  lorsque  $\omega \neq 0$  en examinant la valeur de la tangente à la courbe qui est :  $dy/dx = \tan \varphi$ , où  $\varphi$  est l'angle que fait cette tangente avec l'axe initial  $Ox$  :

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\tan \omega t$$

Cette équation fournit la solution :  $\varphi = -\omega t + k\pi$ . Comme l'axe  $Ox$  et le pendule lui-même (le rayon vecteur  $\overrightarrow{O'M}$ ) forment ce que l'on appelle le plan des oscillations du pendule pour  $\omega = 0$ , on peut dire, lorsque  $\omega \neq 0$ , que le plan des oscillations du pendule tournant évolue au cours du temps à la vitesse angulaire constante  $\omega$  par rapport à ce plan de référence  $(Ox, \overrightarrow{O'M})$ . Il revient périodiquement à son orientation initiale avec une période :  $T = 2\pi/\omega$ . Cette rotation est engendrée par la force de Coriolis.

**Les trajectoires étoilées du pendule tournant et leur nombre de sommets.** Sur la figure 83, on observe que le nombre de sommets que possèdent les trajectoires étoilées dépend de la valeur du rapport  $\omega_0/\omega$ . Pour déterminer ce nombre, on peut d'abord regarder les instants  $t^*$  pour lesquels la vitesse du pendule s'annule, car c'est aux sommets que cette vitesse est nulle. Cela impose :

$$\begin{cases} \dot{x}(t^*) = 0 \Leftrightarrow \cos \omega t^* \sin \omega_0 t^* = 0 \Leftrightarrow \sin(\omega + \omega_0)t^* = \sin(\omega - \omega_0)t^* \\ \dot{y}(t^*) = 0 \Leftrightarrow \sin \omega t^* \sin \omega_0 t^* = 0 \Leftrightarrow \cos(\omega + \omega_0)t^* = \cos(\omega - \omega_0)t^* \end{cases}$$

Ces instants doivent donc être tels que :

$$(\omega + \omega_0) t^* = (\omega - \omega_0) t^* + 2 k \pi$$

Ce qui exige :  $t^* = k \pi / \omega_0$  où  $k$  est un entier.

La vitesse s'annule donc à chaque demi-période ( $\pi/\omega_0$ ) de la période propre du pendule, comme on pouvait s'y attendre. À ces instants, que nous indiquons par  $k$  maintenant :  $t_k^*$ , le pendule est en :

$$\begin{cases} x(t_k^*) = (-1)^k x_0 \cos\left(k \pi \frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ y(t_k^*) = (-1)^{k+1} x_0 \sin\left(k \pi \frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{cases}$$

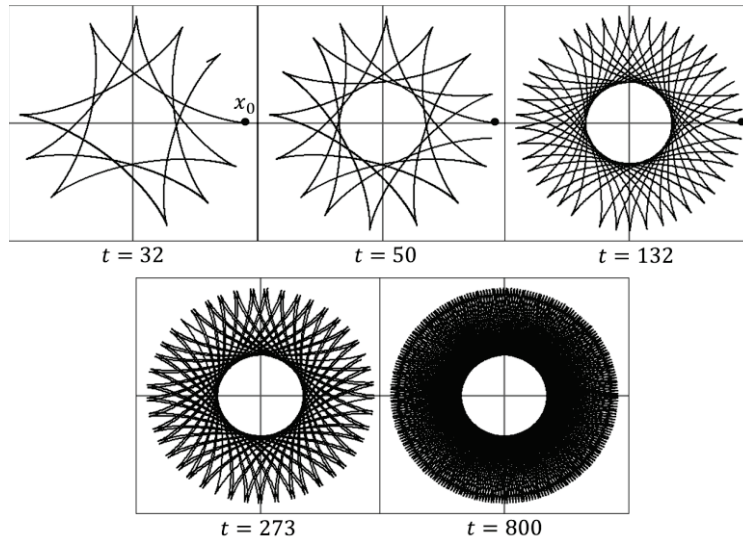
Ainsi, la plus petite valeur  $K$  de  $k$  pour laquelle le pendule revient à sa position initiale sera le nombre de sommets cherché. Pour cela,  $K$  doit obéir aux équations :

$$\begin{cases} x_0 = x_0 (-1)^K \cos\left(K \pi \frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ 0 = x_0 (-1)^{K+1} \sin\left(K \pi \frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{cases}$$

La seconde équation impose :  $K \pi \omega / \omega_0 = n \pi$  où  $n$  est le plus petit nombre entier tel que l'on ait :

$$K = n \frac{\omega_0}{\omega}$$

Manifestement, cela n'est possible que si  $\omega_0/\omega$  est un nombre rationnel (c'est-à-dire un nombre qui peut s'écrire comme un rapport de deux nombres entiers). Si ce n'est pas le cas, le nombre de sommets de la trajectoire étoilée doit alors devenir infini au fur et à mesure que le temps s'écoule : cette trajectoire ne se referme jamais sur elle-même (figure 84).



**Figure 84.** Évolution au cours du temps de la trajectoire étoilée du pendule tournant pour une valeur non rationnelle du rapport  $\omega_0/\omega$  (ici  $\sqrt{7}$ ). La trajectoire ne se referme jamais et le nombre de sommets tend vers l'infini.

Si  $\omega_0/\omega$  est un nombre rationnel, écrivons-le sous la forme  $p/q$  où  $p$  et  $q$  sont deux nombres entiers premiers entre eux. Alors, puisque  $n$  est le plus petit nombre entier qui rend entier le produit  $n \omega_0/\omega = n p/q$ , il faut  $n = q$  ; ce qui fournit :  $K = p$ . Mais il faut aussi satisfaire la première équation qui impose :  $(-1)^{K+n} = 1$ , c'est-à-dire que  $K + n = p + q$  doit être pair. Si c'est le cas, alors  $K = p$  est le nombre de sommets cherchés. Mais si ce n'est pas le cas, il nous faut augmenter  $n$  qui vaudra alors au moins  $2q$  cette fois ; cela fournira  $K = 2p$  et  $K + n = 2(p + q)$  qui est bien pair.

Ainsi, le nombre  $K$  de sommets des trajectoires étoilées est :

- si  $\omega_0/\omega$  n'est pas un nombre rationnel :  $K \rightarrow \infty$
- si  $\omega_0/\omega$  est un nombre rationnel :  $\omega_0/\omega = p/q$ ,  $p$  et  $q$  premiers entre eux.

La trajectoire est fermée et :

- si  $p + q$  est pair :  $K = p$
- si  $p + q$  est impair :  $K = 2p$

Attention, le plan des oscillations aura peut-être tourné plusieurs fois lors du parcours de la trajectoire étoilée dans son entier. En effet, nous savons que ce plan revient à son orientation initiale au bout d'un temps  $T = 2\pi/\omega$ , tandis que la période de la trajectoire étoilée fermée est :  $t_K^* = K \pi/\omega_0$ . Au cours de cette durée, le plan des oscillations aura donc tourné un nombre  $r$  de fois, égal à :

$$r = \frac{t_K^*}{T} = \frac{q K}{2 p}$$

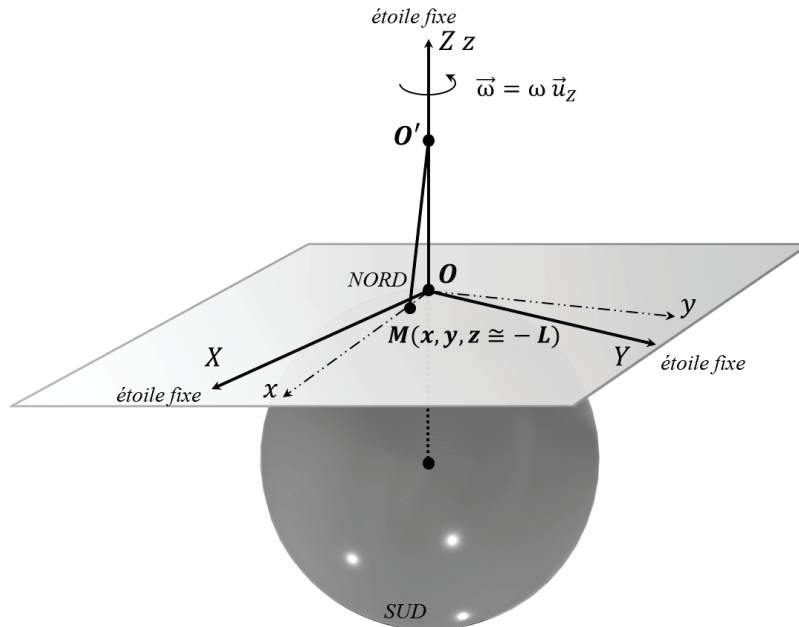
Donc, le plan des oscillations du pendule aura tourné :

$q/2$  fois, si  $p + q$  est pair

$q$  fois si  $p + q$  est impair

On pourra vérifier toutes ces conclusions sur les exemples de la figure 83.

**Le cas du pendule de Foucault (au Nord ou au Sud) proprement dit.** Venons-en à l'expérience du pendule de Foucault proprement dite. Cette fois, le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  est le référentiel  $\mathcal{R}_C$  de Copernic vis-à-vis duquel le référentiel terrestre joue maintenant le rôle du référentiel tournant  $\mathcal{R}'$  (figure 85).



**Figure 85.** Pour le pendule de Foucault, cette fois le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  est le référentiel de Copernic et  $\mathcal{R}'$  est le référentiel terrestre considéré comme non galiléen.

Les calculs et approximations réalisés au **C94** montrent qu'au pôle Nord (ou au pôle Sud moyennant l'inversion de  $\vec{\omega}$  :  $\vec{\omega} = -\omega \vec{u}_Z$ ), les équations que l'on obtient sont bien identiques à celles d'un pendule tournant, compte tenu du fait simplificateur que le rapport  $\omega_T/\omega_0$  est très faible. En effet, la vitesse de rotation angulaire de la Terre est :  $\omega_T = 7.292 \times 10^{-5} (rd).s^{-1}$ , tandis que la pulsation propre du pendule est  $\omega_0 = \sqrt{g_0/L} = 3.133/\sqrt{L} (rd).s^{-1}$  où  $L$  est exprimée en mètres. La longueur du pendule de Foucault installé dans l'atrium de la bibliothèque universitaire du Havre en 2017 est  $L = 20 m$  ; d'où un rapport  $\omega_T/\omega_0 = 1.04 \times 10^{-4}$ .

Dans ces conditions, le rapport inverse vaut :  $\omega_0/\omega_T \cong 9\,607.242 \dots$  et on peut se demander à quoi ressemble une trajectoire étoilée du pendule de Foucault pour des rapports aussi importants ? Quel est son nombre de sommets ? Le premier constat est que ce rapport n'est jamais connu exactement en raison des erreurs expérimentales : longueur du pendule, valeur de  $g_0$  au Havre... On ne sait donc pas si ce rapport est rationnel ou non... En fait, il vaut mieux estimer le nombre d'allers-retours effectués par le pendule lorsque la Terre aura fait un tour complet sur elle-même, c'est-à-dire lorsque le plan des oscillations du pendule aura fait un tour complet. D'après les conclusions précédentes, au cours de cette période  $T = 2\pi/\omega_T$ , la vitesse du pendule se sera annulée un nombre de fois égal à :  $T/t_{k=1}^* = 2\omega_0/\omega_T$ . Et puisqu'au cours d'un aller-retour la vitesse du pendule s'annule 2 fois, le pendule aura donc effectué environ  $\omega_0/\omega_T \cong 9\,607.242 \dots$  aller-retours.

**Simplification des équations du mouvement dans le cas du pendule Foucault.** Le pendule de Foucault se distingue quelque peu du pendule tournant en raison de la très faible valeur de la vitesse de rotation  $\omega$  par rapport à la pulsation propre du pendule  $\omega_0$ . Aussi, on peut se permettre d'approximer les équations du mouvement pour les faibles oscillations obtenues au **91** en négligeant les termes en  $(\omega/\omega_0)^2$  qui y apparaissent. Ces équations s'écrivent en effet :

$$\begin{cases} \ddot{x} \doteq (\omega^2 - \omega_0^2) x + 2\omega \dot{y} \\ \ddot{y} \doteq (\omega^2 - \omega_0^2) y - 2\omega \dot{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} \doteq -\omega_0^2 (1 - (\omega/\omega_0)^2) x + 2\omega \dot{y} \\ \ddot{y} \doteq -\omega_0^2 (1 - (\omega/\omega_0)^2) y - 2\omega \dot{x} \end{cases}$$

Elles sont donc approximées comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{x} \doteq -\omega_0^2 x + 2\omega \dot{y} \\ \ddot{y} \doteq -\omega_0^2 y - 2\omega \dot{x} \end{cases}$$

Et l'équation différentielle pour la variable complexe  $\zeta = x + iy$  devient :

$$\ddot{\zeta} + 2i\omega \dot{\zeta} + \omega_0^2 \zeta \doteq 0$$

On vérifie aisément que les racines de l'équation caractéristique qui lui correspond sont les mêmes que précédemment, à l'ordre 1 en  $\omega/\omega_0$ , et que la solution générale obtenue au **91** est bien la solution générale de ces équations approximées. Afin de simplifier la discussion de la prochaine section, c'est à ces équations simplifiées, d'ordre 1 en  $\omega/\omega_0$ , que nous nous référerons.

L'étude des mouvements du pendule tournant ou du pendule de Foucault au pôle Nord (ou Sud) aux faibles oscillations fournit d'autres types de trajectoires selon les conditions initiales  $(x_0, y_0 = 0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$  que l'on se donne. Il en existe plusieurs

variétés d'intérêt<sup>1</sup> que l'on peut étudier par soi-même à partir de la solution générale obtenue précédemment.

**93. Le pendule de Foucault.** En réalité, l'expérience du pendule de Foucault est réalisée à une certaine latitude  $\lambda$  à la surface de la Terre, avec un pendule de longueur  $L$  dont le point d'accroche  $O'$  est situé sur la verticale du lieu. Il nous faut donc changer quelque peu la géométrie du problème précédent qui n'était valable qu'aux pôles Nord et Sud. Cette géométrie et les calculs qui s'ensuivent sont très similaires à ceux réalisés lors de l'étude de la déviation vers l'Est au chapitre précédent : ils sont réalisés au **C94**. On y démontre que les équations simplifiées (faibles oscillations, ordre 0 en  $\alpha$ , ordre 1 en  $\omega/\omega_0$ ) de ce pendule de Foucault oscillant à la latitude  $\lambda$  prennent la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2 \omega \dot{y} \sin\lambda \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2 \omega \dot{x} \sin\lambda \end{cases}$$

où  $(x, y, z \cong L)$  sont les coordonnées cartésiennes de l'extrémité du pendule, associées au référentiel terrestre tournant  $\mathcal{R}'\{O', xyz ; t\}$  (figure 87, **C94**), les axes  $O'x, O'y, O'z$  étant associés aux vecteurs de la base cartésienne déterminée lors de l'étude de la déviation vers l'Est.

Ce sont-là les mêmes équations que celles du pendule situé au pôle Nord, mais avec une vitesse de rotation effective :  $\omega_\lambda = \omega \sin\lambda$ . Ainsi, pour les mêmes conditions initiales que précédemment où le pendule est par exemple écarté à la position  $x_0$  parallèlement à l'axe  $O'x$  et lâché sans vitesse initiale, on observera aussi les trajectoires étoilées étudiées à la section précédente. Toutefois, le plan initial des oscillations évoluera maintenant avec une période :  $T_\lambda = 2\pi/\omega_\lambda$ , c'est-à-dire :

$$T_\lambda = T_T / \sin\lambda$$

où  $T_T$  est la période de rotation de la Terre. Pour le pendule du Havre par exemple,  $\lambda = 49.49^\circ$  et  $T_\lambda$  vaut environ 32 h.

Attention, la rotation discutée ici est bien celle relativement au plan initial  $(Ox, \overrightarrow{O'M})$  au sein duquel devraient se produire les oscillations du pendule si la Terre ne tournait pas sur elle-même. Cette rotation n'est pas relative au référentiel des étoiles fixes (contrairement à ce qu'il se passe au pôle Nord ou Sud) puisque la verticale du lieu est ici en rotation par rapport à ce référentiel.

---

<sup>1</sup> Des rosaces par exemple pour  $(x_0, y_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 < 0)$ . Voir par exemple : W.S. Kimball, « *The Foucault Pendulum Star Path and the n-Leaved Rose* », American Journal of Physics, **13** (1945) p. 271.

Foucault ne déduit pas la période  $T_\lambda$  à partir de calculs analytiques mais sur la base d'une démonstration géométrique dont Sommerville<sup>1</sup> a donné une variante un peu plus simple. Elle repose sur un calcul infinitésimal réalisé du point de vue du référentiel des étoiles fixes (figure 86) : pendant la durée  $dt$ , le point  $P$  de la surface terrestre où se situe le point d'équilibre du pendule passe en  $P'$  en raison de la rotation de la Terre. Soit alors  $C$  le centre de l'arc de cercle infinitésimal  $PP'$  situé sur l'axe de rotation de la Terre et  $d\alpha$  ( $\delta\alpha$  sur la figure 86) l'angle infinitésimal  $(\widehat{CP, CP'})$ . Soit aussi  $K$  le point de rencontre des tangentes méridiennes en  $P$  et  $P'$  sur cet axe et  $d\beta$  ( $\delta\beta$  sur la figure 86) l'angle infinitésimal  $(\widehat{KP, KP'})$ . On a :

$$\begin{cases} d\alpha = PP'/CP \\ d\beta = PP'/KP \end{cases}$$

Or,  $\sin\lambda = CP/KP$ , d'où :

$$d\beta = d\alpha \sin\lambda$$

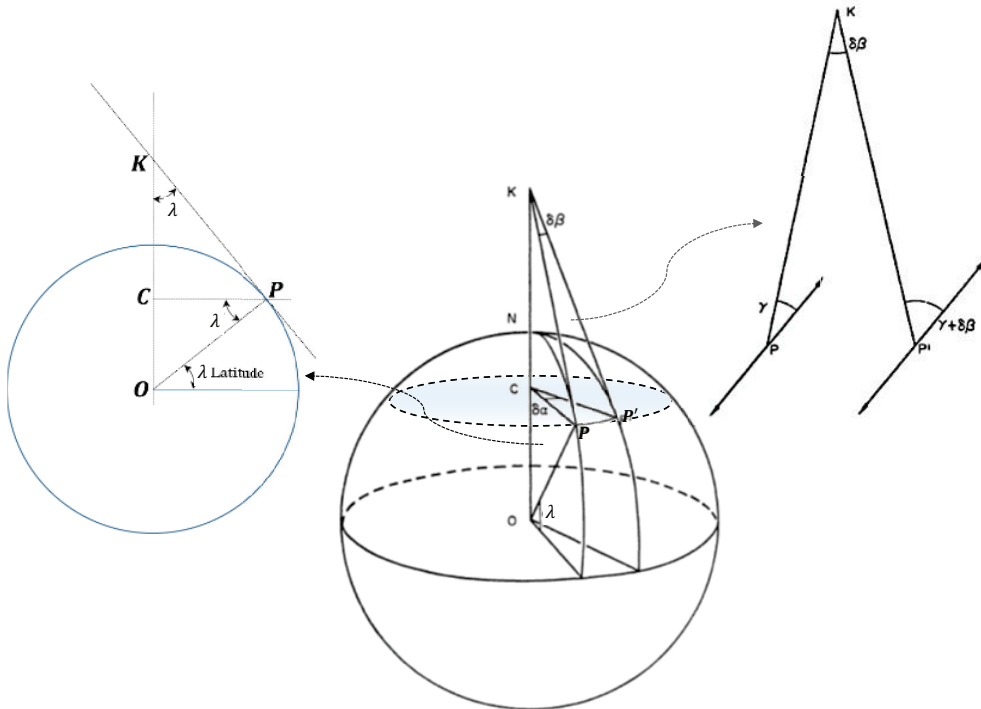


Figure 86. Démonstration géométrique de la loi  $T_\lambda = T_T / \sin\lambda$  (voir texte).

<sup>1</sup> W.B. Sommerville, « *The description of Foucault's pendulum* », *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, **13** (1972) p.40.

Maintenant, pour des angles  $d\beta$  suffisamment petits et des oscillations du pendule suffisamment faibles, on peut considérer que les mouvements du pendule sont contenus dans le plan  $PP'K$  : lorsqu'il oscille autour de  $P$  dans une direction qui fait un certain angle  $\gamma$  avec le Nord, il oscille un instant plus tard autour de  $P'$  dans une direction qui fait un angle  $\gamma + d\beta$  avec le Nord (figure 86) car, entre ces deux instants, aucune force latérale n'est venue perturber le pendule du point de vue du référentiel galiléen des étoiles fixes. Ainsi, pendant que la Terre tourne d'un angle  $d\alpha$  entre  $P$  et  $P'$ , le plan des oscillations évolue quant à lui d'un angle  $d\beta$  vers l'Est. Il en résulte que lors d'une rotation complète de la Terre,  $\alpha = 2\pi$ , ce plan aura évolué d'un angle  $\beta = 2\pi \sin\lambda$ . Sa période de rotation est donc :

$$T_\lambda = T_T / \sin\lambda$$

Au pôle Nord,  $\lambda = \pi/2$ , et on retrouve bien sûr les résultats du 91. En se déplaçant vers l'équateur,  $T_\lambda$  ne cesse d'augmenter jusqu'à devenir infinie pour  $\lambda = 0$ , c'est-à-dire sur l'équateur : les oscillations d'un pendule de Foucault placé à l'équateur se réalisent donc dans un plan invariable<sup>1</sup> (pour les conditions initiales déjà indiquées). La raison en est qu'à l'équateur, la verticale du lieu ( $O'z$ ) est constamment perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre. Cet axe, ainsi que la vitesse du pendule sont donc contenus dans un plan parallèle au plan  $xO'y$  : la force de Coriolis,  $-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ , n'agit par conséquent que le long de la verticale du lieu et n'influe pas sur le mouvement plan du pendule. En poursuivant vers le Sud, on retrouve la même période  $T_\lambda$ , qui redevient égale à  $T_T$  au pôle Sud. Attention toutefois : dans l'hémisphère Sud, le vecteur rotation de la Terre est inversé<sup>2</sup> : le plan des oscillations du pendule tourne alors vers l'Ouest.

## Compléments et exercices du chapitre 19

### C94. Équations du mouvement pour les faibles oscillations du pendule de Foucault situé à une certaine latitude.

**Géométrie du problème.** La géométrie adoptée (figure 87) est à peu près la même que lors de l'étude de la déviation vers l'Est du chapitre précédent : le référentiel des étoiles fixes est  $\mathcal{R}\{O, XYZ ; t\}$  où  $O$  est le centre de la Terre. Le vecteur rotation de la Terre vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  est constant et vaut :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_Z = \omega (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

où  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  est la base des coordonnées sphériques associée à l'origine  $O$  de  $\mathcal{R}$ .

<sup>1</sup> En effet, il faut bien voir qu'une période infinie signifie l'absence de périodicité.

<sup>2</sup> C'est-à-dire qu'il faut écrire dans l'hémisphère Sud :  $\vec{\omega} = -\omega \vec{u}_Z$ .

L'expérience est réalisée à la surface de la Terre avec un pendule de longueur  $L$  dont le point d'accroche  $O'$  est situé à la verticale du lieu du point  $P$ , position d'équilibre du pendule, dont les coordonnées sphériques sont  $(r = R, \theta, \varphi = \omega t + \varphi_0)$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ . Ce point  $P$  est donc à la latitude  $\lambda$ , lieu de l'expérience.

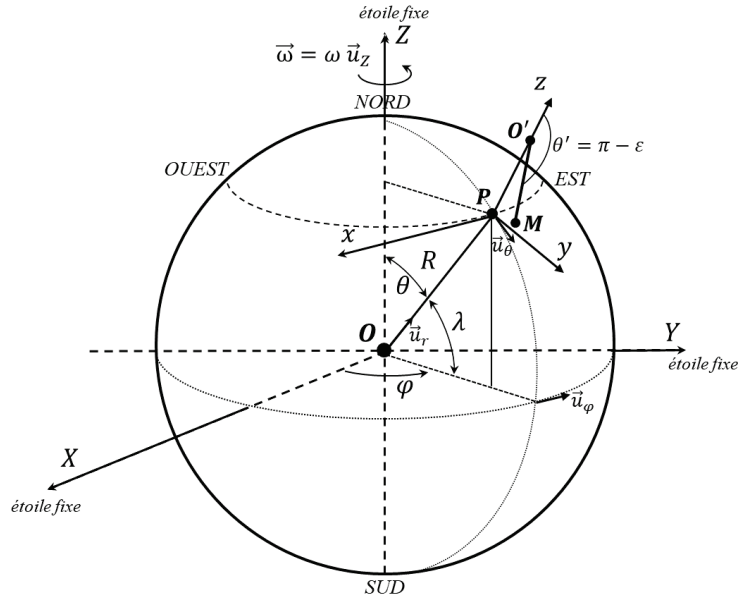


Figure 87. Géométrie de l'expérience du pendule de Foucault réalisée à la latitude  $\lambda$ .

Le choix du référentiel tournant sera  $\mathcal{R}'\{O', xyz; t\}$  où les axes  $O'x, O'y, O'z$  sont associés aux vecteurs de la base cartésienne déterminée lors de l'étude de la déviation vers l'Est. On rappelle les relations (à l'ordre 1 en  $\alpha$ ) entre cette base et la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  :

$$\begin{cases} \vec{u}_x = -\vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_y = \alpha \sin\theta \cos\theta \vec{u}_r + \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_z = \vec{u}_r - \alpha \sin\theta \cos\theta \vec{u}_\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = \alpha \sin\theta \cos\theta \vec{u}_y + \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \vec{u}_y - \alpha \sin\theta \cos\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = -\vec{u}_x \end{cases}$$

où  $\alpha = R \omega^2 / g_0$  est notre paramètre de contrôle des approximations qui vont être réalisées. Nous tiendrons compte également de celle qui a lieu pour les faibles oscillations du pendule ainsi que de la faible valeur de  $\omega$  comparée à la fréquence propre du pendule.

Compte tenu de cette géométrie, le point matériel  $M$  est repéré par ses coordonnées cartésiennes vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  avec :

$$\overrightarrow{O'M} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$\vec{v}' = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}' = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

Attendu que pour les faibles oscillations, nous nous permettrons d'écrire  $z = L$  comme au 91, on peut de suite annoncer :  $\dot{z} = 0$  et  $\ddot{z} = 0$ .

**Équation de la dynamique du pendule de Foucault à l'ordre 1 en  $\alpha$  dans le cadre des petites oscillations.** L'équation exacte de la dynamique du pendule en mouvement vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  s'écrit :

$$m \vec{a}' = m \vec{g}(M) - m \left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'M}) - 2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{T}$$

où chacun de ces termes doit être examiné.

- Le champ de pesanteur  $\vec{g}(M)$  de la Terre, de masse  $M_T$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{g}(M) &= -GM_T \frac{\overline{OM}}{\|\overline{OM}\|^3} = -GM_T \frac{(\overline{OP} + \overline{PO'} + \overline{O'M})}{\|\overline{OP} + \overline{PO'} + \overline{O'M}\|^3} \\ &= -\frac{GM_T}{R^2} \frac{(\vec{u}_r + \vec{u}_x x/R + \vec{u}_y y/R + \vec{u}_z (z+L)/R)}{\|\vec{u}_r + \vec{u}_x x/R + \vec{u}_y y/R + \vec{u}_z (z+L)/R\|^3} \end{aligned}$$

Dans le cadre des faibles oscillations du pendule, on peut négliger tous les termes correctifs au terme principal qui est  $-g_0 \vec{u}_r$ . En effet, si on appelle  $(r' = L, \theta', \varphi')$  les coordonnées sphériques de  $M$  relatives au point  $O'$ , on a, pour les faibles oscillations où  $\theta' = \pi - \varepsilon$  (figure 87) :

$$\begin{cases} x = L \sin \theta' \cos \varphi' \cong L \varepsilon \cos \varphi' \\ y = L \sin \theta' \sin \varphi' \cong L \varepsilon \sin \varphi' \\ z = L \cos \theta' \cong -L \end{cases}$$

De sorte que :  $|x/R| \cong L |\varepsilon \cos \varphi'|/R \leq |\varepsilon| L/R$ . Pour un pendule de Foucault de longueur  $L = 100 \text{ m}$  (ce qui est beaucoup), on a :  $L/R \cong 1.5 \times 10^{-5}$ , c'est-à-dire l'ordre de grandeur de  $\alpha^2 \cong 1.2 \times 10^{-5}$ . Les termes correctifs  $x/R$ ,  $y/R$  et  $(z+L)/R$  sont donc bien négligeables et on peut écrire :

$$\vec{g}(M) \cong -g_0 \vec{u}_r = -g_0 (\vec{u}_z + \alpha \sin \theta \cos \theta \vec{u}_y), \quad g_0 = GM_T/R^2$$

- Le second terme concerne l'accélération de  $O'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ , avec cette fois :  $\overline{OO'} = R \vec{u}_r + L \vec{u}_z = R (\vec{u}_r + L/R \vec{u}_z)$ . Attendu que nous venons de montrer que  $L/R$  est négligeable, le calcul qui s'ensuit est en tout point similaire à celui réalisé lors de la déviation vers l'Est. On a ainsi, à l'ordre 1 en  $\alpha$  :

$$\left. \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} \cong -g_0 \alpha [\sin^2 \theta \vec{u}_z + \sin \theta \cos \theta \vec{u}_y]$$

• L'intensité du troisième terme est également négligeable : en effet, son rapport avec le terme dominant  $g_0$  vaut ici :

$$\frac{\omega^2 \|\overrightarrow{O'M}\|}{g_0} = \alpha \frac{\|\overrightarrow{O'M}\|}{R} = \alpha \frac{L}{R}$$

• Le calcul du terme  $\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$  fournit quant à lui (en tenant compte du fait que pour les faibles oscillations nous aurons  $\dot{z} = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{v}' = & -\omega \dot{y} \cos \theta (1 + \alpha \sin^2 \theta) \vec{u}_x + \omega \dot{x} \cos \theta (1 + \alpha \sin^2 \theta) \vec{u}_y \\ & + \omega \dot{x} \sin \theta (1 - \alpha \cos^2 \theta) \vec{u}_z \end{aligned}$$

• Enfin, la tension  $\vec{T}$  du pendule s'écrit, comme au 91 :

$$\vec{T} = -T \frac{\overrightarrow{O'M}}{\|\overrightarrow{O'M}\|} = -\frac{T}{L} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z)$$

Les équations de la dynamique du pendule de Foucault sont donc, à l'ordre 1 en  $\alpha$  et dans le cadre de ses faibles oscillations pour lesquelles on aura  $\dot{z} = 0$  et  $\ddot{z} = 0$  :

$$\begin{cases} m \ddot{x} \doteq 2 m \omega \dot{y} \cos \theta (1 + \alpha \sin^2 \theta) - \frac{T x}{L} \\ m \ddot{y} \doteq -2 m \omega \dot{x} \cos \theta (1 + \alpha \sin^2 \theta) - \frac{T y}{L} \\ 0 \doteq -m g_0 (1 - \alpha \sin^2 \theta) - 2 m \omega \dot{x} \sin \theta (1 - \alpha \cos^2 \theta) - \frac{T z}{L} \end{cases}$$

En négligeant d'abord  $\alpha$  devant 1 pour obtenir une solution à l'ordre 0 en  $\alpha$ , puis en écrivant explicitement  $z = -L$  (faibles oscillations) pour obtenir la valeur de  $T$  grâce à la dernière équation, on obtient :

$$T = m g_0 + 2 m \omega \dot{x} \sin \theta$$

Nous allons simplifier cette valeur de  $T$  avant de l'injecter dans les deux premières équations en comparant l'intensité du terme de Coriolis,  $2 m \omega \dot{x} \sin \theta$ , par rapport au terme dominant  $m g_0$ . Ces quantités sont dans un rapport qui vaut :

$$2 \omega |\dot{x}| |\sin \theta| / g_0$$

Pour estimer  $|\dot{x}|$ , on peut se référer aux faibles oscillations du pendule de Foucault en train d'osciller dans un plan qui contient l'axe  $O'x$  sur une Terre fixe. Son abscisse,  $x = L \sin \theta' \cos \varphi' = L \sin(\pi - \varepsilon) \cos 0 \cong L \varepsilon$ , évolue alors selon la loi horaire relative à un pendule plan :  $x = L \varepsilon = L \varepsilon_0 \cos \omega_0 t$  où  $\varepsilon_0 \ll 1$  est son

amplitude maximale. On a ainsi :  $\dot{x} = L \dot{\varepsilon} = -L \omega_0 \varepsilon_0 \sin \omega_0 t$ , ce qui impose :  $|\dot{x}| \leq L \omega_0 |\varepsilon_0|$ . On peut donc borner le rapport précédent de la façon suivante :

$$2 \omega |\dot{x}| |\sin\theta| / g_0 \leq 2 \omega L \omega_0 |\varepsilon_0| / g_0 = 2 |\varepsilon_0| \omega / \omega_0$$

Comme nous souhaitons une solution à l'ordre 1 en  $\omega/\omega_0$ , nous prenons le parti - puisque l'amplitude maximale  $\varepsilon_0$  est petite devant 1 - de négliger le terme de Coriolis dans l'expression de  $T$  pour ne garder que la contribution principale :

$$T = m g_0$$

Les équations du mouvement pour  $x$  et  $y$  deviennent ainsi, après y avoir injecté cette valeur approximée de  $T$  :

$$\begin{cases} \ddot{x} \doteq -\omega_0^2 x + 2 \omega \dot{y} \cos\theta \\ \ddot{y} \doteq -\omega_0^2 y - 2 \omega \dot{x} \cos\theta \end{cases}$$

On a coutume d'utiliser la latitude du lieu,  $\lambda$ , plutôt que sa colatitude  $\theta$ . À partir de la relation :  $\theta + \lambda = \pi/2$ , on déduit :  $\cos\theta = \sin\lambda$ . Les équations simplifiées des faibles oscillations d'un pendule de Foucault situé à la latitude  $\lambda$  sont donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} \doteq -\omega_0^2 x + 2 \omega \dot{y} \sin\lambda \\ \ddot{y} \doteq -\omega_0^2 y - 2 \omega \dot{x} \sin\lambda \end{cases}$$

**C95. L'espace absolu, les forces inertielles, le seau de Newton et les critiques de Mach.** Si la Terre tourne sur elle-même, par rapport à quel référentiel cette affirmation a-t-elle un sens ? Nous avons répondu au chapitre 9 que ce référentiel devait être celui des « étoiles fixes » (le référentiel de Copernic,  $\mathcal{R}_C$ ). Mais, dit ainsi, l'argument semble purement cinématique et le besoin se fait ressentir d'affirmer que la rotation diurne de la Terre est *véritable*, à l'image du mouvement orbital de la Terre autour du Soleil (et non pas l'inverse) qui a véritablement lieu en raison de l'inertie bien plus importante de ce dernier. Or, dans le cas du mouvement de rotation diurne de la Terre, les étoiles semblent bien trop éloignées pour invoquer une quelconque interaction...

**Le point de vue de Newton : existence d'un espace absolu.** Dans la construction qu'il fit de la dynamique, Newton plaida en faveur de l'existence d'un mouvement « vrai & absolu » qui se réalise au sein d'un *espace absolu*, fondamentalement immobile et... sans matière<sup>1</sup>. Tandis qu'un mouvement relatif sera celui qui

---

<sup>1</sup> Cet *espace absolu* immobile de Newton n'est donc pas un référentiel puisqu'il n'y a pas de référence à un corps massif. Métaphysiquement, l'*espace absolu* se conçoit comme : « ce dans quoi les objets se meuvent », ou encore comme « le théâtre des événements ». On argumente qu'il est fondamentalement immobile car il est le lieu de toute chose : il est donc son propre lieu, ce qui signifie qu'il ne peut se mouvoir, sans quoi il

s'observe vis-à-vis d'un référentiel qui est déjà dans un état de mouvement *vrai & absolu*.

Tout en reconnaissant « *qu'il est très difficile de connoître les mouvements vrais de chaque corps, & de les distinguer actuellement des mouvements apparens* », Newton affirmait : « *Les effets par lesquels on peut distinguer le mouvement absolu du mouvement relatif, sont les forces qu'ont les corps qui tournent pour s'éloigner de l'axe de leur mouvement ; car dans le mouvement circulaire purement relatif, ces forces sont nulles, & dans le mouvement circulaire vrai & absolu, elles sont plus ou moins grandes selon la quantité du mouvement.* ». Et Newton de proposer l'expérience du seau d'eau en rotation pour distinguer les deux cas.

**L'expérience du seau de Newton.** Tout d'abord, il est important de préciser que l'expérience a lieu sur Terre ; que cette expérience est suffisamment courte et que les forces mises en jeu sont nettement supérieures aux forces inertielles dues à la rotation de la Terre sur elle-même. Le sol terrestre joue donc le rôle d'un référentiel galiléen ; le principe d'inertie y est valable et son mouvement *vrai & absolu* est assimilable à un mouvement rectiligne uniforme.

L'expérience est la suivante : on suspend un seau d'eau au plafond d'une pièce à l'aide d'une longue corde que l'on a tordue sur elle-même un certain nombre de fois avant de la bloquer et d'attendre que le seau et l'eau aient pris un état de repos par rapport au sol. Dans cet état, la surface de l'eau est plane.

On débloque alors la corde torsadée et le seau se met à tourner. Au début, on observe que l'eau à l'intérieur du seau reste au repos. Puis, la part du liquide la plus proche des parois se met à tourner avec le seau et, ce faisant, on observe que sa surface s'incurve en remontant le long des parois. À la fin de l'expérience, toute l'eau a adopté le mouvement de rotation du seau et sa surface a pris la forme d'un paraboloïde de révolution qui garde une courbure constante tant que la vitesse de rotation du seau ne varie pas.

L'interprétation de Newton fut celle-ci : au début de l'expérience, lorsque l'eau est encore au repos alors que le seau tourne, il faut bien voir que vis-à-vis du seau, cette eau est en rotation (ainsi que le sol). Et qu'à la fin de l'expérience, l'eau est aussi en rotation, mais cette fois par rapport au sol. Or, ce n'est que dans cette dernière situation que la surface de l'eau est incurvée en raison de la force inertielle centrifuge qu'elle subit. Il faut conclure que le mouvement *vrai & absolu* de rotation est bien celui-là ; l'autre – l'eau en rotation par rapport au seau du début de l'expérience – n'étant qu'une description purement cinématique, un mouvement purement apparent.

---

sortirait de lui-même... [cf L. Peterschmitt, in Thierry Paquet et al. *Espace et lieu dans la pensée occidentale*, chap. 6 ; ed. La découverte (2012)].

Pour Newton, il existe donc un *espace absolu* vis-à-vis duquel les mouvements de rotation et d'accélération *vrai(e)s & absolu(e)s* se manifestent grâce à l'existence de forces inertielles.

**Le point de vue de Mach.** Ernst Mach, tout comme Leibniz, s'opposa à l'espace-temps absolu de Newton en argumentant qu'« [...] *en restant sur le terrain des faits, on ne connaît rien d'autre que l'espace et le mouvement relatifs. [...] Nous disons qu'un corps K ne peut changer sa direction et sa vitesse que sous l'influence d'un autre corps K'. Or il nous serait impossible d'arriver à cette idée, si d'autres corps A, B, C, ... n'étaient présents qui nous permettent de juger du mouvement de K. Nous reconnaissons donc uniquement une relation du corps K aux corps A, B, C... Faire soudainement abstraction de A, B, C, ... et se mettre à parler de l'allure du corps K dans l'espace absolu, c'est tomber dans une double erreur. Il nous est en effet impossible de savoir comment K se comporterait en l'absence des corps A, B, C... puisque nous ne posséderions alors aucun moyen qui nous permette de juger de l'allure du corps K et de prouver notre affirmation ; celle-ci n'aurait donc plus de signification scientifique.*».

