

COURS DE MÉCANIQUE 1
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL
Juin 2020

Responsable du cours :

SYLLA Moussa

Maître de Conférences

CHAPITRE II CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

II.1 SYSTÈMES DE COORDONNÉES

La position d'un point matériel dans l'espace sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

II.1.1 Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes sont celles déjà évoquées dans le chapitre I. On considère l'espace à trois dimensions rapporté à un repère orthonormé direct $R_1(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ cartésien. Le point matériel A est repéré dans R_1 par ses coordonnées cartésiennes notées (x, y, z) :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

(2.a)

Ou : $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

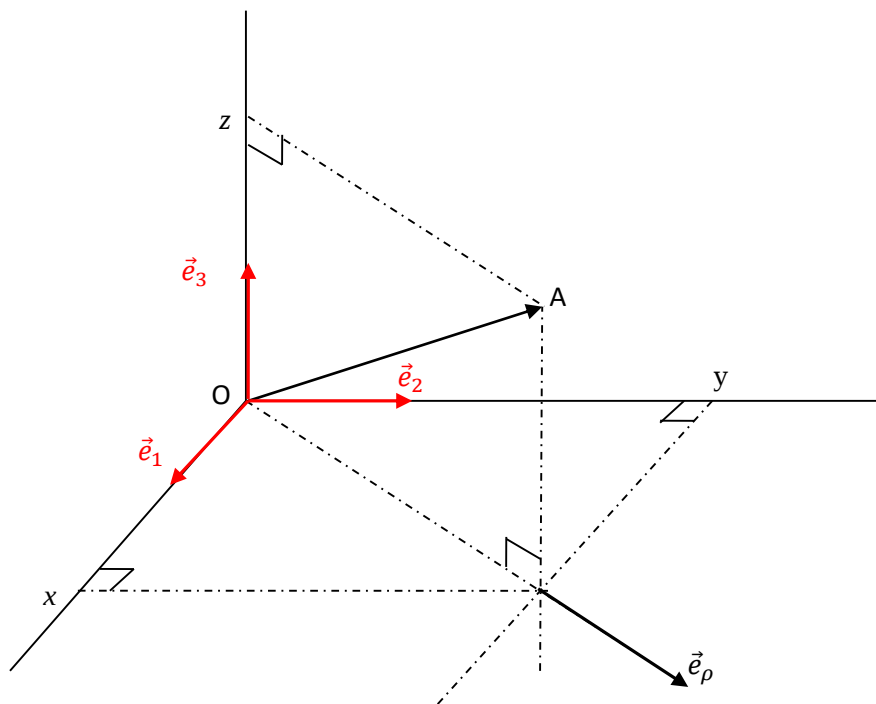


Figure 4 : repère cartésien $R_1(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

II .1 .2 Coordonnées cylindriques

On rapporte l'espace à 3 dimensions à un repère cylindrique $R_2 = (O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, d'origine O et de base orthonormée notée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

Considérons le point A de coordonnées cartésiennes (x, y, z) de la figure 5.

P et H désignent les projections orthogonales respectives de A sur le plan $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et sur l'axe $(O; \vec{e}_3)$.

Les paramètres ρ , φ et z sont définis par :

$\rho = \ \vec{OP}\ $, ρ est une longueur
$\varphi = (\vec{e}_1, \widehat{\vec{OP}})$: paramètre d'angle
$z = \ \vec{OH}\ $: la cote

(2.b)

La base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ est définie par :

$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{OP}}{\ \vec{OP}\ }$; $\vec{e}_z = \vec{e}_3, \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho$

(2.c)

Les paramètres (ρ, φ, z) définis en (2.b) représentent les coordonnées cylindriques du point A. Il résulte de la formule (2.b) la représentation géométrique suivante :

