

COURS DE MÉCANIQUE 1
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL
Juin 2020

Responsable du cours :

SYLLA Moussa

Maître de Conférences

**CHAPITRE I : RAPPEL DE CALCULS
VECTORIELS**

On note $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère cartésien orthonormé direct de l'espace à 3 dimensions :

O est l'origine de R , les axes $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$ et $(O; \vec{k})$ sont orthogonaux deux à deux, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base orthonormée directe de R .

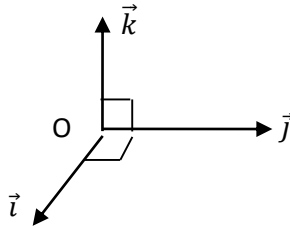


Figure 1 : Base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

I.1 PRODUIT SCALAIRE

Considérons deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} de coordonnées cartésiennes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) sur la base de R :

$$\vec{U} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \quad \text{ou bien } \vec{U} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \quad \text{ou bien } \vec{V} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire des vecteurs \vec{U} et \vec{V} est le nombre réel noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$, défini par :

$$\boxed{\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{i=1}^3 u_i v_i} \tag{1.a}$$

La formule (1.a) reste valable lorsque la base de (R) est orthonormée.

I.1.1 Norme d'un vecteur

On considère un vecteur \vec{U} de coordonnées cartésiennes (u_1, u_2, u_3) sur la base de (R) . La norme de \vec{U} est le nombre réel noté $\|\vec{U}\|$ défini par :

$$\boxed{\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2}} \tag{1.b}$$

La formule (1.b) reste valable lorsque la base de (R) est orthonormée.

Autre notation de la norme $\|\vec{U}\| = U$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base orthonormée de $(R) \Rightarrow \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

I.1.2 Représentation géométrique

Considérons un plan rapporté au repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orthonormé d'origine O (figure 2) :

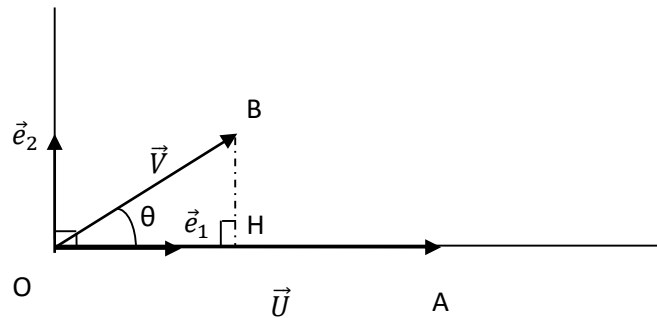


Figure 2 : plan rapporté à $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soient \vec{U} et \vec{V} deux vecteurs de coordonnées respectives $(u_1, 0)$ et (v_1, v_2) dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, définis par les points A et B du plan tels que :

$$\vec{U} = \vec{OA} = u_1 \vec{e}_1$$

$$\vec{V} = \vec{OB} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \text{ et } \theta = (\vec{U}, \vec{V})$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1, \text{ or } v_1 = \|\vec{V}\| \cos \theta = V \cos \theta \text{ et } \|\vec{U}\| = u_1 = U$$

$$\Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \cos \theta = U \times V \cos \theta$$

De façon générale si \vec{U} et \vec{V} ont des coordonnées quelconques respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans le repère à trois dimensions, on a la formule suivante :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \cos \theta \tag{1.c}$$

Où $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$

Remarque : \vec{U} et \vec{V} sont orthogonaux ($\vec{U} \perp \vec{V}$) si et seulement si $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

I.2 PRODUIT VECTORIEL

Considérons deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} de coordonnées cartésiennes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans le repère orthonormé direct (R) . On appelle produit vectoriel de \vec{U} et \vec{V} , noté

$\vec{U} \wedge \vec{V}$, le vecteur \vec{W} .

$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ défini par :

$\vec{W} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ dans (R) :

$$\boxed{\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}} \quad (2.a)$$

Donc $w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$, $w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$, et $w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$

En appliquant la formule (2.a) à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de (R) :

$\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \end{cases}$$

$\forall \vec{U}$ et \vec{V} , on a :

$$\boxed{\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}} \quad (2.b)$$

I.2.1 Propriétés

Soit $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

. Cas où $\vec{W} = \vec{0} \Rightarrow \vec{U} = \vec{0}, \vec{V} = \vec{0}$ ou $\vec{U} // \vec{V}$

. $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} \Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{W} = 0$ et $\vec{V} \cdot \vec{W} = 0$ donc $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$

I.2.2 Calcul de la norme de $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

En utilisant la formule (2.a) on a :

$$\vec{W}^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$$

En développant et en arrangeant ces termes on obtient :

$$\boxed{\vec{W}^2 = \|\vec{U}\|^2 \times \|\vec{V}\|^2 [1 - \cos^2(\widehat{(\vec{U}, \vec{V})})] = \|\vec{U}\|^2 \times \|\vec{V}\|^2 \sin^2(\widehat{(\vec{U}, \vec{V})})}$$

I.3 PRODUIT MIXTE DE TROIS VECTEURS DANS UN ESPACE A 3 DIMENSIONS

Considérons trois vecteurs \vec{U}_1, \vec{U}_2 et \vec{U}_3 dans un espace à 3 dimensions rapporté à un repère orthonormé $(R) = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (figure 3).

Le produit mixte des trois vecteurs \vec{U}_1, \vec{U}_2 et \vec{U}_3 est la quantité scalaire définie par :

$$\boxed{(\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2) \cdot \vec{U}_3} \quad (3.a)$$

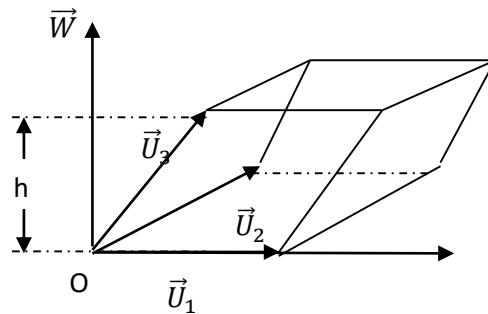


Figure 3 : parallélépipède construit sur $(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3)$

I.3.1 Calcul de Volume

La valeur absolue du produit mixte de la formule (3.a) s'identifie au volume limité par le parallélépipède de la figure 3, construit avec les 3 vecteurs \vec{U}_1, \vec{U}_2 et \vec{U}_3 .

L'aire de la base de ce parallélépipède est la norme du vecteur \vec{W} défini par :

$$\boxed{\vec{W} = \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2} \quad (3.b)$$

La hauteur h de ce parallélépipède est la norme du vecteur :

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{W}, \vec{U}_3}) \times \vec{U}_3} \quad (3.c)$$

I.3.2 Propriété du produit mixte

Par permutation circulaire, on obtient le résultat suivant pour le produit mixte des trois vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$:

$$\forall \vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3, (\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2) \cdot \vec{U}_3 = (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3) \cdot \vec{U}_1 = (\vec{U}_3 \wedge \vec{U}_1) \cdot \vec{U}_2 \quad (3.d)$$

I.4 DOUBLE PRODUIT VECTORIEL

Considérons trois vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ de l'espace à 3 dimensions. Le double produit vectoriel de \vec{U}_1, \vec{U}_2 et \vec{U}_3 est le vecteur défini par :

$$\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3) \quad (4.a)$$

En utilisant les coordonnées des vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ dans une base orthonormée, on montre que :

$$\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3) = (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3) \times \vec{U}_2 - (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2) \times \vec{U}_3 \quad (4.b)$$