Ainsi, pour éviter cette contradiction, Mach et Leibniz pensent l'espace et le temps comme un moyen que la raison édifie pour décrire les relations entre les corps : un espace-temps sans matière n'existe pas.

À l'expérience du seau de Newton, Mach réplique : « *L'expérience du vase rempli d'eau et animé d'un mouvement de rotation nous apprend que la rotation relative de l'eau par rapport au vase n'éveille pas de forces centrifuges apparentes, mais que celles-ci sont éveillées par son mouvement relatif par rapport à la masse de la terre et aux autres corps célestes ; elle ne nous apprend rien de plus. Personne ne pourrait dire ce que l'expérience aurait donné si la paroi du vase avait été rendue plus épaisse et plus massive, jusqu'à avoir une épaisseur de plusieurs lieues.* ».

Pour Mach, la rotation de la Terre sur elle-même ainsi que les preuves apportées par son aplatissement aux pôles, par la déviation vers l'Est des corps en chute libre ou par l'expérience du pendule de Foucault, ne peuvent se concevoir qu'avec la présence des étoiles lointaines : « *L'univers ne nous est pas donné deux fois, d'abord avec une terre au repos, puis avec une terre animée d'une rotation, mais bien une fois, avec ses mouvements relatifs seuls déterminables. Il est donc impossible de dire comment seraient les choses si la terre ne tournait pas.*».




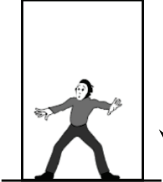
Il faut conclure que dans ces raisonnements, les forces inertielles doivent être le résultat d'une interaction avec l'ensemble des masses présentes dans l'univers.

**C96. Principe d'équivalence.** On sait que les écrits de Mach ont fortement influencé Einstein lors de ses réflexions sur la question des forces inertielles et les origines de la gravitation. En 1907, Einstein jetait le trouble sur la notion de référentiel galiléen en relatant l'expérience de pensée suivante : « si un homme tombe du toit d'une maison, il ne sent pas son propre poids. ». En voici une variante.

Un physicien, que sa collègue a endormi avant l'expérience, se retrouve à son réveil dans une petite pièce rectangulaire complètement fermée au monde extérieur. Le physicien constate qu'il « flotte » dans la pièce sans parvenir à discerner l'existence d'un « haut » ou d'un « bas ». Prenant une pièce de monnaie dans sa poche, il l'isole au centre de la salle sans vitesse initiale et constate qu'elle reste au repos aussi longtemps qu'il n'y touche pas. Après plusieurs expériences de ce type, en prenant des objets de masses et de composition diverses, avec ou sans vitesse initiale, le physicien conclut que le principe d'inertie est vérifié dans la salle qu'il assimile donc à un référentiel galiléen.

Soudain, notre physicien voit l'un des murs de la pièce venir le percuter brusquement. Après s'être relevé, il constate maintenant qu'il peut discerner un « haut » et un « bas ». Reprenant les expériences précédentes, il constate aussi que tous les objets, quelles que soient leurs masses et leur composition, chutent maintenant vers le « bas » de la pièce avec toujours la même accélération constante. Le principe d'inertie n'étant plus vérifié, le physicien conclut que le référentiel de la salle n'est plus galiléen et il explique ce mouvement de chute à accélération constante par l'existence d'une force inertielle. Dans l'écriture des forces d'inertie, notre physicien vérifie que seul le terme  $\vec{F}_e = -m d^2\overline{OO'}/dt^2$  peut donner lieu à un tel phénomène. Il conclut que le référentiel non galiléen dans lequel il se trouve maintenant est dans un mouvement d'entraînement à accélération constante. Il enregistre l'ensemble de ses observations sur son dictaphone et propose finalement qu'au début de l'expérience, sa collègue l'avait déposé dans un vaisseau spatial isolé dans l'espace, que les moteurs du vaisseau se sont ensuite mis en route pour le propulser avec une force de poussée  $\vec{F}$  constante et qu'il vogue actuellement vers les confins de l'univers.

À cet instant, une porte cachée dans l'une des cloisons de la pièce s'ouvre et la collègue de notre physicien vient le rejoindre. Elle lui explique qu'il est sur Terre dans une cage d'ascenseur dont les câbles s'étaient rompus juste avant qu'il ne se réveille. L'ascenseur était alors parti en chute libre sous l'effet du champ de gravitation terrestre jusqu'à ce que le système de freinage de sécurité se mette à fonctionner et l'immobilise brusquement. On peut penser que physicien hésite à faire écouter son dictaphone à sa collègue. Mais cette dernière insiste et découvre avec surprise les conclusions de son ami. La figure 88 résume les deux interprétations.

Schéma récapitulatif de l'expérience	<i>Point de vue du physicien</i>	<i>Point de vue de la physicienne</i>
<i>1<sup>ère</sup> phase de l'expérience</i>	Vaisseau isolé dans l'espace, référentiel galiléen, absence de forces. 	Ascenseur en chute libre, référentiel galiléen avec présence d'un champ gravitationnel. 
<i>2<sup>ème</sup> phase de l'expérience</i>	Vaisseau accéléré, référentiel non galiléen, présence d'une force inertielle 	Ascenseur au repos, référentiel galiléen présence d'un champ gravitationnel 

**Figure 88** : Résumé de l'expérience de l'ascenseur en chute libre du point de vue des deux protagonistes.

Après réflexion et discussion, les deux physiciens finissent par reconnaître « *la complète équivalence physique entre un champ de gravitation et l'accélération du système de référence* »<sup>1</sup>, c'est-à-dire ici le vaisseau-ascenseur accéléré, et ils énoncent le principe d'équivalence :

**Principe d'équivalence.** *Localement, les lois du mouvement vis-à-vis d'un référentiel non galiléen sont les mêmes que celles qui ont lieu vis-à-vis d'un référentiel galiléen en présence d'un champ gravitationnel. En d'autres termes, un champ gravitationnel est localement équivalent à un référentiel non galiléen.*

Nous expliciterons plus bas le terme « localement ». Concentrons-nous d'abord sur l'équivalence entre force gravitationnelle et force inertielle : l'origine de cette équivalence provient de l'égalité entre masse grave et masse inertielle (chapitre 10). C'est bien grâce à cette propriété que notre physicien, pendant la chute libre de

<sup>1</sup> A. Einstein, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, vol IV, p. 411 (1907). Traduction française : Albert Einstein, *Œuvres choisies 2, Relativités I*, p. 83 ; Editions du Seuil, CNRS, 1993.

l'ascenseur, a pu conclure que son référentiel  $\mathcal{R}'$  était galiléen. Pour bien le voir, écrivons en premier lieu le principe fondamental de la dynamique du point de vue de sa collègue physicienne qui se situe vis-à-vis du référentiel terrestre galiléen  $\mathcal{R}$ . Pour elle, un objet de masse inertielle  $m_i$  et de masse grave  $m_g$  est en chute libre avec l'ascenseur sous l'effet du champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}_0$ . Son équation de la dynamique est :

$$m_i \vec{a} \doteq m_g \vec{g}_0$$

L'équation de la dynamique de cet objet s'écrira donc vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ , en vertu de la loi de transformation des accélérations :

$$m_i \vec{a}' \doteq m_g \vec{g}_0 - m_i \vec{a}_e - m_i \vec{a}_c = m_g \vec{g}_0 + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

Comme le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de  $\mathcal{R}'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  est nul ici, il ne subsiste dans les forces inertielles que le terme :

$$\vec{F}_e = -m_i d^2\overline{OO'}/dt^2$$

Or, l'accélération de l'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  vaut  $\vec{g}_0$  puisque l'ascenseur est en chute libre. L'équation du mouvement de l'objet vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  est donc :

$$m_i \vec{a}' \doteq m_g \vec{g}_0 - m_i \vec{g}_0 = (m_g - m_i) \vec{g}_0$$

Ainsi, si notre physicien a observé que tous les objets isolés avaient une accélération nulle, c'est bien que tous satisfont à l'identité entre masse grave et masse inertielle.

Il faut remarquer maintenant que cette justification n'a qu'un caractère local, d'où la précision : « localement » dans l'énoncé du principe d'équivalence. En effet, les forces et le champ considérés dans cette expérience de pensée et son explicitation étaient constantes. Or cela n'est possible que sur des portions d'espace suffisamment petites. Pour des portions plus grandes, on peut faire la différence entre forces gravitationnelles qui décroissent avec la distance et forces inertielles, qui croissent ou restent constantes et/ou varient en direction.

Le principe d'équivalence, lorsqu'il est couplé avec la théorie de la relativité restreinte qui prend en compte l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel galiléen, est à la base de la théorie de la relativité générale.



# ANNEXES



## ANNEXE 1

### RAPPELS DE CALCUL VECTORIEL EN DIMENSION 3

**A1. Vecteurs.** Au départ, un vecteur est un segment de droite orienté qui relie deux points de l'espace entre eux (figure A1). Ainsi, un vecteur possède trois caractéristiques : une longueur, une direction et un sens, qui font que l'on peut l'assimiler par la pensée à une flèche. La longueur d'un vecteur est égale à la longueur du segment de droite qui joint les deux points de l'espace. La direction du vecteur est celle du segment de droite. Le sens du vecteur correspond à l'orientation préalablement choisie du segment de droite.

Deux vecteurs parallèles entre eux, de même sens et de même longueur sont dits *équipollents*. On finit par les confondre l'un avec l'autre et par dire (de façon abusive) qu'ils sont égaux. Un tel vecteur n'a plus de point origine ou de point d'arrivée particuliers ; on dit qu'il est libre.

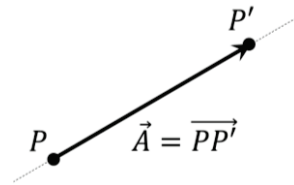


Figure A1. Le vecteur  $\overrightarrow{PP'}$

**A2. Addition des vecteurs, multiplication d'un vecteur par un nombre.** L'addition de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est un vecteur  $\vec{C}$  dont la direction, le sens et la longueur sont définis par la *règle du parallélogramme*, qui découle de la relation de Chasles (figure A2). Cette opération est commutative :

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

La multiplication d'un vecteur  $\vec{A}$  par un nombre réel  $\lambda$  est le vecteur  $\vec{D} = \lambda \vec{A}$  dont la longueur est celle de  $\vec{A}$  multipliée par la valeur absolue de  $\lambda$ , et dont le sens est soit celui du vecteur  $\vec{A}$  si  $\lambda > 0$ , soit le sens contraire si  $\lambda < 0$ .

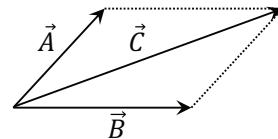


Figure A2. Loi d'addition de deux vecteurs.

Addition de vecteurs et multiplication de vecteurs par un nombre possèdent toutes les propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication.

**A3. Produit scalaire et norme.** Le *produit scalaire* de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est le nombre obtenu en multipliant la longueur de  $\vec{A}$  par la longueur de  $\vec{B}$  par le cosinus de l'angle  $\theta$  que font ces deux vecteurs entre eux ; et on écrit :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

où le symbole «  $\cdot$  » désigne l'opération « produit scalaire » et où la notation  $\|\vec{A}\|$  désigne la longueur du vecteur  $\vec{A}$  ; on dit aussi : *sa norme*. Souvent, pour simplifier l'écriture, la norme de  $\vec{A}$  est notée :  $A$ .

Le produit scalaire est commutatif :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Il est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} = (\vec{B} + \vec{C}) \cdot \vec{A}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  s'interprète comme le produit de la projection du vecteur  $\vec{B}$  sur  $\vec{A}$  par la norme de  $\vec{A}$ , ou encore comme le produit de la projection du vecteur  $\vec{A}$  sur  $\vec{B}$  par la norme de  $\vec{B}$  (figure A3) :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A (B \cos\theta) = B (A \cos\theta) = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

À partir de ces propriétés, on montre facilement que la norme d'un vecteur  $\vec{A}$  est égale à la racine carrée de produit scalaire de ce vecteur par lui-même :

$$\|\vec{A}\| = A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A^2}$$

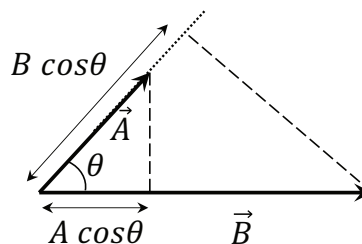
Le produit scalaire entre deux vecteurs non nuls  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est nul, si, et seulement si, ils sont perpendiculaires entre eux ( $\theta = \pi/2$ ) :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

**A4. Bases et composantes.** On dit de  $k$  ( $k = 2$  ou  $3$ ) vecteurs  $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k$  de  $\mathbb{R}^3$  qu'ils sont *linéairement indépendants* s'il n'existe aucune relation linéaire entre eux, c'est-à-dire si :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{V}_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

Des vecteurs linéairement indépendants sont aussi dits *libres*. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont dépendants ou *liés*.

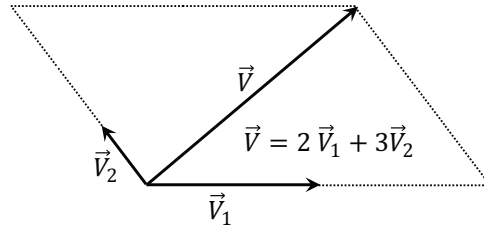


**Figure A3.** Interprétation du produit scalaire entre deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  faisant entre eux un angle  $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$ .

Si 3 vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  de  $\mathbb{R}^3$  sont linéairement indépendants, on dit qu'ils forment une *base* de  $\mathbb{R}^3$  car tout vecteur  $\vec{V}$  de  $\mathbb{R}^3$  peut alors s'exprimer de façon unique en fonction de ces 3 vecteurs ; c'est-à-dire qu'il existe un unique triplet de nombres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  tel que :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \vec{V}_i$$

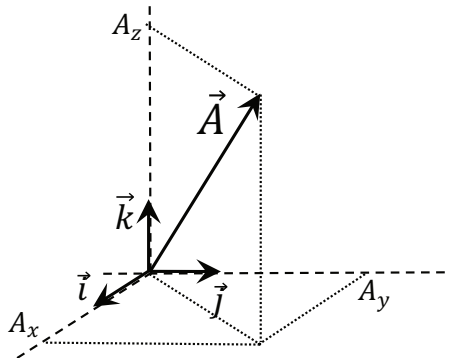
Les nombres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  sont appelés *composantes* du vecteur  $\vec{V}$  dans la base  $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ .



**Figure A4.** Les deux vecteurs  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de  $\mathbb{R}^2$ .

On dit d'une base de  $\mathbb{R}^3$  qu'elle est *orthonormée* si la norme de chacun des 3 vecteurs de base vaut l'unité de longueur et s'ils sont perpendiculaires entre eux :

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \text{ orthonormée} \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{cases}$$



**Figure A5.** Un vecteur  $\vec{A}$  et ses composantes  $(A_x, A_y, A_z)$  dans la base orthonormée  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Les composantes  $(A_x, A_y, A_z)$  d'un vecteur  $\vec{A}$  dans une base orthonormée  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  sont égales aux projections de ce vecteur sur chacun des vecteurs de base (figure A5). De sorte que l'on peut écrire :

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} = (\vec{A} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{A} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{A} \cdot \vec{k}) \vec{k}$$

La norme de ce vecteur est égale à la racine carrée de la somme des carrés de chacune de ses composantes :

$$\|\vec{A}\| = A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Si  $(B_x, B_y, B_z)$  sont les composantes d'un autre vecteur  $\vec{B}$  dans la base orthonormée  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  alors le produit scalaire  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  s'écrit :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A B \cos \theta$$

Ainsi, à partir de la connaissance des composantes de deux vecteurs, on peut en déduire l'angle  $\theta$  qu'ils font entre eux.

**A5. Produit vectoriel.** Par définition, le *produit vectoriel* de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , noté  $\vec{A} \wedge \vec{B}$ , est un vecteur  $\vec{C}$  perpendiculaire à la fois à  $\vec{A}$  et à  $\vec{B}$ , et dont la norme est égale au produit de la norme de  $\vec{A}$  par la norme de  $\vec{B}$  par le sinus de l'angle  $\theta$  que font ces deux vecteurs entre eux (figure A6) :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad C = A B \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

La norme du vecteur  $\vec{C}$  est égale à l'aire du parallélogramme construit à partir de  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .

Le sens du vecteur  $\vec{C}$  est obtenu par ce qu'on appelle « la règle des 3 doigts de la main droite » comme indiqué sur la figure A7. Le pouce représente le vecteur  $\vec{A}$ , l'index le vecteur  $\vec{B}$  et le majeur le vecteur  $\vec{C}$ .

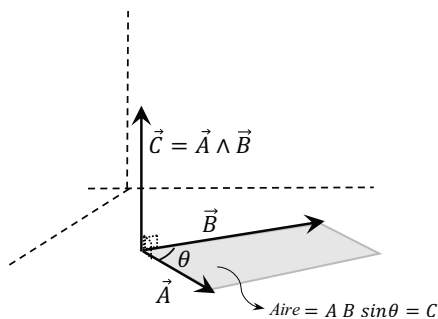


Figure A6. Définition du produit vectoriel entre deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  dont le résultat est le vecteur  $\vec{C}$ .

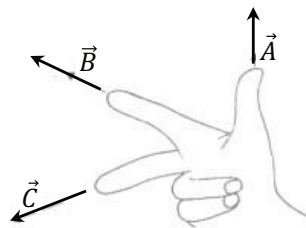


Figure A7. La règle dite des trois doigts de la main droite.

Attention : le produit vectoriel est *anti-commutatif* :  $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ .

On fera aussi attention à ce qu'il est non-associatif :  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$ .

Il est distributif vis à vis de l'addition :  $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) + (\vec{A} \wedge \vec{C})$ .

Le produit vectoriel entre deux vecteurs non nuls  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est le vecteur nul si, et seulement si, ces vecteurs sont parallèles ou antiparallèles entre eux ( $\theta = 0$  ou  $\pi$ ) :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$$

Une base orthonormée  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  est dite *directe* si, dans l'ordre où ils sont écrits, les 3 vecteurs obéissent à la « règle des 3 doigts de la main droite » ; c'est-à-dire si :  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ ,  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ . On remarque que les deux dernières égalités sont déduites de la première par une permutation circulaire sur  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

La base  $\{\vec{I} = -\vec{i}, \vec{J} = \vec{j}, \vec{K} = \vec{k}\}$  est dite *indirecte* car les relations précédentes ne sont pas vérifiées (en effet :  $\vec{K} = -\vec{I} \wedge \vec{J}$ ). La base  $\{\vec{I} = \vec{j}, \vec{J} = \vec{i}, \vec{K} = \vec{k}\}$  est elle aussi indirecte pour la même raison. On peut dire des bases indirectes qu'elles obéissent à la « règle des 3 doigts de la main gauche ».

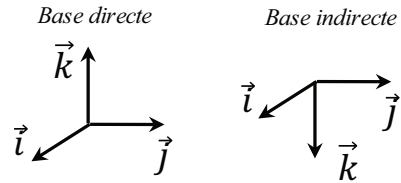


Figure A8. Bases directes et bases indirectes.

Si  $(A_x, A_y, A_z)$  sont les composantes d'un vecteur  $\vec{A}$  dans une base orthonormée directe  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  et  $(B_x, B_y, B_z)$  sont celles d'un vecteur  $\vec{B}$  dans la même base, alors on peut calculer les composantes de  $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ . Le calcul donne :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

**A6. Produit mixte.** Le produit mixte de 3 vecteurs  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  est un nombre obtenu en réalisant l'opération :  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ . Ce nombre, s'il est non nul, est égal au signe près (selon que  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  sont directs ou pas), au volume du parallélépipède construit sur  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ .

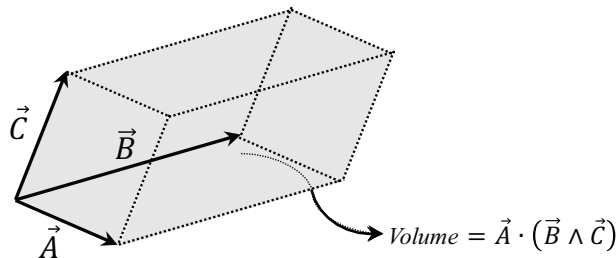


Figure A9. Le produit mixte des trois vecteurs  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  est le volume du parallélépipède construit à partir de ces trois vecteurs.

On ne change pas la valeur du produit mixte si on effectue une permutation circulaire sur les 3 vecteurs :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

**Relations utiles.**

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) + \vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{A}) + \vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D}) (\vec{B} \cdot \vec{C})$$

**A7. Espaces et sous-espaces vectoriels, dimensions.** L'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  muni de l'addition entre vecteurs et du produit d'un vecteur par un réel forme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Vous êtes invités à chercher des précisions sur cette notion d'espace vectoriel qui contribue à élargir la signification première d'un vecteur.

On démontre par l'absurde que toutes les bases d'un espace vectoriel possèdent un même nombre de vecteur. Ce nombre définit la dimension de l'espace vectoriel en question. Ainsi, l'espace vectoriel des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  est de dimension 3.

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , il existe des vecteurs linéairement indépendants entre eux qui ne sont pas forcément au nombre de 3 : par exemple, un seul vecteur non nul est linéairement indépendant. Or il est facile de démontrer que l'ensemble des vecteurs proportionnels à ce vecteur forme un espace vectoriel de dimension 1. On dit alors qu'il forme un sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $\mathbb{R}^3$  : il s'agit d'une droite vectorielle.

Deux vecteurs de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  linéairement indépendants forment un sous-espace vectoriel de dimension 2 appelé plan vectoriel.

## ANNEXE 2

### DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES

**A8. Dérivée d'une fonction.** Soit une fonction  $f$  de la variable  $x$  définie sur un certain intervalle de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Et soit  $\Delta_\varepsilon f(x)$  la différence entre la valeur prise par  $f$  en  $x + \varepsilon$  et celle prise en  $x$  :

$$\Delta_\varepsilon f(x) := f(x + \varepsilon) - f(x)$$

Le *taux d'accroissement* de  $f$  en  $x$  pour un pas  $\varepsilon$  se définit en rapportant  $\Delta_\varepsilon f$  à la différence  $(x + \varepsilon) - x$  :

$$\text{taux d'accroissement} := \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{(x + \varepsilon) - x} = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

À la limite, lorsque le pas  $\varepsilon$  tend vers 0, ce taux d'accroissement tend vers un nombre (s'il existe) appelé nombre dérivé, caractéristique de l'évolution de la fonction  $f$  en  $x$ . Convenons de dénommer  $f'(x)$  ce nombre qui ne dépend plus de  $\varepsilon$  et qui prend a priori une valeur différente pour chaque valeur de  $x$ . Cette notation est due à Lagrange (1772). Ce faisant, nous venons de définir une fonction  $f'$ , issue de la fonction  $f$ , dont la valeur en  $x$  s'obtient par l'opération suivante :

$$f'(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$f'$  sera appelée fonction dérivée de la fonction  $f$ .

**Exemple.** Soit la fonction  $f$  telle que  $f(x) = x^2$ , alors on a :

$$f'(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2x + \varepsilon) = 2x$$

On peut ensuite imaginer calculer par la même opération de dérivation la dérivée de la dérivée, qui sera notée  $f''$  :

$$f''(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f'(x + \varepsilon) - f'(x)}{\varepsilon}$$

Et ainsi de suite... La dérivée  $n$ -ième de la fonction  $f$  en  $x$  sera notée :  $f^{(n)}(x)$ .

On démontre un certain nombre de formules à partir de cette opération linéaire qu'est la dérivation ; par exemple, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions :  $(f + g)' = f' + g'$ ,  $(fg)' = f'g + fg'$ , etc... On trouve facilement de tels formulaires sur internet.

**A9. Interprétation de  $f'$  et tangente à la fonction  $f$  en  $x$ .** Fixons une valeur de  $x$ . D'après la section précédente, lorsque le pas  $\varepsilon$  est non nul mais très petit, on peut dire de façon approximative que le taux de variation de  $f$  en  $x$  est presque égal à  $f'(x)$  :

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \approx f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x + \varepsilon) \approx \varepsilon f'(x) + f(x)$$

En posant :  $X = x + \varepsilon$ , l'approximation s'écrit :

$$f(X) \approx (X - x)f'(x) + f(x) = f'(x)X + [f(x) - x f'(x)]$$

Ainsi, pour tout  $X$  situé dans le voisinage immédiat de  $x$ , la fonction  $f$  est approximée par une droite d'équation  $Y = aX + b$  dont la pente  $a$  vaut  $f'(x)$  :  $f'(x)$  s'identifie donc à la valeur de la tangente de l'angle  $\alpha$  que fait cette droite avec l'axe  $Ox$  et qui passe par le point de coordonnées  $X = x$ ,  $Y = f(x)$  (figure A10).

Cette droite :

$$Y(X) = f'(x)X + [f(x) - x f'(x)]$$

est appelée, pour chaque valeur de  $x$  fixée : tangente à la fonction  $f$  en  $x$ .

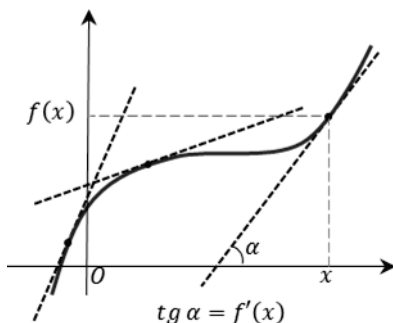


Figure A10. La tangente à la fonction  $f$  en  $x$ .

**A10. Formule de Taylor : développements limités.** Taylor (1715) a démontré l'égalité suivante qui est présentée ici sous la forme dite de Taylor-Young :

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n(\varepsilon)$$

où  $f^{(n)}(x)$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $f$  en  $x$ , et où le reste  $R_n(\varepsilon)$  tend vers 0 plus vite que  $\varepsilon^n$ , c'est-à-dire que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_n(\varepsilon)}{\varepsilon^n} = 0$$

On emploie souvent la notation « petit  $o$  », grâce à laquelle on écrit :  $R_n(\varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  où il est entendu que  $o$  est une fonction qui tend vers 0 plus vite que  $\varepsilon^n$ .

Dans la formule de Taylor, des puissances de  $\varepsilon$  de plus en plus élevées apparaissent : on en arrive ainsi à la notion de *développement limité* d'une fonction  $f$  au voisinage de  $x$  jusqu'à un certain ordre en  $\varepsilon$ . Ainsi, on dira qu'au voisinage de  $x$ , le développement limité de  $f$  à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  est :

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + o(\varepsilon)$$

On retrouve ici l'approximation de la section précédente qui nous a fait définir la droite tangente : la fonction  $f$  s'assimile à sa tangente au voisinage de  $x$ , à une fonction  $o(\varepsilon)$  près.

À l'ordre 2 en  $\varepsilon$ , on aura :

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x) + o(\varepsilon^2)$$

La fonction  $f$  est alors approximée par une parabole dans le voisinage de  $x$  à une fonction  $o(\varepsilon^2)$  près.

Et ainsi de suite à tous les ordres en  $\varepsilon$ .

En physique, on utilise souvent les développements limités suivants au voisinage de  $x = 0$  où  $f(x + \varepsilon)$  devient alors  $f(\varepsilon)$  :

$$\cos(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

$$\sin(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} + o(\varepsilon^3)$$

$$(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha \varepsilon + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

$$\exp(\varepsilon) = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

$$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

**A11. Notation différentielle, différentielle d'une fonction.** Convenons, avec Leibniz (1684), d'écrire la fonction dérivée d'une fonction  $f$  de la façon suivante (notation différentielle) :

$$f' := \frac{d}{dx}[f] \equiv \frac{df}{dx}$$

où le symbole tout attaché " $d/dx$ " prend la signification d'une opération à réaliser sur la fonction  $f$ , opération qui consiste à calculer sa dérivée par rapport à la variable  $x$  à l'aide de la définition précédente qui fournit la valeur de  $f'$  pour tout  $x$  :

$$f'(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

Ce faisant, en écrivant  $f' = df/dx$ , on est invité à se rappeler que la fonction dérivée  $f'$  n'est rien d'autre que le taux d'accroissement de  $f$  en pensant l'écriture  $df/dx$  comme le rapport de la variation infinitésimale  $df$  de  $f$  lorsque  $x$  a varié d'une quantité infinitésimale  $dx$ . Toutefois, cette interprétation du symbole séparé est abusive : en effet, la variation infinitésimale vraie de  $f$ ,  $\Delta_{dx}f(x) = f(x + dx) - f(x)$ , ne s'identifie pas à  $df(x)$  puisque la formule de Taylor à l'ordre 1 nous montre que pour  $\varepsilon = dx$ , on a :

$$f(x + dx) = f(x) + dx f'(x) + o(dx) \Leftrightarrow \Delta_{dx}f(x) = f'(x) dx + o(dx)$$

Tandis que la notation différentielle séparée fournit :

$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx}(x) \Leftrightarrow df(x) = f'(x) dx$$

En fait,  $df$  correspond à la variation approximative de  $f$  lorsque celle-ci est assimilée à sa tangente<sup>1</sup> au voisinage de  $x$  et que la variation vraie de  $f$  s'écrit :

$$\Delta_{dx}f(x) = df(x) + o(dx)$$

**Différentielle.** Afin d'entériner la séparation du symbole «  $d/dx$  » en raison de sa grande utilité, on définit la différentielle de la fonction  $f$  de la variable  $x$  par :

$$df := f' dx$$

Ce qui nous permettra d'écrire  $f' = df/dx$  tout en gardant à l'esprit que  $df$  n'est la variation vraie de  $f$  qu'à une fonction  $o(dx)$  près.

L'opération de différenciation possède les mêmes propriétés que celle de la dérivation en vertu de sa définition. Ainsi, par exemple, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions, on aura :  $d(f + g) = df + dg$ ,  $d(fg) = g df + f dg$ , etc...

**A12. Dérivée et différentielle d'un vecteur : bases fixes.** Considérons un vecteur  $\vec{A}$  de composantes  $(A_1, A_2, A_3)$  sur une base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ , et supposons que ces composantes soient des fonctions d'une certaine variable  $\theta$  dont ne dépendent pas

<sup>1</sup> En effet, l'équation de la tangente est (voir A8) :  $Y(X) = f'(x)X + [f(x) - x f'(x)]$  avec  $X = x + \varepsilon$ . Faisant  $X = x$ , puis  $(\varepsilon = dx) X = x + dx$ , on obtient :  $Y(x + dx) - Y(x) = f'(x) dx$ .

les vecteurs de la base. On dit alors que la base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  est *fixe* [vis-à-vis de la variable  $\theta$ ] :

$$\vec{A}(\theta) = A_1(\theta) \vec{u}_1 + A_2(\theta) \vec{u}_2 + A_3(\theta) \vec{u}_3$$

Le vecteur dérivé du vecteur  $\vec{A}$  par rapport à la variable  $\theta$  sera le vecteur  $\vec{A}'(\theta)$  défini par l'opération de dérivation :

$$\vec{A}'(\theta) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(\theta + \varepsilon) - \vec{A}(\theta)}{\varepsilon}$$

Comme la base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  est fixe, il est facile d'en déduire que les composantes du vecteur dérivé  $\vec{A}'(\theta)$  sont les dérivées des composantes  $(A_1, A_2, A_3)$  par rapport à la variable  $\theta$  :

$$\vec{A}'(\theta) = A'_1(\theta) \vec{u}_1 + A'_2(\theta) \vec{u}_2 + A'_3(\theta) \vec{u}_3$$

De façon générale, dans la notation différentielle, un vecteur dérivé s'écrit :

$$\vec{A}' = \frac{d\vec{A}}{d\theta}$$

Et la différentielle du vecteur  $\vec{A}$  s'écrit, si la base est fixe :

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \vec{A}' d\theta = A'_1 d\theta \vec{u}_1 + A'_2 d\theta \vec{u}_2 + A'_3 d\theta \vec{u}_3 \\ &= dA_1 \vec{u}_1 + dA_2 \vec{u}_2 + dA_3 \vec{u}_3 \end{aligned}$$

Dérivées et différentielles de vecteurs possèdent les mêmes propriétés que les dérivées et différentielles de fonctions : par exemple, si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont deux vecteurs et  $\lambda$  un scalaire dépendant tous les trois d'une variable  $\theta$ , alors :

$$(\vec{A} + \vec{B})' = \vec{A}' + \vec{B}' \Leftrightarrow d(\vec{A} + \vec{B}) = d\vec{A} + d\vec{B}$$

$$(\lambda \vec{A})' = \lambda' \vec{A} + \lambda \vec{A}' \Leftrightarrow d(\lambda \vec{A}) = \vec{A} d\lambda + \lambda d\vec{A}$$

On démontre aussi facilement que :

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})' = \vec{A}' \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{B}' \Leftrightarrow d(\vec{A} \cdot \vec{B}) = d\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot d\vec{B}$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B})' = \vec{A}' \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{B}' \Leftrightarrow d(\vec{A} \wedge \vec{B}) = d\vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge d\vec{B}$$

Attention dans cette dernière formule de ne pas inverser  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  ou leurs dérivées en raison de l'anti-commutativité du produit vectoriel.

**A13. Cas des bases locales.** Si les vecteurs de la base utilisée dépendent aussi de la variable  $\theta$ , alors on dit de cette base qu'elle est *locale*. Si  $(A_1, A_2, A_3)$  sont les composantes de  $\vec{A}$  sur une base locale  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  on aura cette fois :

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= (A_1 \vec{u}_1 + A_2 \vec{u}_2 + A_3 \vec{u}_3)' \\ &= A_1' \vec{u}_1 + A_2' \vec{u}_2 + A_3' \vec{u}_3 + A_1 \vec{u}_1' + A_2 \vec{u}_2' + A_3 \vec{u}_3'\end{aligned}$$

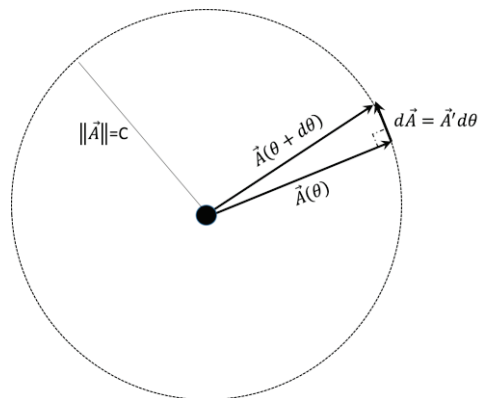
Et pour calculer les dérivées des vecteurs de la base par rapport à la variable  $\theta$ , on aura recours à leurs expressions dans une base fixe de référence.

**A14. Dérivée d'un vecteur de norme constante.** Considérons un vecteur  $\vec{A}$  qui dépend d'une variable  $\theta$  mais dont la norme reste constante, comme par exemple :  $\vec{A} = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y + \vec{u}_z$ . La dérivée par rapport à  $\theta$  de ce vecteur n'est pas nulle et vaut :  $\vec{A}' = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y$ . Et on constate que  $\vec{A}'$  est perpendiculaire à  $\vec{A}$  : cette propriété est générale. En effet, si la norme d'un vecteur  $\vec{A}$  quelconque est une constante  $C$  qui ne dépend pas de la variable  $\theta$ , alors on peut écrire :

$$\|\vec{A}\|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = C^2 \implies (\vec{A} \cdot \vec{A})' = 0 = \vec{A}' \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{A}' = 2 \vec{A}' \cdot \vec{A}$$

ce qui implique que  $\vec{A}'$  est toujours perpendiculaire à  $\vec{A}$  (figure A11).

Ce résultat a une interprétation géométrique simple : si la longueur d'un vecteur est constante, il s'ensuit qu'il ne peut plus changer qu'en direction : ce vecteur ne peut donc effectuer qu'une rotation qui se réalise, pour une variation infinitésimale  $d\theta$  de la variable  $\theta$ , perpendiculairement à lui-même :  $d\vec{A} = \vec{A}' d\theta$  est la quantité qu'il faut ajouter à  $\vec{A}(\theta)$  pour obtenir  $\vec{A}(\theta + d\theta)$ , avec en tête les précautions prises au A11, c'est-à-dire ici : à un vecteur  $\vec{o}(d\theta)$  près.



**Figure A11.** La dérivée d'un vecteur de norme constante est perpendiculaire à ce vecteur.

## INTÉGRALES ET PRIMITIVES

**A15. Intégrales.** La notion d'intégrale est, au départ, associée à l'estimation de l'aire d'une surface.

Soit  $x_1$  un point fixe de l'axe  $Ox$ , et soit  $X \geq x_1$  un autre point de l'axe  $Ox$  dont la position est variable. On souhaite estimer l'aire  $S(X)$  de la surface grisée comprise entre le segment  $[x_1, X]$  et le lacet indiqué sur la figure A12. Ce lacet est situé à une certaine distance  $\ell$  de l'axe  $Ox$  pour chaque valeur de  $x$  :  $\ell = \ell(x)$ . L'idée est alors de découper le segment  $[x_1, X]$  en  $N$  petits segments égaux de largeur élémentaire  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$  et de calculer la somme des aires de tous les petits rectangles de longueur  $\ell(x_i)$  pour obtenir la quantité :

$$S_N(X) = \sum_{i=1}^N \ell(x_i) \Delta x$$

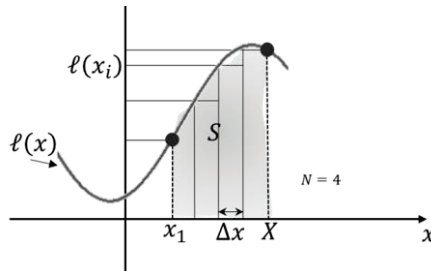


Figure A12. Estimation de l'aire de la surface  $S$ .

Il est clair que  $S_N(X)$  est une estimation de l'aire  $S(X)$  et que plus  $N$  sera grand, plus le découpage sera serré et meilleure sera cette approximation ; de sorte que lorsque  $N \rightarrow \infty$  on doit pouvoir écrire que  $S_N(X) \rightarrow S(X)$ . Il faut remarquer que dans ce cas  $\Delta x$  devient un élément différentiel  $dx$  et que les  $x_i$  parcourent continûment le segment  $[x_1, X]$  ; on peut donc assimiler  $\ell(x_i)$  à  $\ell(x)$  pour  $x \in [x_1, X]$ . Convenons alors de la notation suivante, due à Leibniz, pour  $S(X)$  : lorsque  $N \rightarrow \infty$ , le symbole  $\Sigma$  de la somme discrète sera remplacé par le symbole  $\int$  qui est un « S » allongé et qui rappelle qu'il s'agit bien d'une somme, mais continue. En outre, puisque lorsque  $i = 1$  on a  $x_i = x_1$  et lorsque  $i = N$ ,  $x_{N+1} = X$ , nous rappellerons ces deux bornes dans l'écriture de l'aire  $S(X)$  qui sera notée :

$$S(X) = \int_{x_1}^X \ell(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(X) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \ell(x_i) \Delta x$$

Cette somme continue est appelée *intégrale* de  $x_1$  à  $X$  de  $\ell(x) dx$ , et c'est l'aire cherchée.