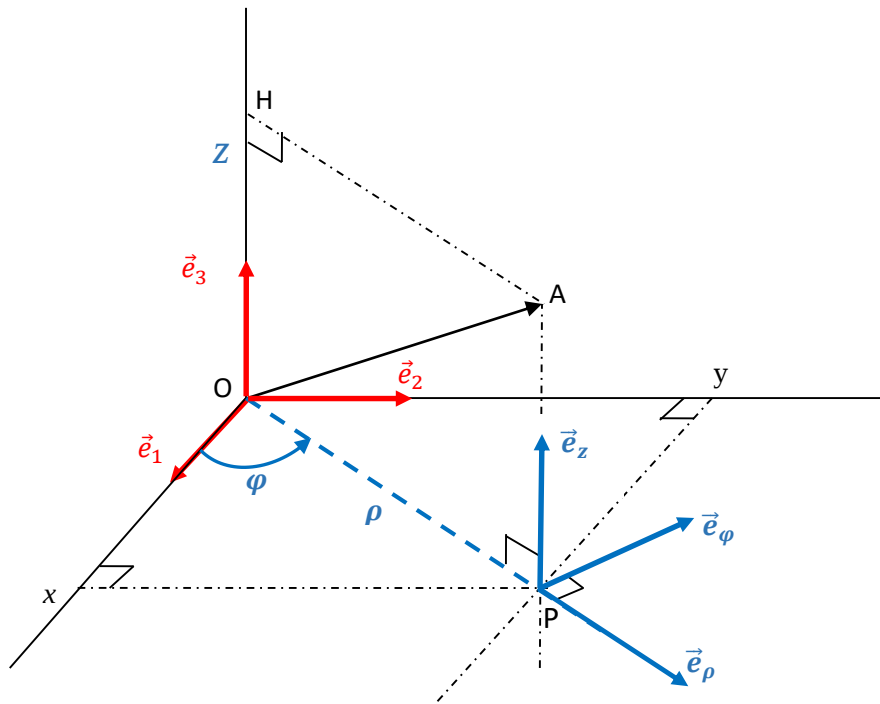


Figure 5 : repère cylindrique $R_2(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OH}}$$

(2.d)

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Dans le plan $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on obtient :

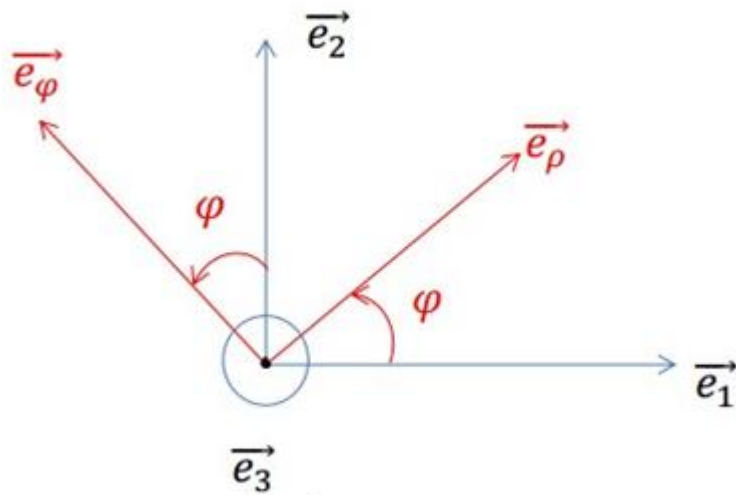


Figure (2.2.c)

Il en résulte :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\varphi) \vec{e}_1 + \sin(\varphi) \vec{e}_2 \\ \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \vec{e}_1 + \cos(\varphi) \vec{e}_2 \end{cases} \quad (2.e)$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OH} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

D'après (2.e) on a :

$$\overrightarrow{OA} = \rho \cos(\varphi) \vec{e}_1 + \rho \sin(\varphi) \vec{e}_2 + z \vec{e}_z$$

On rappelle que dans le repère cartésien R_1 , (x, y, z) sont les coordonnées de A :

$$\overrightarrow{OA} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_z = \rho \cos(\varphi) \vec{e}_1 + \rho \sin(\varphi) \vec{e}_2 + z \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (2.f)$$

Remarque : Les coordonnées cylindriques sont adaptées pour décrire des systèmes physiques qui ont une symétrie cylindrique.

II .1.3 Coordonnées sphériques

On rapporte l'espace à trois dimensions à un repère sphérique $R_3 = (O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ d'origine O de base orthonormée notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

Considérons le point A de coordonnées cartésiennes (x, y, z) de la figure 6.

P et H désignent les projections orthogonales respectives de A sur le plan $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et sur l'axe $(O; \vec{e}_3)$.

Les paramètres r, θ, φ sont définis par:

$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OA}\|, \text{ paramètre de longueur} \\ \theta = (\vec{e}_3, \widehat{\overrightarrow{OA}}), \text{ paramètre d'angle} \\ \varphi = (\vec{e}_1, \widehat{\overrightarrow{OP}}), \text{ paramètre d'angle} \end{cases} \quad (2.g)$$

La base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est définie par :

$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}, \vec{e}_\varphi = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r \quad (2.h)$$

Où on rappelle que $\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|}$

Les paramètres (r, θ, φ) définis en (2.h) sont appelés coordonnées sphériques du point A.

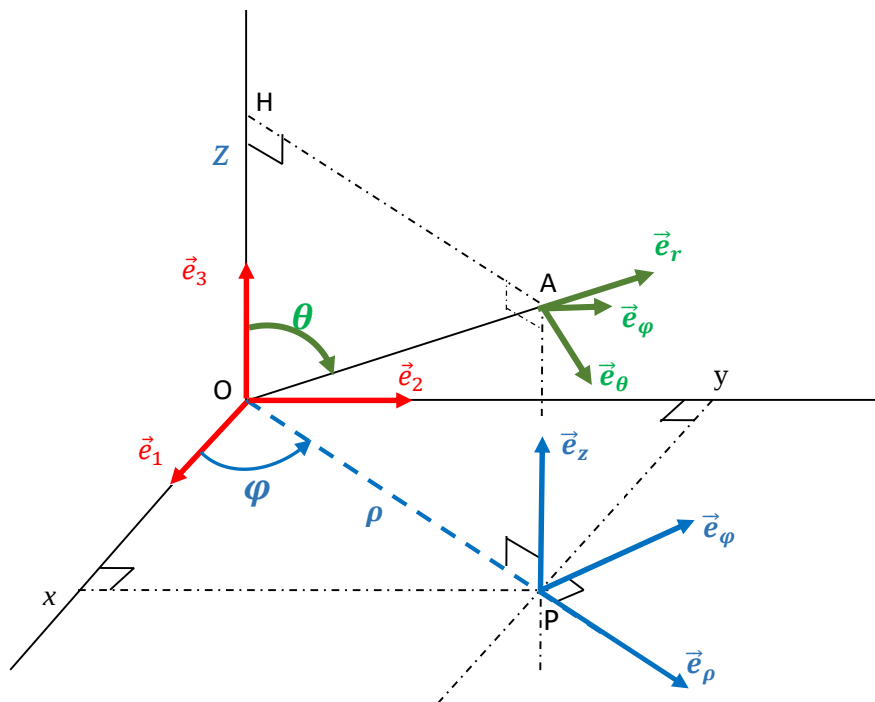


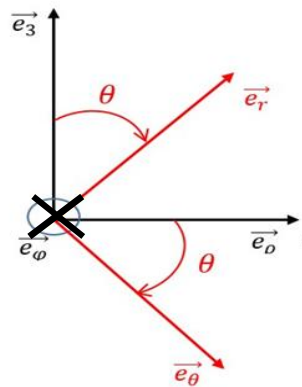
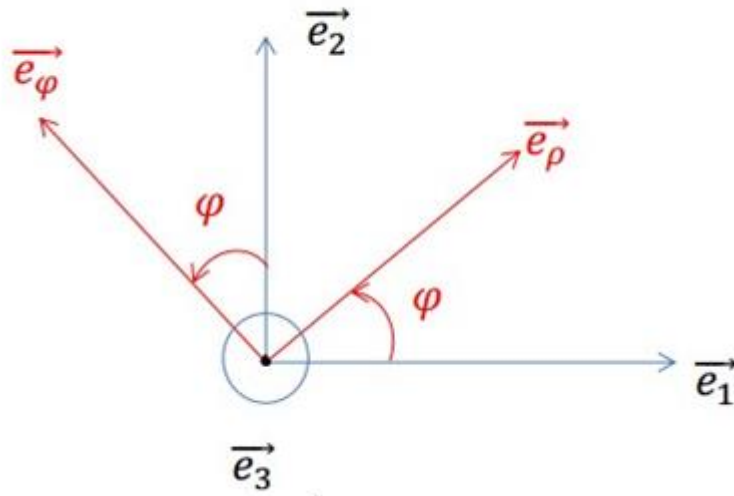
Figure 6 : repère sphérique $R_3 (O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$$\overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OA}\|\vec{e}_r; r = \|\overrightarrow{OA}\|$$

$$\overrightarrow{OA} = r\vec{e}_r$$

On rappelle que (x,y,z) sont les coordonnées cartésienne de A :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$



Ces figures nous donnent les projections suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos\varphi \vec{e}_1 + \sin\varphi \vec{e}_2 \\ \vec{e}_\varphi &= \cos\varphi \vec{e}_2 - \sin\varphi \vec{e}_1 \\ \vec{e}_r &= \cos\theta \vec{e}_3 + \sin\theta \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta \vec{e}_\rho - \sin\theta \vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_1 + \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_2 + \cos\theta \vec{e}_3 \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{e}_1 + \cos\theta \sin\varphi \vec{e}_2 - \sin\theta \vec{e}_3 \end{cases}$$

On obtient :

$$\overrightarrow{OA} = r\vec{e}_r = r \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_1 + r \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_2 + r \cos\theta \vec{e}_3 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad (2.i)$$

Remarque Les coordonnées sphériques sont adaptées pour décrire des systèmes physiques qui ont une symétrie sphérique.

II .2 NOTION DE RÉFÉRENTIEL ET VECTEUR POSITION

La cinématique est l'étude des mouvements des corps dans l'espace physique, indépendamment des causes qui les produisent. La cinématique est fondée sur la notion de temps.

L'espace physique est schématisé par un espace ou repère euclidien de référence à 3 dimensions noté R . Tout corps dont la position par rapport à R ne change pas avec le temps t est dit fixe ou au repos.

La donnée d'un repère d'espace R associé au temps t constitue un référentiel noté $R(t)$: Un repère à chaque instant.