Maintenant, les quantités  $x \in [x_1, X]$  ainsi que  $\ell$  peuvent avoir d'autres dimensions que celle d'une longueur et  $S(X)$  ne sera plus une aire : par exemple, si  $\ell(x)$  est une force qui agit sur un point matériel qui se déplace le long du segment  $[x_1, X]$ ,  $S(X)$  sera le travail (donc des joules) réalisé par la force au cours de ce trajet. Si les quantités  $\ell$  et  $x$  sont adimensionnées, alors  $S(X)$  sera un nombre.

**A16. Propriétés des intégrales.** Si, dans la section précédente, on avait convenu de calculer l'aire  $S(X)$  en intégrant de  $X$  à  $x_1$ , alors  $\Delta x$  aurait été négatif et  $dx$  aussi. Il aurait donc fallu écrire :

$$-S(X) = \int_X^{x_1} \ell(x) dx$$

C'est-à-dire que l'on a la propriété d'antisymétrie :

$$\int_{x_1}^X \ell(x) dx = - \int_X^{x_1} \ell(x) dx$$

D'autre part, l'aire  $S(X)$  peut bien sûr se calculer en deux temps : d'abord de  $x_1$  jusqu'à une certaine position  $a \in [x_1, X]$ , puis de  $a$  jusqu'à  $X$  ; on a donc la propriété d'additivité :

$$\int_{x_1}^X \ell(x) dx = \int_{x_1}^a \ell(x) dx + \int_a^X \ell(x) dx$$

qui impose la relation :

$$\int_a^X \ell(x) dx = S(X) - S(a)$$

**A17. Primitives.** Faisons varier  $X$  en passant à  $X' = X + \epsilon$ , alors on aura :

$$S(X') = S(X + \epsilon) = \int_{x_1}^{X+\epsilon} \ell(x) dx = \int_{x_1}^X \ell(x) dx + \int_X^{X+\epsilon} \ell(x) dx$$

C'est-à-dire :

$$S(X + \epsilon) = S(X) + \int_X^{X+\epsilon} \ell(x) dx$$

Et si  $\epsilon$  est un infiniment petit, alors l'aire de l'intégrale restante peut s'écrire comme l'aire  $\epsilon \ell(X)$  du petit rectangle de largeur  $\epsilon$  et de longueur  $\ell(X)$  à des infiniment petits d'ordre supérieur près. Il s'ensuit que :

$$\ell(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S(X + \epsilon) - S(X)}{\epsilon}$$

Ainsi,  $\ell(X)$  est la dérivée de  $S(X)$  et on dit de  $S(X)$  qu'elle est *une primitive* de  $\ell(X)$ . On convient d'écrire conventionnellement :

$$\int_a^X \ell(x) dx = S(X) - S(a) := [S(x)]_a^X$$

Ce qui se lit : l'intégrale de  $a$  à  $X$  de  $\ell(x) dx$  est égale à  $S(x)$  prise entre  $a$  et  $X$ , c'est-à-dire l'aire sous la courbe  $\ell(x)$  comprise entre  $a$  et  $X$ .

**Une primitive n'est définie qu'à une constante près.** Démonstration : telle qu'elle a été définie, la fonction  $S(X)$  est nulle en  $X = x_1$ . En effet :

$$\int_{x_1}^{x_1} \ell(x) dx = S(x_1) = 0$$

Or, supposons que l'on définisse l'aire sous la courbe  $\ell(x)$  comprise entre  $a$  et  $X$  par :

$$A(X) = \int_a^X \ell(x) dx$$

Alors, il est facile de refaire les raisonnements faits pour  $S(X)$  et de conclure que  $A(X)$  est aussi une primitive de  $\ell(X)$  ; mais cette primitive s'annule cette fois en  $X = a$ . Par ailleurs, avec la propriété d'additivité, on peut écrire :

$$\int_{x_1}^X \ell(x) dx = \int_{x_1}^a \ell(x) dx + \int_a^X \ell(x) dx$$

Soit :

$$S(X) = S(a) + A(X)$$

Ainsi, les primitives de  $\ell(X)$  ne diffèrent entre elles que par une constante.  $\square$

**Notation d'une primitive.** Une primitive  $F(x)$  de la fonction  $f(x)$  sera notée :

$$F(x) = \int f(x) dx$$

L'absence de bornes indique que  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  à une constante près.

**A18. Calcul des primitives.** Primitiver une fonction  $f(x)$  revient à chercher la fonction  $F(x)$  [à une constante près] dont la dérivée est  $f(x)$  : c'est l'opération inverse de la dérivation. Dès lors, on peut chercher des formules de calcul de primitives en inversant les formules de dérivation.

Ainsi, une primitive de  $f(x) = 0$  est une constante arbitraire  $F(x) = C$ . Une primitive de la fonction constante  $f(x) = C$  est :  $F(x) = Cx$  [à une constante près]. Plus généralement, pour  $\alpha \neq -1$ , puisque la dérivée de  $F(x) = x^{\alpha+1}$  s'écrit :  $f(x) = (\alpha + 1)x^\alpha$ , alors la primitive de  $f(x) = x^\alpha$  est  $F(x) = x^{\alpha+1}/(\alpha + 1)$  [à une constante près].

Lorsque  $\alpha = -1$ , il s'agit de trouver une primitive de la fonction  $f(x) = 1/x$ . Une telle primitive a reçu le nom de logarithme népérien, noté aujourd'hui :  $\ell n$ . Ainsi, lorsque  $x$  est strictement positif, on définit la primitive de  $1/x$  qui s'annule pour la valeur  $x = 1$  par :

$$\ell n(X) = \int_1^X \frac{dx}{x}$$

Cette fonction logarithme est connue et tabulée depuis le XVII<sup>ème</sup> siècle en raison de la propriété qu'elle a de transformer un produit en somme. En effet, on montre que, pour  $x$  et  $y$  strictement positifs, on a :  $\ell n(xy) = \ell n x + \ell n y$ .

Si  $x$  est un réel différent de 0, on a :

$$\ell n |x| = \int \frac{dx}{x}$$

**Intégration par parties.** Pour calculer une primitive ou une intégrale, on peut utiliser la formule de dérivation d'un produit :  $(u v)' = u'v + uv'$  sous la forme suivante :

$$\int u(x) v'(x) dx = \int (u v)'(x) dx - \int u'(x) v(x) dx$$

La première primitive est la fonction  $(u v)$  à une constante près et on a donc :

$$\int u(x) v'(x) dx = u v - \int u'(x) v(x) dx$$

En langage différentiel :  $du = u'(x) dx$  et  $dv = v'(x) dx$  ; la formule d'intégration par parties s'écrit :

$$\int u dv = u v - \int v du$$

**Exemple.** Soit à trouver la primitive, à une constante près, de  $f(x) = x \sin x$ . On sait que :  $\sin x = -(\cos x)'$ , donc :

$$\int x \sin x \, dx = - \int x (\cos x)' \, dx = - x \cos x + \int 1 \cdot \cos x \, dx$$

Soit :

$$\int x \sin x \, dx = - x \cos x + \sin x + C$$

où  $C$  est une constante.



## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

**A19. Équations différentielles.** Une équation différentielle est une égalité vérifiée par une fonction  $f$  de la variable  $x$  et ses dérivées, pour tout  $x$ . Par exemple, la fonction :  $f: x \mapsto y = f(x) = \sin x$  satisfait à l'équation différentielle suivante :  $f^2 + f'^2 = 1$ , ou encore à celle-ci :  $f + f'' = 0$ . Ces deux équations différentielles sont également vérifiées par la fonction  $f: x \mapsto y = f(x) = \cos x$ . La fonction  $f: x \mapsto y = f(x) = \exp(-x^2/2)$  vérifie l'équation différentielle :  $f' + x f = 0$ , etc.

Dans de nombreuses situations on ne connaît que l'équation différentielle : le jeu est alors de trouver toutes les fonctions qui satisfont à l'équation différentielle proposée. Nous limiterons la discussion à la recherche de fonctions solutions réelles, continues et dérivables jusqu'à l'ordre voulu.

Lorsque l'on a trouvé une fonction solution à l'équation différentielle proposée, on dit que l'on a trouvé une *solution particulière* à cette équation car elle en possède habituellement beaucoup d'autres, une infinité en général. Si on a trouvé toutes les fonctions solutions à l'équation différentielle, on dit que l'on a obtenu sa *solution générale*.

**A20. Caractérisation d'une équation différentielle.** Un bon point de départ est de caractériser au mieux une équation différentielle car il n'existe pas de méthode générale pour résoudre une équation différentielle quelconque, mais seulement des méthodes applicables à certains types d'équations différentielles.

**Ordre d'une équation différentielle.** On dira d'une équation différentielle qu'elle est d'ordre  $n$  pour la fonction  $f$  si sa dérivée  $n$ -ième intervient dans l'équation. Par exemple,  $f' + x^2 f'' = 0$  est d'ordre 2 pour  $f$  ; mais elle est d'ordre 1 pour  $g = f'$  puisqu'alors cette équation s'écrit :  $g + x^2 g' = 0$ .

**Linéarité d'une équation différentielle.** Une équation différentielle d'ordre  $n$  est dite linéaire si elle prend la forme générale suivante :

$$a_0(x) f + a_1(x) f' + a_2(x) f'' + \dots + a_n(x) f^{(n)} = a_{n+1}(x)$$

où les *coefficients*  $a_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , et le terme  $a_{n+1}(x)$  sont des fonctions connues de  $x$ . Par exemple,  $x f + f' \sin x - 5 f^{(4)} = x^2$  est d'ordre 4 et linéaire. Par contre,  $f^2 + f'^2 = 1$  est d'ordre 1 et non-linéaire, de même que  $\sin f + f' = 1$ .

**Coefficients constants ou non.** Si les coefficients  $a_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n$  sont constants, c'est-à-dire indépendants de  $x$ , alors on dit de l'équation différentielle linéaire qu'elle est à coefficients constants. Par exemple  $f + f'' = 0$  est d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants ;  $f + f'' = x^3$  est aussi d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants. Par contre,  $f + x^5 f'' = 0$  est d'ordre 2, linéaire, à coefficients non constants.

**Équation différentielle avec ou sans second membre.** S'il existe un terme qui ne dépend pas de  $f$  ou de ses dérivées dans l'équation différentielle, on peut isoler ce terme et dire que cette équation est avec second membre. Par exemple, dans l'expression ci-dessus d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$ , le terme  $a_{n+1}(x)$  a été isolé et représente le second membre de cette équation. L'équation différentielle  $x f + f' \sin x - 5 f^{(4)} = x^2$  est d'ordre 4, linéaire, à coefficients non constants et avec second membre. L'équation différentielle  $f + f'' = x^3$  est d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants et avec second membre. L'équation  $f + f'' = 0$  est d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants et sans second membre (on dit aussi homogène).

**A21. Équations différentielles d'ordre 1 séparables.** Une méthode courante de résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 consiste à tenter de séparer les deux variables  $f$  et  $x$  à l'aide de la notation différentielle.

**Exemple 1.** Soit à résoudre l'équation différentielle :  $f' - f = 0$ . On voit que  $f = 0$  est une solution particulière à cette équation. Pour  $f \neq 0$  on peut écrire :

$$\frac{df}{dx} = f \Leftrightarrow \frac{df}{f} = dx \text{ (équation séparée)}$$

C'est-à-dire, en intégrant :

$$\int \frac{df}{f} = \int dx \Leftrightarrow \ln|f| = x + K$$

où  $K$  est une constante arbitraire. En prenant l'exponentielle de ce résultat, on a alors :

$$|f| = e^{x+K} = e^K e^x \Leftrightarrow f = \pm e^K e^x$$

On peut remplacer  $\pm e^K$  par une constante  $C$  arbitraire (puisque  $K$  est arbitraire) pour finalement écrire la solution générale à l'équation  $f' - f = 0$  :

$$f = C e^x$$

où la solution  $f = 0$  est obtenue pour  $C = 0$ . Chaque valeur de  $C$  donne lieu à une nouvelle fonction  $f$  solution à l'équation. Il y en a donc une infinité.

**Exemple 2.** Soit maintenant à résoudre :  $x f'^2 = 1$  où  $f$  est réelle. On procède de la même manière en remarquant d'abord que l'équation n'est possible que pour le domaine  $x \in ]0, +\infty[$  :

$$x f'^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{df}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{df}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow df = \pm \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ (équation séparée)}$$

On a ainsi :

$$\int df = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f = \pm 2\sqrt{x} + C$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

**Contre-exemple.** L'équation différentielle :  $f' - x f = e^{x^2/2}$  n'est pas séparable. Mais, pour cette équation linéaire, on dispose des théorèmes exposés dans la section qui suit.

**A22. Théorème général sur les équations différentielles linéaires appliqué aux équations d'ordre 1.** Considérons une équation différentielle linéaire quelconque d'ordre  $n$  :

$$a_0(x) f + a_1(x) f' + a_2(x) f'' + \dots + a_n(x) f^{(n)} = a_{n+1}(x)$$

Et posons :  $f = g + h$  où  $g$  est une solution à la même équation mais sans second membre :

$$a_0(x) g + a_1(x) g' + a_2(x) g'' + \dots + a_n(x) g^{(n)} = 0$$

Alors il est facile de voir qu'en injectant  $f = g + h$  dans l'équation avec second membre,  $h$  devra être solution de cette équation, tout comme  $f$ . Nous nous contenterons de cette remarque pour admettre le théorème suivant :

**Théorème.** La solution générale  $f$  d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  quelconque est la somme de la solution générale  $g$  de l'équation sans second membre et d'une solution particulière  $h$  de l'équation avec second membre.

**Équations différentielles linéaires d'ordre 1.** Appliquons ce théorème général au cas d'une équation différentielle linéaire quelconque d'ordre 1 que nous mettrons sous la forme :

$$f' + a(x) f = p(x)$$

L'équation sans second membre se résout en séparant les variables :

$$g' + a(x)g = 0 \Leftrightarrow \frac{dg}{g} = -a(x) dx \Leftrightarrow g = C \exp\left(-\int a(x) dx\right)$$

où  $C$  est une constante arbitraire. Pour plus de clarté, nous allons appeler  $A(x)$  une primitive particulière de  $a(x)$  ; alors :

$$g = C e^{-A(x)}$$

Pour trouver une solution particulière  $h$  à l'équation avec second membre, on peut utiliser la *méthode dite de la variation de la constante* en réalisant le changement de fonction suivant :

$$h(x) = w(x) e^{-A(x)}$$

On appelle cette méthode ainsi car on a donné à  $h(x)$  une forme tout à fait similaire à la fonction  $g(x)$ , solution générale de l'équation sans second membre, à ceci près que la constante  $C$  est remplacée par une fonction inconnue  $w(x)$ . Ce faisant, on a :

$$h' = w'e^{-A} - a w e^{-A}$$

Et en injectant ces résultats dans l'équation avec second membre, on trouve :

$$w'e^{-A} = p \Leftrightarrow w(x) = \int p(x) e^{+A(x)} dx$$

De là, on déduit le théorème :

**Théorème.** La solution générale de l'équation différentielle  $f' + a(x)f = p(x)$  est :

$$f = g + h = C e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int p(x) e^{+A(x)} dx$$

où  $A(x)$  est une primitive particulière de  $a(x)$ .

On pourra montrer à l'aide de cette méthodologie que la solution générale au contre-exemple de la section précédente, à savoir  $f' - x f = e^{x^2/2}$ , est :

$$f = (C + x) e^{x^2/2}$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

Il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière  $h$  à l'équation avec second membre. En effet, toutes les méthodes, y compris les plus insolites, sont bonnes en ce sens que le but est de trouver une seule solution, n'importe laquelle.

Soit par exemple à résoudre l'équation  $f' - f = 1$ . La solution générale à l'équation sans second membre est  $g = C e^x$ . Or il est facile de voir que  $h = -1$  est une

solution particulière à l'équation avec second membre. On peut donc écrire immédiatement la solution générale :  $f = C e^x - 1$ .

Cette méthode empirique se généralise : *on essaye une solution particulière qui a la forme du second membre*. Si c'est un polynôme, on essaye un polynôme avec des coefficients non déterminés, si c'est un sinus on essaye un sinus ou un cosinus à une phase près, etc... Seule l'expérience permet de se familiariser avec cette méthode intuitive.

**A23. Equations différentielles d'ordre 2, linéaires, à coefficients constants.** En appliquant le théorème général de la section précédente à l'ordre 2, on conclut que la solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre sera la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Pour trouver la solution générale de l'équation homogène, on dispose du théorème qui suit si les coefficients de l'équation sont constants :

**Théorème.** *La solution générale à l'équation différentielle d'ordre 2, linéaire, sans second membre, à coefficients  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$  constants :  $a f'' + b f' + c f = 0$  s'écrit :*

- Si  $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ ,

$$f = C_1 e^{r_+ x} + C_2 e^{r_- x}$$

où  $C_1, C_2$  sont deux constantes arbitraires et  $r_+, r_-$  sont les racines réelles ou complexes du polynôme caractéristique de l'équation :  $a r^2 + b r + c = 0$ .

- Si  $\Delta = 0$ ,

$$f = e^{r x} (C_1 x + C_2)$$

où  $C_1, C_2$  sont deux constantes arbitraires et  $r$  la racine double du polynôme caractéristique de l'équation.

Lorsque le discriminant  $\Delta$  de l'équation caractéristique est négatif, les constantes  $C_1, C_2$  et les racines  $r_+, r_-$  sont complexes. Comme on recherche une fonction  $f$  réelle, on peut réécrire la solution générale sous l'une des trois formes équivalentes suivantes, où l'on a posé  $r_{\pm} = \alpha \pm i \beta$  :

$$f = e^{\alpha x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) = e^{\alpha x} A \sin(\beta x + \Phi) = e^{\alpha x} A' \cos(\beta x + \Phi')$$

où cette fois les constantes  $A_1, A_2$  ou  $A, \Phi$  ou  $A', \Phi'$  sont réelles.

**Exemple de l'oscillateur amorti.** Pour cet exemple, nous passons aux notations de la dynamique. Soit à résoudre l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega^2 x = 0$$

où  $\tau$  et  $\omega$  sont des paramètres positifs.  $\tau$  est caractéristique de l'intensité du frottement fluide agissant sur l'oscillateur ;  $\omega$  est caractéristique de la force de l'oscillateur.

L'équation caractéristique de cette équation différentielle du second ordre, homogène et à coefficients constants est :  $r^2 + r/\tau + \omega^2 = 0$  dont le discriminant vaut :

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega^2 = \frac{1}{\tau^2} (1 - 4\omega^2\tau^2)$$

- si  $\Delta > 0$ , c'est-à-dire si  $\omega\tau < 1/2$ , les racines sont réelles et s'écrivent :

$$r_{\pm} = \frac{1}{2\tau} \left( -1 \pm \sqrt{(1 - 4\omega^2\tau^2)} \right)$$

La solution générale à l'équation se met donc sous la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left( C_1 e^{+\frac{t\sqrt{(1-4\omega^2\tau^2)}}{2\tau}} + C_2 e^{-\frac{t\sqrt{(1-4\omega^2\tau^2)}}{2\tau}} \right)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles arbitraires. Ce régime de solutions est dit apériodique : le frottement l'emporte sur la force de l'oscillateur qui n'a pas le temps d'osciller. Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  se déterminent en fonction des conditions initiales que l'on souhaite donner à ce système.

- si  $\Delta < 0$ , c'est-à-dire si  $\omega\tau > 1/2$ , les racines sont complexes et s'écrivent :

$$r_{\pm} = \frac{1}{2\tau} \left( -1 \pm i \sqrt{(4\omega^2\tau^2 - 1)} \right)$$

La solution générale à l'équation se met donc sous la forme :

$$x(t) = A e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \left( \frac{t\sqrt{(4\omega^2\tau^2 - 1)}}{2\tau} + \Phi \right)$$

où  $A$  et  $\Phi$  sont des constantes réelles arbitraires. Ce régime de solutions est dit pseudo-périodique : la force de l'oscillateur est cette fois suffisamment importante devant le frottement pour que le système puisse osciller ; mais son amplitude décroît exponentiellement avec l'intensité du frottement.

- si  $\Delta = 0$ , c'est-à-dire si  $\omega\tau = 1/2$ , il y a une seule racine double qui s'écrit :

$$r = -1/2\tau$$

La solution générale à l'équation se met donc sous la forme :

$$x(t) = e^{-t/2\tau} (C_1 t + C_2)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles arbitraires. Dans ce régime dit critique la force de l'oscillateur et le frottement sont de même importance. Le résultat net est semblable au régime apériodique, mais le retour du système à l'équilibre se réalise plus rapidement.

**A24. Espace vectoriel des fonctions solutions à une équation différentielle linéaire homogène.** Une fonction peut être vue comme un vecteur dans un espace adapté. En effet, si, par exemple, on considère l'ensemble de toutes les fonctions continues définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , alors la somme de deux telles fonctions et leur multiplication par un réel quelconque sera encore continue, définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Cette remarque, ainsi que les propriétés habituelles de l'addition et de la multiplication, font de cet ensemble de fonctions, que l'on note  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

Considérons alors une équation différentielle linéaire quelconque d'ordre  $n$  et homogène :

$$a_0(x) f + a_1(x) f' + a_2(x) f'' + \dots + a_n(x) f^{(n)} = 0$$

Et soient  $g$  et  $h$  deux fonctions solutions quelconques à cette équation. Alors, en vertu de la linéarité de l'opération de dérivation, on vérifie que la fonction  $j = g + h$  est solution de la même équation, y compris si  $g = -h$ . On vérifie également que si  $\lambda$  est un nombre réel alors  $\lambda g$  est solution aussi. Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{S}_n$  des fonctions solutions à une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre  $n$  forme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

On peut se demander quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? Une telle question fait appel à la notion d'indépendance de deux vecteurs : on se rappelle que deux vecteurs sont dits indépendants entre eux si une combinaison linéaire quelconque de ces vecteurs ne donne jamais le vecteur nul, sauf si les coefficients de la combinaison sont tous nuls. La dimension de l'espace vectoriel est ensuite définie comme le nombre maximal de vecteurs indépendants entre eux au sein de cet espace. Ainsi,  $k$  vecteurs  $g_k$  de  $\mathcal{S}_n$  seront indépendants si, et seulement si :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_k g_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Comme nos vecteurs sont ici des fonctions de la variable  $x$ , il faut comprendre cette condition de la façon suivante :

$$\forall x, \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \dots + \lambda_k g_k(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Prenons alors l'exemple précédent de l'oscillateur amorti dont l'équation différentielle est :  $\ddot{x} + \dot{x}/\tau + \omega^2 x = 0$  ; et focalisons-nous sur le cas où le couple de paramètres  $(\omega, \tau)$  donne lieu à un polynôme caractéristique dont le discriminant  $\Delta$

est non nul. Comme les deux racines  $r_+$  et  $r_-$  du polynôme sont différentes, il est clair que la condition :

$$\forall x, \quad \lambda_1 e^{r_+ x} + \lambda_2 e^{r_- x} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

est réalisée pour les deux fonctions solutions  $e^{r_+ x}$  et  $e^{r_- x}$ . Or, toutes les autres fonctions  $f$  solutions de l'équation s'écrivent comme une combinaison linéaire de ces deux fonctions : on ne pourra donc pas trouver plus de deux fonctions de l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_2$  des solutions à l'équation différentielle linéairement indépendantes. Il en résulte que  $\mathcal{S}_2$  est de dimension 2 et que le couple  $\{e^{r_+ x}, e^{r_- x}\}$  forme une base de  $\mathcal{S}_2$ .

Un raisonnement similaire a lieu si  $\Delta = 0$ .

Plus généralement, on dispose de ce

***Théorème.** Les solutions à une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre  $n$  forment un espace vectoriel de dimension  $n$ .*

**A25. Constantes d'intégration et conditions initiales.** Considérons une fonction  $f$  contenant  $n$  constantes arbitraires. Pour obtenir l'équation différentielle d'ordre le plus bas satisfaite par  $f$  sans que les constantes apparaissent, il faut dériver cette fonction  $n$  fois afin d'obtenir  $n + 1$  équations permettant de remplacer ces constantes par leurs expressions en fonctions des dérivées de  $f$ . Cela donnera donc lieu à une équation différentielle d'ordre  $n$ . On peut démontrer un théorème inverse : *la solution complète d'une équation différentielle d'ordre  $n$  contient  $n$  constantes arbitraires.* Toutefois, en règle générale, une *solution complète* n'est pas toujours la solution générale si on entend par solution générale toutes les fonctions satisfaisant à l'équation différentielle étudiée. Il se peut en effet que certaines fonctions solutions ne fassent pas partie de la solution dite complète. Par exemple, l'équation différentielle non linéaire du premier ordre :

$$(1 - f^2) (\text{Arcsin } f)^2 = x^2 f'^2$$

a pour solution complète :  $f = \sin(A/x)$  où  $A$  est une constante arbitraire. Mais cette équation différentielle a aussi pour solutions particulières :  $f = \pm 1$ . La solution complète et les deux solutions particulières forment la solution générale à cette équation.

Si l'équation différentielle est linéaire, alors la solution complète s'identifie à la solution générale.

**Conditions initiales.** Les constantes arbitraires survenant lors de la résolution d'une équation différentielle n'ont pas d'interprétation a priori. Mais il est toujours possible

de les remplacer par d'autres constantes arbitraires dont on connaît la signification. Par exemple, on peut convenir d'écrire la solution complète à l'équation différentielle précédente en fonction de la valeur choisie,  $\alpha$ , de  $f$  en  $x = 1$ . La solution donne alors :  $f(1) = \alpha = \sin A$ , d'où  $A = \text{Arcsin } \alpha$  ; et on peut maintenant écrire la solution complète sous la forme :  $f = \sin (\text{Arcsin } \alpha/x)$ . La stipulation  $f(1) = \alpha$  est appelée condition initiale du problème.

En dynamique, les équations du mouvement sont des équations différentielles d'ordre 2. On choisit souvent comme conditions initiales la position et la vitesse du point matériel au temps  $t = 0$  :  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0)$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t = 0)$ . Un exemple en est donné au chapitre 11.



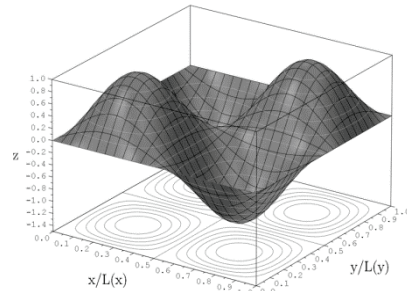
## ANNEXE 5

### CHAMPS SCALAIRES ET GRADIENT

Dans cette annexe, on examine les outils mathématiques qui permettent d'appréhender au mieux les propriétés géométriques ou physiques d'un champ scalaire défini sur l'espace euclidien à 3 (ou 2) dimensions.

**A26. Champs scalaires et équipotentiels.** Lorsqu'à chaque point  $M$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  on associe un scalaire  $s = f(M)$ , on définit ainsi une application  $f$  de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbb{R}$  appelée champ scalaire. On dit aussi que l'ensemble de tous ces scalaires constitue un champ de scalaires défini sur  $\mathcal{E}$ .

Si l'espace affine est le plan euclidien on peut visualiser ce champ, soit par son graphe en reportant par exemple  $s = f(M)$  pour chaque point  $M(x, y)$  du plan sur la troisième dimension :  $z = s = f(M)$  ; soit par des équipotentiels ou courbes de niveau, qui sont les lieux des points  $M$  du plan pour lesquels  $f(M)$  prend toujours une même valeur  $s_0$ . On indique alors cette valeur sur chacune (ou quelques-unes) de ces courbes, ou encore à l'aide d'un code couleurs comme pour la figure A13.



**Figure A13.** Représentation tridimensionnelle d'une fonction scalaire  $s = f(M) = f(x, y)$  en reportant  $s$  sur la troisième dimension. Dans le plan  $xOy$ , sont aussi représentées les courbes de niveau de la fonction scalaire.

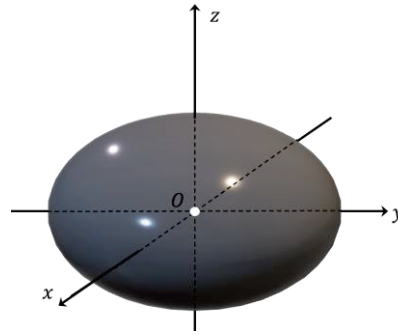
Généralement, l'espace affine sur lequel on travaille est celui de la géométrie euclidienne à 3 dimensions où chaque point  $M$  est repéré par un jeu de 3 coordonnées. Un champ scalaire défini sur cet espace sera donc une fonction de ces 3 coordonnées d'espace. Avec le choix des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  on écrira donc :  $s = f(M) = g(x, y, z)$ , où la fonction  $g$  peut être comprise comme la représentation de  $f$  (c'est-à-dire du champ) dans ce jeu de coordonnées, au même titre que  $(x, y, z)$  est la représentation de  $M$ .

Dans le jeu de coordonnées sphériques, où cette fois  $M$  est représenté par  $(r, \theta, \varphi)$ , le même champ scalaire s'écrira :

$$s = f(M) = g(x, y, z) = g(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) = h(r, \theta, \varphi)$$

où la fonction  $h$  est la représentation de  $f$  en coordonnées sphériques. Et ainsi de suite pour chaque système de coordonnées.

Une équipotentielle d'un champ scalaire défini sur l'espace euclidien à 3 dimensions n'est pas une courbe mais une surface de cet espace définie par l'équation  $g(x, y, z) = s_0$  (ou bien  $h(r, \theta, \varphi) = s_0$ , etc...). C'est via ces surfaces équipotentielles (figure A14) que l'on peut visualiser ce type de champ scalaire car son graphe nécessite quant à lui 4 dimensions...



**Figure A14.** Un exemple de surface équipotentielle (ici un ellipsoïde) pour une fonction scalaire :

$$s = f(M) = f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

**A27. Simplification des notations.** Dans ce qui précède on a pris soin de faire attention à ne pas confondre dans les notations la valeur prise ( $s$ ) par une fonction (un champ  $f$ ) en un point  $M$  avec la fonction elle-même. Toutefois, ainsi qu'on l'a déjà dit dans la partie cinématique, l'usage est très souvent pris en physique d'employer une notation abusive en écrivant :  $s = s(M)$  au lieu de  $s = f(M)$ . C'est-à-dire que l'on assigne abusivement à la fonction la même lettre que sa valeur en  $M$ .

On fait souvent de même avec les différents systèmes de coordonnées en écrivant :  $s = s(M) = s(x, y, z) = s(r, \theta, \varphi)$  au lieu de :  $s = f(M) = g(x, y, z) = h(r, \theta, \varphi)$ .

Dans le même esprit, pour peu que l'on accepte de confondre une fonction avec son graphe, on confond dans le vocabulaire *champ scalaire* et *champ de scalaires*.

**A28. Champs scalaires : différentielle.** Un champ scalaire est donc une fonction  $s = s(M) = s(q_1, q_2, q_3)$  où  $(q_1, q_2, q_3)$  est le système de coordonnées choisi pour situer (représenter) le point  $M$  dans l'espace. La différentielle  $ds$  de cette fonction s'écrit par définition :

$$ds := \frac{\partial s}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial s}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial s}{\partial q_3} dq_3$$

où  $\partial s / \partial q_1$ ,  $\partial s / \partial q_2$ ,  $\partial s / \partial q_3$ , sont les dérivées partielles de  $s$  par rapport à  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  respectivement. On rappelle que chacune de ces dérivées se calcule en maintenant fixes les deux autres variables. Ainsi, en coordonnées cartésiennes :  $s = s(x, y, z)$ , et on aura :

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy + \frac{\partial s}{\partial z} dz$$

De même, en coordonnées sphériques :  $s = s(r, \theta, \varphi)$  et :

$$ds = \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial s}{\partial \varphi} d\varphi$$

On peut interpréter  $ds$  : en coordonnées cartésiennes par exemple, lorsque  $x$  varie d'une quantité infinitésimale  $dx$ ,  $y$  de  $dy$  et  $z$  de  $dz$ , alors, à des infiniment petits d'ordre supérieur près<sup>1</sup>, on peut dire que  $s$  aura varié d'une quantité infinitésimale  $ds = s(x + dx, y + dy, z + dz) - s(x, y, z)$ .

**A29. Champs scalaires : gradient.** Le gradient d'une fonction scalaire à plusieurs variables est en quelque sorte la généralisation de la notion de dérivée d'une fonction à une variable. Il s'agit d'un champ de vecteurs dans lequel sont encodées les trois dérivées de  $s$  par rapport à chacune de ses variables en tout point  $M$ . Ce champ vectoriel, noté  $\overrightarrow{\text{grad}} s$  ou encore  $\vec{\nabla} s$ , indique ainsi la façon dont évolue la fonction scalaire dans l'espace, en grandeur et dans quelle direction. Il est défini à partir de la différentielle de  $s$  que l'on écrit comme le résultat d'un produit scalaire :

$$ds := \overrightarrow{\text{grad}} s \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla} s \cdot d\vec{r}$$

où  $d\vec{r}$  est la différentielle du vecteur-position  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ . Dans cette définition purement vectorielle, le système de coordonnées employé n'apparaît pas : elle est donc invariante par changement de système de coordonnées et elle sert à déterminer  $\overrightarrow{\text{grad}} s$  dans n'importe quel système puisque par ailleurs on sait écrire  $ds$  et  $d\vec{r}$ . Dans le système de coordonnées cartésiennes par exemple :

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

Connaissant  $ds$  dans ce système, on en déduit :

$$\vec{\nabla} s = \overrightarrow{\text{grad}} s = \frac{\partial s}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial s}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial s}{\partial z} \vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques, on a :

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

où  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  est la base locale associée à ce système de coordonnées. D'où :

<sup>1</sup> C'est-à-dire des termes qui contiendraient des puissances supérieures à 1 ou des produits des quantités  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . En fait on a la formule de Taylor :

$$s(x + dx, y + dy, z + dz) = s(x, y, z) + \left( \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy + \frac{\partial s}{\partial z} dz \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} dy dz \right) + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^{(3)} s + \text{etc.}$$

$$\vec{\nabla}s = \overrightarrow{\text{grad}} s = \frac{\partial s}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

On remarque qu'aux dénominateurs apparaissent les distances élémentaires parcourues par le point  $M$  dans chacune des directions données par  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  lorsque  $r$  a varié de  $dr$  (distance parcourue :  $dr$  le long de  $\vec{u}_r$ ),  $\theta$  a varié de  $d\theta$  (distance parcourue :  $r d\theta$  le long de  $\vec{u}_\theta$ ) et  $\varphi$  a varié de  $d\varphi$  (distance parcourue :  $r \sin \theta d\varphi$  le long de  $\vec{u}_\varphi$ ) : c'est un résultat général lorsque le système de coordonnées employé est orthogonal (*id est* : la base qui lui est associée est orthonormée).

On tient un raisonnement similaire pour déterminer  $\overrightarrow{\text{grad}} s$  dans les autres systèmes de coordonnées orthogonales.

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ :

$$\vec{\nabla}s = \overrightarrow{\text{grad}} s = \frac{\partial s}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

En coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  :

$$\vec{\nabla}s = \overrightarrow{\text{grad}} s = \frac{\partial s}{\partial \rho} \vec{u}_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial s}{\partial z} \vec{u}_z$$

**A30. Champs scalaires : valeurs stationnaires.** Dans un système de coordonnées  $(q_1, q_2, q_3)$ , les valeurs  $(q_1^i, q_2^i, q_3^i)$   $i = 1, \dots$  qui annulent  $ds$  correspondent à des points  $M_i(q_1^i, q_2^i, q_3^i)$  pour lesquels  $s(M_i)$  prend une valeur dite stationnaire. Chaque  $M_i$  est appelé point de stationnarité pour  $s$ . Ce peut être un extrémum de  $s$ , un minimum ou toute autre caractéristique géométrique de  $s$  comme le point col (on dit aussi point de selle) en  $(0,0)$  de la fonction scalaire  $s(x, y)$  représentée sur la figure X du chapitre 14.

Compte tenu de sa définition, le gradient de  $s$  en un tel point de stationnarité s'annule également :

$$\overrightarrow{\text{grad}} s|_{M_i} = \vec{0} \quad \forall i$$

De façon générale, rechercher des points de stationnarité pour  $s(q_1, q_2, q_3)$ , c'est rechercher les points  $M_i(q_1^i, q_2^i, q_3^i)$  pour lesquels toutes les dérivées premières partielles de  $s$  s'annulent.

**A31. Champs scalaires : équipotentiels et gradient.** On se rappelle que les équipotentiels d'une fonction scalaire  $s$  sont les lieux des points  $M$  de l'espace pour lesquels  $s(M)$  prend toujours une même valeur  $s_0$ . Ce sont donc des surfaces

d'équations  $s(q_1, q_2, q_3) = s_0$ . On montre ici que  $\overrightarrow{\text{grad}} s$  est un champ de vecteurs orthogonal à de telles surfaces : en effet, puisqu'en se déplaçant sur une équipotentielle,  $s$  garde toujours la valeur  $s_0$ , on a évidemment :  $ds = ds_0 = 0$  sur cette équipotentielle. Soit alors  $d\vec{r}_{\parallel}$  un tel déplacement élémentaire ; pour tout point  $M$  de l'équipotentielle, on doit donc avoir :

$$ds = \overrightarrow{\text{grad}} s \cdot d\vec{r}_{\parallel} = 0$$

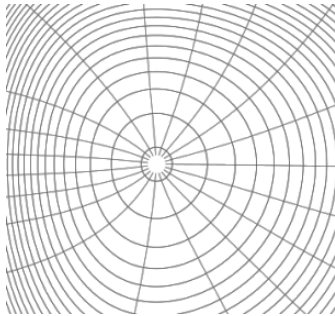
ce qui impose  $\overrightarrow{\text{grad}} s \perp d\vec{r}_{\parallel}$ .

Les équipotentielles du champ scalaire et les lignes de champ de son gradient forment donc un ensemble géométrique de courbes et de surfaces localement orthogonales les unes aux autres. La figure A15 en fournit un exemple à deux dimensions où les équipotentielles sont ici des courbes de niveau.

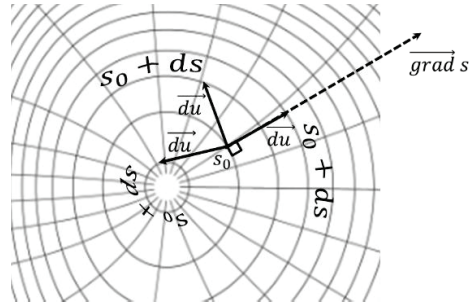
On a coutume de dire que la direction des lignes de champ de  $\overrightarrow{\text{grad}} s$  indique la direction de plus grande pente. En effet, soit  $d\vec{r}_{s_0 \rightarrow s_0 + ds} = \vec{du}$  un déplacement élémentaire quelconque pour aller d'une équipotentielle  $s = s_0$  vers une équipotentielle voisine  $s = s_0 + ds$  ; on a alors :

$$ds = \overrightarrow{\text{grad}} s \cdot \vec{du} = \|\overrightarrow{\text{grad}} s\| \|\vec{du}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{\text{grad}} s, \vec{du}})$$

D'où il résulte que pour une norme fixe  $\|\vec{du}\|$  du déplacement,  $ds$  sera positif et maximal lorsque  $\vec{du}$  suivra la direction et le sens de  $\overrightarrow{\text{grad}} s$ . C'est ce qu'indique la figure A16.



**Figure A15.** Les surfaces équipotentielles (ici les courbes fermées) d'une fonction scalaire sont toujours perpendiculaires aux lignes de champ qui représentent la direction du gradient de la fonction scalaire en chaque point.