On désigne par P , la position d'un point matériel à l'instant t dans le référentiel $R(t)$ d'origine O .

$\overrightarrow{OP}(t)$ est le vecteur position du point matériel dans $R(t)$ à l'instant t .

L'ensemble des positions $P(t)$ lorsque t décrit un intervalle J , constitue la trajectoire du point matériel.

II .3 VITESSE D'UN POINT MATÉRIEL

On considère le point matériel P de vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$ dans le référentiel $R(t) = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ($(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base orthonormée).

Le vecteur vitesse du point matériel P par rapport à $R(t)$, est le vecteur noté $\vec{V}(P/R)$ défini par :

$$\vec{V}(P/R(t)) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_{R(t)} \quad (3.1)$$

II .3.1 Composantes cartésiennes de $\vec{V}(P/R(t))$

On désigne par (x, y, z) les composantes de $\overrightarrow{OP}(t)$ dans $R(t)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP}(t) &= x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3 \\ \Rightarrow \vec{V}(P/R) &= \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_{R(t)} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3 = \dot{x}\vec{e}_1 + \dot{y}\vec{e}_2 + \dot{z}\vec{e}_3 \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$(\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt})$$

$$\|\vec{V}(P/R(t))\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad \text{la norme de } \vec{V}(P/R(t))$$

II .3.2 Composantes cylindriques de $\vec{V}(P/R(t))$

D'après le paragraphe II.1, on obtient les composantes cylindriques de $\overrightarrow{OP}(t)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_3 \\ \Rightarrow \vec{V}(P/R(t)) &= \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_{R(t)} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Or :

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\varphi = \cos \varphi \vec{e}_2 - \sin \varphi \vec{e}_1$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{V}(P/R(t)) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_{R(t)} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_3 \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \|\vec{V}(P/R(t))\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$$

II.3.3 Composantes sphériques de $\vec{V}(P/R(t))$

D'après les résultats du paragraphe II.1, les composantes sphériques de $\vec{OP}(t)$ sont :

$$\vec{OP} = r\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{V}(P/R(t)) = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_{R(t)} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \vec{e}_\rho$$

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\varphi = \cos \varphi \vec{e}_2 - \sin \varphi \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_3 + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\rho + \sin \theta \frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{V}(P/R(t)) = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_{R(t)} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad (3.4)$$

$$\|\vec{V}(P/R(t))\| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 + (r \dot{\varphi} \sin \theta)^2}$$

II.4 ACCÉLÉRATION D'UN POINT MATÉRIEL

On considère le point matériel P de vecteur position $\vec{OP}(t)$ dans le référentiel $R(t) = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ($(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base orthonormée).

Le vecteur accélération du point matériel P par rapport à $R(t)$, est le vecteur noté $\vec{\gamma}(P/R(t))$ défini par :

$$\vec{\gamma}(P/R(t)) = \left(\frac{d\vec{V}(P/R(t))}{dt} \right)_{R(t)} = \left(\frac{d^2 \vec{OP}(t)}{dt^2} \right)_{R(t)} \quad (3.5)$$

II.4.1 Composantes cartésiennes de $\vec{\gamma}(P/R(t))$

On désigne par (x, y, z) les composantes de $\vec{OP}(t)$ dans $R(t)$:

$$\vec{OP}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) &= \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OP}(t)}{dt^2} \right)_{R(t)} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \vec{e}_1 + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \vec{e}_2 + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \vec{e}_3 \\ &= \ddot{x} \vec{e}_1 + \ddot{y} \vec{e}_2 + \ddot{z} \vec{e}_3\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$(\ddot{x} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2})$$

$$\|\vec{\gamma}(P/R(t))\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \text{ la norme de } \vec{\gamma}(P/R(t))$$

II .4.2 Composantes cylindriques de $\vec{\gamma}(P/R(t))$

D'après le paragraphe II.3.2, les composantes cylindriques de $\vec{V}(P/R(t))$ sont :

$$\begin{aligned}\vec{V}(P/R(t)) &= \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_{R(t)} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_3 \\ \Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) &= \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OP}(t)}{dt^2} \right)_{R(t)} = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + (\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \ddot{z} \vec{e}_3\end{aligned}$$

Or :

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\varphi = \cos \varphi \vec{e}_2 - \sin \varphi \vec{e}_1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) &= \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OP}(t)}{dt^2} \right)_{R(t)} = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + (\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \ddot{z} \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} &= \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} &= -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OP}(t)}{dt^2} \right)_{R(t)} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_3$$

$$\|\vec{\gamma}(P/R(t))\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2)^2 + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2} \text{ la norme de } \vec{\gamma}(P/R(t))$$

II.4.3 Composantes sphériques de $\vec{\gamma}(P/R(t))$

D'après les résultats du paragraphe II.3.3, les composantes sphériques de $\vec{V}(P/R(t))$ sont :

$$\vec{V}(P/R(t)) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_{R(t)} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) &= \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OP}(t)}{dt^2} \right)_{R(t)} \\
&= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\
&\quad + (\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta + r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_\varphi + r\dot{\phi} \sin \theta \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_3 + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\rho + \sin \theta \frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi} \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\phi} \vec{e}_\rho$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_\rho + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\rho - \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_3$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\varphi) + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \\
&\quad + r\dot{\theta}(-\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_\rho + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\rho - \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_3) \\
&\quad + (\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta + r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_\varphi - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \vec{e}_\rho
\end{aligned}$$

II.5 COMPOSANTES INTRINSÈQUES

II.5.1 Abscisse curviligne d'un point matériel M

On considère que la trajectoire du point M est portée par une courbe $(\mathcal{C}) = (M_0, M_1)$ orientée de M_0 vers M_1 . On définit une abscisse curviligne de M notée $s(t)$ sur $(\mathcal{C})$ à l'instant t , fonction croissante telle que : $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\begin{cases} s_0 = s(t_0) = \text{abscisse curviligne de } M \text{ à } t_0, M \text{ position de } M \text{ à } t_0 \\ s_1 = s(t_1) = \text{abscisse curviligne de } M \text{ à } t_1, M \text{ position de } M \text{ à } t_1 \end{cases}$$

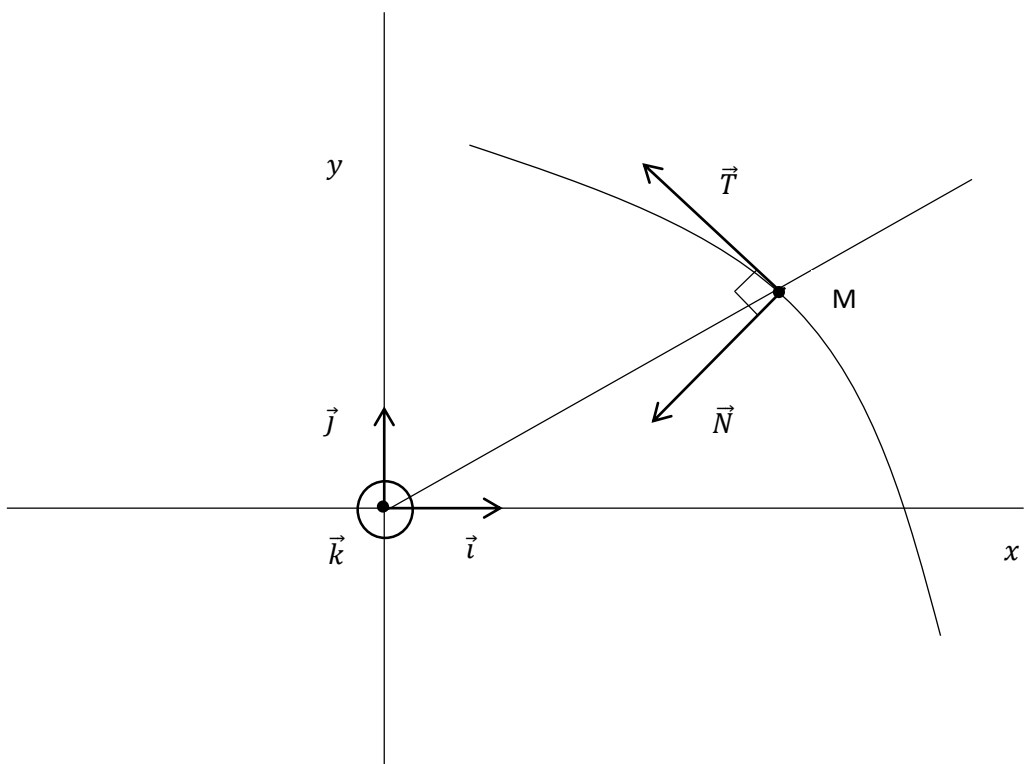
$$\vec{V}(M) = v\vec{T} \text{ où } v = \|\vec{V}(M)\|$$