**Figure A16.** La direction des lignes de champ de  $\overrightarrow{\text{grad}} s$  indique la direction de plus grande pente.



# **SOLUTIONS DES EXERCICES**



# SOLUTIONS DES EXERCICES

## CHAPITRE 1

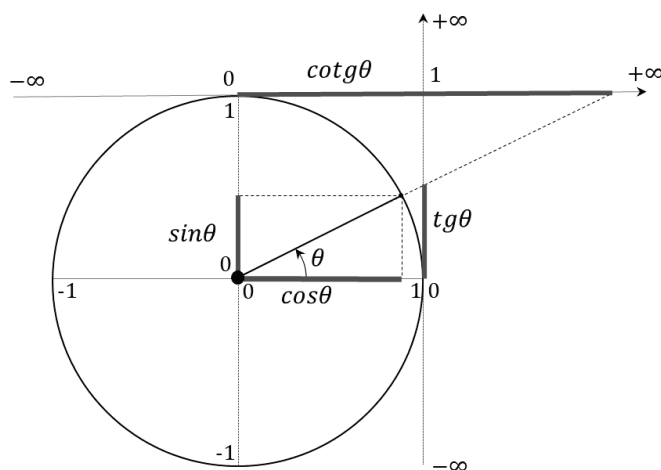
**C5. Coordonnées sphériques.** D'après la figure 3 : les points  $O$ ,  $M$  et le projeté de  $M$  sur l'axe  $Oz$  forment un triangle rectangle. On a donc :  $z = r \cos\theta$ . Par ailleurs, la longueur  $OH$ , où  $H$  est le projeté de  $M$  dans le plan  $xOy$ , vaut :  $OH = r \sin\theta$  car  $OMH$  est un triangle rectangle. Enfin, les points  $O$ ,  $H$  et le projeté de  $H$  sur l'axe  $Ox$  forment aussi un triangle rectangle. On a donc :  $x = OH \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi$ . Un raisonnement similaire amène à :  $y = OH \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi$ .

### C6. Formules trigonométriques et cercle trigonométrique.

- *Angles remarquables.*

$\theta$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
$\sin \theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$tg \theta = \tan \theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0

- *Cercle trigonométrique.* Cercle de rayon 1 à partir duquel on peut lire les valeurs de  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta := \sin \theta / \cos \theta$  et  $\cotan \theta := \cos \theta / \sin \theta$  pour un angle  $\theta$  donné. On y lit aussi les relations de symétrie, par exemple :  $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ ,  $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$ , etc...



**C7. Formules inverses et bi-univocité.** En coordonnées polaires, on a :

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$$

On en déduit facilement :  $x^2 + y^2 = r^2$ , et en faisant le rapport de ces deux relations, on obtient :  $\tan\theta = y/x$ . D'où le résultat annoncé.

*Mais attention* : la fonction  $w = \text{Arctan } u$  est la fonction réciproque de la fonction  $u = \tan w$  à condition de restreindre  $w$  au domaine de variation  $]-\pi/2 \ \pi/2[$  pour qu'il y ait bien une bijection. Or, pour les coordonnées polaires :  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Il faut donc écrire de façon rigoureuse, après avoir réfléchi sur les valeurs de  $\sin\theta$  et  $\cos\theta$  en fonction de  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \theta = 2\pi + \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y < 0 \\ \theta = \pi + \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• *Coordonnées cylindriques.* En procédant de la même façon que pour les coordonnées polaires, on trouvera :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

Avec les mêmes réserves sur la fonction *Arctan*.

• *Coordonnées sphériques.* A partir des relations entre les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  du point  $M$  et ses coordonnées cartésiennes (§ 3, C5), on trouvera  $r$  en élevant au carré chacune de ces trois relations et en les sommant. La relation impliquant  $z$  fournit directement  $\theta$ , et le rapport des deux autres fournit  $\varphi$  ; de sorte que :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \text{Arccos}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

avec les réserves déjà émises sur la fonction *Arctan*. La fonction *Arccos* est définie comme une bijection de  $[-1, 1]$  sur  $[0, \pi]$ , ce qui est conforme au domaine de définition de l'angle  $\theta$  des coordonnées sphériques.

Si le point  $M$  est situé sur l'axe  $Oz$ , l'angle  $\varphi$  n'est pas défini, de même que l'angle  $\theta$  lorsque  $r = 0$ . On perd donc la bi-univocité en tout point de l'axe  $Oz$ .

**C8. Mouvement rectiligne sinusoïdal.** La période  $T$  de la fonction  $A \cos(\omega t - \phi)$  doit être telle que :

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos(\omega[t + T] - \phi) \quad \forall t$$

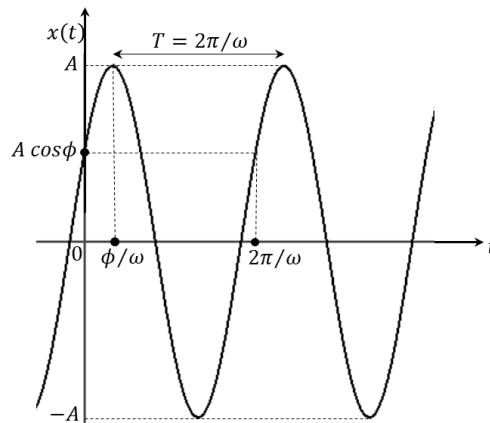
Or, on a la propriété :  $\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = \pm b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Comme  $T$  doit être la plus petite valeur positive qui satisfait à la condition demandée, on trouve ainsi :

$$T = 2\pi/\omega$$

Par ailleurs, au temps  $t = 0$ , la fonction prend la valeur  $A \cos(-\phi) = A \cos\phi$ , ce qui permet d'identifier ce produit sur un graphique.

La dérivée de la fonction par rapport à  $t$  vaut :  $-A\omega \sin(\omega t - \phi)$ . Elle s'annule pour les valeurs  $t_k^*$  de  $t$  telles que :  $t_k^* = \phi/\omega + k\pi/\omega, k \in \mathbb{Z}$ . Pour ces valeurs, la fonction vaut :  $A(-1)^k$ . On peut ainsi repérer sur un graphique  $A$  et  $\phi/\omega$ .



• À partir de la relation :  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ , on déduit :

$$A \cos(\omega t - \phi) = A \cos \omega t \cos \phi + A \sin \omega t \sin \phi$$

D'où les relations demandées :  $a = A \cos \phi$  et  $b = A \sin \phi$ .

• Partons de la relation proposée :  $x = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}$ . Alors, en développant les exponentielles imaginaires, on arrive à :

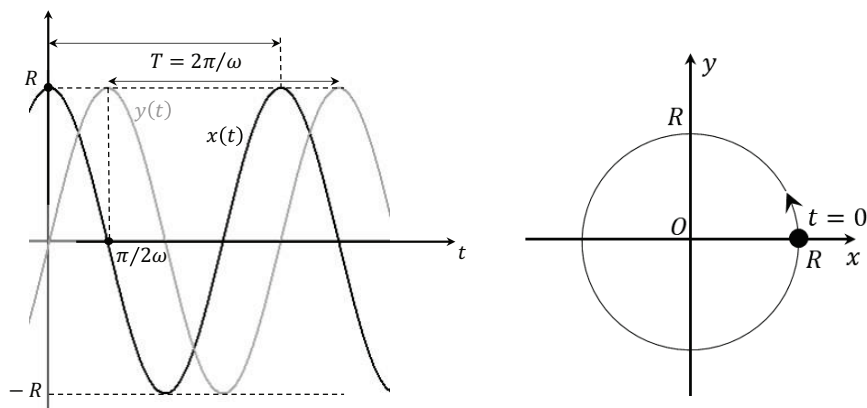
$$\begin{cases} \alpha + \beta = a = A \cos \phi \\ i(\alpha - \beta) = b = A \sin \phi \end{cases}$$

D'où les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  :

$$\begin{cases} \alpha = (a - ib)/2 = A e^{-i\phi}/2 \\ \beta = (a + ib)/2 = A e^{+i\phi}/2 \end{cases}$$

On notera que  $\alpha$  et  $\beta$  sont complexes.

**C9. Mouvement circulaire uniforme.** Au vu des équations horaires proposées, l'abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$  du point  $M$  effectuent manifestement un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation  $\omega$  - et donc de période  $T = 2\pi/\omega$  - et d'amplitude  $R$ . La phase initiale  $\phi_x$  de l'abscisse  $x$  est nulle. Par contre, en vertu de la relation :  $\sin a = \cos(a - \pi/2)$ , la phase initiale  $\phi_y$  de l'abscisse  $y$  est :  $\phi_y = \pi/2$  s'il faut la comparer à  $\phi_x$ . On dit de ces deux courbes qu'elles sont déphasées de  $\pi/2$ .



• En réalisant la somme  $x^2 + y^2$ , on trouve immédiatement l'équation de la trajectoire :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Il s'agit donc d'un cercle centré en  $O$ , de rayon  $R$ , parcouru dans le sens indiqué après avoir réfléchi sur les valeurs prises par  $x$  et  $y$  au début du mouvement.

• Dans le système de coordonnées polaires, on a d'abord l'équation horaire pour la variable  $r$  :

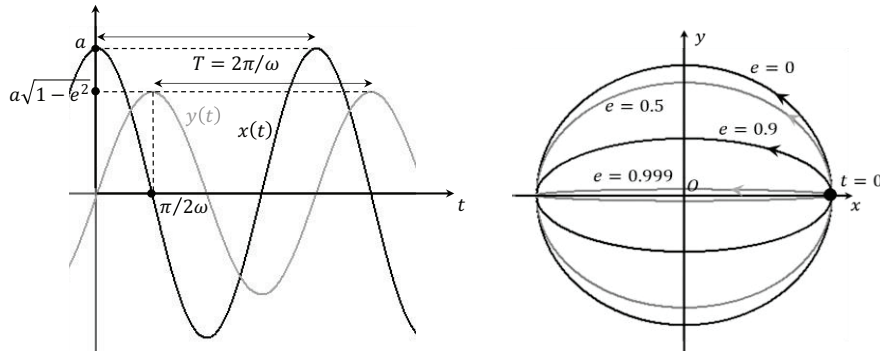
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$$

Puis, pour l'angle  $\theta$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t = r \cos \theta \\ y = R \sin \omega t = r \sin \theta \end{cases}$$

Ce qui impose finalement l'équation horaire :  $\theta = \omega t$ . L'équation de la trajectoire est ici :  $r = R, \forall \theta$ .

**C10. Mouvement elliptique I.** D'après les équations horaires proposées, l'abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$  du point  $M$  effectuent un mouvement rectiligne sinusoïdal de



pulsation  $\omega$  - et donc de période  $T = 2\pi/\omega$  - d'amplitude  $a$  pour l'abscisse  $x$  et  $a\sqrt{1-e^2}$  pour l'ordonnée  $y$ . La phase initiale  $\phi_x$  de l'abscisse  $x$  est nulle. La phase initiale  $\phi_y$  de l'abscisse  $y$  est  $\phi_y = \pi/2$  vis-à-vis de la phase  $\phi_x$  en vertu de la relation :  $\sin a = \cos(a - \pi/2)$ . Les deux courbes sont donc déphasées de  $\pi/2$ .

- En divisant l'équation horaire pour  $x$  par  $a$ , puis celle pour  $y$  par  $a\sqrt{1-e^2}$  et en sommant chaque résultat élevé au carré, on obtient l'équation de la trajectoire sous sa forme implicite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

Il s'agit d'une ellipse dont le grand axe est l'axe  $Ox$  comme indiqué dans l'énoncé. Lorsque  $e = 0$ , l'ellipse dégénère en un cercle de rayon  $a$ . Lorsque  $e$  augmente, l'ellipse finit par « s'écraser » pour devenir un segment de droite de l'axe  $Ox$  quand  $e$  atteint la valeur 1. Dans ce dernier cas, les équations horaires du mouvement sont :  $x = a \cos \omega t$  et  $y = 0$  : le point  $M$  réalise alors un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $a$  le long de l'axe  $Ox$ .

- Dans le système de coordonnées polaires, l'équation horaire pour la variable  $r$  est donnée par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \dots = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \omega t}$$

Pour l'angle  $\theta$ , on peut convenir d'écrire l'évolution horaire de son sinus ou de son cosinus, ou encore de sa tangente puisque :

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Arctan}\left(\sqrt{1-e^2} \tan \omega t\right)$$

avec les réserves émises au C7 concernant la fonction  $\text{Arctan}$ .

Pour déterminer l'équation de la trajectoire  $r(\theta)$ , on peut, par exemple, partir de la relation :  $y = a\sqrt{1-e^2} \sin \omega t = r \sin \theta$  afin d'obtenir  $\sin \omega t$  en fonction de  $r$  et

$\theta$  ; puis injecter l'expression obtenue dans l'équation horaire de  $r$ . Tout calcul fait, on obtient ainsi :

$$r(\theta) = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}$$

*Note* : si  $e = 0$  on retrouve bien l'équation du cercle :  $r = a$ . Mais l'expression n'est pas valable pour  $e = 1$  puisqu'alors  $y = 0$ . Dans ce cas, on a en fait :  $\sin \theta = 0$ , c'est-à-dire ici :  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  qui font office d'équation de la trajectoire. Il s'agit donc d'une droite, limitée au segment  $[-a, a]$  puisqu'il faut tenir compte du fait que :  $r = a \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = a |\cos \omega t|$ .

**C11. Mouvement elliptique II.** Les équations paramétriques de la trajectoire elliptique vis-à-vis des coordonnées cartésiennes  $(x_F, y_F)$  sont :

$$\begin{cases} x_F = |FO| + x = a e + x = a (e + \cos \omega t) \\ y_F = y = a \sqrt{1 - e^2} \sin \omega t \end{cases}$$

On élimine le temps de ces équations horaires en isolant les fonctions sinus et cosinus pour obtenir finalement l'équation implicite de la trajectoire dans ce système de coordonnées :

$$\frac{(x_F - ae)^2}{a^2} + \frac{y_F^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

• Les coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$  relatives aux axes  $Fx$  et  $Fy$  sont telles que :

$$\begin{cases} x_F = \rho \cos \varphi \\ y_F = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

D'où l'équation horaire pour la variable  $\rho$  :

$$\rho = \sqrt{x_F^2 + y_F^2} = \dots = a (1 + e \cos \omega t)$$

On tire ensuite (par exemple) :

$$\cos \varphi = \frac{x_F}{\rho} = \frac{e + \cos \omega t}{1 + e \cos \omega t}$$

Et on obtient ainsi  $\varphi(t)$  à l'aide de son cosinus.

Pour obtenir l'équation de la trajectoire  $\rho(\varphi)$ , on peut isoler  $\cos \omega t$  à partir de l'équation horaire pour  $\rho$ , puis injecter le résultat dans l'équation horaire pour  $\cos \varphi$ .

On obtient, tout calcul fait :

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi}$$

**C12. Mouvement parabolique.** On observe immédiatement qu'au temps  $t = 0$  les équations horaires de la trajectoire fournissent :

$$\begin{cases} x(t = 0) = x_0 \\ y(t = 0) = y_0 \end{cases}$$

$x_0$  est donc l'abscisse initiale du point  $M$  et  $y_0$  son ordonnée initiale.

• Pour obtenir l'équation de la trajectoire,  $y(x)$ , on peut isoler  $t$  dans l'équation horaire pour  $x$  à condition que  $v_{0x} \neq 0$ , puis injecter le résultat dans l'équation horaire pour  $y$ . On obtient :

$$y = \frac{a}{2 v_{0x}^2} (x - x_0)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} (x - x_0) + y_0$$

qui est l'équation d'une parabole. *Nota Bene* : lorsque  $v_{0x} = 0$ , on a :  $x = x_0$  qui est l'équation de la trajectoire ; cette droite verticale est parcourue selon l'équation horaire :  $y = a t^2 / 2 + v_{0y} t + y_0$ .

• En posant :  $X = x - x_0$  et  $Y = y - y_0$ , l'équation de la trajectoire devient :

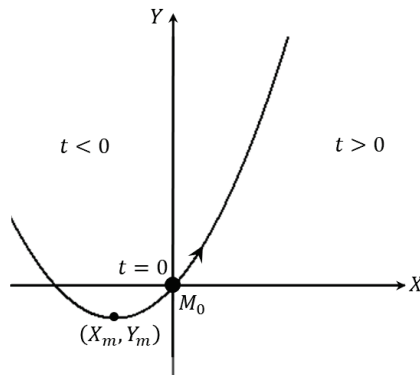
$$Y(X) = \frac{a}{2 v_{0x}^2} X^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} X$$

$(X, Y)$  représentent les coordonnées cartésiennes du point  $M$  relativement à la nouvelle origine  $M_0(x_0, y_0)$  qui est la position initiale du point  $M$ .

La dérivée de cette fonction est :

$$Y'(X) = \frac{a}{v_{0x}^2} X + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

Elle s'annule pour  $X_m = -v_{0x} v_{0y} / a$ . À cette position, la valeur prise par  $Y$  est :  $Y_m = Y(X_m) = -v_{0y} / 2a$ . On vérifie qu'il s'agit d'un minimum si les paramètres  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  et  $a$  sont positifs comme indiqué dans l'énoncé. La trajectoire ci-dessous est tracée aussi pour les temps négatifs : si, avant l'instant origine  $t = 0$ , le point  $M$  stationnait en  $M_0$ , alors cette partie de la courbe n'est pas à prendre en compte.



*Nota Bene* : On pourra poursuivre l'exercice et le tracé de la courbe en regardant les différents cas possibles lorsque les paramètres  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  et  $a$  ne sont pas forcément positifs. On pourra aussi regarder les cas où l'un d'entre eux est nul, etc...

## CHAPITRE 2

**C16. Bases associées aux coordonnées polaires et cylindriques.** *Coordonnées polaires.* En faisant référence à la figure 5, on voit que si l'on augmente  $r$  d'une quantité infinitésimale  $dr$  à  $\theta$  fixé, le point  $M$  se sera déplacé le long de la droite  $(OM)$ . Le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  associé à la coordonnée  $r$  sera donc dirigé le long de  $\overrightarrow{OM}$ . Si l'on augmente  $\theta$  d'une quantité  $d\theta$  à  $r$  fixé, le point  $M$  aura évolué le long de l'arc de cercle infinitésimal associé au cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  sur une distance  $r d\theta$ . Le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  associé à la coordonnée  $\theta$  sera donc dirigé le long de la tangente en  $M$  à ce cercle dans le sens indiqué par le déplacement infinitésimal du point  $M$  pour  $d\theta > 0$ .

Ces deux vecteurs sont tracés sur la figure 12, à partir de laquelle l'examen de la géométrie du problème permet d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y \end{cases}$$

• *Coordonnées cylindriques.* Il suffit de rappeler que les coordonnées  $(\rho, \varphi)$  du système de coordonnées cylindriques sont en fait les coordonnées polaires du point  $H$ , projection du point  $M$  dans le plan  $xOy$  (figure 6) : les raisonnements pour déterminer les vecteurs  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\varphi$  sont donc les mêmes que pour le système de coordonnées polaires et on a :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_y \end{cases}$$

En ce qui concerne le vecteur  $\vec{u}_z$  associé à la coordonnée  $z$ , il est facile de voir que le déplacement du point  $M$  d'une quantité  $dz > 0$  à  $\rho$  et  $\varphi$  constants se produira le long de l'axe  $Oz$  vers les  $z > 0$ . Ce vecteur est donc le vecteur  $\vec{u}_z$  associé à l'axe  $Oz$  des coordonnées cartésiennes de  $M$ . On complète ainsi les deux relations précédentes par :

$$\vec{u}_z = \vec{u}_z$$

Ces vecteurs sont représentés sur la figure 16 ( $\vec{u}_z$  est bien sûr sur l'axe  $Oz$ ).

**C17. Rayon vecteur.** Il suffit d'employer la relation de Chasles, c'est-à-dire la loi d'addition des vecteurs (Annexe 1) ou règle du parallélogramme, pour vérifier les relations annoncées à l'aide des figures indiquées dans l'énoncé.

**C18. Définition analytique d'une base associée à un système de coordonnées.**

*Coordonnées polaires.* Dans le système de coordonnées polaires on peut écrire :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y = r \cos\theta \vec{u}_x + r \sin\theta \vec{u}_y$$

Ainsi, en dérivant partiellement  $\overrightarrow{OM}$  par rapport à  $r$  et en normant à 1 le vecteur obtenu on obtiendra le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  associé à la variable  $r$  :

$$\vec{u}_r := \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} / \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \right\| = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y$$

On obtient le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  associé à la variable  $\theta$  en procédant de la même façon :

$$\vec{u}_\theta := \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} / \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\| = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y$$

- *Coordonnées cylindriques.* On obtiendra la base  $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\}$  avec la même méthode après avoir écrit le vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  à l'aide des coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z = \rho \cos\varphi \vec{u}_x + \rho \sin\varphi \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

- *Coordonnées cartésiennes.* On écrira cette fois :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

Et le procédé fournira la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  elle-même ; par exemple :

$$\vec{u}_x := \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} / \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} \right\| = \frac{\vec{u}_x}{1} = \vec{u}_x$$

**C19. Formules inverses.** *Coordonnées polaires.* À partir des deux relations :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y \end{cases}$$

On trouvera l'expression de  $\vec{u}_x$  dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  en multipliant la première relation par  $\cos\theta$ , la seconde par  $\sin\theta$  et en soustrayant les deux nouvelles relations obtenues. On trouvera  $\vec{u}_y$  par un procédé similaire (la première relation multipliée par  $\sin\theta$ , la seconde par  $\cos\theta$  et en additionnant le tout). On a ainsi :

$$\begin{cases} \vec{u}_x = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_y = \sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta \end{cases}$$

- *Coordonnées cylindriques.* Avec la même méthodologie, on trouve :

$$\begin{cases} \vec{u}_x = \cos\varphi \vec{u}_\rho - \sin\varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_y = \sin\varphi \vec{u}_\rho + \cos\varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_z = \vec{u}_z \end{cases}$$

- *Coordonnées sphériques.* Il s'agit cette fois d'inverser les trois relations :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y + \cos\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{u}_y - \sin\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_y \end{cases}$$

En multipliant la première relation par  $\sin\theta$ , la seconde par  $\cos\theta$  et en additionnant le tout, on trouve d'abord :

$$\sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta = \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y$$

Ce résultat, combiné avec la troisième relation va fournir  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ . Le vecteur  $\vec{u}_z$  dans cette base se déduit des deux premières relations.

Au final, on a :

$$\begin{cases} \vec{u}_x = \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_r + \cos\theta \cos\varphi \vec{u}_\theta - \sin\varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_y = \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_r + \cos\theta \sin\varphi \vec{u}_\theta + \cos\varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_z = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta \end{cases}$$

**C20. Rayon vecteur sur une trajectoire. C8 :** *Mouvement rectiligne sinusoïdal.* Il s'agit d'un mouvement unidimensionnel :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x = A \cos(\omega t - \phi) \vec{u}_x$$

- **C9 :** *Mouvement circulaire uniforme.* Il s'agit d'un mouvement bidimensionnel. En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y = R \cos\omega t \vec{u}_x + R \sin\omega t \vec{u}_y$$

En coordonnées polaires, on a :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r = R \vec{u}_r$$

La dépendance en temps est ici contenue dans le vecteur  $\vec{u}_r$ .

- **C10 :** *Mouvement elliptique I.* En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y = a \cos \omega t \vec{u}_x + a \sqrt{1 - e^2} \sin \omega t \vec{u}_y$$

En coordonnées polaires :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \omega t} \vec{u}_r$$

• **C11** : *Mouvement elliptique II*. En coordonnées cartésiennes  $(x_F, y_F)$  :

$$\vec{r}_F = \overrightarrow{FM} = x_F \vec{u}_x + y_F \vec{u}_y = a (e + \cos \omega t) \vec{u}_x + a \sqrt{1 - e^2} \sin \omega t \vec{u}_y$$

En coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$  relativement au point  $F$  :

$$\vec{\rho} = \overrightarrow{FM} = \rho \vec{u}_\rho = a (1 + e \cos \omega t) \vec{u}_\rho$$

• **C12** : *Mouvement parabolique*. On a simplement :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y = (v_{0x}t + x_0) \vec{u}_x + \left(\frac{1}{2}a t^2 + v_{0y}t + y_0\right) \vec{u}_y$$

### CHAPITRE 3

**C21. Différentielle du rayon vecteur dans les différents systèmes de coordonnées et vecteur vitesse.** Dans le système de coordonnées cylindriques, le point  $M$  se sera déplacé : sur une distance infinitésimale  $d\rho$  le long de  $\vec{u}_\rho$  pour une variation  $d\rho$  de  $\rho$  à  $\varphi$  et  $z$  constants, sur une distance infinitésimale  $\rho d\varphi$  le long de  $\vec{u}_\varphi$  pour une variation  $d\varphi$  de  $\varphi$  à  $\rho$  et  $z$  constants, et sur une distance infinitésimale  $dz$  le long de  $\vec{u}_z$  pour une variation  $dz$  de  $z$  à  $\rho$  et  $\varphi$  constants. Ainsi, le déplacement global sera :

$$d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi + dz \vec{u}_z$$

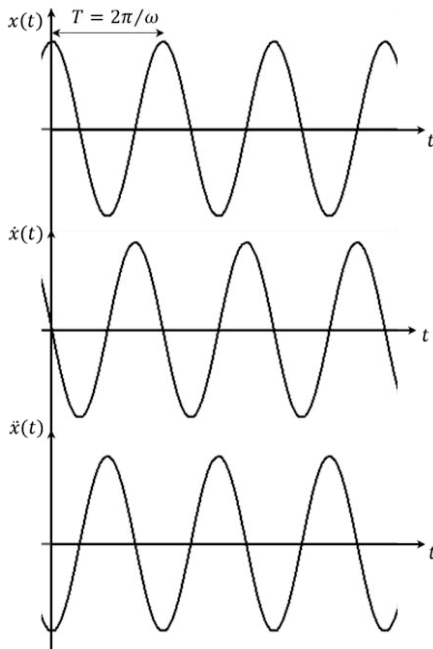
et le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi + \dot{z} \vec{u}_z$$

**C23. Mouvement rectiligne sinusoïdal.** D'après les exercices **C8** et **C20**, le rayon vecteur s'écrit ici :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x = A \cos(\omega t - \phi) \vec{u}_x$$

D'où les vecteurs vitesse et accélération :



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x \\ &= -A \omega \sin(\omega t - \phi) \vec{u}_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x} \vec{u}_x \\ &= -A \omega^2 \cos(\omega t - \phi) \vec{u}_x\end{aligned}$$

Pour le tracé ci-contre de  $x$ ,  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  en fonction du temps, on a fait le choix  $\phi = 0$ . On étudiera attentivement comment évoluent simultanément  $x$ ,  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$ .

• On remarque de suite que :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -A \omega^2 \cos(\omega t - \phi) \\ &= -\omega^2 x\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Il s'agit-là d'une équation différentielle du second ordre en la variable  $x$ , linéaire, à

coefficients constants et sans second membre (voir l'annexe 4 pour la caractérisation d'une équation différentielle).

**C24. Mouvement parabolique.** D'après les exercices **C12** et **C20**, le rayon vecteur de ce mouvement parabolique s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y = (v_{0x}t + x_0) \vec{u}_x + \left(\frac{1}{2}a t^2 + v_{0y}t + y_0\right) \vec{u}_y$$

On en tire immédiatement les vecteurs vitesse et accélération du point matériel :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y = v_{0x} \vec{u}_x + (a t + v_{0y}) \vec{u}_y$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y = a \vec{u}_y$$

Ainsi que leurs normes :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + a^2 t^2}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = a$$

Au temps  $t = 0$ , le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0y} \vec{u}_y$$

$v_{0x}$  est donc la composante du vecteur vitesse sur l'axe  $Ox$  à l'instant initial et  $v_{0y}$  sa composante sur l'axe  $Oy$  à ce même instant. Le paramètre  $a$  quant à lui est la valeur de l'accélération de ce mouvement à chaque instant.

Le mouvement parabolique du point matériel projeté sur l'axe  $Ox$  est rectiligne uniforme ; son mouvement projeté sur l'axe  $Oy$  est rectiligne uniformément varié (voir le chapitre 4 pour ces caractérisations).

**C25. Mouvement circulaire uniforme.** Selon les exercices **C9** et **C20**, le rayon vecteur de ce mouvement circulaire en coordonnées cartésiennes est :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y = R \cos \omega t \vec{u}_x + R \sin \omega t \vec{u}_y$$

Les vecteurs vitesse et accélération du point matériel sont donc :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y = -R \omega \sin \omega t \vec{u}_x + R \omega \cos \omega t \vec{u}_y$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y = -R \omega^2 \cos \omega t \vec{u}_x - R \omega^2 \sin \omega t \vec{u}_y = -\omega^2 \vec{r}$$

Ainsi que leurs normes :

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R \omega$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = R \omega^2$$

On voit que la norme du vecteur vitesse est constante tout au long de ce mouvement circulaire : c'est pourquoi on dit qu'il est uniforme (voir le chapitre 4).

- Comme indiqué dans le calcul de  $\vec{a}$  ci-dessus, on observe que ce vecteur est directement proportionnel au rayon vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ .
- Dans le système des coordonnées polaires, le rayon vecteur s'écrit cette fois :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r = R \vec{u}_r$$

Le vecteur vitesse est alors, puisque la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  est locale :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Avec, d'après l'exercice **C9** :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega t) = \omega$$

$\omega$  est donc la vitesse angulaire de ce mouvement circulaire uniforme : elle est constante. Le vecteur vitesse s'écrit finalement :

$$\vec{v} = R \omega \vec{u}_\theta$$

Il est bien sûr constamment tangent à la trajectoire circulaire et sa norme est, conformément au résultat précédent :

$$\|\vec{v}\| = R \omega$$

Le calcul du vecteur accélération dans ce système de coordonnées est ici :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R \omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -R \omega \dot{\theta} \vec{u}_r = -R \omega^2 \vec{u}_r = -\omega^2 \vec{r}$$

Il est constamment dirigé vers le centre  $O$  de ce mouvement circulaire uniforme et sa norme est, comme précédemment :

$$\|\vec{a}\| = R \omega^2$$

**C26. Mouvement elliptique.** D'après les exercices **C10** et **C20**, on a ici :

$$\vec{r} = \overline{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y = a \cos \omega t \vec{u}_x + a \sqrt{1 - e^2} \sin \omega t \vec{u}_y$$

D'où les vecteurs vitesse et accélération :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y = -a \omega \sin \omega t \vec{u}_x + a \sqrt{1 - e^2} \omega \cos \omega t \vec{u}_y$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y = -a \omega^2 \cos \omega t \vec{u}_x - a \sqrt{1 - e^2} \omega^2 \sin \omega t \vec{u}_y$$

On observe que le vecteur accélération est, comme pour le mouvement circulaire uniforme, directement proportionnel au rayon vecteur  $\vec{r} = \overline{OM}$  :  $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$ .

Les normes des vecteurs vitesse et accélération sont respectivement :

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a \omega \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega t}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = a \omega^2 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \omega t}$$

où l'on observe que lorsque  $v$  est minimale ( $\omega t = k \pi, k$  entier) alors  $a$  est maximale, et inversement. Le lecteur, la lectrice sont invités à tracer ces normes en fonction du temps (en normalisant  $a$  et  $\omega$  à 1, ce qui fournit les unités de longueur et de temps) pour une certaine valeur de  $e$  et à réfléchir, à l'aide de la trajectoire suivie, sur la façon dont évoluent ces quantités, par exemple aux extrémités des axes de l'ellipse.

## CHAPITRE 4

**C27. Mouvements rectilignes amortis.** Il s'agit d'un mouvement le long de l'axe  $Ox$ , on aura donc :

$$\vec{r} = \overline{OM} = x \vec{u}_x = v_0 \tau [1 - \exp(-t/\tau)] \vec{u}_x$$

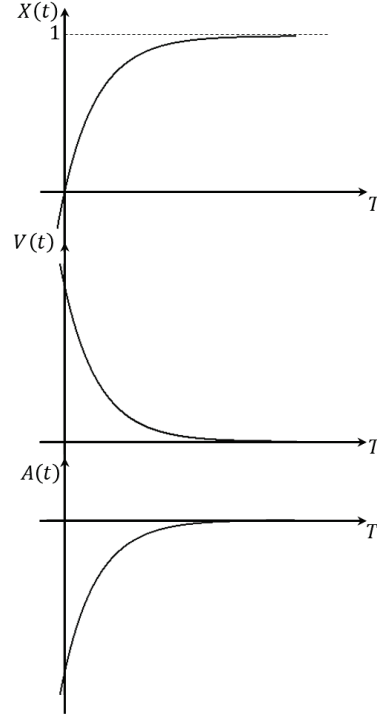
Les vecteurs vitesse et accélération du point matériel sont alors :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x = v_0 \exp(-t/\tau) \vec{u}_x$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x} \vec{u}_x \\ &= -\frac{v_0}{\tau} \exp(-t/\tau) \vec{u}_x \end{aligned}$$

On interprète  $v_0$  comme la valeur de la vitesse du point matériel à l'instant  $t = 0$ .

Le tracé ci-contre des courbes adimensionnées  $x$ ,  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  en fonction du temps montre que lorsque  $t \rightarrow \infty$ , le point matériel finit par stationner à la position :  $x_\infty = v_0 \tau$ . Cette valeur est quasiment atteinte au temps  $t = 5 \tau$  puisque  $x(t = 5 \tau) \cong 0.993 v_0 \tau$ .



• Au vu de l'écriture de  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  en fonction du temps, on observe que :

$$\ddot{x} + \dot{x}/\tau = -\frac{v_0}{\tau} \exp(-t/\tau) + \frac{v_0}{\tau} \exp(-t/\tau) = 0$$

C'est une équation différentielle d'ordre 2 en  $x$ , linéaire, à coefficients constants et sans second membre (voir l'annexe 4 pour la caractérisation des équations différentielles).

• Pour le second mouvement rectiligne amorti proposé, on a cette fois :

$$\vec{r} = \overline{OM} = x \vec{u}_x = (v_0 \tau [1 - \exp(-t/\tau)] + v_\infty t) \vec{u}_x$$

Les vecteurs vitesse et accélération du point matériel sont maintenant :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x = (v_0 \exp(-t/\tau) + v_\infty) \vec{u}_x$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x} \vec{u}_x = -\frac{v_0}{\tau} \exp(-t/\tau) \vec{u}_x$$

On interprète  $v_\infty$  comme la valeur de la vitesse lorsque  $t \rightarrow \infty$  : le mouvement du point matériel tend cette fois vers un mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $v_\infty$ . Il est conseillé de tracer  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  et  $\ddot{x}(t)$  comme précédemment, avec l'aide du paramètre :  $\alpha = v_\infty/v_0$  auquel on pourra donner différentes valeurs.

• Il est facile de montrer que :

$$\ddot{x} + \dot{x}/\tau = -\frac{v_0}{\tau} \exp(-t/\tau) + \frac{v_0}{\tau} \exp(-t/\tau) + \frac{v_\infty}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$$

C'est une équation différentielle d'ordre 2 en  $x$ , linéaire, à coefficients constants, avec second membre.

**C28. Hélice spirale.** Pour ce mouvement tridimensionnel exprimé en coordonnées cylindriques et représenté sur la figure 49 du chapitre 11, on a :

$$\vec{r} = \overline{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z = \rho_0 \exp(-t/\tau) \vec{u}_\rho - h \exp(-t/\tau) \vec{u}_z$$

Le vecteur vitesse est ainsi :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\rho_0}{\tau} \exp(-t/\tau) \vec{u}_\rho + \rho_0 \exp(-t/\tau) \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{h}{\tau} \exp(-t/\tau) \vec{u}_z$$

avec :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\phi} \vec{u}_\phi = \omega \vec{u}_\phi$$

D'où :

$$\vec{v} = \exp(-t/\tau) \left[ -\frac{\rho_0}{\tau} \vec{u}_\rho + \rho_0 \omega \vec{u}_\phi + \frac{h}{\tau} \vec{u}_z \right]$$

La norme du vecteur vitesse est donc :

$$\|\vec{v}\| = v = \frac{\exp(-t/\tau)}{\tau} \sqrt{\rho_0^2 (1 + \omega^2 \tau^2) + h^2}$$

Le calcul du vecteur accélération donne, après réarrangement des termes :

$$\vec{a} = \exp(-t/\tau) \left\{ \rho_0 \left( \frac{1}{\tau^2} - \omega^2 \right) \vec{u}_\rho - 2 \frac{\rho_0 \omega}{\tau} \vec{u}_\phi - \frac{h}{\tau^2} \vec{u}_z \right\}$$

Et sa norme :

$$\|\vec{a}\| = a = \frac{\exp(-t/\tau)}{\tau^2} \sqrt{\rho_0^2 (1 + \omega^2 \tau^2)^2 + h^2}$$

Pour calculer l'angle  $\lambda$  (ou plutôt son cosinus) que font entre eux les vecteurs vitesse et accélération, examinons leur produit scalaire. D'une part, on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = -\frac{\exp(-2t/\tau)}{\tau^3} [\rho_0^2(1 + \omega^2\tau^2) + h^2]$$

D'autre part, on sait que (annexe 1) :

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \|\vec{v}\| \|\vec{a}\| \cos\lambda$$

Donc :

$$\cos\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{v}\| \|\vec{a}\|} = -\frac{\rho_0^2(1 + \omega^2\tau^2) + h^2}{\sqrt{\rho_0^2(1 + \omega^2\tau^2)^2 + h^2}}$$

Le résultat est indépendant du temps, l'angle  $\lambda$  reste donc le même tout au long de ce mouvement.

• Lorsqu'il est projeté sur l'axe  $Oz$ , le mouvement suit la loi horaire :

$$z(t) = -h \exp(-t/\tau)$$

Les équations horaires de la trajectoire projetée sur le plan  $xOy$  sont les valeurs de  $\rho$  et  $\varphi$  à chaque instant en vertu de la géométrie des coordonnées cylindriques, soit :

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 \exp(-t/\tau) \\ \varphi(t) = \omega t + \phi \end{cases}$$

Il s'agit d'une spirale logarithmique étudiée au **C35** dont on obtient l'équation en exprimant  $t$  en fonction de  $\varphi$  et en injectant le résultat dans l'expression de  $\rho$ . Ce faisant, on trouve :

$$\rho(\varphi) = \rho_0 \exp\{-(\varphi - \phi)/\omega\tau\}$$

## CHAPITRE 5

**C30. Mouvement circulaire uniforme.** Dans le système de coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$ , le rayon vecteur s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$$

Les vecteurs vitesse et accélération sont donc, compte tenu du fait qu'ici  $\varphi = \omega t$  :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \omega \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho \omega^2) \vec{u}_\rho + 2 \dot{\rho} \omega \vec{u}_\varphi$$

Comme le mouvement est supposé central, il faut que la composante de  $\vec{a}$  le long de  $\vec{u}_\varphi$  (sa composante orthoradiale) soit nulle, ce qui impose :  $\dot{\rho} = 0$  ; c'est-à-dire que

$\rho$  doit être constant :  $\rho = R$  : c'est là l'équation d'un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$  en coordonnées polaires. Le vecteur vitesse s'écrit donc :

$$\vec{v} = R \omega \vec{u}_\varphi$$

La norme,  $v = R\omega$  est constante : le mouvement circulaire est uniforme.

• On sait que tout mouvement à accélération centrale obéit à la loi des aires qui peut s'écrire de façon générale, si  $C$  est la constante des aires (cf 17) :

$$\rho^2 \dot{\varphi} = C$$

D'où la valeur du rayon du cercle en fonction de  $C$  et  $\omega$  :

$$R = \sqrt{C/\omega}$$

Où l'on a supposé que le rapport  $C/\omega$  est positif.