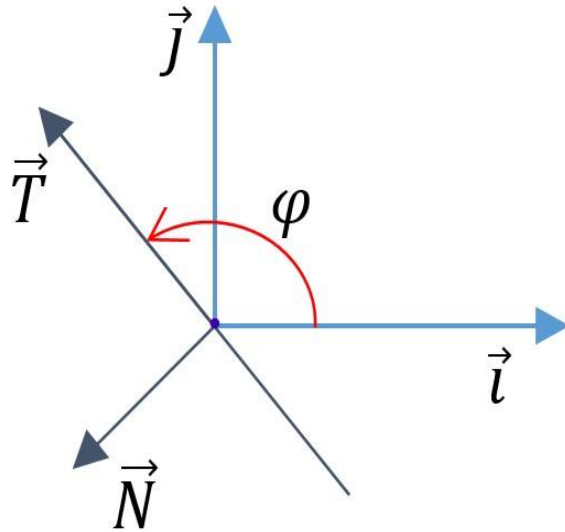
$$\Rightarrow \boxed{\vec{T} = \frac{\vec{V}(M)}{v}}$$

$$\vec{V}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{ds} \frac{ds}{dt} \Rightarrow \|\vec{V}(M)\| = \left\| \frac{d\vec{OM}}{ds} \right\| \times \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

$$\|d\vec{OM}\| = ds$$

$$\Rightarrow v = \frac{ds}{dt} \text{ et } \vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$$





On définit l'angle $\varphi = (\vec{i}, \vec{T}) : \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \vec{T} = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \Rightarrow \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = ds \cos\varphi \\ dy = ds \sin\varphi \end{cases}$$

$$\vec{T}^2 = 1 \Rightarrow 2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \Leftrightarrow \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \Leftrightarrow \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{d\varphi} = 0 \text{ or } \vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{d\varphi} = \frac{\vec{N}}{R},$$

où $R = \frac{ds}{d\varphi}$: par définition R est le rayon de courbure et $\frac{1}{R}$ est la courbure.

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \text{ et } \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{1}{\tau} \vec{N}$$

τ est le rayon de torsion

et $\frac{1}{\tau}$ est la torsion

composantes intrinsèques de l'accélération $\vec{\gamma}$ du point M

vitesse de M : $\vec{V}(M) = v \vec{T}$,

$$\vec{\gamma} \text{ accélération de } M : \vec{\gamma} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt} , \quad \frac{\vec{N}}{R} = \frac{d\vec{T}}{ds} \quad \text{et} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v^2 \frac{\vec{N}}{R}}$$

On définit les composantes intrinsèques de $\vec{\gamma}$:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} : \text{accélération tangentielle} \\ \frac{v^2}{R} : \text{accélération normale} \end{cases}$$

Hodographe d'un mouvement

L'hodographe d'un mouvement (noté (H)) est l'ensemble des point P tels que :

à tout instant, $\overrightarrow{OP} = \vec{V}(M/R)$; où O désigne le pôle de (H) et $\vec{V}(M/R)$ est le champ de vitesse.

II.6 MOUVEMENT A ACCÉLÉRATION CENTRALE

Par définition, un mouvement à accélération centrale est un mouvement dont l'accélération du point matériel M, $\vec{\gamma}(M/R)$, est parallèle au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à tout instant t :

$$\vec{\gamma}(M/R) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0}$$

Par ailleurs :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R) = \frac{d[\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)]}{dt} = \vec{0}$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R) = \vec{C}.$$

$\vec{C}$ est un vecteur constant en module, en sens et en direction. $\vec{C}$ est alors perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(M/R)$. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ appartiennent donc au même plan quel que soit l'instant t considéré.

Par conséquent, tout mouvement à accélération centrale est un mouvement plan. Pour étudier le mouvement du point M, il est alors préférable d'utiliser ses coordonnées polaires.

On rappelle :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

Puisque l'accélération du point M est centrale (parallèle au vecteur position), elle doit s'écrire dans ce cas :

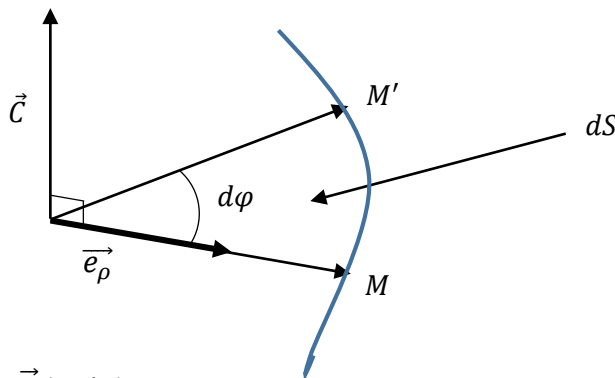
$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho$ et donc sa composante orthogonale est nulle :

$\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} = 0$ qui peut s'écrire $\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2 \dot{\varphi})}{dt} = 0$ d'où $\rho^2 \dot{\varphi} = Cte.$

Finalement $\rho^2 \dot{\varphi} = C = |\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)|$, appelée constante des aires.

II.6.1 Loi des aires:

Calculons l'aire balayée, par unité de temps, par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$



$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)$$

$$dS = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'}\|, M' \text{ est très voisin de } M.$$

$$\text{Donc } dS = \frac{1}{2} \|\rho \vec{e}_\rho \wedge (d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi)\| = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi, \text{ et}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} \text{ d'où } dS = \frac{C}{2} dt \text{ et } \int_0^S ds = \frac{C}{2} \int_0^t dt.$$

$$\text{Donc } S = \frac{C}{2} t \text{ où } \frac{C}{2} \text{ est la vitesse aréolaire.}$$

Ce résultat est appelé 2^{ème} loi de Kepler.

II.6.2 Formules de BINET

II.6.2.1 cas de la vitesse:

Dans le cas d'un mouvement à accélération centrale, le carré du module du vecteur vitesse est: $V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2$.

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \dots$$

$$\text{On pose } u = \frac{1}{\rho}, \text{ donc } du = -\frac{d\rho}{\rho^2} \text{ et } \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi}$$

$$\text{Ce qui donne } \frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}$$

D'autre part,

$$C = \rho^2 \dot{\varphi} \text{ peut s'écrire } \dot{\varphi} = Cu^2$$

$$\text{Et } V^2 = \left[-\left(\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \right) \right]^2 \cdot C^2 u^4 + \frac{1}{u^2} \cdot C^2 u^4,$$

La première formule de BINET s'écrit:

$$V^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right]$$

II.6.2.2 cas de l'accélération

Le mouvement du point M étant à accélération centrale, on a:

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho \text{ dont la valeur algébrique est : } \gamma = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \left(-C \frac{du}{d\varphi} \right) Cu^2 = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2}$$

$$\text{Et } \rho \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{u} C^2 u^4 = C^2 u^3.$$

La deuxième formule de BINET s'écrit alors :

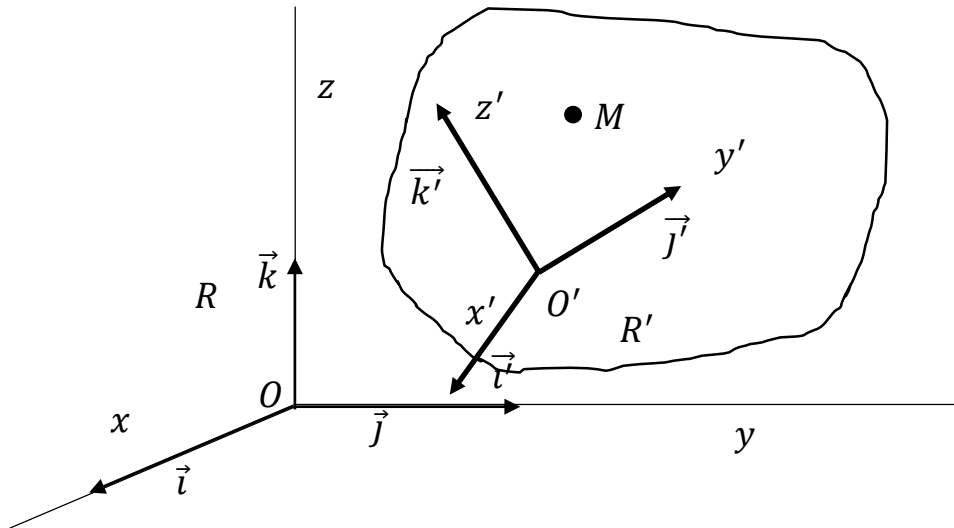
$$\gamma = -C^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right]$$

II.7 CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

Soit à étudier le mouvement d'une particule M par rapport à un repère fixe R , appelé repère absolu. Il est parfois intéressant d'introduire un second repère R' , dit repère relatif, par rapport au quel le mouvement de M soit simple à étudier.

Soient :

- $R(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère absolu (repère fixe).
- $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ un repère relatif (repère mobile par rapport à R).



Considérons particulièrement une rotation d'angle θ autour de $(O; \vec{k})$ tel que $\theta = (\vec{i}, \vec{i}') = (\vec{j}, \vec{j}')$ de vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$:

$$\vec{i}' = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}; \quad \vec{j}' = \cos \theta \vec{j} - \sin \theta \vec{i}$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \dot{\theta} \vec{j}' = \vec{\omega} \wedge \vec{i}'; \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = -\dot{\theta} \vec{i}' = \vec{\omega} \wedge \vec{j}'$$

R' peut être animé d'un mouvement de translation et/ou de rotation par rapport à R .
On désigne par $\vec{\omega}(R'/R)$ le vecteur vitesse de rotation de R' par rapport à R tel que :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \right)_R = \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{i}' \\ \left(\frac{d\vec{j}'}{dt} \right)_R = \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{j}' \\ \left(\frac{d\vec{k}'}{dt} \right)_R = \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{k}' \end{cases}$$

Dans R' :

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \right)_{R'} = \left(\frac{d\vec{j}'}{dt} \right)_{R'} = \left(\frac{d\vec{k}'}{dt} \right)_{R'} = \vec{0}$$

II.7.1 Dérivation en repère mobile.