• Dans le cadre de ce mouvement circulaire uniforme, les vecteurs vitesse et accélération s'écrivent, d'après les calculs qui précèdent :

$$\vec{v} = R \omega \vec{u}_\varphi, \quad \|\vec{v}\| = v = R \omega = \sqrt{C \omega}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R \omega^2 \vec{u}_\rho, \quad \|\vec{a}\| = a = R \omega^2 = \sqrt{C \omega^3}$$

• Supposons que l'on ait un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R$  centré sur l'origine de notre référentiel. Alors le rayon vecteur s'écrit, dans le système de coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$  :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = R \vec{u}_\rho$$

Ce qui correspond à un vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

Or, le mouvement circulaire est supposé uniforme, ce qui impose  $v = R |\dot{\varphi}| = Cte$ . Il faut donc que la vitesse angulaire  $\dot{\varphi}$  soit constante, que l'on peut poser égale à  $\omega$ . Dans ces conditions, le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R \omega^2 \vec{u}_\rho$$

Et ce vecteur est bien central.

**C31. Courbe quelconque décrite par un mouvement à accélération centrale.** Si le mouvement est à accélération centrale, alors il est soumis à la loi des aires, qui s'exprime, dans le système de coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$ , par :

$$\rho^2 \dot{\varphi} = C$$

où  $C$  est la constante des aires (cf **18**). Ce qui permet d'écrire :

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 d\varphi = C dt$$

En intégrant par rapport au temps le membre de droite de ce résultat et par rapport à  $\varphi$  le membre de gauche, on obtient :

$$C (t - t_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

où  $\rho(\varphi)$  est l'équation de la courbe parcourue, et  $\varphi_0$  la valeur de  $\varphi$  au temps  $t_0$ .

**C32. Le vecteur accélération en coordonnées sphériques.** On a d'abord :

$$\vec{u}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y + \cos\theta \vec{u}_z$$

Donc, puisque  $\vec{u}_r$  est une fonction de  $(\theta, \varphi)$  :

$$\begin{aligned} d\vec{u}_r = \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} d\varphi = & (\cos\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{u}_y - \sin\theta \vec{u}_z) d\theta \\ & + (-\sin\theta \sin\varphi \vec{u}_x + \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_y) d\varphi \end{aligned}$$

C'est-à-dire, après avoir reconnu les vecteurs  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  dans cette expression :

$$d\vec{u}_r = \vec{u}_\theta d\theta + \vec{u}_\varphi \sin\theta d\varphi$$

D'où un premier résultat :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin\theta \vec{u}_\varphi$$

Ce premier résultat suffit à calculer le vecteur vitesse en coordonnées sphériques. En effet, puisque  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$ , on a :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\varphi} \sin\theta \vec{u}_\varphi$$

Ce qui est bien conforme au même calcul réalisé autrement au **C21**.

• A partir des formules inverses obtenues au **C19** qui fournissent  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$  dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ , on a facilement :

$$\vec{u}_z = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta$$

Puis :

$$\vec{u}_\rho = \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y = \dots = \sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta$$

Cela étant, le vecteur  $\vec{u}_\theta$  s'écrit :

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{u}_y - \sin\theta \vec{u}_z$$

Sa différentielle est donc :

$$d\vec{u}_\theta = \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \varphi} d\varphi = (-\sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x - \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y - \cos\theta \vec{u}_z) d\theta \\ + (-\cos\theta \sin\varphi \vec{u}_x + \cos\theta \cos\varphi \vec{u}_y) d\varphi$$

qui peut s'écrire :

$$d\vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_\rho d\theta - \cos\theta \vec{u}_z d\theta + \cos\theta \vec{u}_\varphi d\varphi$$

D'où, après avoir remplacé  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_z$  par leurs expressions dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos\theta \vec{u}_\varphi$$

Quant au vecteur  $\vec{u}_\varphi$  qui s'écrit :

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_y$$

Sa différentielle est simplement :

$$d\vec{u}_\varphi = \frac{\partial \vec{u}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi = -d\varphi \cos\varphi \vec{u}_x - d\varphi \sin\varphi \vec{u}_y = -d\varphi \vec{u}_\rho$$

D'où sa dérivée temporelle dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$  que nous regroupons avec les résultats précédents :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin\theta \vec{u}_\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos\theta \vec{u}_\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \sin\theta \vec{u}_r - \dot{\varphi} \cos\theta \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Le vecteur accélération en coordonnées sphériques est alors :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\varphi} \sin\theta \vec{u}_\varphi)$$

Ce qui donne, tout calcul fait :

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)] \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta) \vec{u}_\theta \\ + (2\dot{r}\dot{\varphi} \sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta + r\ddot{\varphi} \sin\theta) \vec{u}_\varphi$$

## CHAPITRE 6

**C35. Spirale logarithmique.** L'équation de la courbe est, après avoir éliminé le temps des équations horaires :

$$\rho(\varphi) = \rho_0 \exp\{-(\varphi - \phi)/\omega T\}$$

• Le rayon vecteur est :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho = \rho_0 \exp(-t/T) \vec{u}_\rho$$

D'où le vecteur vitesse, compte tenu du fait que  $\dot{\varphi} = \omega$  :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \rho_0 \exp(-t/T) \left[ -\frac{1}{T} \vec{u}_\rho + \omega \vec{u}_\varphi \right]$$

et sa norme :

$$\|\vec{v}\| = v = \frac{\rho_0 \exp(-t/T)}{T} \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\rho_0 \exp(-t/T)}{T^2} \{ (1 - \omega^2 T^2) \vec{u}_\rho - 2 \omega T \vec{u}_\varphi \}$$

Et sa norme :

$$\|\vec{a}\| = a = \frac{\rho_0 \exp(-t/T)}{T^2} (1 + \omega^2 T^2)$$

• Le cosinus de l'angle  $\lambda_0$  entre  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  est déterminé par :

$$\cos \lambda_0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{v}\| \|\vec{a}\|} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

• Le vecteur  $\vec{t}$  de la base de Serret-Frenet  $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$  est par définition :

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} [-\vec{u}_\rho + \omega T \vec{u}_\varphi]$$

On obtient le vecteur  $\vec{n}$  grâce à la relation :

$$\vec{n} = \frac{d\vec{t}/dt}{\|d\vec{t}/dt\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} [-\omega T \vec{u}_\rho - \vec{u}_\varphi]$$

Et le vecteur  $\vec{b}$  :

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} = \vec{u}_z$$

où  $\vec{u}_z$  vient compléter la base  $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi\}$ .

- Pour déterminer le rayon de courbure  $R_c$  il faut obtenir la composante normale de l'accélération qui vaut  $v^2/R_c$  :

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{R_c}$$

D'où :

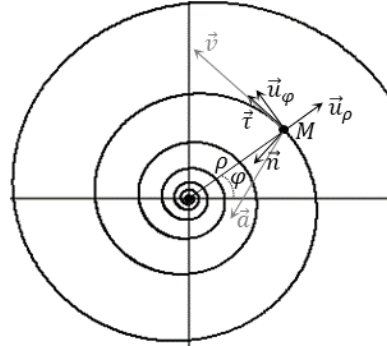
$$R_c = \frac{v^2}{\vec{a} \cdot \vec{n}} = \frac{\rho_0 \exp(-t/T)}{\omega T} \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

La composante normale de l'accélération est :

$$a_n = \vec{a} \cdot \vec{n} = \frac{\rho_0 \exp(-t/T)}{T} \omega \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Et la composante tangentielle :

$$a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = -\frac{\rho_0 \exp(-t/T)}{T^2} \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \left( = \frac{dv}{dt} \right)$$



**C36. Hélice spirale.** Les vecteurs vitesse et accélération de l'hélice spirale ont été calculés au **C28** et l'hélice est représentée sur la figure 49 du chapitre 11 :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \exp(-t/T) \left[ -\frac{\rho_0}{T} \vec{u}_\rho + \rho_0 \omega \vec{u}_\phi + \frac{h}{T} \vec{u}_z \right]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \exp(-t/T) \left\{ \rho_0 \left( \frac{1}{T^2} - \omega^2 \right) \vec{u}_\rho - 2 \frac{\rho_0 \omega}{T} \vec{u}_\phi - \frac{h}{T^2} \vec{u}_z \right\}$$

Le vecteur  $\vec{\tau}$  de la base de Serret-Frenet  $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$  est ici :

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 (1 + \omega^2 T^2) + h^2}} \left[ -\rho_0 \vec{u}_\rho + \rho_0 \omega T \vec{u}_\phi + h \vec{u}_z \right]$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est alors :

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}/dt}{\|d\vec{\tau}/dt\|} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \left[ \omega T \vec{u}_\rho + \vec{u}_\phi \right]$$

Et le vecteur  $\vec{b}$  :

$$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 (1 + \omega^2 T^2) + h^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \left[ -h \vec{u}_\rho + h \omega T \vec{u}_\phi - \rho_0 (1 + \omega^2 T^2) \vec{u}_z \right]$$

- La composante tangentielle de l'accélération est :

$$a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = \frac{dv}{dt} = -\frac{\exp(-t/T)}{T^2} \sqrt{\rho_0^2 (1 + \omega^2 T^2) + h^2}$$

La composante normale de l'accélération est donc (puisque  $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$ ) :

$$a_n = \vec{a} \cdot \vec{n} = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \rho_0 \omega \frac{\exp(-t/T)}{T} \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

D'où le rayon de courbure :

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\omega \exp(-t/T)}{\rho_0 T} \frac{\rho_0^2 (1 + \omega^2 T^2) + h^2}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

Pour calculer le rayon de torsion,  $R_T$ , on pensera à utiliser la relation qui le définit :  $d\vec{b}/ds = -\vec{n}/R_T$ , avec  $ds = v dt$  ; on obtient d'abord :

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \dots = -\frac{h \omega}{\sqrt{\rho_0^2 (1 + \omega^2 T^2) + h^2}} \vec{n}$$

D'où :

$$R_T = \frac{v \sqrt{\rho_0^2 (1 + \omega^2 T^2) + h^2}}{h \omega} = \dots = \frac{\exp(-t/T)}{h \omega T} (\rho_0^2 (1 + \omega^2 T^2) + h^2)$$

On remarquera que le rapport  $R_T/R_c$  satisfait au théorème de Lancret **C38**.

• La longueur de l'hélice spirale depuis l'origine jusqu'à un certain point  $M$  de la courbe, d'abscisse curviligne  $s$  est :

$$\ell(t) = -\int_{s(\infty)=0}^{s(t)} ds = -\int_{\infty}^t v(t) dt$$

où le signe moins provient de ce que le point  $M$  parcourt la spirale dans le sens rentrant. D'où :

$$\ell(t) = -\int_{\infty}^t v(t) dt = \sqrt{\rho_0^2 (1 + \omega^2 T^2) + h^2} \exp(-t/T)$$

c'est-à-dire, en s'affranchissant du paramètre temps, que la longueur de l'hélice spirale depuis l'origine jusqu'à un point  $M$  de la courbe est :

$$\ell(\rho, z) = \sqrt{\rho^2 (1 + \omega^2 T^2) + z^2}$$

## CHAPITRE 7

**C39.  $\mathcal{R}'$  en mouvement rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , transformation de Galilée, principe de relativité.**  $\mathcal{R}'$  est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , donc :

$$\vec{v}_e = \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge \overline{O'M} = \overline{Cte} = \vec{V}$$

C'est-à-dire que  $\vec{\omega} = \vec{0}$  et que la vitesse de  $O'$  relativement à  $O$  est constante. L'accélération d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  est donc :

$$\vec{a}_e = \left. \frac{d^2\overline{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'M}) = \vec{0}$$

• Dans ces conditions, la loi de transformation des vitesses ( $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ ) s'écrit ici à chaque instant :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

Où  $\vec{v}$  est la vitesse du point matériel vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  et  $\vec{v}'$  sa vitesse vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ . La loi de transformation des accélérations ( $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ ) devient quant à elle à chaque instant :

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

La loi de transformation des positions est à chaque instant :

$$\overline{OM} = \vec{r} = \overline{OO'} + \overline{O'M} = \overline{OO'} + \vec{r}'$$

Pour obtenir les équations paramétriques de  $M$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$ , il faut donc connaître l'équation horaire de  $O'$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ . Or, nous savons que :

$$\vec{v}_e = \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{V}$$

Donc, en intégrant par rapport au temps, on obtient :

$$\overline{OO'} = \vec{V} t + \overline{Cte}$$

Où  $\overline{Cte}$  est un vecteur constant. Ce vecteur est obtenu d'après les conditions initiales de l'énoncé :  $\overline{Cte} = \overline{OO'}(t = 0)$ .

On aura donc :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \overline{OO'}(t)$$

C'est-à-dire :

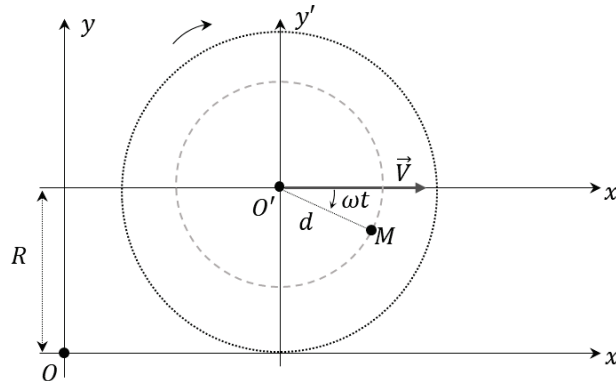
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - V_x t - X_0 \\ y'(t) = y(t) - V_y t - Y_0 \\ z'(t) = z(t) - V_z t - Z_0 \end{cases}$$

- Si on fait le choix indiqué dans l'énoncé, on obtient :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - V t \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = z(t) \\ t' = t \end{cases}$$

Où l'on a rajouté dans la transformation l'hypothèse classique :  $t' = t$ .

**C40. Trochoïde et cycloïde.** Schéma du problème :



D'après la loi de transformation des positions :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'$$

Donc :

$$\vec{r}(t) = (d \cos \omega t + Vt) \vec{u}_x + (R - d \sin \omega t) \vec{u}_y$$

- Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  on aura le vecteur vitesse du point  $M$  :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-d \omega \sin \omega t + V) \vec{u}_x - d \omega \cos \omega t \vec{u}_y$$

et sa norme :

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{V^2 + \omega^2 d^2 - 2 V \omega d \sin \omega t}$$

Son vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -d \omega^2 \cos \omega t \vec{u}_x + d \omega^2 \sin \omega t \vec{u}_y$$

Et sa norme :

$$\|\vec{a}\| = a = d \omega^2$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , ces quantités seront :

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = -d \omega \sin\omega t \vec{u}_x - d \omega \cos\omega t \vec{u}_y ; \|\vec{v}'\| = v' = d \omega$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = -d \omega^2 \cos\omega t \vec{u}_x + d \omega^2 \sin\omega t \vec{u}_y ; \|\vec{a}'\| = a' = d \omega^2$$

Il est clair que le point  $M$  effectue un mouvement circulaire uniforme de centre  $O'$  dans ce référentiel.

• Si on considère que la roue ne glisse pas sur le sol, alors la distance parcourue par  $O'$  doit être égale au périmètre de la roue lorsque celle-ci a réalisé un tour. Comme le tour est réalisé pendant la durée  $T = 2\pi/\omega$  et que  $O'$  se déplace à la vitesse  $V$ , il faut :

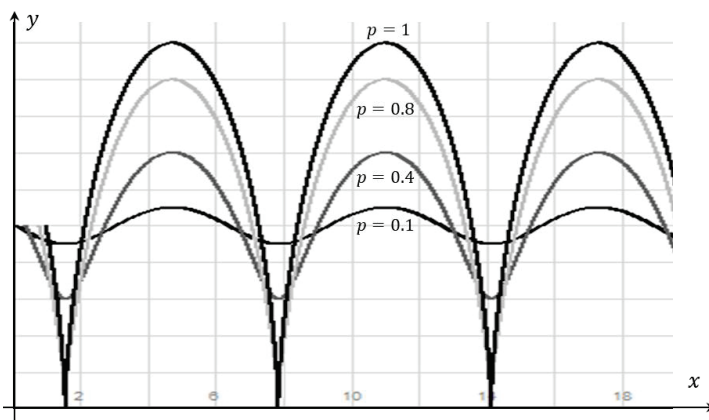
$$V T = 2\pi R \Leftrightarrow V = R \omega$$

En injectant cette valeur de  $V$  dans l'expression de  $\vec{r}(t)$  obtenue ci-dessus, on obtient les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = d \cos\omega t + R \omega t \\ y(t) = R - d \sin\omega t \end{cases}$$

C'est-à-dire après avoir posé :  $\theta = \omega t$  et  $p = d/R$ .

$$\begin{cases} x = R \{\theta + p \cos\theta\} \\ y = R \{1 - p \cos\theta\} \end{cases}$$



**C41.  $\mathcal{R}'$  en mouvement circulaire uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , spirale d'Archimède.** Puisqu'il s'agit d'une rotation d'angle  $\alpha = \omega t$  dans le plan  $xOy$  d'après l'énoncé, on déduit :

$$\begin{cases} \vec{u}_{x'} = \cos\alpha \vec{u}_x + \sin\alpha \vec{u}_y \\ \vec{u}_{y'} = -\sin\alpha \vec{u}_x + \cos\alpha \vec{u}_y \\ \vec{u}_{z'} = \vec{u}_z \end{cases}$$

• La vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  est :

$$\vec{v}_e = \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge \overline{O'M} \stackrel{O' \equiv O}{=} \vec{\omega} \wedge \overline{O'M} = -\omega y' \vec{u}_{x'} + \omega x' \vec{u}_{y'}$$

Ou encore, dans la base  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$  :

$$\vec{v}_e = -\omega (y' \cos\alpha + x' \sin\alpha) \vec{u}_x + \omega (x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) \vec{u}_y$$

On calcule ensuite l'accélération d'entraînement par la méthode du point coïncident :

$$\vec{a}_e = \left. \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right|_{\mathcal{R}, \text{ fixe } / \mathcal{R}'}$$

C'est-à-dire que l'on calcule la dérivée temporelle de  $\vec{v}_e$  en maintenant fixe les coordonnées de  $M$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  :

$$\vec{a}_e = -\omega^2 (x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) \vec{u}_x - \omega^2 (x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) \vec{u}_y$$

On vérifie que l'on retrouve bien le même résultat qu'en calculant directement :

$$\vec{a}_e = \left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'M}) \stackrel{\text{ici}}{=} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'M})$$

• La loi de transformation des vitesses est  $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ , soit ici :

$$\vec{v} = \vec{v}' - \omega (y' \cos\alpha + x' \sin\alpha) \vec{u}_x + \omega (x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) \vec{u}_y$$

Avec :  $\vec{v}' = \dot{x}' \vec{u}_{x'} + \dot{y}' \vec{u}_{y'} + \dot{z}' \vec{u}_{z'}$ , qu'il reste à écrire dans la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ . Tout calcul fait, on obtient ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' \cos\alpha - \dot{y}' \sin\alpha - \omega (y' \cos\alpha + x' \sin\alpha) \\ \dot{y} = \dot{x}' \sin\alpha + \dot{y}' \cos\alpha + \omega (x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) \\ \dot{z} = \dot{z}' \end{cases}$$

La loi de transformation des accélérations,  $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ , demande de calculer l'accélération de Coriolis  $\vec{a}_c$  :

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}' = -2 \omega \dot{y}' \vec{u}_{x'} + 2 \omega \dot{x}' \vec{u}_{y'}$$

Résultat qu'il faut transcrire dans la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ , de même que l'accélération relative  $\vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{u}_{x'} + \ddot{y}'\vec{u}_{y'} + \ddot{z}'\vec{u}_{z'}$ . Le calcul donne finalement :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x}' \cos \alpha - \dot{y}' \sin \alpha - 2 \omega (\dot{y}' \cos \alpha + \dot{x}' \sin \alpha) - \omega^2 (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) \\ \ddot{y} = \dot{x}' \sin \alpha + \dot{y}' \cos \alpha + 2 \omega (\dot{x}' \cos \alpha - \dot{y}' \sin \alpha) - \omega^2 (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) \\ \ddot{z} = \ddot{z}' \end{cases}$$

• Si  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires du point  $M$  relativement au référentiel  $\mathcal{R}$ , alors on a :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r = r \cos \theta \vec{u}_x + r \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{v} = d\overrightarrow{OM}/dt = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \vec{u}_x + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \vec{u}_y \end{cases}$$

Or, lorsque  $\overrightarrow{O'M} = x'(t) \vec{u}_{x'}$ , avec  $x'(t) > 0$ , on a d'une part :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \underset{O' \equiv O}{=} \overrightarrow{O'M} = x' \cos \alpha \vec{u}_x + x' \sin \alpha \vec{u}_y$$

Et d'autre part, d'après la transformation des vitesses ci-dessus (avec  $y' = z' = 0$ ) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' \cos \alpha - x' \omega \sin \alpha \\ \dot{y} = \dot{x}' \sin \alpha + x' \omega \cos \alpha \end{cases}$$

Ce qui montre que l'on peut identifier  $r$  à  $x'$ ,  $\theta$  à  $\alpha = \omega t$  et que les vecteurs  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}\}$  s'identifient à la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ .

• Dans ce cas, on peut écrire la vitesse d'entraînement calculée précédemment sous la forme ( $y' = 0$ ) :

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \omega x' \vec{u}_{y'} = r \omega \vec{u}_\theta = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

La vitesse relative :

$$\vec{v}' = \dot{x}' \vec{u}_{x'} = \dot{r} \vec{u}_r$$

Et la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a = \vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}' = \vec{v}_e + \vec{v}' = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Ainsi, la composante radiale du vecteur vitesse (absolue) du point matériel est la vitesse d'entraînement du référentiel  $\mathcal{R}'$  et sa composante orthoradiale la vitesse relative de ce point matériel.

Concernant les accélérations, on a, selon la même philosophie et d'après les résultats qui précèdent :

$$\vec{a}_e = -\omega^2 x' \cos\alpha \vec{u}_x - \omega^2 x' \sin\alpha \vec{u}_y = -\omega^2 r \vec{u}_r = -r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

$$\vec{a}_c = 2 \omega \dot{x}' \vec{u}_y = 2 \dot{\theta} \dot{r} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_r = \ddot{x}' \vec{u}_x = \ddot{r} \vec{u}_r$$

Et enfin :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \ddot{r} \vec{u}_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + 2 \dot{\theta} \dot{r} \vec{u}_\theta$$

Les termes qui composent l'expression de l'accélération en coordonnées polaires viennent donc d'être interprétés comme provenant d'un changement de référentiel. Le terme  $r\dot{\theta}$  n'apparaît pas dans ce résultat car nous avons supposé, pour simplifier les calculs, que  $\omega = \dot{\theta}$  était constant. On pourra vérifier que ce terme surviendra dans l'expression de  $\vec{a}_e$  si on suppose  $\omega = \omega(t) = \dot{\theta}(t)$ .

En conclusion, la base locale  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  peut être identifiée à la base fixe d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  doué d'un vecteur rotation  $\vec{\omega}(t)$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$ .

• La loi horaire du mouvement de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}'$  correspond maintenant à un mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe  $Ox'$  :  $x'(t) = v_0 t$ . D'après l'interprétation qui précède, le mouvement de  $M$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  exprimé dans le système de coordonnées polaires est :

$$\begin{cases} r = x' = v_0 t \\ \theta = \alpha = \omega t \end{cases}$$

En posant :  $p = v_0/\omega$ , l'équation de la trajectoire est alors :

$$r = p \theta$$

Ainsi, vis-à-vis du référentiel  $\mathcal{R}$ , le point  $M$  réalise une spirale appelée : spirale d'Archimède de paramètre  $p$ . Le vecteur vitesse du mouvement de  $M$  sur cette spirale d'Archimède est :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 t \vec{u}_r) = v_0 \vec{u}_r + v_0 \omega t \vec{u}_\theta$$

et sa norme :

$$\|\vec{v}\| = v = v_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -v_0 \omega^2 t \vec{u}_r + 2v_0 \omega \vec{u}_\theta$$

et sa norme :

$$\|\vec{a}\| = a = v_0 \omega \sqrt{2 + \omega^2 t^2}$$

Le vecteur  $\vec{\tau}$  de la base de Serret Frenet est alors :

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} [\vec{u}_r + \omega t \vec{u}_\theta]$$

Le vecteur  $\vec{n}$  :

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}/dt}{\|d\vec{\tau}/dt\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} [-\omega t \vec{u}_r + \vec{u}_\theta]$$

Et le vecteur  $\vec{b}$  :

$$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{u}_z$$

Ce dernier résultat exprimant que la trajectoire se réalise dans le plan  $xOy$ .

La composante tangentielle de l'accélération est :

$$a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 \omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$$

La composante normale de l'accélération est donc (puisque  $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$ ) :

$$a_n = \vec{a} \cdot \vec{n} = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = v_0 \omega \sqrt{\frac{2 + 2\omega^2 t^2 + \omega^4 t^4}{1 + \omega^2 t^2}}$$

D'où le rayon de courbure :

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0}{\omega} (1 + \omega^2 t^2) \sqrt{\frac{1 + \omega^2 t^2}{2 + 2\omega^2 t^2 + \omega^4 t^4}}$$

• Lorsque  $\theta = 2\pi n$ , le temps  $t$  prend la valeur  $t = 2\pi n/\omega$ . Or, la longueur de la spirale depuis l'origine jusqu'à un certain point  $M$  de la courbe, d'abscisse curviligne  $s$  est :

$$\ell(t) = \int_{s(0)=0}^{s(t)} ds = \int_0^t v(t) dt$$

Donc la longueur de la spirale au bout d'un nombre  $n$  de tours à partir du point  $O$  est :

$$\ell(n) = \int_0^{2\pi n/\omega} v(t) dt = v_0 \int_0^{2\pi n/\omega} \sqrt{1 + \omega^2 t^2} dt \underset{u=\omega t}{=} \frac{v_0}{\omega} \int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + u^2} du$$

On arrive ainsi à la formule :

$$\ell(n) = p \left[ n \pi \sqrt{1 + 4\pi^2 n^2} + \frac{1}{2} \ln \left( 2\pi n + \sqrt{1 + 4\pi^2 n^2} \right) \right]$$

où  $p = v_0/\omega$  est le paramètre de la spirale. Lorsque  $n$  est très grand, cette formule se simplifie et on obtient, en négligeant le logarithme :

$$\ell(n) \xrightarrow{n \text{ grand}} 2p n \pi^2$$

## CHAPITRE 10

**C49 : interaction gravitationnelle, ordres de grandeur.** La force d'interaction gravitationnelle  $F$  entre deux objets éloignés d'une distance  $r$  assimilables à des points matériels de masses  $m_1$  et  $m_2$  est estimée grâce à la relation :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle :  $G = 6.714 \times 10^{-11} \text{ USI}$ .

Pour les deux galaxies, on trouve ainsi :

$$F \cong 1.52 \times 10^{27} \text{ N}$$

La période de révolution de la galaxie du Sculpteur peut être estimée avec la formule de Kepler puisque le rapport des masses,  $M_{\text{Scul}}/M_{\text{Voie Lactée}} \cong 0.026$ , est suffisamment petit. On trouve alors :

$$T \cong 1.45 \times 10^{19} \text{ s} = 459 \text{ Milliards d'années}$$

Soit plus de 30 fois l'âge de l'univers !...

Puisqu'il s'agit d'un mouvement circulaire uniforme supposé, la vitesse orbitale de Sculptor est alors estimée dans ce modèle grossier à :

$$v = r \omega = \frac{2\pi r}{T} \cong 44 \text{ km/s}$$

L'ordre de grandeur de cette vitesse est à peu près cohérent avec la vitesse radiale de Sculptor qui est estimée à  $243 \text{ km/s}$  grâce à la loi de Hubble.

• Dans le cas de la Terre et du Soleil, les mêmes calculs donnent cette fois :

$$F \cong 3.44 \times 10^{22} \text{ N}$$

$$T \cong 3.155 \times 10^7 \text{ s} = 1 \text{ an}$$

$$v \cong 29.8 \text{ km/s}$$

- Pour les deux boules en acier, on a :

$$F \cong 6.67 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$T \cong 2.43 \times 10^4 \text{ s} = 6 \text{ h } 45 \text{ mn}$$

$$v \cong 0.26 \text{ mm/s}$$

- Pour un électron et un proton :

$$F \cong 3.62 \times 10^{-47} \text{ N}$$

$$T \cong 7.26 \times 10^3 \text{ s} \cong 2 \text{ h}$$

$$v \cong 0.46 \times 10^{-3} \text{ \AA/s}$$

- Dans ce dernier cas, les deux particules possèdent une charge électrique et interagissent donc aussi avec la force de Coulomb :

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ USI}$ .

On trouve :

$$F_C \cong 0.82 \times 10^{-7} \text{ N}$$

C'est-à-dire que le rapport entre la force gravitationnelle et la force de Coulomb est de l'ordre de :  $F/F_C \cong 4.41 \times 10^{-40}$ . Compte tenu de cette observation, il est bien évident que le calcul de  $T$  et de  $v$  en supposant une orbite fondée sur des lois relatives à la gravitation n'a pas de sens.

**C50 : chute libre verticale.** La seule force qui agit sur le point matériel est l'action du champ de pesanteur terrestre qui lui confère un poids :  $m \vec{g}_0 = -m g_0 \vec{u}_z$  puisque l'axe  $Oz$  est orienté vers le haut. Le point  $M$  étant repéré par sa cote  $z$ , on a :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = z \vec{u}_z$$

D'où les vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{z} \vec{u}_z$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit ici :

$$m \vec{a} = m \vec{g}_0 \Leftrightarrow m \ddot{z} \vec{u}_z = -m g_0 \vec{u}_z$$

Ce qui impose :  $\ddot{z}(t) = -g_0$  : l'accélération  $\vec{a}$  du point matériel en chute libre est égale à l'accélération  $\vec{g}_0$  du champ de pesanteur.

• Pour obtenir la vitesse  $\dot{z}$  du point matériel, il suffit d'intégrer :

$$\dot{z}(t) = \int \ddot{z}(t) dt = - \int g_0 dt = -g_0 t + C_1$$

où  $C_1$  est une constante à déterminer par les conditions initiales du problème qui sont ici :  $\dot{z}(t = 0) = 0$ , ce qui impose :  $C_1 = 0$ . D'où :

$$\dot{z}(t) = -g_0 t$$

Pour obtenir  $z$ , on intègre à nouveau :

$$z(t) = \int \dot{z}(t) dt = -g_0 \int t dt = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + C_2$$

où  $C_2$  est une constante à déterminer par les conditions initiales du problème qui sont ici :  $z(t = 0) = H$ , ce qui impose :  $C_2 = H$ . D'où :

$$z(t) = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + H$$

Le temps  $t_c$  est tel que :

$$z(t_c) = 0 = -\frac{1}{2} g_0 t_c^2 + H$$

Soit :

$$t_c = \sqrt{2H/g_0}$$

À cet instant, la vitesse du point matériel (ou plutôt sa composante sur l'axe  $Oz$ ) est :

$$\dot{z}(t_c) = -g_0 t_c = -\sqrt{2 H g_0}$$

Elle est bien sûr dirigée vers le sol, ce qui explique le signe négatif. Si  $H = 2 \text{ m}$ , avec  $g_0 \cong 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , on trouve  $t_c \cong 0.64 \text{ s}$  et  $|\dot{z}(t_c)| = 6.26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pour tracer les courbes  $\ddot{z}(t)$ ,  $\dot{z}(t)$  et  $z(t)$ , on pourra utiliser une cote adimensionnée  $Z = z/H$  et un temps adimensionné<sup>1</sup> (obtenu en regardant l'expression de  $Z(t)$ ) :  $T = \sqrt{H/g_0}$ .

---

<sup>1</sup> On peut aussi choisir  $t_c$  comme unité de temps.

• L'équation fondamentale de la dynamique ne change pas sous l'effet des conditions initiales ; on a toujours :

$$\ddot{z}(t) = -g_0$$

Par contre, la constante  $C_1$  survenue lors du calcul de  $\dot{z}$  change de valeur puisque maintenant :  $\dot{z}(t=0) = V$ . Ce qui entraîne cette fois :  $C_1 = V$  et donc :

$$\dot{z}(t) = -g_0 t + V$$

En intégrant, on obtient :

$$z(t) = -\frac{1}{2}g_0 t^2 + V t + C_2$$

La constante  $C_2$  prend encore la valeur  $H$  puisque l'on a encore :  $z(t=0) = H$ , d'où :

$$z(t) = -\frac{1}{2}g_0 t^2 + V t + H$$

À l'instant  $t_c$ ,  $z(t_c) = 0$ , donc  $t_c$  est solution de l'équation du second degré :

$$-\frac{1}{2}g_0 t_c^2 + V t_c + H = 0$$

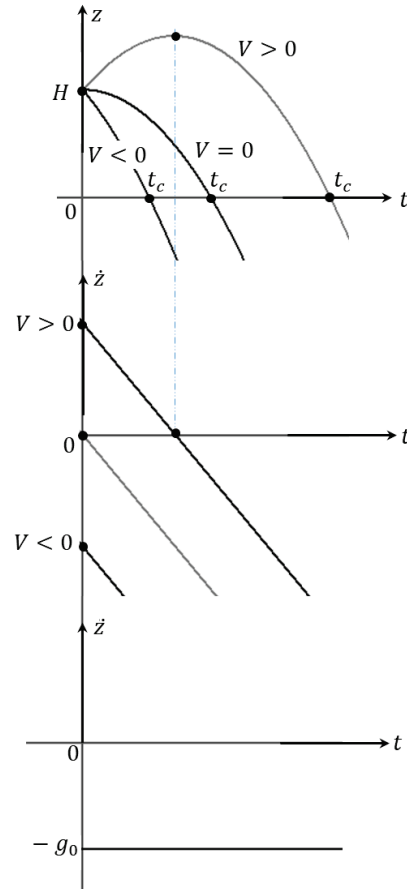
On obtient deux solutions possibles :

$$t_c = \frac{V \pm \sqrt{V^2 + 2g_0 H}}{g_0}$$

Mais  $t_c$  doit être positif puisque la chute au sol se produit après le temps initial 0, c'est donc le signe « + », quel que soit le signe de  $V$ , qu'il faut prendre pour solution physique à la question posée.

À cet instant  $t_c$ , la valeur de  $\dot{z}$  est :

$$\dot{z}(t_c) = -g_0 t_c + V = -\sqrt{V^2 + 2H g_0}$$



**C51 : Le plan incliné.** Si on néglige les forces de frottement, alors la réaction du plan incliné sous l'effet du poids du point matériel n'influe pas sur le mouvement de ce dernier le long de l'axe  $Ox$  de ce plan incliné. Cette réaction doit donc être perpendiculaire à l'axe  $Ox$  ; nous l'écrivons :  $\vec{N} = N \vec{u}_y$ .

Compte tenu de la géométrie du problème (figure 46), le poids du point matériel s'écrit, dans la base  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$  :  $m\vec{g}_0 = m g_0 \sin\alpha \vec{u}_x - m g_0 \cos\alpha \vec{u}_y$ .

Ce point matériel est repéré par son abscisse  $x$  le long de  $Ox$  :  $\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x$ . Son vecteur vitesse est :  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$ , et son vecteur accélération :  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$ .

L'équation de la dynamique est ici :  $\vec{N} + m\vec{g}_0 = m\vec{a}$ , c'est-à-dire, après l'avoir projetée sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = m g_0 \sin \alpha \\ 0 = N - m g_0 \cos \alpha \end{cases}$$

La réaction du support vaut donc :  $N = m g_0 \cos \alpha$ , et l'accélération du point matériel est constante et vaut :  $\ddot{x} = g_0 \sin \alpha$ . Ainsi, le rôle du plan incliné sans frottement est de produire une « chute libre » dont l'accélération est modulée par le sinus de l'angle d'inclinaison du plan. De ce résultat on tire :

$$\dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t) dt = \int g_0 \sin \alpha dt = g_0 t \sin \alpha + C_1$$

Puisque  $\dot{x}(t=0) = v_0$ , alors  $C_1 = v_0$  et :

$$\dot{x}(t) = g_0 t \sin \alpha + v_0$$

En intégrant une seconde fois, on obtient :

$$x(t) = \int \dot{x}(t) dt = \int (g_0 t \sin \alpha + v_0) dt = \frac{1}{2} g_0 t^2 \sin \alpha + v_0 t + C_2$$

Avec  $C_2 = 0$  puisque  $x(t=0) = 0$ . D'où :

$$x(t) = \frac{1}{2} g_0 t^2 \sin \alpha + v_0 t$$

• Si le point  $O$  est à la hauteur  $H$  du sol, alors puisque le plan incliné fait un angle  $\alpha$  avec le sol, le point  $M$  aura atteint le sol lorsque son abscisse prendra la valeur  $H / \sin \alpha$ . Le temps  $t_S$  est donc tel que :

$$H / \sin \alpha = \frac{1}{2} g_0 t_S^2 \sin \alpha + v_0 t_S$$

C'est une équation du second degré en  $t_S$  dont la solution positive, seule acceptable est :

$$t_S = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 g_0 H}}{g_0 \sin \alpha}$$

À cet instant, la vitesse du point matériel est :

$$\dot{x}(t_S) = g_0 \sin \alpha t_S + v_0 = \sqrt{v_0^2 + 2 H g_0}$$

C'est-à-dire la même vitesse que pour une chute libre avec vitesse initiale  $v_0$  (cf **C50**).

• Si on prend en compte un frottement solide, alors la réaction du plan incliné s'écrira cette fois :  $\vec{R} = \vec{T}' + \vec{N} = -T' \vec{u}_x + N \vec{u}_y$ . C'est-à-dire, compte tenu de la loi de Coulomb sur le frottement ( $T' = f N$  avec  $f > 0$ ) :

$$\vec{R} = -f N \vec{u}_x + N \vec{u}_y$$

L'équation de la dynamique est maintenant :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = m g_0 \sin \alpha - f N \\ 0 = N - m g_0 \cos \alpha \end{cases}$$

La valeur de  $N$  n'a pas changé par rapport au cas sans frottement. Par contre, l'accélération du point matériel devient :

$$\ddot{x} = g_0 \sin \alpha - f \frac{N}{m} = g_0 \sin \alpha - f g_0 \cos \alpha = g_0 (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

L'accélération sous frottement reste constante dans ce modèle et plus faible bien sûr que sans frottement. Toutefois, il est clair que cette accélération ne peut pas être négative (sans quoi le point  $M$  remonterait le plan incliné !) : il faut donc que le coefficient de frottement qui a été introduit soit tel que :

$$0 < f < \tan \alpha$$

pour que cette modélisation d'un mouvement avec frottement constant soit plausible.

• Une première intégration de  $\ddot{x}$  fournira  $\dot{x}$ , et une seconde fournira  $x$ . On trouve ainsi, compte tenu des conditions initiales :

$$\dot{x}(t) = g_0 t (\sin \alpha - f \cos \alpha) + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g_0 t^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha) + v_0 t$$

Le temps  $t'_S$  au bout duquel le point matériel atteint le sol obéit maintenant à l'équation du second degré :

$$H / \sin \alpha = \frac{1}{2} g_0 t'^2_S (\sin \alpha - f \cos \alpha) + v_0 t'_S$$

Dont la solution positive est :

$$t'_S = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 g_0 H (1 - f \cot \alpha)}}{g_0 (\sin \alpha - f \cos \alpha)}$$

Enfin, la vitesse du point matériel à cet instant est :

$$\dot{x}(t'_S) = g_0 (\sin\alpha - f \cos\alpha) t'_S + v_0 = \sqrt{v_0^2 + 2 H g_0 (1 - f \cot\alpha)}$$

**C53. Particule soumise à une force de frottement fluide.** Dans son mouvement le long de l'axe  $Ox$ , la particule est repérée par son abscisse  $x$  :  $\vec{OM} = x \vec{u}_x$ . Sa vitesse est donc :  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$ , et son accélération :  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$ .