Soit $\vec{U}$ un vecteur quelconque. Dans le repère R , ce vecteur s'écrit

$$\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Dans le repère R' le vecteur $\vec{U}$ s'écrit :

$$\vec{U} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \dot{x}'\vec{i}' + x' \left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_R + \dot{y}'\vec{j}' + y' \left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_R + \dot{z}'\vec{k}' + z' \left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_R$$

or :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_R = \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{i}' \\ \left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_R = \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{j}' \\ \left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_R = \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{k}' \end{cases}$$

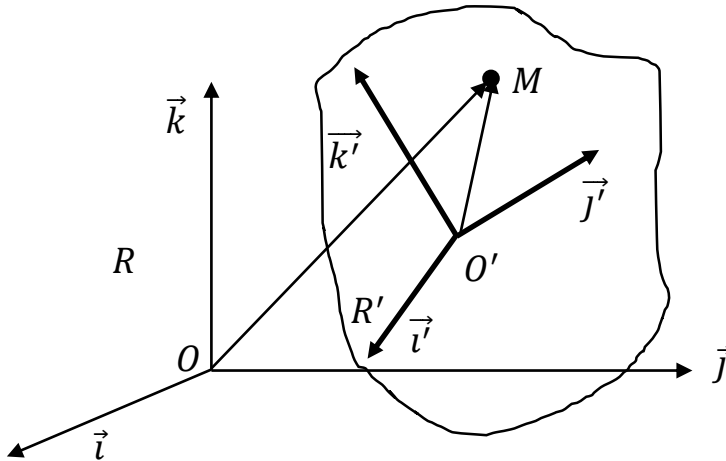
$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \dot{x}'\vec{i}' + x' \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + y' \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' + z' \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{k}'$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' + \vec{\omega}(R'/R) \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{U}$$

II.7.2 Composition des vitesses

On considère un point matériel M en mouvement dans les repères $R(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $R'(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ définis précédemment.



Les vecteurs position de la particule M dans les repères R et R' sont, respectivement :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} \text{ et } \overrightarrow{O'M} = \vec{r}'$$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Donc la vitesse absolue du point M est,

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_R + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_R + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}$$

or :

$$\left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}$$

et

$$\vec{V}(M/R') = \vec{V}_r(M) = \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R'} \text{ désigne la vitesse relative du point M ;}$$

$$\vec{V}(O'/R) = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_R ;$$

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O'/R) + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}$$

On réécrit $\vec{V}_a(M)$:

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

C'est la formule de composition des vitesses où $\vec{V}_e(M)$ est la vitesse d'entraînement de M. La vitesse d'entraînement de M est la vitesse absolue du point qui coïncide avec M à l'instant t et supposé fixe dans le repère R' .

II.7.3 Composition des accélérations

On considère un point matériel M en mouvement dans les repères $R(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ définis précédemment. L'accélération absolue du point M est :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_R = \left(\frac{d\vec{V}_a}{dt} \right)_R$$

$$\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/R') = \left(\frac{d(\vec{V}(M/R'))}{dt} \right)_{R'} : \text{accélération relative de M}$$

On rappelle que

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R') + \vec{V}(O'/R) + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}$$

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M/R)$$

$$= \left(\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt} \right)_R + \left(\frac{d\vec{V}(O'/R)}{dt} \right)_R + \left(\frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt} \right)_R \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_R$$

or :

$$\left(\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{V}(M/R') = \vec{\gamma}(M/R') + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{V}(M/R')$$

$$\left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M} = \vec{V}(M/R') + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}$$

$$\vec{\gamma}(O'/R) = \left(\frac{d\vec{V}(O'/R)}{dt} \right)_R$$

Alors :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/R) &= \vec{\gamma}(M/R') + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{V}(M/R') + \vec{\gamma}(O'/R) + \left(\frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt} \right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} \\ &\quad + \vec{\omega}(R'/R) \wedge (\vec{V}(M/R') + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/R) &= \vec{\gamma}(M/R') + \vec{\gamma}(O'/R) + \vec{\omega}(R'/R) \wedge (\vec{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}) + \left(\frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt} \right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} \\ &\quad + 2\vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{V}(M/R') \end{aligned}$$

Notons $\vec{\gamma}_e(M)$ et $\vec{\gamma}_c(M)$:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(O'/R) + \left(\frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt} \right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge (\vec{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}) &= \vec{\gamma}_e(M) \\ 2\vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{V}(M/R') &= \vec{\gamma}_c(M) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

Est la loi de composition des accélérations.

$\vec{\gamma}_e(M)$ est l'accélération d'entraînement de R' par rapport à R ;

$\vec{\gamma}_c(M)$ est l'accélération de Coriolis.

L'accélération absolue est égale à la somme des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis.

Cas particulier

Quand le repère R' est en translation par rapport à R ,

$$\vec{\omega}(R'/R) = \vec{0}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_a(O') \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_a(O') \end{cases}$$