La seule force du problème est la force de frottement fluide :  $\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$ . L'équation de la dynamique conduit donc à l'équation différentielle :

$$m \vec{a} = \vec{f} \Leftrightarrow m \ddot{x} = -\alpha \dot{x}$$

En posant  $v_x = \dot{x}$ , l'équation différentielle devient :

$$m \dot{v}_x = -\alpha v_x$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre en  $v_x$  et se résoud par séparation des variables  $v_x$  et  $t$  après avoir écrit :  $\dot{v}_x = dv_x/dt$  :

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x \Leftrightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\alpha}{m} dt$$

Soit, en intégrant les deux membres de la dernière équation et en prenant l'exponentielle du résultat (voir Annexe 4) :

$$v_x(t) = C_1 \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)$$

Compte tenu de la condition initiale :  $C_1 = v_0$ . On peut aussi poser :  $\tau = m/\alpha$  puisque cette quantité apparaît comme un temps caractéristique du problème ; au temps  $t = 5\tau$ , la vitesse de la particule est devenue quasiment nulle.

En intégrant  $v_x(t)$ , on obtient :

$$x(t) = \int v_x(t) dt = v_0 \int \exp(-t/\tau) dt = -\tau v_0 \exp(-t/\tau) + C_2$$

Soit, compte tenu de la condition initiale :

$$x(t) = \tau v_0 (1 - \exp(-t/\tau))$$

• Pour le tracer des courbes  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$ , voir la solution du **C27**.

Au bout d'un temps infiniment long, nous savons déjà que la vitesse de la particule est devenue nulle. Sa position est alors un point  $M_\infty$  de l'axe  $Ox$  dont l'abscisse est :

$$x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tau v_0$$

C'est la distance que la particule aura parcourue depuis l'instant 0.

## CHAPITRE 11

**C54. Oscillateur harmonique : ressort horizontal.** Les autres forces qui agissent sur le point matériel sont : son poids et la réaction du support. Le poids  $\vec{P}$  du point matériel est perpendiculaire à l'axe  $OX$  sur lequel se produit son mouvement, de même que la réaction  $\vec{R}$  du support puisque le frottement est négligé : ces deux forces n'influencent donc pas sur le mouvement du point matériel.

• L'équation de la dynamique est ici :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

où  $\vec{F}$  est la force de rappel du ressort :  $\vec{F} = -k(X - L_v) \vec{u}_X$  (cf 48 chapitre 10). Si  $OY$  est l'axe perpendiculaire à  $OX$ , alors :  $\vec{P} = -m g_0 \vec{u}_Y$  et  $\vec{R} = R \vec{u}_Y$ .

Le point matériel est repéré par :  $\vec{OM} = X \vec{u}_X$  et on en déduit facilement ses vecteurs vitesse et accélération pour obtenir finalement les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m \ddot{X} = -k(X - L_v) \\ 0 = R - m g_0 \end{cases}$$

La seconde équation nous dit simplement que la réaction du support compense le poids du point matériel sur l'axe  $OY$ . La seconde équation est l'équation du mouvement proprement dite ; elle peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{X} + \omega^2 X = \omega^2 L_v$$

où l'on a posé :  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

• Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre en  $X$ , linéaire, à coefficients constants, avec un second membre constant. Cette équation satisfait donc aux conditions du théorème énoncé dans l'annexe 4 : sa solution est la somme de la solution générale  $X_G$  de l'équation sans second membre et d'une solution particulière  $X_P$  de l'équation avec second membre.

En supposant  $X_P$  constante, on voit immédiatement qu'une telle solution particulière peut être :  $X_P = L_v$ .

Pour obtenir  $X_G$ , il faut déterminer les solutions de l'équation caractéristique de notre équation qui est ici :  $r^2 + \omega^2 = 0$ , soit :  $r = \pm i \omega$ . La solution générale  $X_G$  s'écrit donc :

$$X_G = C_1 e^{i \omega t} + C_2 e^{-i \omega t}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes arbitraires. Comme notre solution mécanique est réelle, on préférera écrire :  $X_G = A \cos(\omega t + \phi)$  où  $A$  et  $\phi$  sont deux autres constantes (cf C8).

Finalement, la solution générale de notre équation différentielle s'écrit :

$$X = X_G + X_P = A \cos(\omega t + \phi) + L_v$$

On obtiendra  $\dot{X}$  en dérivant cette solution par rapport au temps. Après avoir tenu compte des conditions initiales, on obtient :  $A = X_0 - L_v$  et  $\phi = 0$ . D'où :

$$X(t) = (X_0 - L_v) \cos \omega t + L_v$$

• On voit que  $X$  oscille constamment autour de  $L_v$  avec une amplitude  $|X_0 - L_v|$  à la pulsation  $\omega$ , c'est-à-dire à la période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{m/k}$$

La pulsation  $\omega$  est la *pulsation propre* de l'oscillateur (le ressort), et  $T$  est sa *période propre*.

Pour le tracé des courbes, on adaptera la figure du **C23** en faisant  $\phi = 0$  et en faisant attention à ce que  $X$  oscille autour de  $L_v$  (et pas autour de 0 comme la figure du **C23**).

• D'après la définition de l'équilibre, on doit avoir, lorsque  $X = X_{eq}$  :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 0 = -k (X_{eq} - L_v) \\ 0 = R - m g_0 \end{cases}$$

La seconde équation ne fait que rappeler que  $R = m g_0$ , même à l'équilibre. La première impose :  $X_{eq} = L_v$ . Le point  $E$  de l'équilibre horizontal du ressort est donc l'extrémité droite du ressort (figure 42).

• En choisissant comme nouvelle origine la position  $E$  d'équilibre, on a maintenant :

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OE} = (X - X_{eq}) \vec{u}_X = (X - L_v) \vec{u}_X \stackrel{\text{énoncé}}{=} x \vec{u}_X$$

La vitesse et l'accélération du point matériel sont maintenant :  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_X$  et  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_X$ . Avec cette nouvelle origine, les équations du mouvement deviennent donc :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -k x \\ 0 = R - m g_0 \end{cases}$$

La seconde équation reste bien sûr inchangée, mais la première se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

avec :  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Il n'y a plus de second membre. La solution générale est donc ici :

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = A \cos(\omega t + \phi)$$

Avec les conditions initiales :  $x(t = 0) = X_0 - L_v$  et  $\dot{x}(t = 0) = 0$ , on conclut que :

$$x(t) = (X_0 - L_v) \cos \omega t$$

Il faut remarquer que l'on obtient bien la même solution que précédemment puisque :  $x(t) = X(t) - L_v$ .

**C55. Oscillateur harmonique : ressort vertical.** Le ressort du **C54** est maintenant vertical. Dans ce cadre (figure 43), les forces qui agissent sur le point matériel sont maintenant : son poids,  $\vec{P} = +m g_0 \vec{u}_x$ , et la force de rappel du ressort :  $\vec{F} = -k (X - L_v) \vec{u}_x$ . Ces deux forces influent directement sur le mouvement de ce ressort vertical.

• Le point matériel est repéré par :  $\overline{OM} = X \vec{u}_x$  et l'équation de la dynamique est ici :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement :

$$m \ddot{X} = -k (X - L_v) + m g_0 \Leftrightarrow \ddot{X} + \omega^2 X = L_v + m g_0/k$$

où l'on a posé :  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

• La solution générale à cette équation différentielle s'obtient comme au **C54** :

$$X = X_G + X_P = A \cos(\omega t + \phi) + L_v + m g_0/k$$

Et compte tenu des conditions initiales ( $X(t = 0) = X_0 > 0$  et  $\dot{X}(t = 0) = 0$ ), on obtient finalement :

$$X(t) = (X_0 - L_v - m g_0/k) \cos \omega t + L_v + m g_0/k$$

• On observe que le ressort oscille à la même pulsation  $\omega$  qu'au **C54** autour cette fois de la position :  $L_v + m g_0/k$ . On se référera encore à la figure du **C23** pour le tracer des courbes en l'adaptant.

• La position d'équilibre  $X_{eq}$  est obtenue en rendant nulle à chaque instant la somme des forces qui s'appliquent sur le point matériel :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$$

C'est-à-dire :

$$0 = m g_0 - k (X_{eq} - L_v) \Leftrightarrow X_{eq} = L_v + m g_0/k$$

Le point  $E$  de l'équilibre vertical du ressort est donc la position où la force de rappel du ressort compense exactement le poids du point matériel (figure 43).

• Comme au **C54**, en choisissant comme nouvelle origine la position  $E$  d'équilibre, on a maintenant :

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OE} = (X - X_{eq}) \vec{u}_X = (X - L_v - m g_0/k) \vec{u}_X \stackrel{\text{énoncé}}{=} x \vec{u}_X$$

La vitesse et l'accélération du point matériel sont alors :  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_X$  et  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_X$  ; et l'équation du mouvement devient :

$$m \ddot{x} = -k [(x + L_v + m g_0/k) - L_v] + m g_0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Avec toujours :  $\omega = \sqrt{k/m}$ . À nouveau, il n'y a plus de second membre comme au **C54**, et ici tout se passe comme si le poids du point matériel n'intervenait pas. En réalité, il intervient bien sûr, mais seulement au niveau de la position d'équilibre. La solution générale est donc ici :

$$x = C_1 e^{i \omega t} + C_2 e^{-i \omega t} = A \cos(\omega t + \phi)$$

Avec les conditions initiales :  $x(t=0) = X_0 - L_v - m g_0/k$  et  $\dot{x}(t=0) = 0$ , on conclut que :

$$x(t) = (X_0 - L_v - m g_0/k) \cos \omega t$$

**C56. Oscillateur harmonique amorti.** La position d'équilibre est telle que :

$$\vec{0} = \vec{f} + \vec{P} + \vec{F}$$

où  $\vec{P}$  est le poids du point matériel,  $\vec{P} = + m g_0 \vec{u}_X$ ,  $\vec{F}$  la force de rappel du ressort,  $\vec{F} = -k (X - L_v) \vec{u}_X$  (si  $X$  est la position du point matériel prise depuis le point d'attache du ressort) et  $\vec{f}$  la force de frottement fluide. Mais cette force,  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ , est nulle à l'équilibre. On obtient donc une équation similaire à celle du **C55** pour la position d'équilibre  $X_{eq}$  de l'oscillateur amorti. D'où :

$$X_{eq} = L_v + m g_0/k$$

• Lorsque le point matériel est en mouvement, la force de frottement fluide  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  n'est plus nulle. En prenant l'origine à la position  $E$  de l'équilibre (*id est* : en posant  $x = X - X_{eq}$ ) ; l'équation de la dynamique du problème est alors :

$$m \ddot{x} = -k [(x + L_v + m g_0/k) - L_v] + m g_0 - \alpha \dot{x}$$

Soit, après réorganisation :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

• On reconnaît en facteur de  $x$  la pulsation propre de l'oscillateur :  $\omega = \sqrt{k/m}$  ; et en facteur de  $\dot{x}$  un paramètre qui rend compte de la présence de la force frottement. On pose alors  $\tau = m/\alpha$ , un temps caractéristique de l'amortissement du mouvement qui se ferait sans la présence de ce terme.

• Cette équation différentielle possède différentes solutions possibles selon la valeur du paramètre sans dimensions  $\omega\tau$ . Les trois possibilités sont discutées dans l'annexe 4. Pour les conditions initiales  $x(t=0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t=0) = 0$ , on trouve après quelques calculs et en appelant  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique :

→ si  $\Delta > 0$ , c'est-à-dire si  $\omega\tau < 1/2$ , le régime de l'oscillateur est dit *apériodique* : le frottement fluide est plus important que la force de rappel du ressort et ce dernier n'a pas le temps d'osciller :

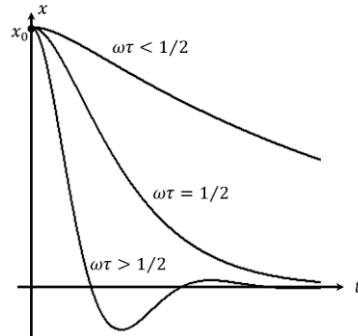
$$x(t) = \frac{x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}}{2\sqrt{1-4\omega^2\tau^2}} \left( \left(1 + \sqrt{1-4\omega^2\tau^2}\right) e^{+\frac{t\sqrt{(1-4\omega^2\tau^2)}}{2\tau}} + \left(\sqrt{1-4\omega^2\tau^2} - 1\right) e^{-\frac{t\sqrt{(1-4\omega^2\tau^2)}}{2\tau}} \right)$$

→ si  $\Delta < 0$ , c'est-à-dire si  $\omega\tau > 1/2$ , le régime de l'oscillateur est dit *pseudo-périodique* : le frottement fluide est cette fois plus faible que la force de rappel du ressort et ce dernier a le temps d'osciller un certain nombre de fois<sup>1</sup> :

$$x(t) = \frac{2\omega\tau}{\sqrt{(4\omega^2\tau^2 - 1)}} x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos\left(\frac{t\sqrt{(4\omega^2\tau^2 - 1)}}{2\tau} + \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{(4\omega^2\tau^2 - 1)}}\right)\right)$$

→ si  $\Delta = 0$ , c'est-à-dire si  $\omega\tau = 1/2$ , le régime de l'oscillateur est dit *critique* : le frottement fluide est égal à la force de rappel du ressort ; ce dernier n'oscille pas et finit son mouvement à la position d'équilibre plus rapidement que dans le cas apériodique :

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(\frac{t}{2\tau} + 1\right)$$



**C57. Un théorème à démontrer.** Supposons que la résultante  $\vec{F}$  des forces soit un vecteur constant, alors le vecteur accélération du point matériel est constant et vaut :

$$\vec{a} = \vec{F}/m$$

<sup>1</sup> Pour obtenir ce résultat, penser à utiliser la propriété :  $\cos(\arctan(x)) = 1/\sqrt{1+x^2}$

Le mouvement est, dans tous les cas, uniformément varié. En intégrant directement on obtient :

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}}{m} t + \vec{v}_0$$

où  $\vec{v}_0$  est le vecteur vitesse du point matériel à l'instant 0. Et en intégrant encore une fois :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = \frac{\vec{F}}{2m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

où  $\vec{r}_0$  est le vecteur position du point matériel à l'instant 0. Or, nous savons que le plan instantané dans lequel se situe la trajectoire du point matériel est son plan osculateur engendré par les vecteurs  $(\vec{t}, \vec{n})$  de la base de Serret-Frenet, ou encore par les vecteurs  $(\vec{v}, \vec{a})$ , c'est-à-dire ici  $(\vec{v}_0, \vec{F})$  au vu de l'écriture de  $\vec{v}$  et de  $\vec{a}$ . Comme  $\vec{F}$  est constant, ce plan est toujours le même et c'est donc le plan de la trajectoire comme l'annonce le théorème.

Dans le cas où  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ , ou si  $\vec{v}_0$  est parallèle à  $\vec{F}$ , ce plan se réduit à la droite portée par le vecteur  $\vec{F}$  : le mouvement est alors rectiligne uniformément varié.

**C58. Chute libre parabolique.** La seule force qui s'applique sur le point matériel au cours de son mouvement est son poids :  $\vec{P} = -m g_0 \vec{u}_y$ . D'où les équations du mouvement obtenues en appliquant le principe fondamental de dynamique :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = 0 \\ m \ddot{y} = -m g_0 \end{cases}$$

Ces équations s'intègrent une première fois sans difficulté et fournissent, après avoir tenu compte de la condition initiale sur la vitesse à l'instant  $t = 0$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -g_0 t + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Et en intégrant une seconde fois en tenant compte des conditions initiales pour la position :

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + v_0 t \sin \alpha \end{cases}$$

On observe que la nature du mouvement de  $M$  projeté sur l'axe  $Ox$  est rectiligne uniforme : cela n'est pas étonnant puisque la seule force du problème est dirigée selon l'axe  $Oy$  et n'influe donc pas sur le mouvement le long de l'axe  $Ox$ . Le

mouvement projeté sur l'axe  $Oy$  est quant à lui rectiligne uniformément varié puisque la force qui agit sur  $M$  (son poids) est constante.

On peut éliminer le temps des équations horaires ci-dessus à condition que  $\alpha \neq \pi/2$  ( $t = x/(v_0 \cos\alpha)$ ). Si  $\alpha = \pi/2$ , la trajectoire est la droite d'équation  $x = 0$  parcourue dans un mouvement rectiligne uniformément varié. Sinon, en remplaçant  $t$  par sa valeur, on obtient l'équation d'une parabole (cf **C12**):

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g_0}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha$$

• Le sommet  $S$  de cette parabole correspond à son maximum que l'on obtient en dérivant  $y$  par rapport à  $x$  et en annulant cette dérivée, ce qui donne :

$$0 = -\frac{g_0}{v_0^2 \cos^2\alpha} x_S + \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad x_S = \frac{v_0^2}{g_0} \sin\alpha \cos\alpha$$

*Nota Bene* : si  $\alpha = 0$ , le sommet  $S$  est en  $O$ , ce qui est logique puisque si  $\alpha = 0$ , le point matériel est lancé parallèlement à l'axe  $Ox$  : il chute alors en dessous du niveau du sol si celui-ci n'est pas physique ; s'il est physique, alors le problème change de nature car il nous faudrait ajouter la réaction du sol à l'équation de la dynamique et spécifier que pour  $\alpha = 0$  on a  $y = 0$ .

Connaissant  $x_S$ , on tire :

$$y_S = y(x_S) = \frac{v_0^2}{2g_0} \sin^2\alpha$$

La valeur de  $t_S$  s'obtient à partir de l'équation horaire pour  $x$  par exemple :

$$x_S = v_0 t_S \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad t_S = \frac{x_S}{v_0 \cos\alpha} = \frac{v_0}{g_0} \sin\alpha$$

Enfin, la vitesse du point matériel à cet instant est :

$$\begin{cases} \dot{x}_S = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}_S = -g_0 t_S + v_0 \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Il est logique de trouver  $\dot{y}_S = 0$  puisque nous sommes au sommet de la parabole : sans quoi, le point matériel continuerait son ascension...

• La portée  $P$  est le point  $P$  de l'axe  $Ox$  atteint par  $M$  à un temps  $t_P > 0$ . Pour ce point on a donc  $y_P = 0$ , ce qui impose :

$$y_P = 0 = y(x_P) = -\frac{1}{2} \frac{g_0}{v_0^2 \cos^2\alpha} x_P^2 + x_P \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad x_P = 2 \frac{v_0^2}{g_0} \sin\alpha \cos\alpha$$

Où nous n'avons gardé que la solution  $x_P \neq 0$  car cette solution 0 est celle au temps  $t = 0$ . On remarque que  $x_P = 2 x_S$  en raison de la symétrie de la parabole par rapport à son sommet.

La valeur de  $t_P$  s'obtient à partir de l'équation horaire pour  $x$  par exemple :

$$x_P = v_0 t_P \cos\alpha \iff t_P = \frac{x_P}{v_0 \cos\alpha} = 2 \frac{v_0}{g_0} \sin\alpha = 2 t_S$$

La vitesse du point matériel à l'instant  $t_P$  est :

$$\begin{cases} \dot{x}_P = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}_P = -g_0 t_P + v_0 \sin\alpha = -v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Ce vecteur vitesse en  $P$  est le vecteur symétrique du vecteur vitesse en  $O$  par rapport à la droite verticale qui passe par  $S$ .

Pour que  $P$  soit le plus éloigné possible, il faut maximiser  $x_P$  qui dépend de l'angle  $\alpha$ . On peut alors chercher à annuler la dérivée de  $x_P$  par rapport à  $\alpha$ . Celle-ci s'écrit :

$$\frac{dx_P}{d\alpha} = 2 \frac{v_0^2}{g_0} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2 \frac{v_0^2}{g_0} \cos 2\alpha$$

Cette dérivée est nulle pour  $2\alpha = \pi/2$  et on vérifie qu'il s'agit bien d'un maximum de la fonction  $x_P(\alpha)$ . La portée sera donc maximale pour  $\alpha = \pi/4$ .

**C59. Le pendule simple plan.** Le point matériel est assujéti à la liaison :  $r = L$  en raison de la présence du fil rigide. Seul l'angle  $\theta$  qui repère le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  vis-à-vis de l'axe  $Ox$  (figure 51) peut varier. En conséquence, le point  $M$  ne peut parcourir que le cercle de centre  $O$  et de rayon  $L$ .

Les forces qui s'exercent sur  $M$  sont au nombre de deux. D'abord son poids  $\vec{P}$  dont la direction est verticale et dirigée vers le bas. Son expression dans la base  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  des coordonnées polaires est :

$$\vec{P} = m \vec{g}_0 = mg_0 \cos\theta \vec{u}_r - mg_0 \sin\theta \vec{u}_\theta$$

Ensuite la tension  $\vec{T}$  du fil rigide qui exprime la liaison  $r = L$ . En tant que réaction, elle nous est inconnue mais le problème est supposé ici sans frottement, ce qui signifie que cette réaction n'influe pas sur le point  $M$  dans son mouvement le long de  $\vec{u}_\theta$  (*id est* : dans son mouvement le long du cercle). Elle ne peut donc être que perpendiculaire à  $\vec{u}_\theta$ , et nous l'écrivons :

$$\vec{T} = -T \vec{u}_r, T > 0$$

car il est clair que cette tension pointe vers  $O$ .

• Dans la base des coordonnées polaires, le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  s'écrit :  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = L \vec{u}_r$ . Le calcul de ses vecteurs vitesse et accélération s'ensuit et le principe fondamental de la dynamique, qui s'écrit ici :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

donne lieu aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} m L \ddot{\theta} = -m g_0 \sin\theta \\ -m L \dot{\theta}^2 = m g_0 \cos\theta - T \end{cases}$$

La seconde équation fournit la tension du fil en fonction de  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  et des paramètres du problème  $m$ ,  $g_0$  et  $L$  :

$$T = m g_0 \cos\theta + m L \dot{\theta}^2$$

Le premier terme est la fraction du poids qui agit le long de  $\vec{u}_r$ , le second terme peut être interprété comme la force centrifuge (voir le chapitre 18) que subit  $M$  lors de son mouvement circulaire du point de vue d'un référentiel tournant avec lui.

• Dans l'approximation dite des petits angles, on admet que  $\theta(t)$  est suffisamment petit pour que, quel que soit  $t$ , on puisse écrire :  $\sin\theta(t) \cong \theta(t)$  : il s'agit-là du développement de la fonction sinus à l'ordre 1 en  $\theta$ . Dans ces conditions, la première équation du système précédent prend la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

Où l'on a posé (cf énoncé) :  $\omega = \sqrt{g_0/L}$ . Cette équation différentielle est tout à fait analogue à celle obtenue lors de l'étude de l'oscillateur harmonique (C54 et C55). Sa solution générale nous est maintenant bien connue, on peut l'écrire sous la forme :

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

où  $A$  et  $\phi$  sont des constantes qui seront déterminées par les conditions initiales. Ici, on pose  $\theta(t=0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(t=0) = 0$  ; d'où la solution :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$$

Pour que l'approximation des petits angles soit vérifiée, c'est-à-dire pour que la solution obtenue soit cohérente avec cette approximation, il faut bien sûr que  $\theta_0$  soit petit devant 1, de sorte que  $\sin\theta_0 \cong \theta_0$ . Sous cette condition, le pendule effectue un mouvement oscillant à la pulsation  $\omega$  autour de la position (d'équilibre)  $\theta = 0$ . On appelle  $\omega$  la pulsation propre du pendule.

## CHAPITRE 12

**C60. Point matériel soumis à une force de frottement fluide.** Le travail réalisé par la force de frottement fluide au cours du mouvement du point  $M$  depuis  $O$  jusqu'à  $M_\infty$  (voir **C53**) est donné par la relation :

$$W_{OM_\infty}(\vec{f}) = \int_0^{M_\infty} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Soit, puisque  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  et que  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  :

$$W_{OM_\infty}(\vec{f}) = -\alpha \int_{t=0}^{t=\infty} v^2 dt$$

En utilisant l'expression de  $v = |v_x|$  en fonction du temps obtenue au **C53**, on obtient ainsi :

$$W_{OM_\infty}(\vec{f}) = -\alpha \int_{t=0}^{t=\infty} v_0^2 \exp\left(-2 \frac{\alpha}{m} t\right) dt = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[ \exp\left(-2 \frac{\alpha}{m} t\right) \right]_{t=0}^{\infty}$$

soit :

$$W_{OM_\infty}(\vec{f}) = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

Le travail de  $\vec{f}$  aura donc été résistant, ce qui est logique pour une force de frottement qui s'oppose au mouvement, et on retrouve bien la valeur annoncée par le théorème de l'énergie cinétique.

On pouvait aussi faire le calcul à partir de l'expression :

$$W_{OM_\infty}(\vec{f}) = \int_0^{M_\infty} \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\alpha \int_0^{M_\infty} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

où il faut ici exprimer  $\vec{v}$  en fonction de  $\vec{r}$  pour pouvoir poursuivre. Au **C53**, nous avons obtenu :

$$x(t) = \tau v_0 (1 - \exp(-t/\tau))$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\vec{r} = x \vec{u}_x = \tau v_0 (1 - \exp(-t/\tau)) \vec{u}_x = \tau v_0 \vec{u}_x - \tau \vec{v}$$

D'où, puisque  $d\vec{r} = dx \vec{u}_x$  ici :

$$W_{OM_\infty}(\vec{f}) = -\alpha \int_0^{M_\infty} \vec{v} \cdot d\vec{r} = -\alpha \int_0^{x_\infty = \tau v_0} \left(v_0 - \frac{x}{\tau}\right) dx$$

Ce qui donne :

$$W_{OM\infty}(\vec{f}) = -\alpha \left[ v_0 x - \frac{x^2}{2\tau} \right]_0^{\tau v_0} = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

puisque  $\tau = m/\alpha$ .

**C61. Plan incliné.** Le travail réalisé par la force de frottement solide  $\vec{T}'$  au cours de du mouvement du point  $M$  depuis  $O$  jusqu'au sol où il arrive à l'instant  $t'_S$  (voir **C51**) est donné par la relation :

$$W_{OM(t'_S)}(\vec{T}') = \int_0^{M(t'_S)} \vec{T}' \cdot d\vec{r}$$

Or, selon la loi de Coulomb sur le frottement et les conditions du problème **C51**, on a :

$$\vec{T}' = -T' \vec{u}_x = -f N \vec{u}_x = -f m g_0 \cos\alpha \vec{u}_x$$

D'où, puisque  $d\vec{r} = dx \vec{u}_x$  ici :

$$W_{OM(t'_S)}(\vec{T}') = -f m g_0 \cos\alpha \int_0^{x(t'_S)} dx = -f m g_0 \cos\alpha x(t'_S)$$

Comme  $x(t'_S) = H/\sin\alpha$ , on obtient finalement :

$$W_{OM(t'_S)}(\vec{T}') = -f m g_0 H \cot\alpha$$

• Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique et trouver la vitesse du point  $M$  lorsqu'il arrive au sol, il faut encore calculer le travail réalisé par son poids  $\vec{P}$  au cours de ce mouvement :

$$W_{OM(t'_S)}(\vec{P}) = \int_0^{M(t'_S)} \vec{P} \cdot d\vec{r} = m g_0 \int_0^{x(t'_S)} (\sin\alpha \vec{u}_x - \cos\alpha \vec{u}_y) \cdot dx \vec{u}_x$$

Soit :

$$W_{OM(t'_S)}(\vec{P}) = m g_0 \sin\alpha x(t'_S) = m g_0 H$$

Appliquons maintenant le théorème de l'énergie cinétique entre le point  $O$  et le point  $M(t'_S)$  :

$$\frac{1}{2} m v^2(t'_S) - \frac{1}{2} m v^2(0) = W_{OM(t'_S)}(\vec{P}) + W_{OM(t'_S)}(\vec{T}')$$

D'où :

$$v(t'_S) = \sqrt{v_0^2 + 2 g_0 H (1 - f \cot\alpha)}$$

En conformité avec le résultat du **C51** obtenu en résolvant les équations du mouvement.

**C62. Le pendule simple plan.** Le travail réalisé par le poids  $\vec{P}$  du point  $M$  au cours de son mouvement depuis  $M_0$  jusqu'à un instant donné est, compte tenu de la géométrie du problème (voir **C59**) et puisque ici :  $d\vec{r} = L d\vec{u}_r = L d\theta \vec{u}_\theta$  :

$$W_{M_0M(t)}(\vec{P}) = \int_{M_0}^{M(t)} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M(t)} (mg_0 \cos\theta \vec{u}_r - mg_0 \sin\theta \vec{u}_\theta) \cdot L d\theta \vec{u}_\theta$$

soit :

$$W_{M_0M(t)}(\vec{P}) = -mg_0 L \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta d\theta = -mg_0 L [-\cos\theta]_{\theta_0}^{\theta}$$

ou encore :

$$W_{M_0M(t)}(\vec{P}) = mg_0 L (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

• Au cours du même trajet, le travail réalisé par la tension  $\vec{T}$  doit être nul puisqu'il n'y a pas de frottement dans le problème. En effet, on a :

$$W_{M_0M(t)}(\vec{T}) = \int_{M_0}^{M(t)} \vec{T} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M(t)} (-T \vec{u}_r) \cdot L d\theta \vec{u}_\theta = 0$$

• Au point  $M_0$ , la vitesse est nulle, tandis qu'au point courant  $M$ , la vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(L \vec{u}_r) = L \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrira donc :

$$\frac{1}{2} m v^2(M) - \frac{1}{2} m v^2(M_0) = W_{M_0M(t)}(\vec{P}) + W_{M_0M(t)}(\vec{T})$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 = mg_0 L (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Ce résultat doit être vérifié à chaque instant, il s'agit donc d'une équation différentielle que  $\theta$  doit vérifier.

• Dérivons cette relation par rapport au temps :

$$m L^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -mg_0 L \dot{\theta} \sin\theta$$

C'est-à-dire, en simplifiant par  $\dot{\theta}$  :

$$m L^2 \ddot{\theta} = -mg_0 L \sin\theta$$

qui est bien l'équation du mouvement que nous avons déterminée au **C59**. L'équation précédente en est donc une première intégration. Le chapitre 13 qui suit nous en fournira une explication.

## CHAPITRE 13

**C65. Chute libre verticale : énergie potentielle et énergie mécanique associées au poids des corps au voisinage de la surface de la Terre.** Si le poids  $\vec{P}$  d'un point matériel  $M$  au voisinage de la surface terrestre est le résultat du gradient d'une fonction énergie potentielle (au signe près), alors on doit pouvoir écrire dans un système d'axes cartésien ( $O ; xyz$ ),  $Oz$  étant la verticale ascendante du lieu :

$$\vec{P} = -m g_0 \vec{u}_z = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(M) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{u}_z$$

Ce qui impose d'abord :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$$

C'est-à-dire que  $E_p$  ne peut dépendre que de la cote  $z$  du point matériel, et ainsi :  $E_p(M) = E_p(z)$ . On pouvait prédire ce résultat en avançant que le poids de  $M$  ne dépend ni de  $x$ , ni de  $y$  et est dirigé le long de  $\vec{u}_z$ .

Il ne reste donc plus que l'équation le long de  $\vec{u}_z$  dans laquelle nous pouvons remplacer la dérivée « ronde » par une dérivée droite puisque  $E_p$  ne dépend au final que de  $z$  :

$$m g_0 = \frac{dE_p}{dz}$$

D'où :

$$E_p(z) = m g_0 z + C$$

où  $C$  est une constante arbitraire que l'on peut choisir comme on le souhaite. Par exemple, si on décide que  $E_p(z = 0)$ , alors  $C = 0$ .

*Nota bene* : on fera attention à ce que le signe ( $+m g_0 z$ ) obtenu ici est dû au fait que l'axe  $Oz$  a été choisi ascendant. Dans le cas contraire, on aurait obtenu  $-m g_0 z$ .

L'énergie mécanique  $E_m(M)$  du point matériel est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. À la hauteur  $H$ , sa vitesse initiale est nulle, donc :

$$E_m(z = H) = E_c(z = H) + E_p(z = H) = m g_0 H + C$$

Au cours de son mouvement de chute libre, la vitesse du point matériel lorsqu'il est à la hauteur  $z$  est cette fois :

$$E_c(z) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$$

D'où :

$$E_m(z) = E_c(z) + E_p(z) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + m g_0 z + C$$

Or, le théorème de l'énergie mécanique énonce que  $E_m(M)$  est constante tout au long du mouvement. Il faut donc que pour tout  $z$  on ait :

$$E_m(z = H) = E_m(z) \Leftrightarrow m g_0 H + C = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + m g_0 z + C$$

Il faut en conclure que  $z$  doit vérifier l'équation différentielle non linéaire du premier ordre<sup>1</sup> :

$$\dot{z}^2 = 2 g_0 (H - z)$$

• Comme ici  $z \geq 0$ , on peut ne prendre que la racine positive de cette équation et la résoudre par séparation des variables :

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \sqrt{2 g_0 (H - z)} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{2 g_0 (H - z)}} = \int dt$$

On reconnaît pour la première primitive à réaliser la forme " $u'/2\sqrt{u}$ " à un facteur près. On a donc :

$$t + C_1 = -\frac{1}{g_0} \sqrt{2 g_0 (H - z)}$$

où la constante  $C_1$  se détermine par la condition initiale :  $z(t = 0) = H : C_1 = 0$ .

On obtient donc la solution du problème sous la forme inhabituelle  $t(z)$  :

$$t = -\frac{1}{g_0} \sqrt{2 g_0 (H - z)}$$

En inversant le résultat, on a :

$$z = -\frac{1}{2} g_0 t^2 - H$$

qui est bien la solution obtenue au **C50** (cas sans vitesse initiale).

**C66. Énergie potentielle associée une force constante.** L'exercice précédent n'est qu'un cas particulier de force constante. Plus généralement, si une force constante

---

<sup>1</sup> On pourra vérifier qu'en dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient l'équation de la dynamique du problème (cf **C50**).

s'écrit  $\vec{F} = F_0 \vec{u}_x$  dans un système d'axes cartésien  $(O ; xyz)$ , alors cette force est le résultat d'un gradient d'énergie potentielle  $E_p(M)$  telle que :

$$\vec{F} = F_0 \vec{u}_x = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(M) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{u}_z$$

C'est-à-dire, en reproduisant exactement les mêmes raisonnements qu'au **C65** :

$$E_p(M) = E_p(x) = F_0 x + C$$

où  $C$  est une constante arbitraire que l'on peut choisir comme on le souhaite.

**C67. Énergie potentielle et énergie mécanique associée à la force de rappel d'un ressort (oscillateur harmonique).** Cette fois, la force étudiée n'est plus constante mais s'écrit, selon un système d'axes cartésien  $(O ; xyz)$  où  $O$  est la position d'équilibre du ressort qui est dirigé le long d'un axe  $Ox$  :  $\vec{F} = -k x \vec{u}_x$ , avec  $k$  la constante de raideur du ressort. Cette force est le résultat d'un gradient d'énergie potentielle  $E_p(M)$  si :

$$\vec{F} = -k x \vec{u}_x = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(M) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{u}_z$$

C'est-à-dire, en reproduisant exactement les mêmes raisonnements que dans les **C65-66** :

$$E_p(M) = E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 + C$$

où  $C$  est une constante arbitraire que l'on peut choisir comme on le souhaite.

• L'énergie cinétique du point matériel est ici, lorsque  $M$  est à la position  $x$  :

$$E_c(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

D'où l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique :

$$E_m(x) = E_c(x) + E_p(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + C$$

Faisons le choix (arbitraire)  $C = 0$ , et appliquons le théorème de l'énergie mécanique qui stipule que  $E_m(x)$  est constante pour tout  $x$ , constante que nous appellerons  $E$ . On obtient :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

qui est une équation différentielle non linéaire du premier ordre que  $x$  doit satisfaire.

• En isolant l'énergie cinétique de l'équation précédente, on voit que  $E$  doit être supérieure ou égale, à chaque instant, à l'énergie potentielle de l'oscillateur, ce qui

est la condition énoncée dans ce chapitre. Pour les valeurs de  $E$  qui respectent cette condition (pour les autres, le mouvement est impossible) et qui sont donc forcément positives puisque  $E_p(x) \geq 0$ , on peut écrire :

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2 E/m - \omega^2 x^2}$$

avec  $\omega = \sqrt{k/m}$ . D'où, en séparant les variables :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 E/m - \omega^2 x^2}} = \pm \int dt$$

En faisant le changement de variable :  $u = \omega x/\sqrt{2 E/m}$ , cette équation se réécrit :

$$\frac{1}{\omega} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \pm \int dt = \pm (t + C_1)$$

La primitive en  $u$  est connue, elle donne :  $\arcsin u$ , d'où :

$$\arcsin u = \pm \omega (t + C_1)$$

Soit, en revenant à la variable  $x$  :

$$x = \frac{\sqrt{2 E/m}}{\omega} \sin[\pm \omega (t + C_1)]$$

Dans ce résultat, on peut se permettre d'une part, de changer le sinus en cosinus en raison de la présence de la constante  $C_1$  que l'on peut transformer en  $C_1 + \pi/2$  puisqu'elle est arbitraire, et d'autre part d'enlever l'indétermination  $\pm$  puisque la fonction cosinus est paire. On a ainsi :

$$x(t) = \frac{\sqrt{2 E/m}}{\omega} \cos[\omega (t + C_1)]$$

En comparant ce résultat aux **C54**, **C55** :

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$$

on voit que l'amplitude  $A$  s'écrit en fonction de l'énergie de l'oscillateur sous la forme :  $A = \sqrt{2 E/m}/\omega$  et que la phase  $\phi$  s'écrit :  $\phi = \omega C_1$ .

À partir de l'écriture générale de  $x(t)$  obtenue à la question précédente, on déduit :

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{2 E/m} \sin[\omega (t + C_1)]$$

D'où :

$$E_m(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E \sin^2[\omega (t + C_1)] + E \cos^2[\omega (t + C_1)] = E$$

Conformément au théorème de l'énergie mécanique.

**C68. Énergie mécanique pour le pendule plan.** Reprenons le problème du pendule plan avec les notations des **C62** et **C59**. L'énergie cinétique du point matériel est, à un instant donné :

$$E_c(M) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$$

La tension du fil ne travaillant pas puisqu'il n'y a pas de frottement, celle-ci ne participe pas au bilan énergétique. Il reste l'énergie potentielle associée au poids de  $M$  à déterminer. Pour cela, la méthode la plus simple consiste à reprendre son expression en coordonnées cartésiennes calculée au **C65** par exemple et transformer cette expression en coordonnées polaires. Mais attention, par rapport au **C65**,  $\vec{g}_0$  est ici le long de l'axe  $Ox$  (et pas  $Oz$ ) qui est orienté vers le bas (figure 51) ; donc :

$$E_p(M) = -m g_0 x + C = -m g_0 L \cos\theta + C$$

Une autre méthode, plus longue mais instructive consiste à rester en coordonnées polaires. Dans ce cas, si le poids est le résultat d'un gradient d'énergie potentielle  $E_p(M)$ , il faut écrire :

$$\vec{P} = m g_0 \cos\theta \vec{u}_r - m g_0 \sin\theta \vec{u}_\theta = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(M) = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

D'où les deux équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial r} = -m g_0 \cos\theta \\ \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = m g_0 r \sin\theta \end{cases}$$

La première s'intègre en maintenant  $\theta$  constante puisqu'il s'agit d'une dérivée partielle, la seconde en maintenant  $r$  constante, ce qui donne :

$$\begin{cases} E_p = -m g_0 r \cos\theta + f(\theta) \\ E_p = -m g_0 r \cos\theta + g(r) \end{cases}$$

où  $f(\theta)$  est une fonction arbitraire de  $\theta$  (puisque  $\theta$  a été maintenue constante au cours de l'intégration) et  $g(r)$  une fonction arbitraire de  $r$  (pour la même raison). En égalant les deux résultats, cela impose :  $f(\theta) = g(r)$  pour tout  $r$  et tout  $\theta$  ; ce qui n'est pas possible sauf si  $f(\theta) = g(r) = C$ , où  $C$  est une constante arbitraire. D'où :

$$E_p(M) = -m g_0 r \cos\theta + C$$

Dans notre problème du pendule plan, la variable  $r$  est maintenue constante égale à  $L$ , on a donc ici :

$$E_p(M) = -m g_0 L \cos\theta + C$$

L'énergie potentielle du poids étant déterminée, on peut maintenant écrire le théorème de l'énergie mécanique pour le pendule plan :

$$E_m(M) = E_c(M) + E_p(M) = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - m g_0 L \cos\theta + C = E$$

On peut se débarrasser de la constante  $C$  soit en l'annulant, soit en convenant que lorsque  $M$  est en  $M_0$ ,  $\theta$  prend la valeur  $\theta_0$  avec une vitesse nulle (mêmes conditions qu'au **C62**). Dans ce cas :

$$E_m(M_0) = -m g_0 L \cos\theta_0 + C = E$$

Et on obtient ainsi une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 que  $\theta$  doit vérifier où ni  $C$ , ni  $E$  n'interviennent, mais plutôt la position initiale  $\theta_0$  du point  $M$  :

$$\frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - m g_0 L \cos\theta + m g_0 L \cos\theta_0 = 0$$

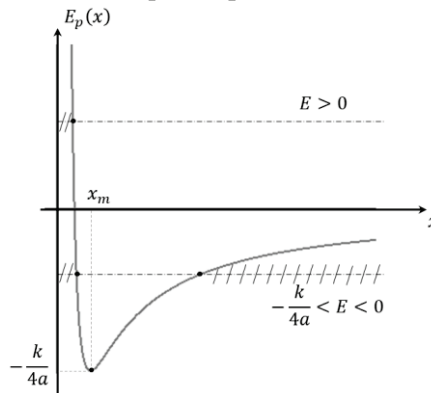
Cette équation est (bien sûr) la même qu'au **C62**.

On peut tenter de résoudre cette équation comme dans les exercices précédents en séparant les variables, ce qui donne, après avoir posé  $\omega = \sqrt{g_0/L}$ , la pulsation propre du pendule pour les petits angles (**C59**) :

$$\frac{1}{\omega\sqrt{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \pm \int dt = \pm (t + C_1)$$

L'intégrale restante ne se calcule pas à l'aide des fonctions connues de l'analyse ; elle fait partie des intégrales dites elliptiques étudiées par Jacobi vers 1830 et qui sont aujourd'hui tabulées. Ce sont en quelques sortes de nouvelles fonctions.

**C69. Énergie potentielle et énergie mécanique : discussion graphique.** Une étude rapide de la fonction  $E_p(x)$  proposée montre qu'elle tend vers 0 par valeur négative (comme  $-k/x$ ) lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , qu'elle possède un minimum en  $x_m = 2a$  dont la



valeur est  $E_p(x_m) = V_{min} = -k/4a$  et qu'elle diverge vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeur positive.

Si le point  $M$  est au départ dans la zone  $x > 0$ , alors cette divergence l'empêche de passer dans la zone  $x < 0$ . Il est donc inutile d'étudier  $E_p(x)$  dans cette zone puisque d'après l'énoncé  $x_0 > 0$ .

Ceci dit, nous savons d'après le cours que l'énergie du point matériel doit être supérieure ou égale à  $V_{min}$  pour que le mouvement soit possible, et que les différents mouvements possibles se déduisent du nombre de fois où les droites  $E = Cte$  coupent la courbe d'énergie potentielle.

Clairement, il faut ici distinguer d'abord le cas où  $V_{min} < E < 0$  : dans ce domaine d'énergie, la courbe d'énergie potentielle est coupée deux fois et le mouvement du point matériel consiste à faire des allers-retours (plus ou loin éloignés) autour de la position  $x_m$ . Aux deux points marqués sur la figure, l'énergie cinétique du point matériel est nulle et les positions  $X_+$  et  $X_-$  de ces points en fonction de l'énergie (mécanique)  $E$  du point matériel sont données par l'équation :  $E = E_p(X_{\pm})$ . On trouve ainsi :

$$X_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + |E|/V_{min}}}{2 |E|}$$

Lorsque l'énergie du point matériel est positive,  $E > 0$ , ce dernier peut évoluer sur l'axe  $Ox$  depuis  $+\infty$  jusqu'à une position  $X$  (le point sur la figure pour  $E > 0$ ) donnée là aussi par l'équation  $E = E_p(X)$  qui, pour  $E > 0$ , ne possède plus qu'une seule solution positive et donc physique :

$$X = \frac{-1 + \sqrt{1 - E/V_{min}}}{2 E}$$

Dans cette situation, le point matériel est appelé à s'éloigner irrémédiablement de l'origine jusqu'à l'infini avec une énergie cinétique qui sera égale à  $E$  puisqu'alors  $E_p$  devient nulle, c'est-à-dire avec une vitesse :

$$v_{\infty} = \sqrt{2E/m}$$

Ces deux types de mouvements sont séparés par le cas limite où  $E = 0$  : ici, le point matériel se comporte comme si  $E$  était positif, mais il arrivera à l'infini avec une vitesse nulle.

Enfin, le cas spécial où  $E = V_{min}$  est un cas d'équilibre. En effet, seule la position  $x_m = 2a$  est permise au point matériel pour cette valeur de l'énergie.

**C70. Forces centrales et énergie potentielle.** Si la force considérée est le gradient d'une énergie potentielle (au signe près)  $E_p(M)$ , il faut écrire en coordonnées sphériques :

$$\vec{F} = F(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(M) = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

D'où les trois équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial r} = -F(r, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations imposent à  $E_p$  d'être une fonction qui ne dépend que de la variable  $r$  :  $E_p(M) = E_p(r)$ . La première équation impose alors :

$$\frac{dE_p}{dr} = -F(r, \theta, \varphi)$$

La force ne peut donc pas dépendre de  $\theta$  ni de  $\varphi$  :  $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$ . L'énergie potentielle associée est alors :

$$E_p = - \int F(r) dr$$

Dans le cas où  $F(r) = K/r^2$  où  $K$  est une constante, l'énergie potentielle qui lui est associée est :

$$E_p = - \int K/r^2 dr = \frac{K}{r} + C$$

où  $C$  est une constante arbitrairement choisie.

- Dans le cas gravitationnel, la force qui s'exerce sur un point matériel de masse  $m$  situé à la distance  $r$  d'un autre point matériel de masse  $m'$  situé à l'origine d'un référentiel est (chapitre 10) :

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m m'}{r^2} \vec{u}_r$$

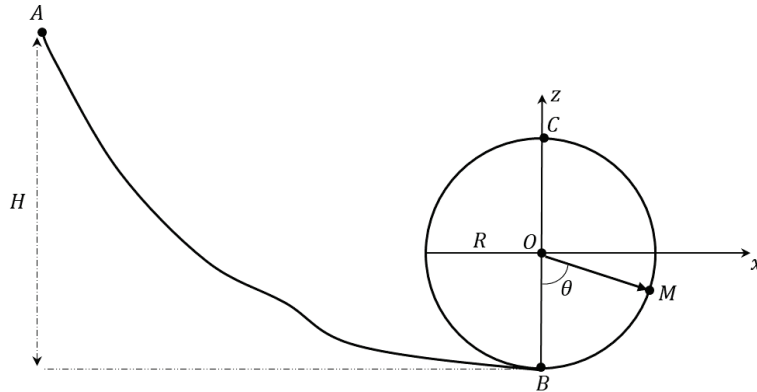
La constant  $K$  vaut donc :  $K_{grav} = -G m m'$ .

Dans le cas coulombien, la force qui s'exerce sur un point matériel de charge électrique  $q$  situé à la distance  $r$  d'un autre point matériel de charge électrique  $q'$  situé à l'origine d'un référentiel est (chapitre 10) :

$$\vec{F}_{coul} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \vec{u}_r$$

La constant  $K$  vaut donc ici :  $K_{coul} = q q' / 4\pi\epsilon_0$ . Elle est positive si  $q$  et  $q'$  sont de même signe, négative sinon.

**C71. Point matériel dans une boucle circulaire.** Le schéma du problème est le suivant :



Faisons le choix de repérer le point  $M$  à l'aide du référentiel  $\mathcal{R}\{O, xz\}$  de la figure et de coordonnées polaires<sup>1</sup> ( $r = R, \theta$ ) lorsqu'il entre dans la boucle circulaire.

Seules deux forces agissent sur  $M$ . Son poids  $\vec{P}$  :

$$\vec{P} = m g_0 \cos\theta \vec{u}_r - m g_0 \sin\theta \vec{u}_\theta$$

Et la réaction  $\vec{T}$  du support qui est inconnue, mais puisqu'il n'y a pas de frottement, qui est dirigée le long de  $\vec{u}_r$ , vers le point  $O$  :

$$\vec{T} = -T \vec{u}_r, T > 0$$

De sorte que l'équation de la dynamique du point matériel dans cette boucle s'écrit, après avoir calculer les vecteurs vitesse et accélération à partir du vecteur position

$$\vec{OM} = \vec{r} = R \vec{u}_r :$$

$$\begin{cases} m R \ddot{\theta} = -m g_0 \sin\theta \\ -m R \dot{\theta}^2 = m g_0 \cos\theta - T \end{cases}$$

<sup>1</sup> Ces coordonnées polaires ne sont pas exactement celles données dans le cours, elles en sont une variante : en effet, l'angle  $\theta$  n'est pas défini ici de la même façon afin de pouvoir dire que  $\theta = 0$  à l'entrée du point  $M$  dans la boucle. Toutefois, cela importe peu au final et pour s'en assurer on peut regarder la géométrie de la figure qui fournit ici :  $\vec{u}_r = \sin\theta \vec{u}_x - \cos\theta \vec{u}_z$  et  $\vec{u}_\theta = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_z$ . Et on a bien :  $d\vec{u}_r/dt = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et  $d\vec{u}_\theta/dt = -\dot{\theta} \vec{u}_r$ . Si vous êtes gêné par ce changement de convention, vous pouvez revenir à la convention initiale en définissant votre angle  $\theta$  vis-à-vis de l'axe  $Ox$ , mais attention : dans ce cas, à l'entrée dans la boucle, votre angle  $\theta$  vaudra  $3\pi/2$ .

L'intérêt ici se porte sur la réaction  $T$  qui vaut, d'après la seconde équation :

$$T = m R \dot{\theta}^2 + m g_0 \cos\theta$$

On voit que pour  $\theta > \pi/2$ , cette expression est susceptible de s'annuler, voire de devenir négative, ce qui n'est pas possible. En fait, dès que  $T$  s'annule cela doit signifier que le point  $M$  quitte la boucle et c'est là la condition cherchée : il faut que  $T$  reste positive partout sur la boucle circulaire pour que le point  $M$  puisse faire un tour<sup>1</sup> :  $T > 0, \forall \theta$ .

Mais comment se « débarrasser » de  $\dot{\theta}$  ? C'est là que le théorème de l'énergie mécanique entre en jeu : tout au long de son mouvement, depuis le point  $A$  jusqu'à une certaine position  $\theta$  au sein de la boucle, le point  $M$  ne subit que les deux forces précitées. La réaction du support ne travaillant pas (pas de frottements), il ne reste que le poids qui donne lieu à une énergie potentielle qui nous est maintenant bien connue puisqu'elle ne dépend que de la hauteur du point matériel :  $E_p = m g_0 z$ .

Ainsi, pour le point  $A$  qui est à la hauteur  $H$  sans vitesse initiale, l'énergie mécanique est :

$$E = m g_0 H$$

Tandis que pour la position  $\theta$ , on a :

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m g_0 z$$

où  $z$  est la hauteur à laquelle se situe le point  $M$  lorsqu'il est à la position  $\theta$  au sein de la boucle circulaire :  $z = R - R \cos\theta$ .

On a donc l'égalité suivante :

$$E = m g_0 H = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m g_0 (R - R \cos\theta)$$

à partir de laquelle nous pouvons isoler  $R \dot{\theta}^2$  et injecter le résultat dans l'expression de  $T$  pour obtenir :

$$T = m g_0 \left( 2 \frac{H}{R} - 2 + 3 \cos\theta \right) > 0, \quad \forall \theta$$

La condition sur  $T$  devient ainsi :

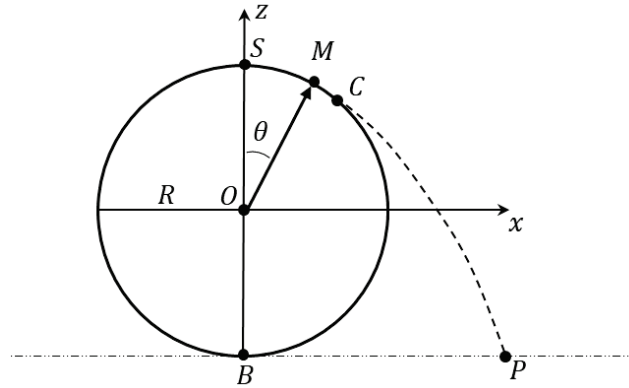
$$H > \frac{2 - 3 \cos\theta}{2} R, \quad \forall \theta$$

C'est en  $\theta = \pi$  (au point  $C$  de la figure) que cette inégalité est « maximale » : il faut donc, pour que le point  $M$  puisse faire un tour complet :  $H > 5 R/2$ .

---

<sup>1</sup> Et s'il fait un tour, alors il en fera une infinité puisqu'il n'y a pas de frottements.

**C72. Point matériel sur un cerceau circulaire.** Le schéma du problème est le suivant :



La recherche de l'angle critique  $\theta_c$  à partir duquel le point matériel quitte la circonférence est équivalente à rechercher la position du point matériel pour laquelle la réaction  $\vec{T}$  va s'annuler. Comme au C71, le point matériel n'est soumis qu'à deux forces au cours de son mouvement le long de la circonférence : la réaction  $\vec{T}$  et son poids  $\vec{P}$ . En adoptant le système de coordonnées polaires ( $r = R, \theta$ ) de la figure, on trouvera d'abord :

$$T = m g_0 \cos\theta - m R \dot{\theta}^2$$

Puis, en utilisant le théorème de l'énergie mécanique au point  $S$  et au point courant  $M$ , on pourra obtenir  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$  pour obtenir finalement :

$$T = m g_0 (3 \cos\theta - 2)$$

D'où la valeur de  $\theta_c$  :  $\theta_c = \arccos(2/3)$ , soit  $\theta_c \cong 48,2^\circ$ .

• Au point  $C$ , la vitesse du point matériel peut être obtenue à nouveau grâce au théorème de l'énergie mécanique appliqué au point  $S$ , puis au point  $C$ , ce qui s'écrit :

$$E = m g_0 (2R) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_c^2 + m g_0 (R + R \cos\theta_c)$$

D'où le vecteur vitesse au point  $C$  :

$$\vec{v}_c = R \dot{\theta}_c \vec{u}_\theta = \sqrt{2 g_0 R/3} \vec{u}_\theta = \sqrt{2 g_0 R/3} [\cos\theta_c \vec{u}_x - \sin\theta_c \vec{u}_z]$$

Soit :

$$\vec{v}_c = \sqrt{2 g_0 R/27} [2 \vec{u}_x - \sqrt{5} \vec{u}_z] = \dot{x}_c \vec{u}_x + \dot{z}_c \vec{u}_z$$

• À partir du point  $C$ , le point matériel réalise une chute libre avec la vitesse initiale  $\vec{v}_c$ . Choisissons l'instant initial lorsque  $M$  est en  $C$  pour ce mouvement de chute libre et changeons de système de coordonnées pour prendre maintenant les coordonnées

cartésiennes  $(x, z)$  à partir de  $O$ . Ainsi, le point  $C$  a pour coordonnées :  $(x_c = R \cos\theta_c, z_c = R \sin\theta_c) = (2R/3, \sqrt{5} R/3)$ .

Les équations de la dynamique du point  $M$  à partir de  $C$  s'écrivent :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = 0 \\ m \ddot{z} = -m g_0 \end{cases}$$

D'où les équations horaires de la trajectoire, après avoir intégré deux fois et tenu compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} x(t) = \dot{x}_c t + x_c \\ z(t) = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + \dot{z}_c t + z_c \end{cases}$$

Le temps  $t_P$  auquel le point  $M$  atteint le point  $P$  au sol est tel que :

$$z(t_P) = 0 = -\frac{1}{2} g_0 t_P^2 + \dot{z}_c t_P + z_c$$

Ayant trouvé  $t_P$  (qui ne peut être que positif), on peut l'injecter dans l'écriture de  $x$  pour obtenir enfin la valeur cherchée :

$$x(t_P) = \dot{x}_c t_P + x_c = \dots = \frac{2R}{3} \left\{ 1 + \frac{2}{9} \left( \sqrt{5 + 9\sqrt{5}} \right) - \sqrt{5} \right\}$$

En espérant ne pas avoir fait d'erreur de calcul !

**C73. Particule dans un champ magnétique constant.** On reprend les mêmes notations que celles du chapitre 11. Les équations du mouvement de la particule qui n'est soumise cette fois qu'à la force magnétique sont, sans frottement :

$$\begin{cases} q B \dot{y} = m \ddot{x} \\ -q B \dot{x} = m \ddot{y} \\ 0 = m \ddot{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} - \omega^2 \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 \dot{x} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Où on a posé, comme au chapitre 11 :  $\omega := qB/m$  ;  $\omega$  a les dimensions d'une pulsation. Si  $q > 0$ , alors nous dirons que  $B > 0$  ; si  $q < 0$ , alors nous dirons que  $B < 0$  afin de garder un  $\omega > 0$ .

Il est clair que le long de l'axe  $Oz$  qui est l'axe du champ, le mouvement est rectiligne uniforme. Avec les mêmes notations qu'au chapitre 11, on a donc :

$$z(t) = z_0 + v_{0z} t$$

Les deux premières équations sont couplées et on peut procéder comme au chapitre 11 pour les découpler. Ce faisant, on obtient l'équation en  $\dot{x} = v_x$  :

$$\ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0$$

Dont la solution générale nous est maintenant bien connue :

$$\dot{x} = v_x = A \cos(\omega t + \phi)$$

Cette solution pour  $v_x$  impose la solution pour  $v_y$  (cf chapitre 11) :

$$\dot{y} = v_y = -A \sin(\omega t + \phi)$$

Toujours en suivant le chapitre 11, en choisissant d'orienter les axes  $Ox$  et  $Oy$  de telle sorte qu'au temps  $t = 0$  on ait  $v_{0y} = 0$ , on trouve :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = v_{0x} \cos \omega t \\ \dot{y} = v_y = -v_{0x} \sin \omega t \end{cases}$$

Alors, en intégrant et en prenant en compte les conditions initiales :

$$\begin{cases} x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t + x_0 \\ y = \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1) + y_0 \end{cases}$$

En éliminant le temps de ces équations horaires, on trouve que la trajectoire de  $M$  projetée dans le plan  $xOy$  est un cercle de rayon  $|v_{0x}|/\omega$  et de centre  $(x_0, y_0 - v_{0x}/\omega)$

En résumé, les équations horaires de la trajectoire sont :

$$\begin{cases} x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t + x_0 \\ y = \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1) + y_0 \\ z = z_0 + v_{0z} t \end{cases}$$

Et les composantes cartésiennes de la vitesse du point  $M$  :

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_{0x} \cos \omega t \\ v_y = \dot{y} = -v_{0x} \sin \omega t \\ v_z = \dot{z} = v_{0z} \end{cases}$$

Dont la norme est constante et vaut :

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0z}^2}$$

La trajectoire consiste donc en un mouvement circulaire uniforme dans le plan  $xOy$  combiné avec un mouvement rectiligne uniforme le long de  $Oz$  : il s'agit d'un

mouvement hélicoïdal circulaire uniforme d'axe  $Oz$  qui a été étudié aux chapitres 4 et 6.

Le travail élémentaire réalisé par la force magnétique sur une portion infinitésimale de la trajectoire est :

$$\vec{F}_{mag} \cdot d\vec{r} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{r} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt$$

On voit qu'en raison des propriétés du produit vectoriel, ce travail élémentaire est toujours nul. La force magnétique ne travaille donc pas, c'est-à-dire que son action est nulle le long du vecteur  $\vec{r}$  tangent à la trajectoire.

On doit donc conclure que seule l'énergie cinétique de la particule contribue à son énergie mécanique  $E$  qui reste constante tout au long du mouvement :

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m (v_{0x}^2 + v_{0z}^2)$$

**C74. Portrait de phases.** L'énergie mécanique  $E$  de l'oscillateur harmonique rapporté à sa position d'équilibre  $O$  et à l'axe  $Ox$  selon lequel il oscille à la pulsation  $\omega = \sqrt{k/m}$  est (voir **C67**) :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Cette valeur de  $E$  est constante d'après le théorème de l'énergie mécanique et ne peut manifestement être que positive ou nulle.

Pour  $E \neq 0$ , on peut écrire :

$$1 = \frac{m}{2E} \dot{x}^2 + \frac{m \omega^2}{2E} x^2$$

Dans le plan  $(x, \dot{x})$ , cette relation (voir **C11**, note 3) est l'équation d'une ellipse de centre  $(0,0)$ , de grand axe parallèle à l'axe  $Ox$ , de longueur  $2a = 2\sqrt{2E/m\omega^2}$  et de petit axe parallèle à l'axe  $O\dot{x}$ , de longueur  $2b = 2\sqrt{2E/m}$ .

Ainsi, chaque valeur de  $E$  définit une telle ellipse. L'ensemble des points de chaque ellipse correspond à une condition initiale pour que l'oscillateur ait cette valeur de  $E$ . Pour cette valeur, son mouvement sur un tel graphe sera l'ellipse elle-même.

Pour  $E = 0$ , seul  $(x = 0, \dot{x} = 0)$  forme un couple de valeurs possibles : l'oscillateur est au repos à sa position d'équilibre. Ce point est le centre de toutes les autres ellipses du portrait de phases de l'oscillateur dont le tracé est aisé à construire.

## CHAPITRE 14

**C75. Équilibre du plan incliné.** Chacun des deux points matériels subit : son propre poids, vertical ; la force de réaction du support qui est perpendiculaire à ce support puisqu'il n'y a pas de frottement ; la tension du fil inextensible qui les relie, dirigée parallèlement au support et dont l'intensité doit être la même car le fil est inextensible et qu'il n'y a pas de frottement au niveau de l'articulation en  $O$  (une poulie). On a donc, avec des notations évidentes :

$$\begin{cases} m_1 \vec{g}_0 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0} \\ m_2 \vec{g}_0 + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \end{cases}$$

Projetons chacune de ces deux équations d'équilibre sur des axes appropriés : la première sur l'axe  $(OA)$ , la seconde sur l'axe  $(OB)$  :

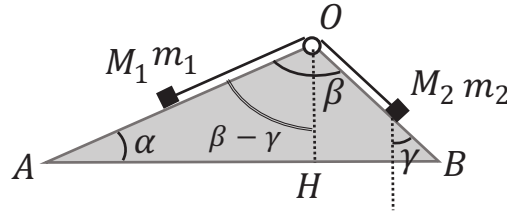
$$\begin{cases} m_1 g_0 \sin \alpha - T_1 = 0 \\ m_2 g_0 \cos \gamma - T_2 = 0 \end{cases}$$

Avec  $T_1 = T_2$ , ce qui impose :

$$m_1 \sin \alpha = m_2 \cos \gamma$$

Or, dans le triangle rectangle  $AOH$ , on a :  $\sin \alpha = OH/OA$ , et dans le triangle rectangle  $BOH$  :  $\cos \gamma = OH/OB$ , d'où le résultat pour l'équilibre du plan incliné :

$$m_1 OB = m_2 OA$$



**C76. Point d'équilibre entre la Terre et la Lune.** La force que subit le point matériel est la somme des forces gravitationnelles  $\vec{F}_T$  et  $\vec{F}_L$  qu'il subit de la part des deux astres sphériques Terre et Lune respectivement :

$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_L = G m \left( -\frac{M_T}{x^2} + \frac{M_L}{(D-x)^2} \right) \vec{u}_x$$

• Cette force est le résultat du gradient de l'énergie potentielle (au signe près) :

$$E_p = -G m \int \left( -\frac{M_T}{x^2} + \frac{M_L}{(D-x)^2} \right) dx = -G m M_T \left( \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{D-x} \right)$$

où l'on a posé :  $\alpha = M_L/M_T$ .

• Les éventuelles positions d'équilibre  $x_{eq}$  du problème s'obtiennent en annulant la dérivée par rapport à  $x$  de  $E_p$ , ou encore en annulant  $\vec{F}$  :

$$0 = -\frac{1}{x_{eq}^2} + \frac{\alpha}{(D - x_{eq})^2} \Leftrightarrow (1 - \alpha) x_{eq}^2 - 2D x_{eq} + D^2 = 0$$

Cette équation du second degré mène à deux solutions possibles :

$$x_{eq} = D \frac{1 \pm \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}$$

Mais seule la solution portant le signe négatif est inférieure à  $D$ . Il existe donc une seule position d'équilibre au point  $A$  tel que :

$$x_{eq} = x_A = D \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha} = D (1 + \sqrt{\alpha})$$

La stabilité de cet équilibre dépend du signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle à la position  $x_A$ . Or le calcul de la dérivée seconde donne :

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = -2 G m M_T \left( \frac{1}{x^3} + \frac{\alpha}{(D - x)^3} \right)$$

Cette fonction est toujours négative pour l'intervalle où évolue  $x$ , en particulier pour  $x_A$  : l'équilibre est donc instable.

• Appliquons le théorème de l'énergie mécanique au point  $S$  de la surface de la Terre et au point  $A$ . En  $S$ , puisque  $x_S = R_T$  et  $v_S = v_0$  :

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + E_p(R_T) = \frac{1}{2} m v_0^2 - G m M_T \left( \frac{1}{R_T} + \frac{\alpha}{D - R_T} \right)$$

Et en  $A$ , connaissant  $x_A$  avec  $v_A = 0$  :

$$E = E_p(x_A) = -G m M_T \left( \frac{1}{x_A} + \frac{\alpha}{D - x_A} \right) = -\frac{G m M_T}{D} (1 + \sqrt{\alpha})^2$$

D'où :

$$v_0^2 = 2 G M_T \left( \frac{1}{R_T} + \frac{\alpha}{D - R_T} - \frac{(1 + \sqrt{\alpha})^2}{D} \right)$$

## CHAPITRE 15

**C79. Le pendule plan encore.** En gardant les mêmes notations qu'au **C59**, **C72** et **C68**, le moment cinétique du pendule plan est :

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m L^2 \dot{\theta} (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) = m L^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

où  $\vec{u}_z$  est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la trajectoire du pendule.

Le moment de la tension  $\vec{T}$  de la tige est :

$$\vec{M}(O, \vec{T}) = \vec{M}(\vec{T}) = \vec{r} \wedge \vec{T} = L \vec{u}_r \wedge (-T \vec{u}_r) = \vec{0}$$

On observe que la tension ne travaille pas (C62) et ne donne pas lieu à une variation de moment cinétique : cela est logique car nous avons supposé l'absence de frottements : la tension n'influe aucunement sur le mouvement du point matériel si ce n'est de lui faire respecter la contrainte (ici : se déplacer le long de l'arc de cercle de rayon  $L$ ).

Le moment du poids du point matériel est :

$$\begin{aligned} \vec{M}(O, \vec{P}) &= \vec{M}(\vec{P}) = \vec{r} \wedge m \vec{g}_0 = mg_0 L \vec{u}_r \wedge (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) \\ &= -mg_0 L \sin\theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit ici :

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{M}(\vec{T}) + \vec{M}(\vec{P})$$

Et on obtient l'équation :

$$m L^2 \ddot{\theta} = -mg_0 L \sin\theta$$

Qui est bien la même équation qu'aux C59, C62.

**C80. Forces radiales et énergie potentielle effective.** La loi des aires s'écrit dans le système de coordonnées polaires au sein du plan de la trajectoire :

$$\frac{1}{2} r^2 |\dot{\theta}| = \frac{\ell}{2m}$$

De cette relation, on peut tirer  $\dot{\theta}$  en fonction de  $r$  et injecter le résultat dans l'expression de l'énergie mécanique du problème. On obtient ainsi :

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_p^{eff}(r; \ell)$$

Avec :

$$E_p^{eff}(r; \ell) = \frac{\ell^2}{2m r^2} + E_p(r)$$

Ainsi, tout se passe comme si nous avions un point matériel repéré par  $r$  en mouvement sous l'effet d'une énergie potentielle effective  $E_p^{eff}(r; \ell)$ . Le terme en  $\ell^2/2m r^2$  provient de la partie « angulaire » de l'énergie cinétique qui correspond à la rotation du point matériel autour de l'axe  $Oz$  perpendiculaire au plan de la trajectoire : on l'interprète comme une énergie potentielle centrifuge au chapitre 18.

• Pour étudier les mouvements possibles du point matériel, on peut alors réaliser l'étude graphique mise en œuvre au chapitre 13, tout en ayant conscience que le problème n'est pas unidimensionnel : d'une part la variable  $r$  ne peut être que positive puisqu'il s'agit de la distance  $\|\vec{OM}\|$ , et d'autre part la variable  $\theta$  est toujours présente dans le problème. En particulier, supposons que  $E_p^{eff}(r; \ell)$  possède un minimum en  $r = r_*$  et que l'énergie du point matériel soit égale à la valeur de  $E_p^{eff}$  pour ce minimum. Dans ce cas, on a forcément  $\dot{r} = 0$  et la seule valeur possible de  $r$  est  $r = r_*$ . Mais le point matériel n'est pas à l'équilibre comme pour un problème unidimensionnel : en vertu de la loi des aires, il évolue sur une trajectoire circulaire à la vitesse angulaire constante :

$$|\dot{\theta}| = \frac{\ell}{m r_*^2}$$

Lorsque  $\ell = 0$ , on a  $\dot{\theta} = 0$ , soit  $\theta = Cte = \theta_0 \forall t$  : le point matériel se déplace le long d'une droite d'équation  $\theta = \theta_0$  sous l'effet de l'énergie potentielle  $E_p^{eff}(r; \ell = 0) = E_p(r)$ .

• Dans le cas où  $E_p(r) = -K/r$ , alors :

$$E_p^{eff}(r; \ell) = \frac{\ell^2}{2 m r^2} - \frac{K}{r}$$

Si  $\ell = 0$ , la loi des aires donne :  $\dot{\theta} = 0$ , soit  $\theta = Cte = \theta_0 \forall t$  : le point matériel se déplace le long d'une droite d'équation  $\theta = \theta_0$  sous l'effet de l'énergie potentielle  $E_p^{eff}(r; \ell = 0) = E_p(r)$ . Il s'agit d'une chute libre vers le centre du référentiel car la force  $-dE_p/dr$  est attractive.

Si  $\ell \neq 0$ , alors  $E_p^{eff}(r; \ell)$  tend vers 0 lorsque  $r$  tend vers l'infini et tend vers  $+\infty$  lorsque  $r$  tend vers 0. La fonction  $E_p^{eff}$  possède un minimum en  $r_* = \ell^2/mK$  et prend la valeur :

$$E_p^{eff}(r = r_*; \ell) = -\frac{m K^2}{2 \ell^2} = V_{min}$$

Rendons  $E_p^{eff}$  sans dimensions en la divisant par  $(-V_{min})$  pour l'étudier pour toute valeur de  $\ell$ . On obtient :

$$\epsilon(x) = -\frac{E_p^{eff}(r; \ell)}{V_{min}} = \left(\frac{r_*}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r_*}{r}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$$

Le tracé de  $\epsilon(x)$  est le même qu'au **C69** dont on peut reprendre la discussion mais en faisant attention à ce que le problème ici est à deux dimensions.

Dans le cas où  $V_{min} < E < 0$ , le mouvement du point matériel consiste à décrire une courbe<sup>1</sup> dans le plan, délimitée par les deux distances radiales  $r_+$  et  $r_-$  marquées sur la figure du **C69**. On dit de ce type de mouvement qu'il est lié. En ces positions, l'énergie cinétique radiale ( $m/2 \dot{r}^2$ ) du point matériel est nulle et elles sont données par l'équation :  $E = E_p(r_{\pm})$ . On trouve ainsi :

$$r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - |E|/V_{min}}}{2 |E|}$$

Lorsque l'énergie du point matériel est positive,  $E > 0$ , la courbe décrite<sup>2</sup> permet à ce dernier d'évoluer sur des distances allant de  $r = r_- + \infty$  jusqu'à une position  $r_+$  (le point sur la figure pour  $E > 0$ ) donnée là aussi par l'équation  $E = E_p(r_+)$  qui, pour  $E > 0$ , ne possède plus qu'une seule solution positive et donc physique :

$$r_+ = \frac{-1 + \sqrt{1 - E/V_{min}}}{2 E}$$

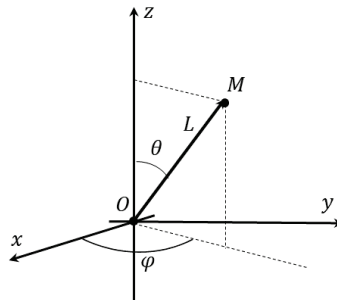
Dans cette situation, le point matériel est appelé à s'éloigner irrémédiablement de l'origine jusqu'à l'infini avec une énergie cinétique qui sera égale à  $E$  puisqu'alors  $E_p$  devient nulle, c'est-à-dire avec une vitesse :

$$v_{\infty} = \sqrt{2E/m}$$

Ces deux types de mouvements sont séparés par le cas limite où  $E = 0$  : ici, le point matériel se comporte comme si  $E$  était positif, mais il arrivera à l'infini avec une vitesse nulle<sup>3</sup>.

Enfin, le cas spécial où  $E = -V_{min}$  est le cas du mouvement circulaire uniforme de rayon :  $r_* = \ell^2/mK$ , de centre  $O$  et de vitesse angulaire :  $|\dot{\theta}| = \ell/mr_*^2$ .

**C81. Le pendule (simple) sphérique.** Le schéma du problème est le suivant :



<sup>1</sup> Le calcul analytique plus élaboré montre que cette courbe est une ellipse dont  $r_+$  et  $r_-$  sont respectivement l'aphélie et le périhélie (voir le chapitre 17).

<sup>2</sup> Le calcul montre que cette courbe est une hyperbole dont  $r_+$  est la distance minimale au centre du référentiel (voir le chapitre 17). Il s'agit là d'un mouvement dit de diffusion.

<sup>3</sup> Le calcul montre qu'il s'agit d'une parabole.

Le pendule est soumis à son poids et à la tension  $\vec{T}$  de la tige qui est dirigée le long de  $\vec{u}_r$  puisqu'il n'y a pas de frottement :  $\vec{T} = -T \vec{u}_r, T > 0$ . Les équations de Newton du mouvement sont, après avoir calculé les vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  à partir de  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = L \vec{u}_r$  (cf C32) :

$$\begin{cases} -m L (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = -m g_0 \cos \theta - T \\ m L (\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) = m g_0 \sin \theta \\ m L (2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \theta) = 0 \end{cases}$$

La première fournit la valeur de  $T$  et les deux autres doivent permettre d'obtenir  $\theta(t)$  et  $\varphi(t)$ .

• La tension ne travaillant pas, l'énergie potentielle du pendule sphérique n'est due qu'à son poids. Elle a donc la forme :  $E_p = m g_0 z$  avec ici :  $z = L \cos \theta$ , soit :

$$E_p = m g_0 L \cos \theta$$

Il y a un équilibre instable en  $\theta = 0$  où la fonction  $E_p$  est maximale, et un équilibre stable en  $\theta = \pi$  où elle est minimale.

• L'énergie mécanique du pendule sphérique s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p = \frac{1}{2} m L^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + m g_0 L \cos \theta$$

• Le moment de la tension de la tige est nul ; celui du poids s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, \vec{P}) = \vec{r} \wedge m \vec{g}_0 = m g_0 L \vec{u}_r \wedge (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) = -m g_0 L \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

Le moment cinétique est ici :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = m L^2 (\dot{\theta} \vec{u}_\varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

Et l'application du théorème donne :

$$\begin{cases} -m L^2 (2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \theta) = 0 \\ m L^2 (\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) = -m g_0 L \sin \theta \end{cases}$$

On voit que la seconde équation correspond à la seconde équation de Newton écrite plus haut, et que la première équation correspond à la troisième équation de Newton. Si la quantité  $\dot{\varphi} \sin^2 \theta$  est une intégrale première alors :

$$\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = 0$$

On reconnaît au facteur  $\sin \theta$  près, la première équation du système ci-dessus. La composante du moment cinétique le long de l'axe  $Oz$  est :

$$\ell_z = \vec{\ell} \cdot \vec{u}_z = -m L^2 \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_z = m L^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta$$

C'est donc bien  $\ell_z$  qui est une constante du mouvement. On pourra donc écrire :

$$m L^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = Cte = \ell_z$$

De cette dernière relation, on peut écrire  $\dot{\varphi}$  en fonction de  $\theta$  et injecter le résultat dans l'expression de l'énergie mécanique du pendule. On obtient ainsi :

$$E = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + E_p^{eff}(\theta; \ell_z)$$

avec :

$$E_p^{eff}(\theta; \ell_z) = \frac{\ell_z^2}{2 m L^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} + m g_0 L \cos \theta$$

L'origine du terme en  $1/\sin^2 \theta$  est la fraction de l'énergie cinétique relativement à la vitesse angulaire  $\dot{\varphi}$  du pendule. Celle-ci induit (quand on se place du point de vue du pendule) une force centrifuge (cf chapitre 18) que ce terme représente sous la forme de son énergie potentielle associée.

• Si  $\ell_z = 0$ , on peut déjà remarquer que l'énergie du pendule devient :

$$E(\ell_z = 0) = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + E_p^{eff}(\theta; \ell_z = 0) = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + m g_0 L \cos \theta$$

qui est exactement l'énergie mécanique d'un pendule plan. En outre, si  $\ell_z = 0$ , alors il faut :

$$\dot{\varphi} \sin^2 \theta = 0 \quad \forall t$$

Cela ne peut avoir lieu que de deux façons : d'abord si  $\dot{\varphi} = 0 \quad \forall t$ , et dans ce cas :  $\varphi(t) = \varphi_0$  : le pendule oscille alors toujours dans un même plan. Ensuite si on a :  $\sin \theta = 0 \quad \forall t$  ; dans ce cas, le pendule est à l'équilibre en  $\theta = 0$  où  $\theta = \pi$ .

En conclusion, si  $\ell_z = 0$  le problème se ramène à celui du pendule plan.

Lorsque  $\ell_z \neq 0$ , on peut effectivement mettre  $E_p^{eff}(\theta; \ell_z)$  sous la forme :

$$E_p^{eff}(\theta; \ell_z) = m g_0 L \left( \frac{\alpha}{\sin^2 \theta} + \cos \theta \right)$$

Avec :

$$\alpha = \frac{\ell_z^2}{2 m^2 L^3 g_0}$$

Il s'agit d'un paramètre sans dimensions caractéristique du problème. Il est a priori susceptible de varier dans l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

Le tracer de  $E_p^{eff}(\theta; \ell_z)$  (voir ci-dessous) fait apparaître d'abord une divergence systématique en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  : les trajectoires ne passent jamais par l'axe  $Oz$  ; celles qui passent par cet axe appartiennent au cas  $\ell_z = 0$ . Ensuite, on observe

l'existence d'un minimum  $\theta_e$  qui semble tendre vers  $\pi/2$  lorsque  $\alpha$  devient grand et vers  $\pi$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0. On peut confirmer ces observations en cherchant  $\theta_e$  : pour cet angle, la dérivée de  $E_p^{eff}(\theta; \ell_z)$  doit s'annuler. On obtient ainsi l'équation suivante :

$$\sin^4 \theta_e = -2 \alpha \cos \theta_e$$

Le signe négatif indique que  $\theta_e > \pi/2$ . On voit aussi immédiatement que si  $\alpha$  tend vers 0,  $\theta_e$  tend vers  $\pi$ . Enfin, en écrivant cette relation sous la forme :  $\cos \theta_e = -\sin^4 \theta_e / 2\alpha$ , on voit que si  $\alpha$  devient grand  $\theta_e$  tend vers  $\pi/2$ .

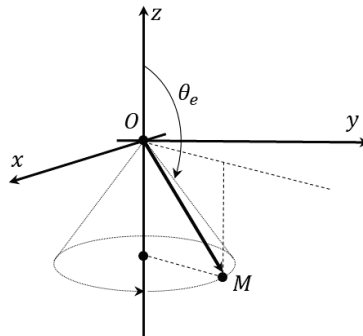
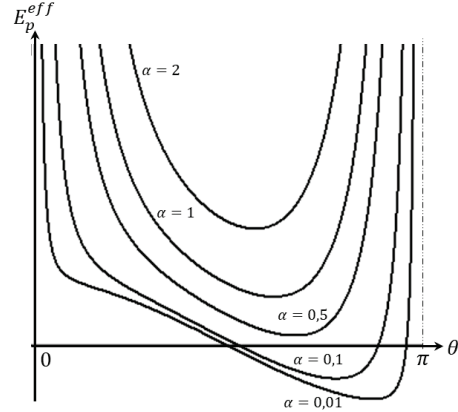
• Lorsque l'énergie du pendule prend la valeur  $E_p^{eff}(\theta_e; \ell_z)$  qui est la valeur minimale de  $E_p^{eff}$ , l'angle  $\theta$  ne peut prendre que la valeur  $\theta = \theta_e \forall t$ . Mais le pendule n'est pas au repos, car sa vitesse angulaire  $\dot{\varphi}$  n'est pas nulle. En effet, elle est telle que :

$$m L^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta_e = Cte = \ell_z \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{\ell_z}{m L^2 \sin^2 \theta_e}$$

Elle est donc constante et les équations horaires du mouvement sont dans ce cas précis :

$$\begin{cases} r = L \\ \theta = \theta_e \\ \varphi = \frac{\ell_z}{m L^2 \sin^2 \theta_e} t + \varphi_0 \end{cases}$$

La trajectoire est donc un cercle de rayon  $a = -L \cos \theta_e$  qui se réalise dans un plan parallèle au plan  $xOy$  et sur un cône de demi-angle au sommet  $\pi - \theta_e$ .



## CHAPITRE 16

**C82. Définition du centre de masse indépendant de l'origine choisie.** Prenons une origine  $O$ . Alors, d'après le cours, le barycentre  $C$  sera tel que :

$$\overrightarrow{OC} := \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overrightarrow{OP_{\alpha}}$$

Prenons une autre origine  $A$  et appelons  $C^*$ , le nouveau barycentre tel que :

$$\overrightarrow{AC^*} := \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}}$$

Alors, en insérant la relation de Chasles dans cette expression, on a :

$$\overrightarrow{AC^*} := \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\overrightarrow{OP_{\alpha}} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} - \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC}$$

Donc  $C^* = C$ .

**C83. Centre de masse de deux points matériels.** Le centre de masse  $C$  a la propriété suivante (cf cours) :

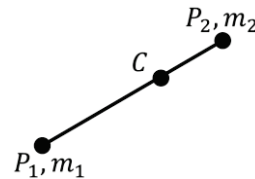
$$\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overrightarrow{CP_{\alpha}} = \vec{0}$$

Pour deux points matériels, cette propriété prend la forme :

$$m_1 \overrightarrow{CP_1} + m_2 \overrightarrow{CP_2} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CP_1} = -\frac{m_2}{m_1} \overrightarrow{CP_2}$$

Les deux vecteurs  $\overrightarrow{CP_1}$  et  $\overrightarrow{CP_2}$  sont donc colinéaires et ont le point  $C$  en commun :  $P_1$ ,  $C$  et  $P_2$  sont donc alignés. Et comme  $\overrightarrow{CP_1}$  est dans le sens opposé à  $\overrightarrow{CP_2}$ , le point  $C$  est donc situé entre les deux points  $P_1$  et  $P_2$ .

En examinant la relation précédente, on voit que si  $m_1 \gg m_2$ , alors  $\overrightarrow{CP_1} \rightarrow \vec{0}$  : le centre de masse  $C$  tend vers le point  $P_1$ . À l'inverse, si  $m_2 \gg m_1$ , c'est  $\overrightarrow{CP_2}$  qui tend vers  $\vec{0}$  et  $C$  converge vers le point  $P_2$ .



**C85. Chocs élastiques unidimensionnels.** Pour fixer les idées posons que  $P_1$  ait la vitesse :  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$ , et que  $P_2$  ait la vitesse :  $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_x$  avant le choc. L'égalité des

quantités de mouvement totales avant et après le choc imposent, après projection sur l'axe  $Ox$  :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

De cette première égalité, on peut en tirer par exemple  $v'_2$  que l'on peut ensuite injecter dans l'équation de la conservation de l'énergie qui impose :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

On obtient ainsi une équation du second degré en  $v'_1$  qui fournit une seule solution (l'autre étant  $v'_1 = v_1$  qui est la solution avant le choc) :

$$v'_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} v_1 + \frac{2\alpha}{\alpha + 1} v_2$$

Où l'on a posé :  $\alpha = m_1/m_2$ . Ce qui induit :

$$v'_2 = -\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} v_2 + \frac{2\alpha}{\alpha + 1} v_1$$

À partir de ces deux relations, on pourra examiner différents cas :  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $v_2 = 0$ , etc...

**C86. Chocs parfaitement inélastiques unidimensionnels.** Cette fois, l'équation de conservation de la quantité de mouvement totale est, si on appelle  $\vec{v} = v \vec{u}_x$  la vitesse de la particule de masse  $(m_1 + m_2)$  après le choc.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

D'où :

$$v = \frac{\alpha}{\alpha + 1} v_1 + \frac{1}{\alpha + 1} v_2$$

Et il n'y a pas d'autre équation de conservation pour ce type de choc.

## CHAPITRE 17

**C89. Le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène et le modèle de Bohr (1913).**

Afin de se conformer aux notations du chapitre 17, la particule de masse  $m_1$  sera identifiée au proton car sa masse est environ 1836 fois supérieure à celle de l'électron. Les deux particules interagissent via la force de Coulomb qui s'écrit, avec les mêmes notations qu'au chapitre 17 :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

On voit qu'il suffit formellement de remplacer la quantité " $G m_1 m_2$ " par " $q^2/4\pi\epsilon_0$ ".

La réduction du problème à deux corps en un problème à un seul corps fictif se réalise avec le même changement de variables. Le centre de masse du système est en mouvement rectiligne uniforme et l'équation d'évolution de la variable  $\vec{r}$  est ici :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \doteq - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \vec{u}_r$$

Et la loi des aires s'écrira encore sous la forme :

$$r^2 \left| \dot{\theta} \right| \doteq Cte = \frac{\ell}{\mu}$$

En suivant la logique du chapitre 17, on arrive alors à l'équation des trajectoires possibles :

$$\frac{1}{r} \doteq \frac{\mu q^2}{4\pi\epsilon_0 \ell^2} \{1 + e \cos(\theta + \Phi)\} \quad (6)$$

où  $e$  et  $\Phi$  sont là aussi des constantes à déterminer par les conditions initiales. On peut choisir  $\Phi = 0$  en orientant judicieusement les axes du référentiel, et l'excentricité  $e$  génère la famille des courbes coniques lorsqu'elle varie dans l'intervalle  $[0, \infty[$ .

- Lorsque  $e = 0$  : la courbe est un cercle de centre  $C$  (le centre de masse des deux particules) et de rayon  $r = 4\pi\epsilon_0 \ell^2 / q^2 \mu$ .
- Lorsque  $0 < e < 1$  : la courbe est une ellipse dont l'un des foyers est  $C$ . Le grand axe de l'ellipse est dirigé le long de  $Cx$  et le petit axe le long de  $Cy$ .
- Lorsque  $e = 1$  : la courbe est une parabole de foyer  $C$  et d'axe de symétrie  $Cx$ .
- Lorsque  $e > 1$  : la courbe est une branche d'hyperbole de foyer  $C$  et d'axe de symétrie  $Cx$ .

L'énergie mécanique s'écrit ici, après avoir utilisé la loi des aires :

$$E_m \doteq E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \left[ \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{\mu r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} \right]$$

La discussion qui s'ensuit sera la même que pour le cas gravitationnel avec cette fois une énergie  $E$  qui sera, dans tous les cas, supérieure à la valeur minimale de l'énergie potentielle effective :  $-\mu q^4 / 2(4\pi\epsilon_0)^2 \ell^2$ . Pour cette valeur de l'énergie, le mouvement est circulaire uniforme de rayon :  $r_* = 4\pi\epsilon_0 \ell^2 / q^2 \mu$  et de vitesse angulaire :

$$\left| \dot{\theta} \right| = \omega_{circ} = \frac{\ell}{\mu r_*^2}$$

Le lien entre excentricité et énergie sera :

$$e \doteq \sqrt{1 + \frac{2 E (4\pi\varepsilon_0)^2 \ell^2}{\mu q^4}}$$

Enfin, la troisième loi de Kepler pour ce système s'écrit :

$$T^2 = \frac{4 \pi^2 \mu (4\pi\varepsilon_0)}{q^2} a^3$$

où  $a$  est le demi grand axe de l'ellipse. En particulier, lorsque le mouvement est circulaire uniforme avec l'approximation que le proton est fixe en  $C$  en raison de sa grande inertie comparée à celle de l'électron dont la masse est  $m_2 = m$ , on a :

$$T_{circ}^2 = \frac{4 \pi^2 m (4\pi\varepsilon_0)}{q^2} r_*^3 \Leftrightarrow T_{circ} = 2\pi \frac{(4\pi\varepsilon_0)^2 \ell^3}{m q^4}$$

• Dans le cas d'une orbite circulaire et dans l'approximation où le proton est fixe en  $C$ , l'énergie de l'électron est :

$$E = \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{m r_*^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{r_*} = \frac{1}{2} \frac{m q^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \ell^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{r_*} = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0) r_*}$$

Par ailleurs, nous savons que la vitesse angulaire du mouvement circulaire est  $\omega_{circ} = \ell / m r_*^2$ , on peut aussi écrire :

$$\omega_{circ}^2 r_*^2 = \frac{q^4}{\ell^2 (4\pi\varepsilon_0)^2}$$

Donc, en remplaçant  $r_*$  par sa valeur :

$$E = \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{m r_*^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{r_*} = \frac{1}{2} \frac{m q^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \ell^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{r_*} = -\frac{1}{2} m r_*^2 \omega_{circ}^2$$

Admettons avec Bohr que l'on ait :

$$E = E_n = \hbar \omega_{circ} f(n)$$

Alors, on obtient d'abord, grâce à la première écriture de  $E$  :

$$r_* = r_{*,n} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar \omega_{circ} f(n)}$$

Puis, en injectant cette expression de  $r_*$  dans la seconde écriture de  $E$ , on trouve :

$$E = E_n = \frac{1}{8} \frac{m q^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2 [f(n)]^2}$$

La différence d'énergie  $\Delta E$  lorsque l'électron transite entre deux orbites circulaires caractérisées par les deux nombres quantiques  $n$  et  $n'$  est alors :

$$\Delta E = E_n - E_{n'} = \frac{1}{8} \frac{m q^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \left\{ \frac{1}{[f(n)]^2} - \frac{1}{[f(n')]^2} \right\}$$

Afin de satisfaire à la loi empirique de Balmer, il faut donc que :

$$f(n) = C n$$

Où  $C$  est une constante à déterminer.

• Avec  $C = 1/2$ , la constante empirique  $A$  doit être égale, dans ce modèle proposé par Bohr, à :

$$A = \frac{1}{2} \frac{m q^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = \frac{m q^4}{2 \epsilon_0^2 h^2}$$

On trouve numériquement :  $A \cong 13.6 \text{ eV}$ .

• En reprenant l'écriture de  $E$  trouvée précédemment, on a donc :

$$E = E_n = -\frac{A}{n^2}$$

Et, à l'aide de la première écriture de  $E$ , on obtient les rayons des orbites associées :

$$r_* = r_{*,n} = \frac{q^2}{2 (4\pi\epsilon_0) A} n^2 = \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}{m q^2} n^2 = a_0 n^2$$

Où nous poserons que  $a_0$  est le rayon de Bohr, c'est-à-dire le rayon de l'orbite la moins énergétique de cet atome d'hydrogène pré-quantique : cette orbite et son énergie correspondante correspondent niveau fondamental de l'atome d'hydrogène. Le calcul fournit :  $a_0 \cong 0.53 \text{ \AA}$ . Les autres niveaux sont les niveaux excités de l'atome d'hydrogène. Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , l'énergie de l'atome d'hydrogène tend vers 0 et l'électron est infiniment éloigné du proton : l'atome est ionisé. L'énergie d'ionisation est :  $E_{n \rightarrow \infty} - E_{n=1} = 13.6 \text{ eV}$ .

## CHAPITRE 18

**C90. Force inertielle au sein d'un référentiel en mouvement rectiligne varié.** Les forces à l'œuvre vis-à-vis du référentiel  $\mathcal{R}'$  sont : le poids du point matériel qui vaut :  $\vec{P} = m \vec{g}_0 = m g_0 \vec{u}_z$  ; la tension du fil rigide, inconnue mais dirigée le long de  $-\vec{u}_r$ , car il n'y a pas de frottements :  $\vec{T} = -T \vec{u}_r$  ; ainsi que la force d'inertie qui s'écrit ici :  $\vec{F}_e = -m d^2 \overline{OO'}/dt^2 = -m A(t) \vec{u}_x$ .

Le point matériel est repéré dans la base  $\{\vec{u}_{r'}, \vec{u}_{\theta'}\}$  des coordonnées polaires associées à  $\mathcal{R}'$  par :  $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M} = L \vec{u}_{r'}$ . On en déduit l'équation de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$  :

$$m \vec{a}' = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_e$$

Soit, après avoir exprimé les vecteurs dans la base  $\{\vec{u}_{r'}, \vec{u}_{\theta'}\}$  :

$$\begin{cases} -m L \dot{\theta}'^2 = m g_0 \cos\theta' - T - m A(t) \sin\theta' \\ m L \ddot{\theta}' = -m g_0 \sin\theta' - m A(t) \cos\theta' \end{cases}$$

La première équation donne la valeur de  $T$  à chaque instant si  $\theta(t)$  est connu. La seconde équation est l'équation du mouvement pour  $\theta$ .

• Dans l'approximation des petits angles, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta}' + \frac{g_0}{L} \theta' = -\frac{A}{L}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre en  $\theta'$ , linéaire, à coefficients constants et avec second membre constant, dont la solution générale est :

$$\theta' = C \cos(\omega t + \phi) - \frac{A}{g_0}$$

Où l'on a posé  $\omega = \sqrt{g_0/L}$ , la fréquence propre du pendule. On voit que le pendule va osciller de part et d'autre de la valeur  $\theta_e = -A/g_0$ . Il est donc nécessaire, pour que l'approximation des petits angles soit justifiée, que  $A \ll g_0$ . Sous cette condition, la tension du pendule est alors, à l'ordre 1 en  $\theta'$  :

$$T \cong m g_0 - m A \theta' = m g_0 (1 - A \theta' / g_0) \cong m g_0 \left( 1 - \frac{A C}{g_0} \cos(\omega t + \phi) \right)$$

Où l'on a négligé le terme  $(A/g_0)^2$  puisqu'il doit être du second ordre.

En fait la valeur  $\theta_e = -A/g_0$  est la position d'équilibre du pendule vis-à-vis du référentiel  $\mathcal{R}'$ . En effet, l'équation de l'équilibre des forces dans  $\mathcal{R}'$  donne :

$$\begin{cases} 0 = m g_0 \cos\theta'_e - T - m A \sin\theta'_e \\ 0 = -m g_0 \sin\theta'_e - m A \cos\theta'_e \end{cases}$$

La première équation donnera la valeur de la tension à l'équilibre et la deuxième donne la valeur de  $\theta'_e$  :

$$\tan \theta'_e = -\frac{A}{g_0}$$

Aux petits angles, ( $\tan \theta'_e \cong \theta'_e$ ), on a bien :  $\theta'_e \cong -A/g_0$ .

*Remarque* : on pourrait aussi faire une approximation des petits angles dans le voisinage de la position non approximée  $\theta'_e$  en posant  $\theta' = \theta'_e + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ .

**C91. Forces inertielles au sein d'un référentiel en rotation uniforme.** Au sein du référentiel  $\mathcal{R}'$ , les forces qui s'exercent sur la bille sont : son poids  $\vec{P}$ , qui s'écrit ici :  $\vec{P} = m \vec{g}_0 = -m g_0 \vec{u}_z$  ; la réaction de la tige, qui lui est perpendiculaire puisqu'il n'y a pas de frottements :  $\vec{N} = N_{y'} \vec{u}_{y'} + N_z \vec{u}_z$  ; la réaction  $\vec{R}$  du taquet qui doit être située le long de la tige :  $\vec{R} = R \vec{u}_{x'}$  ; enfin, les forces d'inertie qui, à l'équilibre, se résument à  $\vec{F}_e$ . Si  $O'$  est confondue avec  $O$ , alors :

$$\vec{F}_e = -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

Avec ici :  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$  et  $\overrightarrow{O'M} = d \vec{u}_{x'}$ , à l'équilibre. Les équations de l'équilibre écrites dans la base  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'} = \vec{u}_z\}$  sont :

$$\begin{cases} 0 = R + m \omega^2 d \\ 0 = N_{y'} \\ 0 = -m g_0 + N_z \end{cases}$$

Ainsi, la réaction du taquet vient compenser la force d'inertie centrifuge qui agit sur la bille, et la réaction de la tige compense son poids.

• Si on convient de placer l'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  à la distance  $h$  de  $O$  de telle sorte que :  $\overrightarrow{OO'} = h \vec{u}_{x'}$ , il faut tenir compte du fait que la bille est maintenant repérée par :  $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = (d - h) \vec{u}_{x'}$ . Mais la force d'inertie  $\vec{F}_e$  est maintenant :

$$\vec{F}_e = -m \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

On peut calculer l'accélération de  $O'$  soit en projetant  $\vec{u}_{x'}$  sur la base fixe  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ , soit en utilisant deux fois la formule de Bour (chapitre 7). On obtient ainsi :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} = -h \omega^2 \vec{u}_{x'}$$

D'où :

$$\vec{F}_e = -m \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = m h \omega^2 \vec{u}_{x'} + m \omega^2 (d - h) \vec{u}_{x'}$$

On retrouve bien sûr la même force que précédemment, mais il a fallu ici prendre en compte l'accélération de  $O'$ .

• Dans la situation où le taquet est enlevé, la réaction  $\vec{R}$  n'existe plus ; la réaction  $\vec{N}$  de la tige est toujours présente et il faut tenir compte de la force de Coriolis dans le

bilan des forces puisque la bille est maintenant en mouvement. Par ailleurs, la bille est repérée par sa coordonnée  $x'$  le long de la tige :  $\overrightarrow{O'M} = x' \vec{u}_{x'}$ . L'équation de la dynamique de la bille vis-à-vis de  $\mathcal{R}'$  est :

$$m \vec{a}' = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

C'est-à-dire, dans la base  $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'} = \vec{u}_z\}$  :

$$\begin{cases} m \ddot{x}' = m \omega^2 x' \\ 0 = N_{y'} - 2m \omega \dot{x}' \\ 0 = -m g_0 + N_z \end{cases}$$

On voit que la réaction de la tige, non seulement compense le poids de la bille selon  $\vec{u}_z$ , mais également la force de Coriolis qui agit selon  $\vec{u}_y$ .

Le long de l'axe du mouvement, l'équation différentielle qui régit le mouvement de la bille est :

$$\ddot{x}' - \omega^2 x' = 0$$

Sa solution générale est :

$$x'(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$$

Avec pour conditions initiales :  $x'(t=0) = d$  et  $\dot{x}'(t=0) = 0$ , d'où l'équation horaire du mouvement :

$$x'(t) = d \operatorname{ch}(\omega t)$$

où  $\operatorname{ch}$  est la fonction « cosinus hyperbolique ».

A l'aide de la relation de Chasles, on en déduit aussi l'équation horaire du mouvement de la bille vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} - \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{O'M} = d \operatorname{ch}(\omega t) \vec{u}_{x'}$$

Expression dans laquelle il faut exprimer  $\vec{u}_{x'}$  dans la base fixe  $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ . On trouve ainsi les équations horaires de  $M$  vis-à-vis de  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{cases} x(t) = d \operatorname{ch}(\omega t) \cos \omega t \\ y(t) = d \operatorname{ch}(\omega t) \sin \omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$



## PETITE BIBLIOGRAPHIE

**Ouvrages de niveau L1.** Les ouvrages comme celui-ci, traitant de la mécanique du point matériel à un niveau post-baccalauréat, paraissent très régulièrement. Il est donc difficile de conseiller tel ou tel auteur plutôt qu'un autre : il vaut mieux aller dans une bibliothèque universitaire et faire un choix basé sur le plan proposé, la présentation, la didactique et le style adoptés.

On peut citer ici les ouvrages parus dernièrement sur le sujet sans chercher à être exhaustif :

- P. Denis, *Mécanique newtonienne*, Ellipses, 2021.
- A. Gibaud, M. Henry, *Mécanique du point*, Dunod, 2019.
- L. Villain, *Mécanique du Point*, De Boeck, 2017.

Il existe aussi deux cours de physique de l'école américaine accessibles dès la première année d'études supérieures qui sont devenus des classiques aujourd'hui :

- R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Cours de physique : mécanique 1*, Dunod, 2020.
- M. A. Rudermann, Ch. Kittel, W.D. Knight, *Cours de physique de Berkeley : tome 1 : mécanique*, Armand Colin, 1972.

**Autour de la physique.** À notre niveau post-baccalauréat, on pourra lire avec grand profit :

- A. Einstein et L. Infeld, *L'évolution des idées en physique*, Flammarion, 2015.
- R. Feynman, *La nature de la physique*, Points, 1980.
- H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, 2017.
- A. Einstein, *La théorie de la relativité restreinte et générale*, Dunod, 2021.

**Ouvrages de niveau un peu plus avancé (L2/L3).** Il faut ici conseiller l'école russe :

- L. Landau et E. Lifchitz, *Physique Théorique, Tome I : mécanique*, Éditions MIR, 1988.

Et aussi « *le Goldstein* » qui est un ouvrage de référence international de la dynamique classique à ce niveau plus avancé et au-delà, mais qui n'est pas traduit en français :

- H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2000. En anglais.

Enfin, toujours à ce niveau un peu plus avancé, et en accès direct sur internet :

- L. Duriez, *Cours de Mécanique céleste classique*.



## INDEX

Abscisse 18  
Abscisse curviligne 64  
Accélération 40 (loi de transformation des) 83  
Accélération absolue 83  
Accélération angulaire 44  
Accélération centrale 57  
Accélération d'entraînement 84  
Accélération dans la base de Serret-Frenet 70  
Accélération de la pesanteur 137  
Accélération de Coriolis 84  
Accélération en coordonnées cartésiennes 40  
Accélération en coordonnées polaires 44  
Accélération en coordonnées sphériques **C32** 62  
Accélération normale 71  
Accélération relative 84  
Accélération tangentielle 70  
Accélération uniforme 96  
Aphélie 26 figure 7, 226  
Approximation des petits angles 158  
Arc de courbe 65 (élément d') 63  
Archimède (spirale d') **C41** 87 (poussée d') 103, 127  
Aristote (physique du mouvement d') 92  
Atome (d'hydrogène) 123, 139, **C89** 230  
Balance (romaine) 195, **C77** 201  
Barycentre des masses 210  
Base 280  
Base de Serret-Frenet 65  
Base des coordonnées cartésiennes 29, **C19** 36  
Base des coordonnées cylindriques **C16** 34, **C18** 34, **C19** 36  
Base des coordonnées polaires **C16** 34, **C18** 34, **C19** 36  
Base des coordonnées sphériques 32, **C18** 34, **C19** 36  
Base directe 32, 283  
Base fixe 29, 289  
Base indirecte 283  
Base locale 33, 290  
Base orthonormée 281  
Bifurcation 190

Binet (formule de) 60, 220  
Binormale 66  
Bohr (modèle de) **C89** 230  
Boost (galiléen) **C46** 132  
Bour (formule de) 82  
Bras de levier 195  
Centre de masse 210, **C82** 212, (théorème du) 211  
Centre de masse de deux points matériels **C83** 212, 216  
Centre d'inertie 210  
Cercle trigonométrique **C6** 24  
Champ électrique 123, 125  
Champ électrostatique ou coulombien 123  
Champ gravitationnel 121, (généré par la Terre) 124, **C47** 133, (au voisinage de la surface terrestre) **C48** 137  
Champ magnétique (particule dans un) 125, 144, **C73** 186  
Champ scalaire 307  
Champ vectoriel 121  
Choc 207, **C87** 213  
Choc élastique **C84** 213, **C85** 213  
Choc inélastique **C84** 213, **C86** 213  
Chute libre 91, 92, 103, 130, **C50** 139, **C58** 156, 164, **C65** 183  
Chute libre (sa déviation vers l'Est) 106, 111, 238  
Chute libre (selon Aristote) 93  
Clef à molette 195, **C78** 202  
Coefficient de frottement fluide 127  
Colatitude 19  
Composante 30, 281, 282  
Composante normale 71  
Composante orthoradiale 43  
Composante radiale 32  
Composante tangentielle 70  
Conditions initiales 143, 152, 153, 182, 304  
Coniques 221  
Constante de raideur 126  
Constante des aires 60  
Constante du mouvement 58, 170  
Coordonnées 18  
Coordonnées cartésiennes 18  
Coordonnées cylindriques **C4** 23, **C7** 24  
Coordonnées polaires **C3** 22, **C7** 24  
Coordonnées sphériques 18, **C5** 24, **C7** 24

Coriolis 107 (accélération de) 84 (force de) 234  
Corps (problème à deux) 215, 219  
Corps fictif 219  
Corps pesant 94  
Cote 18  
Coulomb (Lois de ) (électrostatique) 122, (frottement solide) 138  
Courbe gauche 21  
Courbe plane 21  
Courbe rectiligne 21  
Courbure 68  
Courbure en fonction des vecteurs vitesse et accélération 71  
Cycloïde **C40** 87  
Darboux (vecteur de) **C34** 74  
Degré de liberté 174  
Densité (volumique de masse) 133  
Dérivée d'une fonction 37, 285  
Dérivée d'un vecteur 288  
Dérivée d'un vecteur de norme constante 290  
Développement limité 287  
Différentielle d'un champ scalaire 308  
Différentielle d'un vecteur 288  
Différentielle d'une fonction 37, 287  
Différentielle du vecteur position **C21** 44  
Dimensions des coordonnées **C2** 22  
Dimensions des grandeurs physiques **C44** 115  
Distance minimale d'approche 226  
Einstein (principe d'équivalence d') **C96** 273  
Élément d'arc de courbe 63  
Énergie 159, (transformation de l') 164, 170, 173  
Énergie cinétique 163, (théorème de l') 163  
Énergie cinétique en référentiel non galiléen 247, (théorème de l') 247  
Énergie potentielle 168, (discussion graphique) 176, **C69** 185  
Énergie potentielle centrifuge 225  
Énergie potentielle effective **C80** 203, 225  
Énergie potentielle de gravitation 171, **C65** 183, **C70** 185  
Énergie potentielle élastique ou de rappel 171, **C67** 184  
Énergie potentielle et forces centrales **C70** 185  
Énergie potentielle d'une force constante **C66** 184  
Énergie mécanique 169, (théorème de) 170  
Énergie mécanique en référentiel non galiléen 248, **C93** 251  
Équation horaire 21

- Équation paramétrique d'une courbe 21 (au voisinage d'un point) **C33** 73
- Équation différentielle 46, 112, 297
- Équations du mouvement 112
- Équilibre dynamique 187
- Equilibre statique, 189
- Équilibre stable 189, 191
- Équilibre instable 189, 191
- Équilibre indifférent 189, 191
- Équilibre métastable 189
- Équipotentielle 307, 310
- Équivalence (principe d') **C96** 273
- Espace – sa nature physique 15
- Espace absolu (de Newton) 107, **C95** 270
- Excentricité 26, 221
- Fil à plomb 235
- Force 102, 104, 111, 119, 129 (transformation des) **C45** 131, **C46** 132, 233
- Force centrale 52, **C70** 185, 200, **C80** 203, 218
- Force centrifuge 234
- Force conservative 168
- Force constante **C57** 156, **C66** 184
- Force (inertielle) d'entraînement 234, **C90** 249, **C91** 249
- Force de Coriolis 234, 248
- Force de frottement fluide (ou visqueux) 126, 133, **C53** 140, 144, **C56** 156, **C60** 165
- Force de frottement solide 128, (Lois de Coulomb) 128, **C51** 140, **C61** 165
- Force de liaison **C63** 166
- Force de rappel 126, **C54** 154, **C55** 155, **C56** 156, **C67** 184
- Force de réaction 128, 129, **C63** 166
- Force effective 125
- Force élastique voir force de rappel
- Force électrostatique ou électrique ou coulombienne 122, 123, 124, **C70** 185
- Force gravitationnelle 120, 123, 124, **C70** 185
- Force inertielle 234, **C90** 249, **C91** 249, **C95** 270
- Force magnétique 125, 145, **C73** 186
- Force motrice 94, 111
- Force non conservative 168
- Force(s) fondamentales 119
- Fonction de force **C93** 251
- Foucault (pendule de) 107, 258, 262, 264, **C94** 266
- Fusée 113, 209
- Galilée 101, (transformation de) **C39** 86
- Gradient 163, 310

Grandeur physique **C44** 115  
Hélice circulaire 20, 52, **C37** 76  
Hélice spirale **C28** 55, **C36** 76, 151 figure 49  
Hypersurface (d'énergie constante) 182  
Inertie 94, 102, 105, 109, 111, 129, 234, **C96** 273  
Intégrale 291  
Intégrale première 181  
Interaction 113, 119, (gravitationnelle) 120, **C49** 148, (coulombienne) 122  
Invariance galiléenne **C45** 131  
Kepler 101, (lois de) 215, (problème de) 215  
Lancret (théorème de) **C38** 76  
Latitude 236  
Lever (équilibre) 187, 195, **C77** 201  
Liaison 129  
Loi des aires 58, **C31** 61, 101, 201, 215, 220  
Lois de transformation (inversion des) 85  
Longitude 19  
Longueurs élémentaires **C22** 45  
Longueur d'une courbe 65  
Mach (point de vue de) **C95** 270  
Masse 105, 129  
Masse grave 129, 275  
Masse inertielle 129, 275  
Masse réduite 219  
Masse variable 209  
Mécanique des quanta 232  
Moment cinétique 197 (théorème du) 197, 200, 220 (en référentiel non galiléen) 247  
Moment cinétique total **C92** 250  
Moment d'une force 196, 197  
Moment du vecteur vitesse 58  
Mouvement circulaire 50 (boucle) **C71** 185 (cerceau) **C72** 186  
Mouvement circulaire uniforme **C9** 25, **C25** 47, 51, **C30** 61, 97 (référentiel en) **C41** 87, 248  
Mouvement de diffusion 226  
Mouvement elliptique **C10** 26, **C11** 27, **C26** 47, 101, 215, 222, 227  
Mouvement hélicoïdal 52, **C28** 55  
Mouvement hélicoïdal circulaire uniforme 53, 72  
Mouvement lié 226  
Mouvement parabolique **C12** 27, **C24** 47, 103, 105 figure 36, **C58** 156  
Mouvement rectiligne 20, 49  
Mouvement rectiligne amorti **C27** 54, 147, **C56** 156

- Mouvement rectiligne uniforme 50, 96, 101, 109, 212 (référentiel en) **C39** 86, **C40** 87, **C45** 131
- Mouvement rectiligne uniformément varié 50, 96, **C57** 156, **C96** 273
- Mouvement rectiligne varié 50
- Mouvement rectiligne sinusoïdal **C8** 25, **C23** 45, **C54** 154, **C55** 155, 171
- Newton 104, (lois de) 109, (seau de) **C95** 270, (espace absolu de) 107, **C95** 270
- Normale principale 66
- Norme d'un vecteur 280, 282
- Ordonnée 18
- Oscillateur harmonique 126, **C54** 154, **C55** 155, **C67** 184, **C74** 186, 191
- Oscillateur amorti **C56** 156, 301
- Pendule de Foucault 107, 258, 262, 264, **C94** 266
- Pendule plan **C59** 157, **C62** 165, **C68** 185, **C79** 203
- Pendule sphérique **C81** 203
- Pendule tournant 255
- Périhélie 26 figure 7, 226
- Période 25 note 1
- Période propre **C54** 154
- Perturbatif (calcul) 240
- Planck (constante de) 16 note 2, **C89** 230
- Plan normal 66, 67
- Plan incliné 102, 128, 160, **C51** 140, **C61** 165, 166, 187, **C75** 192
- Plan osculateur 66, 67, 69
- Plan rectifiant 66, 67
- Poids (définition) 121, 124, (sur une planète en rotation) 235
- Poids apparent 237
- Point matériel 15
- Point coïncident 20 note 1, 21 figure 4, (méthode du) 84
- Point d'équilibre entre la terre et la lune **C76** 192
- Point fictif 211, 219
- Point selle 190
- Point col 190
- Portrait de phase 183, **C74** 186
- Position (loi de transformation des) 72 (vecteur) 29
- Primitive 292
- Principe d'équivalence **C96** 273
- Principe d'inertie 102, 109, 111
- Principe de relativité galiléenne 101, **C39** 86, **C45** 131
- Principe de superposition (des forces) 119, 121
- Principe des actions réciproques 105, 112, **C43** 114

- Principe fondamental de la dynamique 111 (reformulation) 208 (application du) 143 (en référentiel non galiléen) 233
- Produit scalaire 279, 282
- Produit vectoriel 282
- Produit mixte 283
- Puiseux (théorème de) **C37** 76
- Puissance instantanée 161
- Pulsation 25
- Pulsation propre 191
- Quantité de mouvement 205, (relativiste) 113 note 1, (théorème de la) 205, (totale) 205
- Rayon vecteur 29, **C17** 34, **C20** 36 (différentielle du) **C21** 44
- Rayon de courbure 68
- Rayon de torsion 69
- Référentiel 16
- Référentiel de Copernic 110
- Référentiel de laboratoire 239
- Référentiel et repères **C15** 33
- Référentiel équivalent **C1** 22
- Référentiel fixe (absolu) 77
- Référentiel galiléen 109
- Référentiel mobile (relatif) 77
- Référentiel non galiléen 233
- Référentiel terrestre 110
- Repère **C15** 33
- Ressort horizontal 126, **C54** 154, **C67** 184
- Ressort vertical 126, **C55** 155, **C56** 156, 170
- Rotation infinitésimale 198
- Runge – Lenz (vecteur de) **C88** 229
- Schwarz (théorème de) 169 note 1
- Seau (de Newton) **C95** 270
- Serret-Frenet (base de) 65 (formules de) 69, 70
- Spirale d'Archimède **C41** 87
- Spirale logarithmique 55, **C35** 75, **C36** 76, 152
- Stabilité (de l'équilibre) 190
- Surfaces élémentaires **C22** 45
- Système solaire 229 figure 79
- Tangente 286
- Taux d'accroissement 285
- Taylor (formule de) 286
- Temps (sa nature physique) 16, 93, 107

Temps de relaxation 54, 146  
Théorie (du mouvement) 91  
Torsion 69 (en fonction des vecteurs vitesse et accélération) 71  
Trajectoire 20  
Travail 159, 161  
Travail élémentaire 160  
Travail résistant 159  
Travail moteur 159  
Trochoïde **C40** 87  
Unités **C44** 115  
Variable collective 211  
Vecteur 279  
Vecteur accélération 40 voir Accélération  
Vecteur position 29 voir Rayon vecteur  
Vecteur rotation 80, 81, 199  
Vecteur rotation de la base de Serret-Frenet **C34** 74  
Vecteur vitesse 38 voir Vitesse  
Vitesse 38 (loi de transformation des) 79, 82  
Vitesse absolue 78  
Vitesse angulaire 44  
Vitesse aréolaire 59, 201  
Vitesse d'entraînement 79, 80, 81  
Vitesse dans la base de Serret-Frenet 70  
Vitesse en coordonnées cartésiennes 38  
Vitesse en coordonnées cylindriques **C21** 44  
Vitesse en coordonnées polaires 41  
Vitesse en coordonnées sphériques **C21** 44  
Vitesse relative 78-79  
Volumes élémentaires **C22** 45









# Cinématique et dynamique classiques du point matériel

## Initiation à la mécanique de Newton

L'ouvrage présent vise un public post-baccalauréat, de première et deuxième années universitaires ou de classes préparatoires. Son but est d'initier la lectrice ou le lecteur à la science classique du mouvement qu'est la mécanique de Newton, la philosophie qui l'accompagne et les mathématiques qui sont mises en œuvre pour la développer.

L'intention pédagogique est de pouvoir résoudre, en fin de parcours, le problème du mouvement d'une planète autour de son soleil et celui du mouvement des objets sur une terre en rotation sur elle-même, en particulier : la déviation de la chute libre vers l'Est et le pendule de Foucault. Car ce sont ces questions auxquelles a été confrontée cette mécanique dès sa construction il y a près de 400 ans.

Auparavant, les principales notions de la théorie – et que la physique en général utilise couramment – auront été mises en place chapitre après chapitre, discutées et mises en pratique : référentiels et changements de référentiels, systèmes de coordonnées et bases associées, vitesse et accélération d'un point matériel, les trois lois de Newton bien sûr, avec les notions de force et de masse, de travail et de moment d'une force, d'énergie et de moment cinétiques, d'énergie potentielle et mécanique, etc. Les mathématiques employées font l'objet de cinq annexes que l'on peut consulter à tout moment.

Enfin, les indispensables exercices qui accompagnent l'ensemble de l'ouvrage sont tous corrigés et explicités en fin de volume.

*Thierry Gourieux exerce son métier de physicien au sein de l'université de Lorraine, au laboratoire de physique et chimie théoriques (LPCT) sur le site de la faculté des sciences de Vandœuvre-lès-Nancy.*

www.editions-ellipses.fr

